非线性方程求根

主讲：王伟

Emal: wangw@tongji.edu.cn

同济大学数学科学学院

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

§1 非线性方程求根的基本问题

在科学工程计算中常常遇到非线性方程和方程组的问题，例：

$$x^4 - 10x^3 + 35x^3 - 50x + 24 = 0, \quad \text{高次代数方程}$$

$$e^x - cosx + \alpha = 0, \quad \text{超越方程}$$

§1 非线性方程求根的基本问题

在科学工程计算中常常遇到非线性方程和方程组的问题，例：

$$x^4 - 10x^3 + 35x^3 - 50x + 24 = 0, \quad \text{高次代数方程}$$

$$e^x - cosx + \alpha = 0, \quad \text{超越方程}$$

定义1.1

求解非线性方程组$f(x) = 0$,

§1 非线性方程求根的基本问题

在科学工程计算中常常遇到非线性方程和方程组的问题，例：

$$x^4 - 10x^3 + 35x^3 - 50x + 24 = 0, \quad \text{高次代数方程}$$

$$e^x - cosx + \alpha = 0, \quad \text{超越方程}$$

定义1.1

求解非线性方程组$f(x) = 0$, 若$f(x^*) = 0$, 称x^*是$f(x) = 0$的根或f的零点。

§1 非线性方程求根的基本问题

在科学工程计算中常常遇到非线性方程和方程组的问题，例：

$$x^4 - 10x^3 + 35x^3 - 50x + 24 = 0, \quad \text{高次代数方程}$$

$$e^x - cosx + \alpha = 0, \quad \text{超越方程}$$

定义1.1

求解非线性方程组$f(x) = 0$, 若$f(x^*) = 0$, 称x^*是$f(x) = 0$的根或f的零点。

定义1.2

代数方程:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0, \quad (a_n \neq 0)$$

§1 非线性方程求根的基本问题

在科学工程计算中常常遇到非线性方程和方程组的问题，例：

$$x^4 - 10x^3 + 35x^3 - 50x + 24 = 0, \quad \text{高次代数方程}$$

$$e^x - cosx + \alpha = 0, \quad \text{超越方程}$$

定义1.1

求解非线性方程组$f(x) = 0$, 若$f(x^*) = 0$, 称x^*是$f(x) = 0$的根或f的零点。

定义1.2

代数方程:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0, \quad (a_n \neq 0)$$

m重零点:

$$f(x) = (x - x^*)^m g(x) \text{ 且} g(x^*) \neq 0$$

非线性方程求根的基本问题:

- 根的存在性，个数和重数
- 有根区间的确定
- 求出足够精度的近似根

非线性方程求根的基本问题:

- 根的存在性，个数和重数
- 有根区间的确定
- 求出足够精度的近似根

定理1.1 (代数基本定理)

n次多项式函数$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, 其中$a_n \neq 0$, 在复数域中恰有$n$个根, 重根按其重数计算。

非线性方程求根的基本问题:

- 根的存在性，个数和重数
- 有根区间的确定
- 求出足够精度的近似根

定理1.1 (代数基本定理)

n次多项式函数$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, 其中$a_n \neq 0$, 在复数域中恰有$n$个根, 重根按其重数计算。

定理1.2 (中值定理)

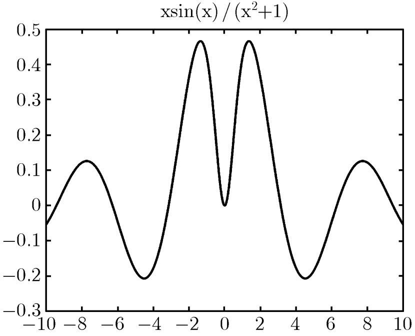
若连续函数$f : R \to R$在某两个点a, b上满足$f(a) > 0$ 和$f(b) < 0$, 则在区间$[a, b]$(或$[b, a]$)上至少存在函数f的一个零点。

例1.1

考察非线性方程$f(x)=\dfrac{x\sin x}{x^2+1}=\alpha$的根的个数。

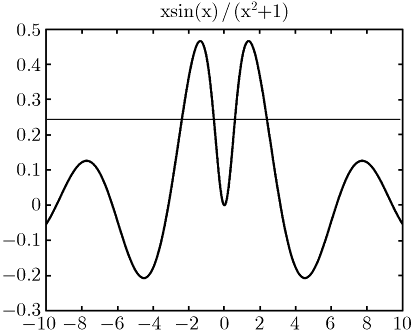
例1.1

考察非线性方程$f(x)=\dfrac{x\sin x}{x^2+1}=\alpha$的根的个数。



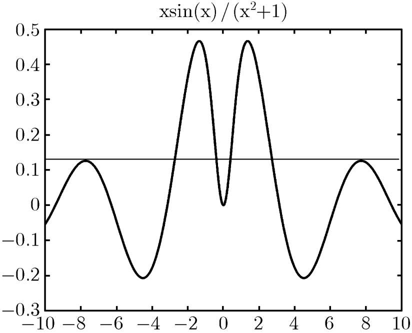
例1.1

考察非线性方程$f(x)=\dfrac{x\sin x}{x^2+1}=\alpha$的根的个数。



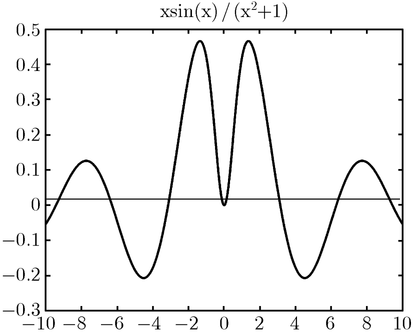
例1.1

考察非线性方程$f(x)=\dfrac{x\sin x}{x^2+1}=\alpha$的根的个数。



例1.1

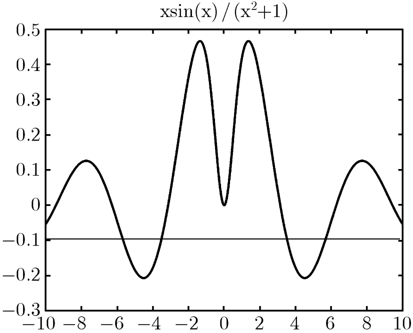
考察非线性方程$f(x)=\dfrac{x\sin x}{x^2+1}=\alpha$的根的个数。



