エレクトロニクス基礎

2024/12/4 版

アナログ回路基礎

1 目的

この実験の目的は、電気回路の時間応答・周波数 応答の測定方法を学び、電気回路の特性を理解する ことである.

2 電気電子回路の表現

電気電子回路の入力と出力の関係は微分方程式などの数式を用いて表現することができる。その表現方法には、大きく分けて二つの方法がある。一つは、時間領域の表現形式で、もう一つは周波数領域の表現形式である。ここでは、時間領域の表現形式として微分方程式を、周波数領域での表現方法として伝達関数をそれぞれ用いる。

2.1 微分方程式による表現

外部から回路に加えられる信号である入力信号 u(t) は、内部で変換されて出力信号 y(t) として観測される。入力と出力の関係は次の微分方程式によって表現され、これによって回路を表現することができる。

$$a_{0} \frac{d^{m} y(t)}{dt^{m}} + a_{1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_{m} y(t)$$

$$= b_{0} \frac{d^{\ell} u(t)}{dt^{\ell}} + b_{1} \frac{d^{\ell-1} u(t)}{dt^{\ell-1}} + \dots + b_{\ell} u(t)$$
(1)

u(t) と y(t) とは時刻 t の関数である. 回路の動作を直感的に理解しやすいが、次節で述べる周波数領域の表現と比較してより複雑な表現形式である.

2.2 伝達関数による表現

微分方程式 (1) による表現に代わるものに伝達関数による表現がある.微分方程式 (1) において,初期値 $y(0), y^{(1)}(0), \ldots, y^{(m)}(0)$ をすべて 0 とする.ただし, $y^{(i)}(0)$ は y(t) の i 階導関数の初期値,すなわち, $y^{(i)}(0) = \frac{d^i}{dt^i}y(t)\Big|_{t=0}$ である.このときの

入力 u(t) と出力 y(t) のラプラス変換 U(s) と Y(s) を求めてそれらの比をとる.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^{\ell} + b_1 s^{\ell-1} + \dots + b_{\ell}}{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m}$$
 (2)

この G(s) を伝達関数という.定義から分かるように,伝達関数 G(s) は入力 u(t)(U(s)) には依存せず,回路の特性を表す微分方程式 (1) の係数 a_i, b_i によって定まる.この伝達関数 G(s) を用いると,入力 u(t) に対する回路の出力 y(t) のラプラス変換 Y(s) は

$$Y(s) = G(s)U(s) \tag{3}$$

と求められる. このように、回路の入出力関係を伝達関数 G(s) を用いて表現すると、回路の出力 Y(s) は伝達関数 G(s) と入力 U(s) の積で表現され、比較的簡単に入力と出力の関係を表現することができる.

2.3 基本要素の表現

ここでは、回路を扱う際に現れる基本的な要素の 微分方程式と伝達関数を示す.ここでいう基本的な 要素とは、比例要素、積分要素、微分要素、一次遅 れ要素、二次遅れ要素である.

出力 y(t) が入力 u(t) に比例する要素を比例要素 という. その出力 y(t) と入力 u(t) の関係は

$$y(t) = Ku(t) \tag{4}$$

となる.ここで,K はゲイン定数と呼ばれる定数である.伝達関数 G(s) は,次式で与えられる.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K \tag{5}$$

電気回路の抵抗は比例要素である.

入力 u(t) を積分したものが出力 y(t) となる要素を積分要素といい、その出力 y(t) と入力 u(t) の関

係は

$$y(t) = \int u(t)dt \tag{6}$$

で与えられる. また, 伝達関数 G(s) は

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \tag{7}$$

で与えられる. 積算電力計は積分要素の一つである. 入力 u(t) の微分が出力される要素を微分要素という. その出力 y(t) と入力 u(t) の関係は

$$y(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{8}$$

である. この要素の伝達関数 G(s) は,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = s \tag{9}$$

で与えられる. 微分要素の具体例には,回転角速度を計測するタコジェネレータがある.

上述の積分・微分要素は、RC 回路やオペアンプ によって (近似的に) 構成することができる.

入力 u(t) と出力 y(t) の関係が次式の微分方程式で与えられる要素を一次遅れ要素という.

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bu(t), \quad a = b \tag{10}$$

この要素の伝達関数 G(s) は次式で与えられる.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+Ts}, \quad \left(T = \frac{1}{a}\right)$$
 (11)

ここで,T は時定数と呼ばれる定数である.電気回路で抵抗 (R) とインダクタ (L) を直列につないだLR 直列回路,あるいは,図 1 のような抵抗 (R) とキャパシタ (C) を直列につないだRC 直列回路は一次遅れ要素である.図 1 のRC 回路の電圧 $e_o(t)$ と電圧 $e_i(t)$ に関する微分方程式は

$$RC\frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = e_i(t)$$
 (12)

で与えられ, $e_i(t)$ を入力, $e_o(t)$ を出力とすると, その伝達関数 G(s) は

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{1 + RCs}$$
 (13)

となる.

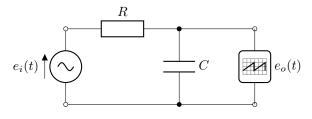


図 1 RC 直列回路

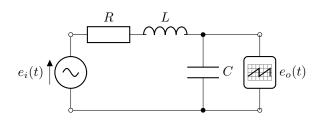


図 2 LCR 直列回路

入力 u(t) と出力 y(t) の間に次の微分方程式で表される関係があるとき、

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t), \ a_0 = b_0 \ (14)$$

その要素を二次遅れ要素という.この要素の伝達関数 G(s) は

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$
 (15)

となる. ここで, $a_1 = 2\zeta\omega_n$, $a_0 = \omega_n^2$ とおくと,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$
 (16)

となる.ここで, ζ は減衰係数, ω_n は固有角周波数 と呼ばれる.電気回路で抵抗 (R),インダクタ (L),および,キャパシタ (C) を直列につないだ図 2 のような LCR 直列回路は二次遅れ要素である.図 2 の LCR 回路の電圧 $e_i(t)$ と電圧 $e_o(t)$ に関する微分方程式は

$$LC\frac{d^2e_0(t)}{dt^2} + RC\frac{de_o(t)}{dt} + e_o(t) = e_i(t)$$
 (17)

で与えられ, $e_i(t)$ を入力, $e_o(t)$ を出力とすると, その伝達関数 G(s) は

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_o(s)} = \frac{1}{1 + RCs + LCs^2}$$
 (18)

となる.

