```
import numpy as np
import scipy.fftpack as fp
import scipy.linalg as lg
```

1. (a)
```
x1 = np.array([1,0,0,0,0,0,0,0])
X1 = fp.fft(x1)
X1
```
output: array([1.-0.j , 1.+0.j , 1.-0.j , 1.+0.j , 1.-0.j , 1.-0.j , 1.+0.j , 1.-0.j])

(b)
```
x2 = np.array([1,1,1,1,1,1,1,1])
X2 = fp.fft(x2)
X2
```
output: array([8.-0.j , 0.+0.j , 0.-0.j , 0.+0.j , 0.-0.j , 0.-0.j , 0.+0.j , 0.-0.j])

(c)
```
x3 = np.array([1,-1,1,-1,1,-1,1,-1])
X3 = fp.fft(x3)
X3
```
output: array([0.-0.j , 0.+0.j , 0.-0.j , 0.+0.j , 8.-0.j , 0.-0.j , 0.+0.j , 0.-0.j])

(d)
```
x4 = x1+x2+x3
X4 = fp.fft(x4)
X4
```
output: array([9.-0.j , 1.+0.j , 1.-0.j , 1.+0.j , 9.-0.j , 1.-0.j , 1.+0.j , 1.-0.j])

(e)

(f)
```
X5 = np.array([1,1,0,0,0,0,1,1])
x5 = fp.ifft(X5)
x5
```
output: array([0.5-0.j , 0.302-0.125j , 0.+0.j , -0.052+0.125j , 0.-0.j , -0.052-0.125j , 0.-0.j , 0.302+0.125j])

```
X6 = np.array([1,1,0,0,0,0,0,1])
x6 = fp.ifft(X6)
x6
```

（請翻面繼續作答）

output : array([0.375-0.j , 0.302-0.j , 0.125+0.j , -0.052-0.j , -0.125-0.j , -0.052+0.j ,
0.125-0.j , 0.302+0.j])

∴ $x_6[n]$ 為純實數序列

(g) x7 = np.array([1,1,0,0])

X7 = fp.fft(x7)

X7

output : array([2-0.j , 1.-1.j , 0.-0.j , 1.+1.j])

x8 = np.array([1,1,0,0,0,0,0,0])

X8 = fp.fft(x8)

X8

output : array([2.-0.j , 1.707-0.707j , 1.-1.j , 0.293-0.707j ,
0.-0.j , 0.293+0.707j , 1.+1.j , 1.707+0.707j])

X7的每項分別為X8的第1.3.5.7項

2. (a) $h[n] = f[0]g[2] + f[1]g[1] + f[2]g[0]$

(b) x = np.array([1,1,1,1])

w = np.array([1,1])

y = np.convolve(x,w)

y

output : array([1,2,2,2,1])

(c) X = fp.fft(x)

X

output : array([4.-0.j , 0.+0.j , 0.-0.j , 0.-0.j])

W = fp.fft(w)

W

output : array([2.-0.j , 0.-0.j])

Y = fp.fft(y)

Y

output : array([8.-0.j , -1.309-0.951j , -0.191-0.588j , -0.191+0.588j , -1.309+0.951j

(a) Convolution Theorem:

定義：若 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，$\mathcal{L}[g(t)]=G(s)$，且 $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$，

則 $\mathcal{L}[f(t)*g(t)]=F(s)\,G(s)$

函數 convolution 的傅立葉轉換是函數傅立葉轉換的乘積。即一個域中的 convolution 相當於另一個域中的乘積，如時域中的 convolution 對應於頻域中的乘積。

$F\{f*g\}=F\{f\}\cdot F\{g\}$，其中 $F(f)$ 表示 f 的傅立葉轉換。

(b) 已知 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，$\mathcal{L}[g(t)]=G(s)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau\right] &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau\right)dt \\
&= \int_0^\infty g(\tau)\left(\int_\tau^\infty e^{-st}f(t-\tau)dt\right)d\tau \\
&= \int_0^\infty g(\tau)\int_0^\infty e^{-s(x+\tau)}f(x)\,dx\,d\tau \quad (\text{令 } t=\tau+x) \\
&= \int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)\left(\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx\right)d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)\,F(s)\,d\tau \\
&= F(s)\int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)d\tau \\
&= F(s)\,G(s)
\end{aligned}
$$

同理可證 $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right]=F(s)\,G(s)$