§1 非线性方程求根的基本问题

例1.1

考察非线性方程$f(x) = \dfrac{x\sin x}{x^2+1} = \alpha$的根的个数。

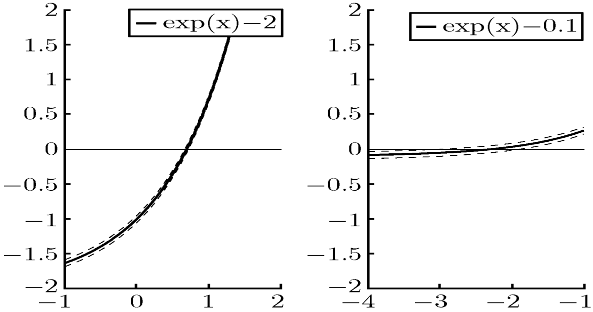


例1.2

求解方程$f(x) = \mathrm{e}^x - \alpha = 0$, α是一给定参数。

例1.2

求解方程$f(x) = \mathrm{e}^x - \alpha = 0$, α是一给定参数。



定义1.3 (收敛速度)

设$e_k = x_k - x^*$为第k个迭代点的误差，若

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r} = C, \qquad e_k \to 0.$$

称x_k为r阶收敛。

定义1.3 (收敛速度)

设$e_k = x_k - x^*$为第k个迭代点的误差, 若

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r} = C, \qquad e_k \to 0.$$

称x_k为r阶收敛。

线性收敛$(r = 1)$、超线性收敛$(r > 1)$、平方收敛$(r = 2)$

定义1.3 (收敛速度)

设$e_k = x_k - x^*$为第k个迭代点的误差，若

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r} = C, \qquad e_k \to 0.$$

称x_k为r阶收敛。

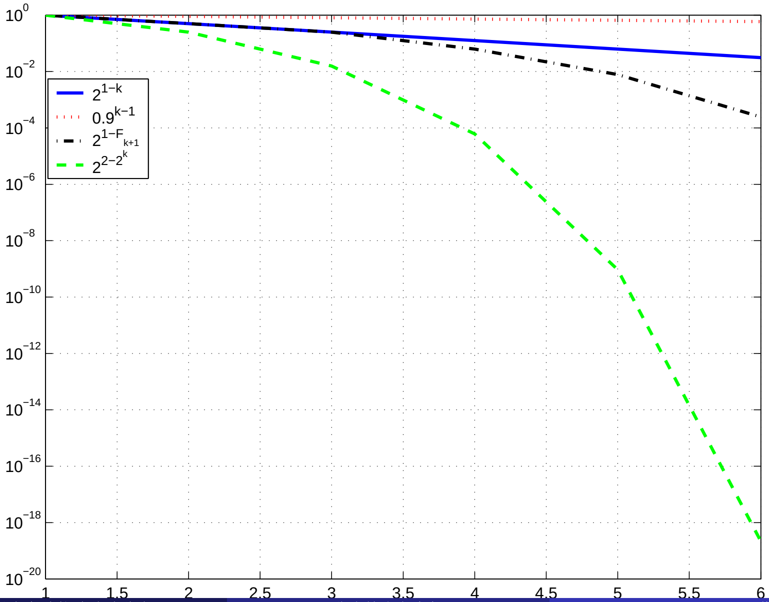
线性收敛$(r = 1)$、超线性收敛$(r > 1)$、平方收敛$(r = 2)$

例1.3

考察如下几个序列的收敛速度:

$$2^{1-k}, \quad 0.9^{k-1}, \quad 2^{1-F_{k+1}}, \quad 2^{2-2^k},$$

其中，F_k是*Fibonacci*数列，即$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, $F_1 = F_2 = 1$.


2^{1-k}
0.9^{k-1}
$2^{1-F_{k+1}}$
2^{2-2^k}
10^{0}
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
10^{-12}
10^{-14}
10^{-16}
10^{-18}
10^{-20}
1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6

定理2.1 (中值定理)

若连续函数$f: R \to R$在某两个点a, b上满足$f(a) > 0$ 和$f(b) < 0$, 则在区间$[a, b]$(或$[b, a]$)上至少存在函数f的一个零点。

§2 二分法

定理2.1 (中值定理)

若连续函数$f : R \to R$在某两个点a, b上满足$f(a) > 0$ 和$f(b) < 0$, 则在区间$[a, b]$(或$[b, a]$)上至少存在函数f的一个零点。

- 若f在$[a_1, b_1]$连续, $f(a_1)$与$f(b_1)$异号, 中点$x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

定理2.1 (中值定理)

若连续函数$f: R \rightarrow R$在某两个点a, b上满足$f(a) > 0$ 和$f(b) < 0$, 则在区间$[a, b]$(或$[b, a]$)上至少存在函数f的一个零点。

- 若f在$[a_1, b_1]$连续, $f(a_1)$与$f(b_1)$异号, 中点$x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
- 若$f(x_1)$与$f(a_1)$同号, 则有有根区间$[x_1, b_1] = [a_2, b_2]$;

定理2.1 (中值定理)

若连续函数$f: R \to R$在某两个点a, b上满足$f(a) > 0$ 和$f(b) < 0$, 则在区间$[a, b]$(或$[b, a]$)上至少存在函数f的一个零点。

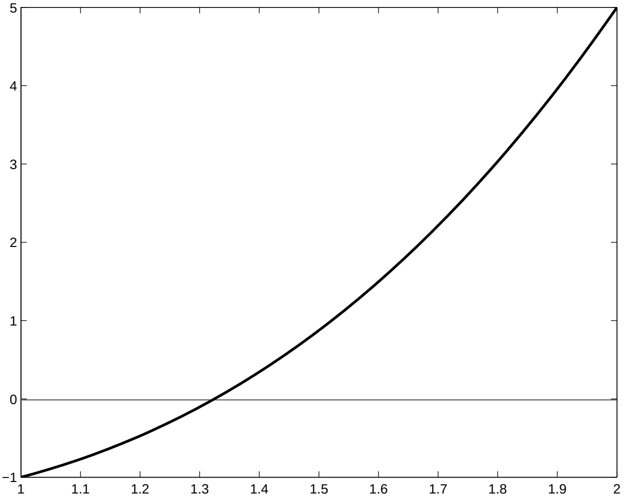
- 若f在$[a_1, b_1]$连续, $f(a_1)$与$f(b_1)$异号, 中点$x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
- 若$f(x_1)$与$f(a_1)$同号, 则有有根区间$[x_1, b_1] = [a_2, b_2]$;
- 若$f(x_1)$与$f(b_1)$同号, 则有有根区间$[a_1, x_1] = [a_2, b_2]$;