3 回路の応答

3.1 時間領域における応答

伝達関数が G(s) である回路に入力 u(t) を入力したときの出力 y(t) は,g(t) を伝達関数 G(s) の逆ラプラス変換

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[G(s) \right] \tag{19}$$

とすると、入力 u(t) と g(t) の畳み込み積分

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(t)d\tau \tag{20}$$

となる.このように,伝達関数は複素数sの関数であるため,その回路の時間応答(過渡特性)が伝達関数G(s)からただちに分かるわけではない.また,入力が異なればシステムの出力も異なってくる.回路の過渡特性を代表するものとしては,特定の形の入力を入力したときのインパルス応答とインディシャル応答がよく用いられる.

インパルス応答は,ラプラス変換が 1 となるデルタ関数(単位インパルス関数) $\delta(t)$ を入力として加えたときの出力のことである.ここで,デルタ関数 $\delta(t)$ は次式で定義される.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t - t_0)dt = g(t_0)$$
(21)

伝達関数が G(s) である回路のインパルス応答は

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)\delta(t)d\tau = g(t) \qquad (22)$$

となり、伝達関数 G(s) の逆ラプラス変換そのものに等しい.以下では、伝達関数が G(s) である回路のインパルス応答を g(t) で表わす.

単位ステップ関数 $u_s(t)$

$$u_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0\\ 1 & \text{if } t \ge 0 \end{cases} \tag{23}$$

を入力としたときの出力をインディシャル応答(ステップ応答)という.単位ステップ関数 $u_s(t)$ のラプラス変換は 1/s であり,伝達関数が G(s) である回路のインディシャル応答は

$$A(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[G(s) \frac{1}{s} \right] = \int_0^t g(\tau) d\tau \qquad (24)$$

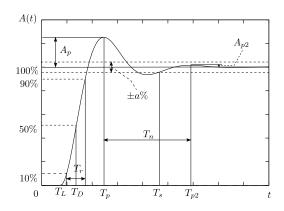


図3 インディシャル応答

で与えられる. これより, インパルス応答 g(t) とインディシャル応答 A(t) の間の関係式として次の式が得られる.

$$g(t) = \frac{dA(t)}{dt} \tag{25}$$

この関係を用いると、回路の過渡特性はインディシャル応答を調べることで理解することができる. 一方、インパルスは実用上は矩形を用いその幅を十分小さくして代用するが、その出力は微弱となる傾向があるため測定が難しい.そのため、回路の過渡特性を調べるとき、そのインディシャル応答がよく利用される.

回路のインディシャル応答は一般に複雑な形状を しているが、その特徴を表す量として以下のような ものがある.

立ち上がり時間 T_r 応答が最終値の 10% から 90% に達するまでの時間

整定時間 T_s 最終値の上下にそれぞれ a% の幅を考え、応答がこの幅の中にとどまるようになった時刻

最大行き過ぎ量 A_p 応答が振動的であるとき,最初の最大値と最終値の差

行き過ぎ時間 T_p 最大行き過ぎ量を生じる時間 減衰比 Γ 第二番目の行き過ぎ量 A_{p2} と最初の行き過ぎ量 A_p との比 A_{p2}/A_p

むだ時間 T_L 入力に対して応答が始まるまでの遅れ

遅延時間 T_D インディシャル応答が最終値の 1/2

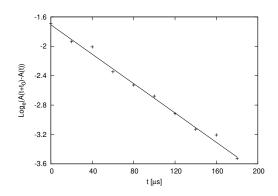


図 4 RC 回路の時定数推定

に達する時間

立ち上がり時間 T_r と整定時間 T_s は回路の応答の速さ,行き過ぎ量 A_p は振動成分の大きさ,減衰比 Γ は振動成分の減衰の速さをそれぞれ表す量である.

次に,2.3 節で示した基本要素である一次遅れ要素と二次遅れ要素の時間応答について述べる.回路全体の伝達関数 G(s) が一次遅れ要素 (11) で与えられるとき,この回路のインディシャル応答 A(t) は,

$$A(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \tag{26}$$

で与えられる.ここで,時定数 T は応答の速さ(速応性)を示す定数で,これが小さいほど速やかに最終値に近づく.インディシャル応答 A(t) から次のようにして時定数 T を求めることができる.時刻が t_0 だけ隔たった二点のインディシャル応答 A(t) の値 $A(t+t_0)$ と A(t) の差の対数をとると

$$\log_{e}(A(t+t_{0}) - A(t))$$

$$= \log_{e}\left(1 - e^{-\frac{t_{0}}{T}}\right) - \frac{t}{T}$$
(27)

である. よって、横軸に t、縦軸に $\log_e(A(t+t_0)-A(t))$ をとったグラフの傾き $-\frac{1}{T}$ から求めることができる. (図 4 を参照)

回路全体の伝達関数 G(s) が二次遅れ要素 (16) で与えられるする。その伝達関数の極、すなわちその分母多項式を 0 とする根 α_1,α_2 は

$$\alpha_1, \alpha_2 = \omega_n(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \tag{28}$$

となる.二次遅れ要素のインディシャル応答 A(t)は ζ によってその性質が変わる.