定理2.1 (中值定理)

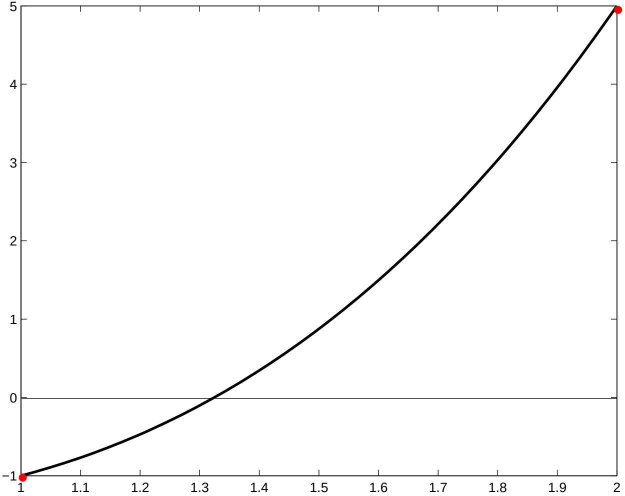
若连续函数$f:R\to R$在某两个点a,b上满足$f(a)>0$ 和$f(b)<0$, 则在区间$[a,b]$(或$[b,a]$)上至少存在函数f的一个零点。

- 若f在$[a_1,b_1]$连续, $f(a_1)$与$f(b_1)$异号, 中点$x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$.
- 若$f(x_1)$与$f(a_1)$同号, 则有有根区间$[x_1,b_1]=[a_2,b_2]$;
- 若$f(x_1)$与$f(b_1)$同号, 则有有根区间$[a_1,x_1]=[a_2,b_2]$;
- 反复上面的过程。

几何意义:

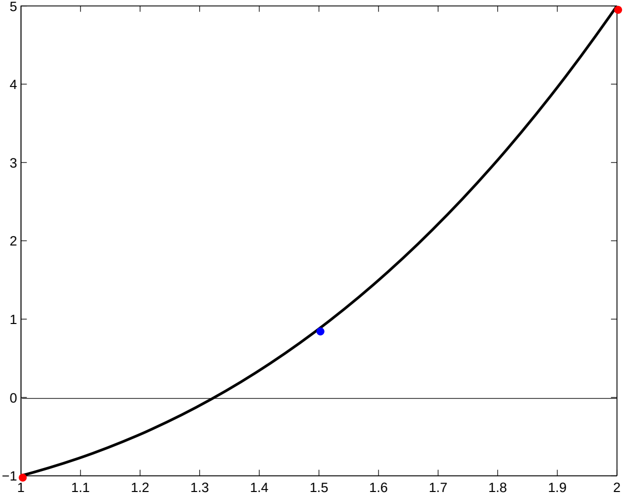


几何意义:



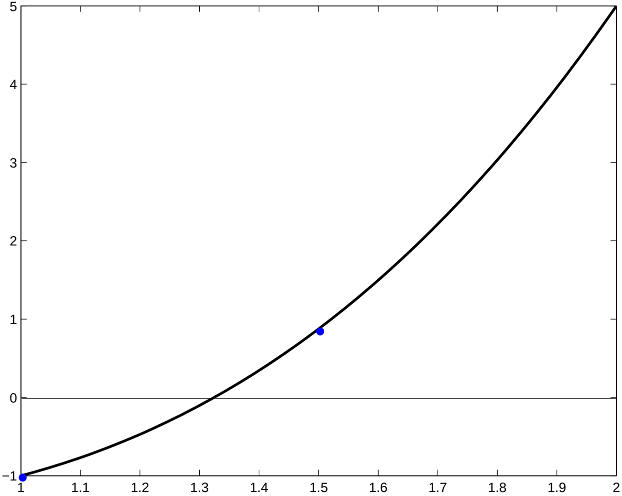
§2 二分法

几何意义:

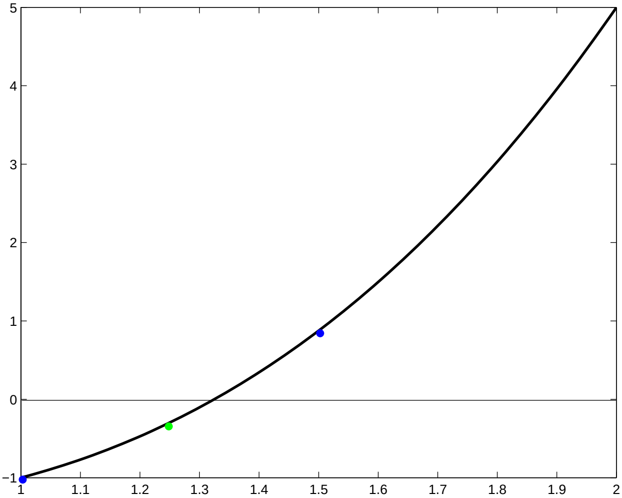


§2 二分法

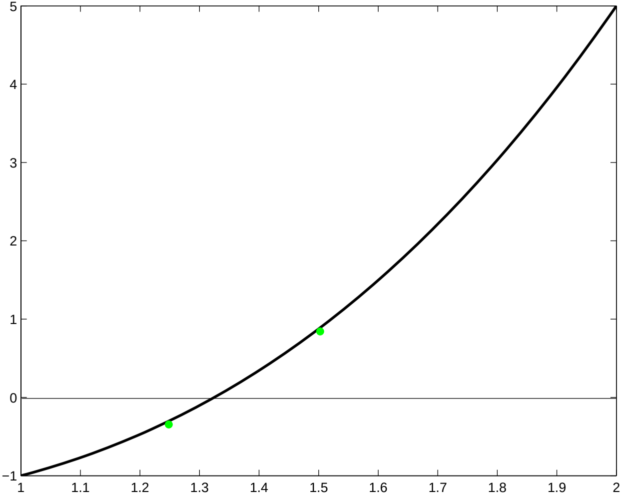
几何意义:



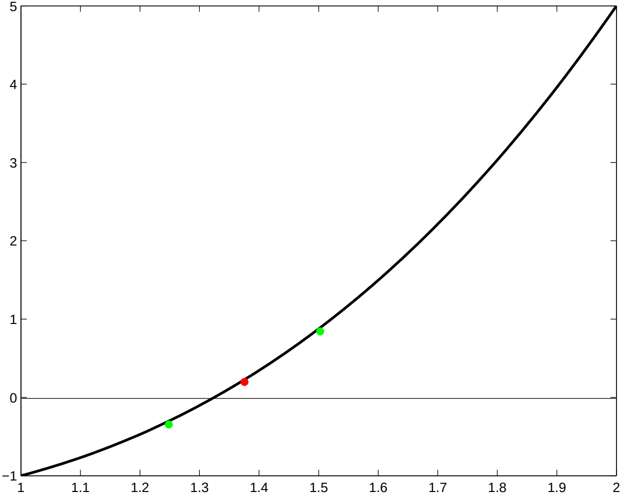
几何意义:



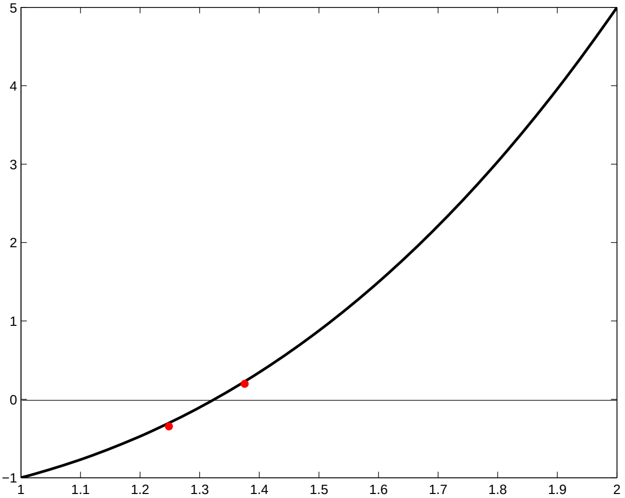
几何意义:



几何意义:



几何意义:



算法2.1 (二分法)

(1) 给定初始区间$[a, b]$，满足$f(a)f(b) < 0$，以及计算精度ε;

(2) 令$c = a/2 + b/2$;

(3) 若$b - a \leqslant \varepsilon$或者$|f(c)| \leqslant \varepsilon$，停止算法;

(4) 若$\mathrm{sign}(f(a)) = \mathrm{sign}(f(c))$，令$a = c$，否则$b = c$; 转步骤(2).

Matlab program (二分法)

```
function x=bisect(f,a,b,tol)
    if nargin<4,tol=1e-12;
    end
      fa=feval(f,a); fb=feval(f,b);
    while abs(a-b)>tol,
       x=(a+b)/2;
       fx=feval(f,x);
    if sign(fx)==sign(fa),
       a=x; fa=fx;
    elseif
       sign(fx)==sign(fb), b=x;
       fb=fx;
    else return;
    end
    end
```

§2 二分法

例2.1

用二分法求解非线性方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

例2.1

用二分法求解非线性方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

函数$f(x)$满足$f(1) = -1 < 0, f(2) = 5 > 0$, 方程的近似根为$x^* = \dfrac{1.32422 + 1.32520}{2} = 1.3247$.

例2.1

用二分法求解非线性方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

例2.1

用二分法求解非线性方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

a	$f(a)$	b	$f(b)$
1.000 00	−1.000 00	2.000 00	5.000 00
1.000 00	−1.000 00	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.375 00	0.224 61

例2.1

用二分法求解非线性方程$f(x)=x^3-x-1=0$.

a	$f(a)$	b	$f(b)$
1.000 00	−1.000 00	2.000 00	5.000 00
1.000 00	−1.000 00	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.375 00	0.224 61
1.312 50	−0.051 51	1.375 00	0.224 61

例2.1

用二分法求解非线性方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

a	$f(a)$	b	$f(b)$
1.000 00	−1.000 00	2.000 00	5.000 00
1.000 00	−1.000 00	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.375 00	0.224 61
1.312 50	−0.051 51	1.375 00	0.224 61
1.312 50	−0.051 51	1.343 75	0.082 61

例2.1

用二分法求解非线性方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

a	$f(a)$	b	$f(b)$
1.000 00	−1.000 00	2.000 00	5.000 00
1.000 00	−1.000 00	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.375 00	0.224 61
1.312 50	−0.051 51	1.375 00	0.224 61
1.312 50	−0.051 51	1.343 75	0.082 61
1.312 50	−0.051 51	1.328 13	0.014 58

例2.1

用二分法求解非线性方程$f(x)=x^3-x-1=0$.

a	$f(a)$	b	$f(b)$
1.000 00	−1.000 00	2.000 00	5.000 00
1.000 00	−1.000 00	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.375 00	0.224 61
1.312 50	−0.051 51	1.375 00	0.224 61
1.312 50	−0.051 51	1.343 75	0.082 61
1.312 50	−0.051 51	1.328 13	0.014 58
1.320 31	−0.018 71	1.328 13	0.014 58

例2.1

用二分法求解非线性方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

a	$f(a)$	b	$f(b)$
1.000 00	−1.000 00	2.000 00	5.000 00
1.000 00	−1.000 00	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.375 00	0.224 61
1.312 50	−0.051 51	1.375 00	0.224 61
1.312 50	−0.051 51	1.343 75	0.082 61
1.312 50	−0.051 51	1.328 13	0.014 58
1.320 31	−0.018 71	1.328 13	0.014 58
1.324 22	−0.002 13	1.328 13	0.014 58

例2.1

用二分法求解非线性方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

a	$f(a)$	b	$f(b)$
1.000 00	−1.000 00	2.000 00	5.000 00
1.000 00	−1.000 00	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.375 00	0.224 61
1.312 50	−0.051 51	1.375 00	0.224 61
1.312 50	−0.051 51	1.343 75	0.082 61
1.312 50	−0.051 51	1.328 13	0.014 58
1.320 31	−0.018 71	1.328 13	0.014 58
1.324 22	−0.002 13	1.328 13	0.014 58
1.324 22	−0.002 13	1.326 17	0.006 21

例2.1

用二分法求解非线性方程$f(x)=x^3-x-1=0$.