 $\zeta > 1$ のとき、 α_1 、 α_2 はいずれも負の実数で、伝達関数 G(s) は、

$$G(s) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)} = \frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$
(29)

となる. ここで,

$$T_1 = -\frac{1}{\alpha_1}, \quad T_2 = -\frac{1}{\alpha_2}$$
 (30)

である. よって、そのインディシャル応答 A(t) は

$$A(t) = K(1 + c_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + c_2 e^{-\frac{t}{T_2}})$$
 (31)

となる. ただし,

$$c_1 = \frac{T_1}{T_2 - T_1}, \quad c_2 = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$
 (32)

である. これより、インディシャル応答 A(t) は非振動的であることが分かる.

 $\zeta=1$ のとき、 $\alpha_1=\alpha_2=-\omega_n$ となり、伝達関数 G(s) は

$$G(s) = \left(\frac{1}{1+sT}\right)^2 \tag{33}$$

となる. ただし, $T=1/\omega_n$ である. このときのインディシャル応答 A(t) は

$$A(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{T}\right)e^{-\frac{t}{T}}$$
 (34)

であり、この場合も非振動的である.

 $0<\zeta<1$ のとき、 α_1,α_2 は共役複素数で、このときのインディシャル応答 A(t) は

A(t)

$$=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\varphi)\qquad(35)$$

となる. ただし,

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \tag{36}$$

である. このときのインディシャル応答 A(t) は振動的となることが分かる. この応答の最大行き過ぎ

量 A_p , 行き過ぎ時間 T_p , 減衰比 Γ は, それぞれ

$$A_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{37}$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{38}$$

$$\Gamma = e^{-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{39}$$

で与えられる.

以上のように、 $\zeta \geq 1$ のとき二次遅れ要素の伝達 要素は一次遅れ要素の積で表現することができる が、 $0 < \zeta < 1$ のときは一次遅れ要素で表現するこ とができず、インディシャル応答 A(t) は振動的に なる. また, $\zeta = 0$ のときは振動がいつまでも続く 応答になり、 $\zeta < 0$ のときは応答の振動成分が時間 とともに増大し発散する応答となる.

3.2 周波数応答

伝達関数は数学的な取り扱いが簡便であるが、そ の物理的な意味がつけにくい. しかし, 伝達関数 G(s) に $s = j\omega$ を代入したものは、回路の周波数特 性と一致し, 回路の特性の理解に役立つ.

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$$
(40)

この $G(j\omega)$ を周波数伝達関数と呼ぶ. ここで, $|G(j\omega)|$, $\angle G(j\omega)$ はそれぞれ、ゲイン特性、位相 (差) 特性である. 周波数伝達関数は, 正弦波を入 力したときの入出力の比にあたるものである.

一般に、周波数伝達関数 $G(j\omega)$ は複素数で、

$$G(j\omega) = G_R(\omega) + jG_I(\omega) \tag{41}$$

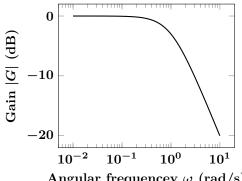
$$|G(j\omega)| = \sqrt{G_R^2(\omega) + G_I^2(\omega)}$$
 (42)

$$\angle G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{G_I(\omega)}{G_R(\omega)} \tag{43}$$

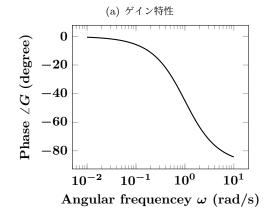
となる. この周波数伝達関数 $G(i\omega)$ を用いると、任 意の入力 u(t) が加わったときの回路の出力を y(t)としたとき、つぎの関係が成り立つ.

$$Y(\omega) = G(j\omega)U(\omega) \tag{44}$$

ただし, $U(\omega)$ と $Y(\omega)$ はそれぞれ u(t) と y(t) の周 波数スペクトル (フーリエ変換) である. 角周波数 ω $\epsilon - \infty$ から ∞ まで変化させたときの $G(i\omega)$ の変



Angular frequencey ω (rad/s)



(b) 位相特性

図5 ボード線図

化は周波数応答と呼ばれる. その表現方法には、べ クトル軌跡, ボード線図やゲイン位相線図などが用 いられる. ここでは、ボード線図について述べる.

周波数応答はゲイン特性 $|G(j\omega)|$ と位相特性 $\angle G(j\omega)$ の二つに分けて考えることができる. 横 軸を角周波数の対数目盛にし,ゲインのデシベル値

$$G_{\rm dB}(\omega) = 20\log_{10}|G(j\omega)| \tag{45}$$

を縦軸にとって表した曲線をゲイン曲線、横軸に角 周波数、縦軸に位相をとって表した曲線を位相曲線 という. そして、これらの二つの図をあわせたもの をボード線図と呼ぶ. 位相の単位は度である. 図5 にボード線図の例を示す.

積分要素のゲイン特性と位相特性は、それぞれ

$$G_{\rm dB}(\omega) = -20\log_{10}\omega\tag{46}$$

$$\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} \tag{47}$$

である. ゲイン曲線は $\omega=1$ で 0dB であって, ω が 10 倍になるごとに 20dB ずつ減少する直線である. 位相は角周波数 ω に関係なく -90° で一定である.

一次遅れ要素のゲイン特性と位相特性は, それ ぞれ

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|$$

$$= -10 \log_{10} (1 + \omega^2 T^2) \qquad (48)$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \omega T \qquad (49)$$

となる.この値は $\omega^2 T^2 \ll 0$ であるとき 0dB の直線に近づき, $\omega^2 T^2 \gg 0$ のとき近似的に

$$G_{\rm dB}(\omega) \approx -20\log_{10}\omega - 20\log_{10}T \tag{50}$$

となる. $-20\log_{10}\omega T$ が $0\mathrm{dB}$ と交わる点を折れ点 という. また、その点の周波数を折れ点周波数とい い、その角周波数を ω_b (rad/s) とすると、

$$\omega_b = \frac{1}{T} \tag{51}$$

で与えられる. ゲイン曲線は,この折れ点周波数 ω_b から直線的に減少する. 位相曲線 φ は常に負であり, $\omega T \ll 1$ のとき 0, $\omega T \gg 1$ のとき -90° に近づく. 折れ点周波数 ω_b では -45° である.