a	$f(a)$	b	$f(b)$
1.000 00	−1.000 00	2.000 00	5.000 00
1.000 00	−1.000 00	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.500 00	0.875 00
1.250 00	−0.296 88	1.375 00	0.224 61
1.312 50	−0.051 51	1.375 00	0.224 61
1.312 50	−0.051 51	1.343 75	0.082 61
1.312 50	−0.051 51	1.328 13	0.014 58
1.320 31	−0.018 71	1.328 13	0.014 58
1.324 22	−0.002 13	1.328 13	0.014 58
1.324 22	−0.002 13	1.326 17	0.006 21
1.324 22	−0.002 13	1.325 20	0.002 04

§3 不动点迭代方法

类似于线性方程组的迭代解法，考虑非线性方程

$$f(x) = 0$$

§3 不动点迭代方法

类似于线性方程组的迭代解法，考虑非线性方程

$$f(x) = 0$$

等价迭代方程

$$x = \varphi(x)$$

§3 不动点迭代方法

类似于线性方程组的迭代解法，考虑非线性方程

$$f(x) = 0$$

等价迭代方程

$$x = \varphi(x)$$

迭代算法

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

§3 不动点迭代方法

类似于线性方程组的迭代解法，考虑非线性方程

$$f(x) = 0$$

等价迭代方程

$$x = \varphi(x)$$

迭代算法

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

定义3.1

若把函数φ看成是一个映射，求解x^*满足$f(x^*) = 0$相当于求解$x^* = \varphi(x^*)$，即求在映射φ下不动的点。因此，方程$x = \varphi(x)$称为不动点方程，x^*称为函数φ的不动点，该问题也称为不动点问题。

§3 不动点迭代方法

$$f(x) = 0$$

§3 不动点迭代方法

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \varphi(x)$$

§3 不动点迭代方法

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \varphi(x) \qquad \Rightarrow \qquad x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

例3.1

求解非线性方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$。

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

例3.1

求解非线性方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$。

1. $x = x^3 - 1$, 对应迭代方法$x_{k+1} = \varphi_1(x_k) = x_k^3 - 1$;

§3 不动点迭代方法

$$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\varphi(x) \quad \Rightarrow \quad x_{k+1}=\varphi(x_k)$$

例3.1

求解非线性方程$f(x)=x^3-x-1=0$。

1. $x=x^3-1$, 对应迭代方法$x_{k+1}=\varphi_1(x_k)=x_k^3-1$;
2. $x=\sqrt[3]{x+1}$, 对应迭代方法$x_{k+1}=\varphi_2(x_k)=\sqrt[3]{x_k+1}$;

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

例3.1

求解非线性方程$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$。

1. $x = x^3 - 1$, 对应迭代方法$x_{k+1} = \varphi_1(x_k) = x_k^3 - 1$;
2. $x = \sqrt[3]{x+1}$, 对应迭代方法$x_{k+1} = \varphi_2(x_k) = \sqrt[3]{x_k + 1}$;
3. $x = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, 对应迭代方法$x_{k+1} = \varphi_3(x_k) = \dfrac{1}{x_k^2 - 1}$;

$$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\varphi(x) \quad \Rightarrow \quad x_{k+1}=\varphi(x_k)$$

例3.1

求解非线性方程$f(x)=x^3-x-1=0$。

1. $x=x^3-1$, 对应迭代方法$x_{k+1}=\varphi_1(x_k)=x_k^3-1$;
2. $x=\sqrt[3]{x+1}$, 对应迭代方法$x_{k+1}=\varphi_2(x_k)=\sqrt[3]{x_k+1}$;
3. $x=\dfrac{1}{x^2-1}$, 对应迭代方法$x_{k+1}=\varphi_3(x_k)=\dfrac{1}{x_k^2-1}$;
4. $x=x-\dfrac{x^3-x-1}{3x^2-1}$, 对应迭代方法

$$x_{k+1}=\varphi_4(x_k)=x_k-\frac{x_k^3-x_k-1}{3x_k^2-1}.$$

$$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\varphi(x) \quad \Rightarrow \quad x_{k+1}=\varphi(x_k)$$

例3.1

求解非线性方程$f(x)=x^3-x-1=0$。取$x_0=1.50$.

1. $x=x^3-1$, 对应迭代方法$x_{k+1}=\varphi_1(x_k)=x_k^3-1$;
2. $x=\sqrt[3]{x+1}$, 对应迭代方法$x_{k+1}=\varphi_2(x_k)=\sqrt[3]{x_k+1}$;
3. $x=\dfrac{1}{x^2-1}$, 对应迭代方法$x_{k+1}=\varphi_3(x_k)=\dfrac{1}{x_k^2-1}$;
4. $x=x-\dfrac{x^3-x-1}{3x^2-1}$, 对应迭代方法

$$x_{k+1}=\varphi_4(x_k)=x_k-\frac{x_k^3-x_k-1}{3x_k^2-1}.$$

四个不同的迭代方法(neex5.m)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
x_0	1.500	1.500 000	1.500 000	1.500 000 000 000 00

四个不同的迭代方法(neex5.m)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
x_0	1.500	1.500 000	1.500 000	1.500 000 000 000 00
x_1	2.375	1.357 209	0.800 000	1.347 826 086 956 52

四个不同的迭代方法(neex5.m)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
x_0	1.500	1.500 000	1.500 000	1.500 000 000 000 00
x_1	2.375	1.357 209	0.800 000	1.347 826 086 956 52
x_2	12.396	1.330 861	−2.777 778	1.325 200 398 950 91

四个不同的迭代方法(neex5.m)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
x_0	1.500	1.500 000	1.500 000	1.500 000 000 000 00
x_1	2.375	1.357 209	0.800 000	1.347 826 086 956 52
x_2	12.396	1.330 861	−2.777 778	1.325 200 398 950 91
x_3	1 904.003	1.325 884	0.148 897	1.324 718 173 999 05

四个不同的迭代方法(neex5.m)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
x_0	1.500	1.500 000	1.500 000	1.500 000 000 000 00
x_1	2.375	1.357 209	0.800 000	1.347 826 086 956 52
x_2	12.396	1.330 861	−2.777 778	1.325 200 398 950 91
x_3	1 904.003	1.325 884	0.148 897	1.324 718 173 999 05
x_4		1.324 939	−1.022 673	1.324 717 957 244 79

四个不同的迭代方法(neex5.m)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
x_0	1.500	1.500 000	1.500 000	1.500 000 000 000 00
x_1	2.375	1.357 209	0.800 000	1.347 826 086 956 52
x_2	12.396	1.330 861	−2.777 778	1.325 200 398 950 91
x_3	1 904.003	1.325 884	0.148 897	1.324 718 173 999 05
x_4		1.324 939	−1.022 673	1.324 717 957 244 79
x_5		1.324 760	21.805 462	1.324 717 957 244 75