二次遅れ要素のゲイン特性と位相特性は, それ ぞれ

$$G_{\text{dB}}(\omega) = -10\log_{10} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}^2 + \left\{ 2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right\}^2 \right]$$
 (52)

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$
 (53)

である. ゲイン曲線は $(\omega/\omega_n)^2 \ll 1$ のとき

$$G_{\rm dB}(\omega) = 0 \tag{54}$$

の直線に漸近し、 $(\omega/\omega_n)^2 \gg 1$ のとき

$$G_{\rm dB}(\omega) = -40\log_{10}\omega + 40\log_{10}\omega_n$$
 (55)

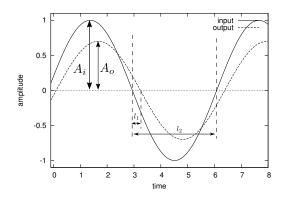


図 6 周波数特性の測定

に漸近する.これら二つの直線が交わる周波数が折れ点周波数で,その値は $\omega=\omega_n$ (rad/s) である. 折れ点周波数 ω_n におけるゲインは

$$G_{\rm dB}(\omega) = -20\log_{10}2\zeta \tag{56}$$

で与えられる. $\zeta < 1/\sqrt{2}$ のとき、ゲインの最大値 は 0dB より大きくなり、その最大値 M_p とそのときの角周波数 ω_p (rad/s) は、

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\tag{57}$$

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \tag{58}$$

で与えられる。 M_p を共振値、 ω_p を共振周波数と呼ぶ。位相は常に負であり、 $(\omega/\omega_n)\ll 1$ のとき $\varphi\approx 0$ で、 $(\omega/\omega_n)\gg 1$ のとき $\varphi\approx -180^\circ$ である。また、折れ点 $\omega=\omega_n$ では $\varphi=-90^\circ$ である.

周波数応答を測定するには、次のようにする。ある周波数 ω (rad/s) の正弦波を入力したとき、図 6 のような入出力が測定されたとする。このとき、ゲインが入出力の比であることから、その値は入力波形の振幅 A_i と出力波形の振幅 A_o を測定して

$$|G(j\omega)| = \frac{A_o}{A_i} \tag{59}$$

で求められる. また, 位相 (差) は信号がある基準状態になる時刻の差で求めることができることから, その値は l_1 と l_2 を測定し,

$$\angle G(j\omega) = 180 \frac{l_1}{l_2} \quad [\circ] \tag{60}$$

として求められる。ただし、図 6 は位相遅れの例である。位相遅れのときは出力の波形が入力波形に遅れて0となり、このときの l_1 の符号を負とする。入力する正弦波の周波数を変更しながらこれらを測定すると、その回路の周波数応答が得られる。

4 実験

電気・電子回路を対象として線形回路の時間応答の解析と周波数解析を行う.一次遅れ要素については理論値を計算し、二次遅れ要素については周波数応答と時間応答を測定し、それらのインディシャル応答のグラフやボード線図から回路の特性を理解する.

4.1 実験内容

抵抗 (R) とキャパシタ (C) とインダクタ (L) とオペアンプを用いて回路を作成し、その時間応答 (インディシャル応答) と周波数応答を測定する.時間応答の測定では、信号発生器から矩形波を入力して測定する.周波数応答の測定では、信号発生器から正弦波を入力し、周波数を変更しながらゲイン、および、入力と出力の間の位相差を測定する.なお、回路の作成・測定と理論値の計算のときには、以下の点について注意すること.

- 角周波数 ω (rad/s) と周波数 f (Hz) の関係は $\omega = 2\pi f$ である.
- 矩形波の周波数 f は十分に低く設定し、出力の 定常状態が測定できるようにすること.
- 入力波形が歪んで矩形波や正弦波になっていないときは、入力の振幅を適当に小さくすること.
- インディシャル応答は,入力の矩形波の高さを 1としたときの出力の変化である.入力の矩形 は,高さを1とすること.測定時の矩形波の高 さが V_i だったならば,(26) 式で得られる理論 値の1は, V_i (V) に相当する.
- 二次遅れ要素の周波数応答は固有周波数 ω_n (rad/s) の付近の変化がよく分かるように、その前後で十分な数の周波数の値で測定すること.
- 位相が進みか遅れかで符号が異なるので、どち

- らであるか間違えないように注意すること.
- インディシャル応答を測定するときは、信号 発生器や伝達要素の出力を電圧フォロワに入 力し、その出力を回路や伝達要素に入力する こと.
- 理論値を計算するときは、AンダクタLの抵抗値rを考慮すること.

表 1 インダクタの抵抗値

L[mH]	10 (銅)	10 (黒)	20	30	47
$r[\Omega]$	20	39	35	55	162

• AnalogDiscovery のジャンパピンは、時間応答 を測定するときには DC 側に、周波数応答を測 定するときには AC 側にセットすること.

実験項目は,以下である.

- 実験項目 1. 理論値を計算する RC 回路の抵抗とキャパシタのパラメータ, および LCR 回路の抵抗とキャパシタとインダクタのパラメータをそれぞれ決定する. ただし, LCR 回路は減衰係数 ζ が $\sqrt{2}/6 < \zeta < \sqrt{2}/3$ を満たすようにする.
- 実験項目 2. 実験項目 1. で決定した RC 回路と LCR 回路について, それぞれインディ シャル応答と周波数応答の理論値のグ ラフを作成する.
- 実験項目 3. 実験項目 1. で決定した LCR 回路で 二次遅れ要素を作成し、インディシャ ル応答を測定してそのグラフを作成 する.
- 実験項目 4. LCR 回路の周波数応答を測定してそのボード線図を作成する.