四个不同的迭代方法(neex5.m)

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
x_0	1.500	1.500 000	1.500 000	1.500 000 000 000 00
x_1	2.375	1.357 209	0.800 000	1.347 826 086 956 52
x_2	12.396	1.330 861	−2.777 778	1.325 200 398 950 91
x_3	1 904.003	1.325 884	0.148 897	1.324 718 173 999 05
x_4		1.324 939	−1.022 673	1.324 717 957 244 79
x_5		1.324 760	21.805 462	1.324 717 957 244 75
x_6		1.324 726	0.002 108	1.324 717 957 244 75

§3 不动点迭代方法

定理3.1 (不动点迭代)

设一元函数$\varphi(x)$在区间$[a, b]$上一阶连续可导, 且

(1) $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b$对一切$x \in [a, b]$成立;

(2) 存在常数L, $0 \leqslant L < 1$, 使得$|\varphi'(x)| \leqslant L$对一切$x \in [a, b]$成立。

则成立如下结论:

定理3.1 (不动点迭代)

设一元函数$\varphi(x)$在区间$[a,b]$上一阶连续可导，且

(1) $a \leqslant \varphi(x) \leqslant b$对一切$x \in [a,b]$成立;

(2) 存在常数L, $0 \leqslant L < 1$, 使得$|\varphi'(x)| \leqslant L$对一切$x \in [a,b]$成立。

则成立如下结论:

(a) 对任何$x_0 \in [a,b]$, $x_{k+1} = \varphi(x_k)$产生的迭代序列$\{x_k\}$必收敛于$\varphi(x)$在区间$[a,b]$上的唯一不动点，即$x^* = \varphi(x^*)$;

(b) 序列$\{x_k\}$的收敛速度有估计

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k|, \quad |x_k - x^*| \leqslant \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|.$$

证:

证： 令$g(x) = x - \varphi(x)$, 则$g(a) \leqslant 0 \leqslant g(b)$. 因此, 存在$x^*$, $g(x^*) = 0$. 即$x^* = \varphi(x^*)$.

证： 令$g(x) = x - \varphi(x)$, 则$g(a) \leqslant 0 \leqslant g(b)$. 因此, 存在$x^*$, $g(x^*) = 0$.
即$x^* = \varphi(x^*)$.
若$\bar{x}^* = \varphi(\bar{x}^*)$, 则

证： 令$g(x) = x - \varphi(x)$, 则$g(a) \leqslant 0 \leqslant g(b)$. 因此, 存在$x^*$, $g(x^*) = 0$.
即$x^* = \varphi(x^*)$.
若$\bar{x}^* = \varphi(\bar{x}^*)$, 则

$$|x^* - \bar{x}^*| = |\varphi(x^*) - \varphi(\bar{x}^*)| = |\varphi'(\xi)||x^* - \bar{x}^*| \leqslant L|x^* - \bar{x}^*|$$

证： 令$g(x) = x - \varphi(x)$, 则$g(a) \leqslant 0 \leqslant g(b)$. 因此, 存在$x^*$, $g(x^*) = 0$.
即$x^* = \varphi(x^*)$.
若$\bar{x}^* = \varphi(\bar{x}^*)$, 则

$$|x^* - \bar{x}^*| = |\varphi(x^*) - \varphi(\bar{x}^*)| = |\varphi'(\xi)||x^* - \bar{x}^*| \leqslant L|x^* - \bar{x}^*|$$

由数学归纳法可得$x_k \in [a, b]$,

证： 令$g(x)=x-\varphi(x)$, 则$g(a)\leqslant 0\leqslant g(b)$. 因此, 存在$x^*$, $g(x^*)=0$.
即$x^*=\varphi(x^*)$.
若$\bar{x}^*=\varphi(\bar{x}^*)$, 则

$$|x^*-\bar{x}^*|=|\varphi(x^*)-\varphi(\bar{x}^*)|=|\varphi'(\xi)||x^*-\bar{x}^*|\leqslant L|x^*-\bar{x}^*|$$

由数学归纳法可得$x_k\in[a,b]$,

$$|x_k-x^*|=|\varphi(x_{k-1})-\varphi(x^*)|\leqslant L|x_{k-1}-x^*|$$

证： 令$g(x)=x-\varphi(x)$, 则$g(a)\leqslant 0\leqslant g(b)$. 因此, 存在$x^*$, $g(x^*)=0$.
即$x^*=\varphi(x^*)$.
若$\bar{x}^*=\varphi(\bar{x}^*)$, 则

$$|x^*-\bar{x}^*|=|\varphi(x^*)-\varphi(\bar{x}^*)|=|\varphi'(\xi)||x^*-\bar{x}^*|\leqslant L|x^*-\bar{x}^*|$$

由数学归纳法可得$x_k\in[a,b]$,

$$|x_k-x^*|=|\varphi(x_{k-1})-\varphi(x^*)|\leqslant L|x_{k-1}-x^*|$$

$$|x_k-x^*|\leqslant L^k|x_0-x^*|\to 0.$$

证:

$$|x_{k+1} - x^*| \leqslant L|x_k - x^*|$$

证:

$$|x_{k+1} - x^*| \leqslant L|x_k - x^*|$$

$$|x_{k+1} - x_k| \geqslant |x_k - x^*| - |x_{k+1} - x^*| \geqslant (1 - L)|x_k - x^*|$$

证:

$$|x_{k+1}-x^*| \leqslant L|x_k-x^*|$$

$$|x_{k+1}-x_k| \geqslant |x_k-x^*|-|x_{k+1}-x^*| \geqslant (1-L)|x_k-x^*|$$

因此

$$\begin{aligned}
|x_k-x^*| &\leqslant \frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k| \\
&\leqslant \frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}| \\
&\leqslant \cdots \\
&\leqslant \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|
\end{aligned}$$

全局收敛

给出$[a, b]$,使得$\max\limits_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)| < 1$。

全局收敛

给出$[a, b]$,使得$\max\limits_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)| < 1$。

局部收敛性

(1) 若$|\varphi'(x^*)| < 1$, 其中x^*是不动点,

§3 不动点迭代方法

全局收敛

给出$[a,b]$,使得 $\max\limits_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)| < 1$。

局部收敛性

(1) 若$|\varphi'(x^*)| < 1$, 其中x^*是不动点, 则存在x^*的某个邻域$N(x^*) = [x^* - \delta, x^* + \delta]$, 使得对于任意$x \in N(x^*)$, 有$|\varphi'(x)| \leqslant L < 1$.