4.2 理論値のグラフの作成

- 1. RC 回路の伝達関数は (13) 式で,一次遅れ要素の伝達関数の一般形は (11) 式でそれぞれ与えられる.係数比較により RC 回路の時定数 T を C , R で表現せよ.
- 2. 選択した抵抗値とキャパシタ値の RC 回路につ

- いて、(51) 式により折れ点周波数 ω_b の理論値を求めよ.
- 3. 選択した抵抗値とキャパシタ値の RC 回路 (一 次遅れ要素) について, インディシャル応答の 理論値を (26) 式で求め, そのグラフを描け.
- 4. 選択した抵抗値とキャパシタ値の RC 回路について、ゲイン特性の理論グラフと位相特性の理論グラフを描け.
- 5. 図 2 の LCR 回路の伝達関数は (18) 式で,二次 遅れ要素の伝達関数の一般形は (16) 式でそれ ぞれ与えられる.係数比較により LCR 回路の 折れ点角周波数 ω_n を L, C, R で表現せよ.
- 6. LCR 回路の減衰係数 ζ を L, C, R を用いて表 現せ L
- 7. $\sqrt{2}/6 < \zeta < \sqrt{2}/3$ となる L と R と C の関係を示し、L と R と C の値を決定せよ.
- 8. 選択したインダクタ値・抵抗値・キャパシタ値 の LCR 回路の折れ点角周波数(固有角周波数) ω_n と減衰係数 ζ の理論値を求めよ.
- 9. $\zeta < 1$ のときの二次遅れ要素のインディシャル 応答の理論値は (35) 式で求めることができる. 選択したインダクタ値・抵抗値・キャパシタ値 の LCR 回路のインディシャル応答の理論値の グラフを描け.
- 10. 共振値 M_p と共振角周波数 ω_p の理論値を (57) 式と (58) 式よりそれぞれ求めよ.
- 11. 選択したインダクタ値・抵抗値・キャパシタ値 の LCR 回路のゲイン特性の理論グラフと位相 特性の理論グラフを描け.

4.3 LCR 回路の測定手順

- 1. オペアンプを用いて電圧フォロワの回路を作成 し、電圧フォロワに入力した矩形波およ正弦波 がそのまま出力されることをオシロスコープで 確認せよ.
- 2. 選択したインダクタ値・抵抗値・キャパシタ 値の LCR を用いて,図2の LCR 回路を作成 せよ.
- 3. 電圧フォロワの出力が作成した LCR 回路の入力 $e_i(t)$ となるように接続せよ.

- 4. 信号発生器の出力を矩形波に設定し、その高さを 0.5V、オフセットを 0.5V に設定し、0V から 1.0V で振動する矩形波が出力されるようにせよ。また、その波形をオシロスコープに表示し、教員または TA に示せ。
- 5. LCR 回路の出力 $e_o(t)$ が一定値に落ち着くまで表示されるように信号発生器の矩形波の周波数を調整せよ(低くせよ).
- 6. 適当な間隔で LCR 回路の出力 $e_o(t)$ を測定し、理論値のグラフにプロットせよ.このとき、プロットした点のみでグラフの形が分かる程度の間隔で測定せよ.また、作成したグラフを教員または TA に示せ.
- 7. オペアンプを用いた電圧フォロワーを回路から 取り去り, 信号発振器の出力を直接 LCR 回路 に入力するように変更せよ.
- 8. 片対数グラフの横軸上で等間隔に近くなるよう な周波数をいくつか選択せよ.
- 9. 図 6 を参考にして, (59) 式および (60) 式を用いて選択した各周波数における LCR 回路のゲインと位相を測定せよ.このとき, 測定毎に理論値のグラフに測定値をプロットし, 理論値と比較しながら測定を進めること. 大きく異なる場合は, 理論値の計算, 測定方法などが間違っていると予想されるので間違いがないかどうか確認せよ.また, 作成したグラフを教員またはTA に示せ.
 - 共振角周波数 ω_p と折れ点角周波数 ω_n の周辺ではグラフの変化が大きい。その変化がわかるようにそれらの周波数付近で十分な数のサンプル点をとりながら周波数応答を測定せよ。

4.4 考察

以下の事項について考察せよ.

- 1. 実験項目 3. について以下のことを考察せよ.
 - (a) インディシャル応答の測定値と理論値を比較し、違いがあればその原因について考察せよ.
 - (b) インディシャル応答の測定値から立ち上

がり時間, 行き過ぎ量を求め, 理論値と比較し, 違いがあればその原因について考察せよ.

- 2. 実験項目 4. について以下のことを考察せよ.
 - (a) 周波数応答の測定値と理論値を比較し,違いがあればその原因について考察せよ.
 - (b) 周波数応答の測定値から折れ点周波数 ω_n , 共振値と共振周波数を求め, 理論値と比較し, 違いがあればその原因について考察せよ.



以下の課題について回答せよ.

- 1. (11) 式の一次遅れ要素に比較的低い周波数の 正弦波を入力したとき、入力した正弦波と比 較して出力の振幅や位相はそれぞれどのよう に変化するか、一次遅れ要素のボード線図か ら考察せよ.
- 2. (11) 式の一次遅れ要素に比較的高い周波数の 正弦波を入力したとき,入力した正弦波と比 較して出力の振幅や位相はそれぞれどのよう に変化するか,一次遅れ要素のボード線図か ら考察せよ.

5.付録

ラプラス変換

f(t) のラプラス変換は

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (\text{Re}[s] > \sigma_a) \qquad (61)$$

で定義される. ここで, s は複素変数で, $\mathrm{Re}[s]$ は s の実部, σ_a は

$$\int_{0}^{\infty} |f(t)e^{-\operatorname{Re}[s]t}|dt < \infty, \quad (\operatorname{Re}[s] > \sigma_{a}) \quad (62)$$

となるある実数である.また,f(t) のラプラス変換を

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \tag{63}$$

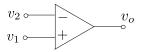


図7 オペアンプ

と表し、F(s) の逆ラプラス変換を

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \tag{64}$$

と表記する.

代表的な時間関数のラプラス変換を表2に示す.