§3 不动点迭代方法

全局收敛

给出$[a,b]$,使得 $\max\limits_{x\in[a,b]}|\varphi'(x)|<1$。

局部收敛性

(1) 若$|\varphi'(x^*)|<1$, 其中x^*是不动点, 则存在x^*的某个邻域$N(x^*)=[x^*-\delta,x^*+\delta]$, 使得对于任意$x\in N(x^*)$, 有$|\varphi'(x)|\leqslant L<1$.

(2) 原因: 无法说明$x_0\in N(x^*)$.

全局收敛

给出$[a,b]$,使得$\max\limits_{x\in[a,b]}|\varphi'(x)|<1$。

局部收敛性

(1) 若$|\varphi'(x^*)|<1$, 其中x^*是不动点, 则存在x^*的某个邻域$N(x^*)=[x^*-\delta,x^*+\delta]$, 使得对于任意$x\in N(x^*)$, 有$|\varphi'(x)|\leqslant L<1$.

(2) 原因: 无法说明$x_0\in N(x^*)$.

- 非线性方法的收敛与初始点有关,收敛速度与不动点有关

§3 不动点迭代方法

全局收敛

给出$[a,b]$,使得 $\max\limits_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)| < 1$。

局部收敛性

(1) 若$|\varphi'(x^*)| < 1$, 其中x^*是不动点, 则存在x^*的某个邻域$N(x^*) = [x^* - \delta, x^* + \delta]$, 使得对于任意$x \in N(x^*)$, 有$|\varphi'(x)| \leqslant L < 1$.

(2) 原因: 无法说明$x_0 \in N(x^*)$.

- 非线性方法的收敛与初始点有关,收敛速度与不动点有关
  若$\varphi'(x^*) \neq 0$(线性收敛),

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x^* = \varphi(x_k) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi)e_k,$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = |\varphi'(x^*)| \neq 0$$

例3.2

求解方程$x\ln x = 1$的根。

例3.2

求解方程$x \ln x = 1$的根。

方程等价于

例3.2

求解方程$x\ln x=1$的根。

方程等价于

$$x=\phi_1(x)=\frac{1}{\ln x},$$

例3.2

求解方程$x\ln x = 1$的根。

方程等价于

$$x = \phi_1(x) = \frac{1}{\ln x}, \qquad x = \phi_2(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right),$$

例3.2

求解方程$x\ln x=1$的根。

方程等价于

$$x=\phi_1(x)=\frac{1}{\ln x},\qquad x=\phi_2(x)=\exp\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$x=\phi_3(x)=x-\frac{1}{3}(x\ln x-1),$$

例3.2

求解方程$x\ln x = 1$的根。

方程等价于

$$x = \phi_1(x) = \frac{1}{\ln x}, \qquad x = \phi_2(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$x = \phi_3(x) = x - \frac{1}{3}(x\ln x - 1), \qquad x = \phi_4(x) = \frac{x+1}{\ln x + 1}.$$

例3.2

求解方程$x\ln x=1$的根。

方程等价于

$$x=\phi_1(x)=\frac{1}{\ln x},\qquad x=\phi_2(x)=\exp\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$x=\phi_3(x)=x-\frac{1}{3}(x\ln x-1),\qquad x=\phi_4(x)=\frac{x+1}{\ln x+1}.$$

有根区间[1.5, 2].

例3.2

求解方程$x\ln x = 1$的根。

方程等价于

$$
\begin{aligned}
x = \phi_1(x) = \frac{1}{\ln x}, &\qquad x = \phi_2(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right), \\
x = \phi_3(x) = x - \frac{1}{3}(x\ln x - 1), &\qquad x = \phi_4(x) = \frac{x+1}{\ln x + 1}.
\end{aligned}
$$

有根区间$[1.5, 2]$.

$$
\max_{x\in[1.5,2]} |\phi_1'(x)| \approx 4.055,
$$

例3.2

求解方程$x\ln x = 1$的根。

方程等价于

$$x = \phi_1(x) = \frac{1}{\ln x}, \qquad x = \phi_2(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$x = \phi_3(x) = x - \frac{1}{3}(x\ln x - 1), \qquad x = \phi_4(x) = \frac{x+1}{\ln x + 1}.$$

有根区间$[1.5, 2]$.

$$\max_{x\in[1.5,2]} |\phi_1'(x)| \approx 4.055, \qquad \max_{x\in[1.5,2]} |\phi_2'(x)| \approx 0.866,$$

例3.2

求解方程$x\ln x=1$的根。

方程等价于

$$x=\phi_1(x)=\frac{1}{\ln x},\qquad x=\phi_2(x)=\exp\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$x=\phi_3(x)=x-\frac{1}{3}(x\ln x-1),\qquad x=\phi_4(x)=\frac{x+1}{\ln x+1}.$$

有根区间[1.5, 2].

$$\max_{x\in[1.5,2]}|\phi_1'(x)|\approx 4.055,\qquad \max_{x\in[1.5,2]}|\phi_2'(x)|\approx 0.866,$$
$$\max_{x\in[1.5,2]}|\phi_3'(x)|\approx 0.532,$$

例3.2

求解方程$x\ln x = 1$的根。

方程等价于

$$x = \phi_1(x) = \frac{1}{\ln x}, \qquad x = \phi_2(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$x = \phi_3(x) = x - \frac{1}{3}(x\ln x - 1), \qquad x = \phi_4(x) = \frac{x+1}{\ln x + 1}.$$

有根区间$[1.5, 2]$.

$$\max_{x\in[1.5,2]} |\phi_1'(x)| \approx 4.055, \qquad \max_{x\in[1.5,2]} |\phi_2'(x)| \approx 0.866,$$
$$\max_{x\in[1.5,2]} |\phi_3'(x)| \approx 0.532, \qquad \max_{x\in[1.5,2]} |\phi_4'(x)| \approx 0.132.$$

§3 不动点迭代方法

方程$x \ln x = 1$的不同迭代法

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
x_0	1.750	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00