表 2 ラプラス変換表

F(s)	f(t)	F(s)	f(t)
1	$\delta(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\frac{t^{n-1}e^{-\alpha t}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{s}$	$u_s(t)$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$	$\sin \alpha t$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$	$\cos \alpha t$
$e^{-\alpha s}$	$\delta(t-\alpha)$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha t}\sin\beta t$
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha t}\cos\beta t$

オペアンプ

オペアンプとは高利得の直流増幅器であり、図 7 のように二つの入力端子と一つの出力端子をもつ。図 8(a) の回路では、電圧 v_1 と v_o の間に次の関係が成り立つ。

$$v_o = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) v_1 \tag{65}$$

つまり、この回路を使えばゲインKが

$$K = \frac{v_o}{v_1} = 1 + \frac{R_f}{R_1} \tag{66}$$

で与えられる比例要素を実現することができる. 特に、 $R_1=\infty,\,R_f=0$ 、すなわち、図 8 のようにすると 増幅率 1 倍の非反転増幅回路(電圧フォロワ)となる.

IC の RC4558 には二個のオペアンプが実装され ス変 ている。各ピンは図 9 のように割り当てられてい る。 V_{cc+} と V_{cc-} には,ブレッドボードの電源端子 (63) の +15V と -15V 端子を接続する.

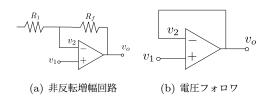


図8 オペアンプを用いた増幅回路

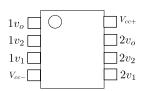


図 9 RC4558

カラーコードの見方

カラーコードは、各色が数値を表している。色と数値の対応は以下の通りである。カラーコードによる表示の仕方を図 10 に示す。

抵抗値の有効数字(2けた)と10のべき数の表示

黒 茶 橙 黄 緑 紫 灰 白 金 銀 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 -1 -2

誤差の表示

 茶
 赤
 緑
 金
 銀
 無色

 ±1
 ±2
 ±0.5
 ±5
 ±10
 ±20

記号による誤差の表示

B C D F G J K M N ± 0.1 ± 0.25 ± 0.5 ± 1 ± 2 ± 5 ± 10 ± 20 ± 30

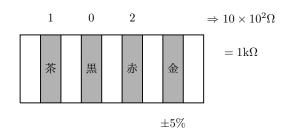


図 10 カラーコードによる表示

インダクタのインダクタンスとコンデンサの容量の見方

インダクタとセラミックコンデンサの表面にある3桁の数字の読み方は以下の通りである.

- 左から二つはそのまま
- 右端は 10 のべき数
- 単位は、インダクタの場合は $H(\sim)$ リー)、コンデンサの場合は pF(ピコファラッド)

例) インダクタの $203: 20 \times 10^{-3} = 20 \text{mH}$, コンデンサの $105: 10 \times 10^5 \text{ pF} = 1.0 \mu\text{F}$

ディジタル回路基礎

1 実験の目的

本実験では、ディジタルシステムを構成する基本素子の特性について学ぶ。コンピュータに代表されるディジタルシステムを設計するには $\{0,1\}$ 上のブール代数を用いるが、それらが現実の電子回路上のどのような事象と対応するのかを実験によって確認する。また、実際の論理演算には遅延時間が生じ、これがディジタルシステムの時間性能を決定する大きな要因の1つであることを学ぶ。さらに、ディジタルシステム内において情報を記憶するために用いられるフリップフロップの一種である \bar{SR} -フリップフロップの内部構成や基本動作について学ぶ。

2 ディジタル IC の種類

ディジタル IC は、論理機能を実現する回路構成によって種々のものが存在する。現在は、バイポーラ型トランジスタを用いて構成される TTL (Transister Transister Logic) や MOS 型電界効果トランジスタ (FET) を用いて構成される CMOSが広く使用されている。

TTL にも多くの種類が存在する. たいていの場合, TTL は TI 社の命名に従って, $74 \triangle$ (ECE という型番で表現される. ここで, \triangle の部分には TTL の種類を表す記号が当てはめられ, 標準 (なし), 低電力ショットキー (LS), アドバンスドショットキー (AS), アドバンスド低電力ショットキー (ALS) などが存在する. また, (ECE の部分は $2\sim3$ 桁の数字で表現され, 論理機能の種類を表す. 例えば, 7400 は NAND ゲートを 4 個含む標準 TTL のロジック IC であり (図 1 参照), 74LS04 は NOT ゲートを 6 個含む低電力ショットキー TTL のロジック IC である.

3 TTL 素子の特性

3.1 7400/74LS00 の使い方

7400 および 74LS00 のピン配置を図 1 に示す. ロジック IC を上から見て、切り込みを目印に、反

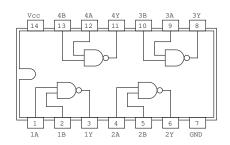


図1 7400/74LS00 のピン配置(上から見た図)

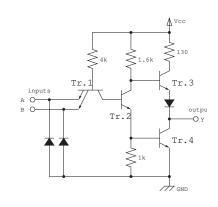


図 2 7400 における NAND ゲートの回路図

時計回りに1番ピン,2番ピン,・・・・と番号が割り振られている.14番ピンの V_{cc} には5V(正確には $4.75V\sim5.25V$)の DC 電源を供給し,7番ピンのGNDをグランド(0V)に接続することによって,ロジックIC内の4つのNANDゲートが使用可能となる.電源を供給しなければ回路は正常に動作しないので,接続を忘れないよう注意せよ.

なお,図 2 に 7400 内の 1 個の NAND ゲートの 回路図を示す.

3.2 TTL 素子の入出力特性

論理設計で使用するブール代数の0と1は,実は,論理ゲートの入力端子,出力端子にかかる電圧の値と対応している。この対応関係は実際の回路動作を考慮して決定されており、従って1対1の対応ではなく、入出力電圧に幅が設けられている。標

表 3 TTL 素子の論理レベル

	7400	74LS00
H レベル出力電圧	2.4 V 以上	2.7 V 以上
L レベル出力電圧	0.4 V 以下	0.5 V 以下
H レベル入力電圧	2.0 V 以上	2.0 V 以上
L レベル入力電圧	0.8 V 以下	0.8 V 以下

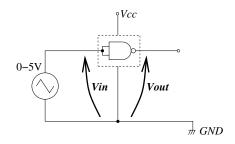


図3 入出力特性の測定方法

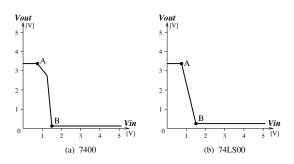


図 4 7400/74LS00 の入出力特性

[課題 1] 表 3 における同レベルの入力電圧の範囲 と出力電圧の範囲との不一致は, 意図してその ように設計されているのであるが, これにはど のような意義があるか考察せよ.

[実験 1] 7400 または 74LS00 の NAND ゲート (本実験では,2つの入力を短絡し,NOT ゲートとして用いる)の入力電圧を 0~5V の範囲で変化させたとき,どのような出力が得られるか (これを入出力特性または伝達特性という)をオシロスコープを用いて観測せよ (実験装置の接続例を図3に示す).図4のような結果が得られるはずである.特に,図4のA点およびB点の表3と比較せよ.入力電圧と出力電圧を正確に測定するように注意せよ.

注意

- オシロスコープのチャンネルを DC として測定すること。
- 入出力特性の測定を行う前に、あらかじめ、パルスジェネレータの出力が0~5Vの範囲で振幅する三角波(または正弦波)となっていることをオシロスコープで確認しておくこと.
- パルスジェネレータ、オシロスコープ、 7400/74LS00 の GND を一致させること。

[課題 2] 表 4 は 7400/74LS00 の出力端子に流せる電流の最大値と入力端子に流れるべき電流の最小値を示したものである. これより、7400/74LS00 の 1 つのゲートが他のゲートを何個までドライブできるか、例えば、7400 のゲートに 7400 のゲートを繋ぐとすると 7400 のゲートを何個までドライブできるかなど、7400 と 74LS00 を組み合わせた 4 通りのすべての組み合わせについて求めよ.

1 つのゲートの出力に接続される次段のゲート入力数をファンアウト数といい,接続可能な最大入力数を許容ファンアウト数という.課題2でみたように,TTL の場合には許容ファンアウト数には物理的な制限があり,従って,論理ゲートを組み合わせて論理回路を構成する場合,各ゲートのファンアウ

 $^{^{*1}}$ これを正論理という. これとは逆に, H レベルおよび L レベルを 0 と 1 にそれぞれ対応させる考え方もあり, これを負論理という.

表 4 TTL 素子の電流特性

	7400	74LS00
H レベル出力電流	$400 \ \mu A$	$400~\mu\mathrm{A}$
L レベル出力電流	16 mA	$8.0~\mathrm{mA}$
H レベル入力電流	$40 \ \mu A$	$20~\mu\mathrm{A}$
L レベル入力電流	1.6 mA	$0.4~\mathrm{mA}$

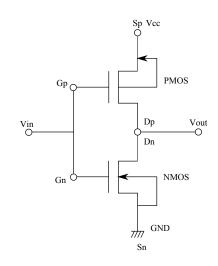
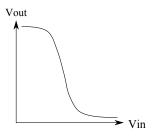


図 5 CMOS による NOT ゲートの回路図

ト数が許容ファンアウト数を超えないように注意する必要がある.

3.3 CMOS 素子の特性

MOSトランジスタには、ドレイン (D)、ソース (S)、ゲート (G)、バックゲート (B) が存在する. ゲートとソース間に電圧を与えるとドレインとソース間に電流が流れる. N型とP型の MOSトランジスタ (NMOS, PMOS) が存在し、入出力特性が異なる. NMOS は、ゲート電圧が 0V のときはドレインとソース間に電流が流れず、ゲート電圧があるしきい値を超えると電流が流れる. PMOS は NMOSとは逆の特性をもち、ゲート電圧が 0V のときに電流が流れ、あるしきい値を超えると電流が流れなくなる. この二つの MOSトランジスタを組み合わせたものが CMOS である. CMOS で構成された NOTゲートの回路図を図 5に示す. また、その入力と出力の入出力特性を図 6(a) に、消費電力特性を図



(a) 入出力特性

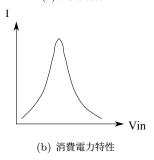


図 6 74HCU04 の特性

6(b) に示す.

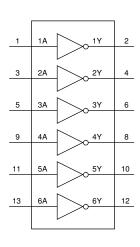


図 7 74HCU04 のロジック回路図

[実験 2] 74HCU04 のロジック回路図を図 7 に、そのピン配置図を図 8に示す。74HCU04のNOT ゲートの入出力特性と消費電力特性とを測定せよ。すなわち、入力電圧を $0\sim5V$ の範囲で変化させたとき、どのような出力が得られるかをオシロスコープを用いて測定せよ。実験装置の接続例を図 9(a) と 9(b) に示す。消費電力P は、NOT ゲートにかかる電圧 V_{cc} と回路

を流れる電流 I の積により求められる. すなわち、 $P=V_{cc} \times I$ である. V_{cc} は一定であるので、電流を測定することで消費電力を調べることができる.

注意

- 使わない入力端子は GND に接続すること。
- オシロスコープのチャンネルを DC として測定すること。
- 入出力特性の測定を行う前に,あらかじめ,パルスジェネレータの出力が0~5Vの範囲で振幅する三角波(または正弦波)となっていることをオシロスコープで確認しておくこと.
- パルスジェネレータ、オシロスコープ、 74HCU04の GND を一致させること。

[課題 3] CMOS の NOT ゲートの消費電力は, NMOS と PMOS の特性からある電圧付近で 大きく変化して大きなピークをとることがわかる. その理由を説明せよ.

[課題 4] CMOSのトランジスタのゲートには、容量特性が存在する. その容量(キャパシタ)の電荷を放電/充電することで信号が伝搬する. このことを踏まえて、CMOSの許容ファンアウト数について説明せよ. 結論だけでなく理由も明記すること.

3.4 TTL 素子の遅延時間

論理ゲートの入力の変化が出力の変化となって現 われるまでには時間的な遅れが生じ、これを伝搬遅

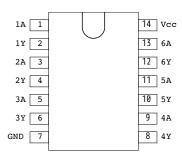
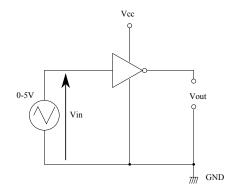


図 8 74HCU04 のピン配置



(a) 入出力特性の測定
Vcc
Uin Vout
IOOQ
GND

(b) 消費電力特性の測定

図 9 74HCU04 の特性の測定方法

延時間または単に遅延時間と呼ぶ. 論理ゲートから 構成される組み合わせ回路の性能は, 論理ゲートの 段数と各ゲートの遅延時間に左右される*².

図 10 に示すように,出力が $H\rightarrow L$ と変化するときの遅延時間を t_{HL} , $L\rightarrow H$ と変化するときの遅延時間を t_{LH} と表すことにする.一般に, t_{HL} と t_{LH} とは等しいとは限らず,本実験では平均遅延時間 $t_d=(t_{LH}+t_{HL})/2$ を扱うこととする.

さて、74 シリーズの論理ゲートの遅延時間は数ナノ秒から十数ナノ秒のオーダであるため、オシロスコープで観測するには短かすぎて、図 10 のような波形を表示させて遅延時間を測定することは不可能である。そこで、図 11 に示すようなリング発振器を用いて間接的に測定を行う。

[課題5] 図11のリング発振器が発振する理由

^{*2} このほか, 配線上を信号が伝わる際の遅延時間なども性能を決定する要因となる.

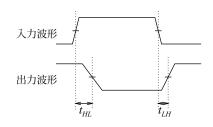


図 10 NOT 素子の遅延時間

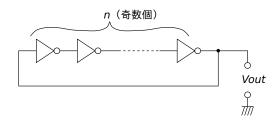


図 11 リング発振器

を述べよ.また,リング発振器の発振周期 T と NOT 素子の平均遅延時間 t_d との関係を求めよ.

[実験 3] 7400/74LS00 を NOT 素子として用いて図 11 のリング発振器を構成し、その発振波形をオシロスコープで観測せよ。n を 5 またはそれ以上、すなわち 5 個以上の素子を使ったリング発振器の発振周期を測定し、課題 3 の関係式を用いて 1 素子当たりの平均遅延時間 t_d を求めよ。

4 フリップフロップ

4.1 SR-フリップフロップ

図 17 は \bar{SR} -フリップフロップ(\bar{SR} -FF)と呼ばれる回路* 3 であり、1 ビットの情報を保持(記憶)することができる。このような記憶素子が通常の組合せ回路と異なる構成上の特徴は、フィードバックループ(ある論理素子の出力が他の組合せ回路を経由して再びその論理素子の入力となる接続)がある点であり、これによって L(0) と H(1) の 2 つの安定した状態を作り出し、1 ビットの情報を記憶することを可能としている。

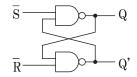


図 17 ĪR-フリップフロップ

さて、 $\bar{S}\bar{R}$ -FF の動作は次のようになる。まず、入力が $\bar{S}=0$ 、 $\bar{R}=1$ のときは、出力は Q=1、Q'=0 となる。また、 $\bar{S}=1$ 、 $\bar{R}=0$ のときは Q=0、Q'=1 となる。これに対して、入力が $\bar{S}=\bar{R}=1$ のときは、出力はその入力のみから決まるのではなく、過去の状態によって決まる。実際には、過去の状態が保存される。なお、 $\bar{S}=\bar{R}=0$ のときは、Q=Q'=1 となり、Q と Q' とが同じ値をとる。この後、入力を同時に $\bar{S}=\bar{R}=1$ に変化させると、出力は回路の製造状態によって異なった値をとることになる。従って、この場合の動作には注意が必要であり、通常は、 $\bar{S}=\bar{R}=0$ を禁止入力として使用しないこととしている。

順序回路は、状態を持たない組合せ回路と、フリップフロップなどの記憶素子とを用いて構成するが、通常、クロック信号に同期してフリップフロップの記憶内容を変更(これを状態遷移という)する*4. 図 18(a) は図 17 にクロック入力を付加し、か

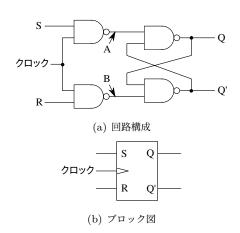


図 18 クロック付き SR-フリップフロップ

表 5 SR-フリップフロップの機能表

入力		出力		
\mathbf{S}	R	Q(t+1)	Q'(t+1)	
0	0	Q(t)	$\overline{\mathrm{Q(t)}}$	記憶
0	1	0	1	リセット
1	0	1	0	セット
1	1	-	-	禁止入力

[実験 4] 図 18(a) の回路をブレッドボード上で構成(クロック、S、R の各入力はスイッチに接続し、また、Q、Q'は LED に接続する)して、禁止入力以外の場合に表 5 の通りに動作することを確認せよ.

[実験 5] 実験 4 の回路で禁止入力を行った場合の 出力を調べよ.

[実験 6] 実験 5 について,図 18(a)の A または B の部分に NAND 素子 (NOT 素子として使用)

^{*3} \bar{SR} -FF の場合のみ、 \bar{SR} -ラッチと呼ぶこともある、

^{*4} クロック信号を持たない順序回路を非同期式順序回路と呼ぶ.

[課題 6] 実験 5 と実験 6 の実験結果からどのよう なことがわかるか,考察せよ.