方程$x\ln x=1$的不同迭代法

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
x_0	1.750	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00
x_1	1.787	1.770 794 952 435 15	1.756 890 790 371 00	1.763 254 784 462 25

方程$x\ln x=1$的不同迭代法

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
x_0	1.750	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00
x_1	1.787	1.770 794 952 435 15	1.756 890 790 371 00	1.763 254 784 462 25
x_2	1.723	1.758 951 903 005 44	1.760 194 735 991 50	1.763 222 834 536 61
x_3	1.839	1.765 652 618 481 77	1.761 775 690 112 28	1.763 222 834 351 90
x_4	1.642	1.761 847 231 831 66	1.762 531 452 898 81	1.763 222 834 351 90

方程$x\ln x = 1$的不同迭代法

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
x_0	1.750	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00
x_1	1.787	1.770 794 952 435 15	1.756 890 790 371 00	1.763 254 784 462 25
x_2	1.723	1.758 951 903 005 44	1.760 194 735 991 50	1.763 222 834 536 61
x_3	1.839	1.765 652 618 481 77	1.761 775 690 112 28	1.763 222 834 351 90
x_4	1.642	1.761 847 231 831 66	1.762 531 452 898 81	1.763 222 834 351 90
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_9	-27.462			

方程$x\ln x = 1$的不同迭代法

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
x_0	1.750	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00
x_1	1.787	1.770 794 952 435 15	1.756 890 790 371 00	1.763 254 784 462 25
x_2	1.723	1.758 951 903 005 44	1.760 194 735 991 50	1.763 222 834 536 61
x_3	1.839	1.765 652 618 481 77	1.761 775 690 112 28	1.763 222 834 351 90
x_4	1.642	1.761 847 231 831 66	1.762 531 452 898 81	1.763 222 834 351 90
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_9	-27.462			
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
x_{41}			1.763 222 834 351 90	

方程$x\ln x=1$的不同迭代法

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4
x_0	1.750	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00
x_1	1.787	1.770 794 952 435 15	1.756 890 790 371 00	1.763 254 784 462 25
x_2	1.723	1.758 951 903 005 44	1.760 194 735 991 50	1.763 222 834 536 61
x_3	1.839	1.765 652 618 481 77	1.761 775 690 112 28	1.763 222 834 351 90
x_4	1.642	1.761 847 231 831 66	1.762 531 452 898 81	1.763 222 834 351 90
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_9	-27.462			
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
x_{41}			1.763 222 834 351 90	
$\vdots$		$\vdots$		
x_{51}		1.763 222 834 351 90		

假设有不动点迭代$x_{k+1} = \varphi(x_k)$, 设不动点为x^*,

$$x_{k+1} - x^* = \varphi'(\xi)(x_k - x^*)$$

假设有不动点迭代$x_{k+1}=\varphi(x_k)$, 若$\varphi'(x)$变化不大,

$$x_{k+1}-x^*=\varphi'(\xi)(x_k-x^*)$$

假设有不动点迭代$x_{k+1} = \varphi(x_k)$, 若$\varphi'(x)$变化不大,

$$x_{k+1} - x^* = \varphi'(\xi)(x_k - x^*) \approx L(x_k - x^*)$$

假设有不动点迭代$x_{k+1}=\varphi(x_k)$, 若$\varphi'(x)$变化不大,

$$x_{k+1}-x^*=\varphi'(\xi)(x_k-x^*)\approx L(x_k-x^*)$$

得

$$x^*\approx\frac{x_{k+1}-Lx_k}{1-L}$$

用两步迭代近似值得到的某种平均是更好的近似;

假设有不动点迭代$x_{k+1} = \varphi(x_k)$, 若$\varphi'(x)$变化不大,

$$x_{k+1} - x^* = \varphi'(\xi)(x_k - x^*) \approx L(x_k - x^*)$$

得

$$x^* \approx \frac{x_{k+1} - Lx_k}{1 - L}$$

用两步迭代近似值得到的某种平均是更好的近似;
另外, 可以看成是一个新的迭代方法,

$$x = \bar{\varphi}(x) = \frac{\varphi(x) - Lx}{1 - L}$$

例4.1

加速例3.2中的函数$\phi_3(x)$的迭代.

例4.1

加速例3.2中的函数$\phi_3(x)$的迭代.

$$0.53 \approx \phi_3'(1.5) \geqslant \phi_3'(x) \geqslant \phi_3'(2) \approx 0.44,$$

例4.1

加速例*3.2*中的函数$\phi_3(x)$的迭代.

$$0.53 \approx \phi_3'(1.5) \geqslant \phi_3'(x) \geqslant \phi_3'(2) \approx 0.44, \Rightarrow \text{导数变化不大},$$

例4.1

加速例3.2中的函数$\phi_3(x)$的迭代.

$$0.53 \approx \phi_3'(1.5) \geqslant \phi_3'(x) \geqslant \phi_3'(2) \approx 0.44, \Rightarrow \text{导数变化不大},$$

令

$$L = \frac{0.53 + 0.44}{2} = 0.485$$

例4.1

加速例3.2中的函数$\phi_3(x)$的迭代.

$$0.53 \approx \phi_3'(1.5) \geqslant \phi_3'(x) \geqslant \phi_3'(2) \approx 0.44, \Rightarrow \text{导数变化不大},$$

令

$$L = \frac{0.53 + 0.44}{2} = 0.485$$

$$x = \frac{x - \frac{1}{3}(x \ln x - 1) - Lx}{1 - L}$$

例4.1

加速例3.2中的函数$\phi_3(x)$的迭代.

$$0.53 \approx \phi_3'(1.5) \geqslant \phi_3'(x) \geqslant \phi_3'(2) \approx 0.44, \Rightarrow \text{导数变化不大},$$

令

$$L = \frac{0.53 + 0.44}{2} = 0.485$$

$$x = \frac{x - \frac{1}{3}(x \ln x - 1) - Lx}{1 - L} = x - \frac{x \ln x - 1}{3(1 - L)}$$

例4.1

加速例3.2中的函数$\phi_3(x)$的迭代.

$$0.53 \approx \phi_3'(1.5) \geqslant \phi_3'(x) \geqslant \phi_3'(2) \approx 0.44, \Rightarrow \text{导数变化不大},$$

令

$$L = \frac{0.53 + 0.44}{2} = 0.485$$

$$x = \frac{x - \frac{1}{3}(x \ln x - 1) - Lx}{1 - L} = x - \frac{x \ln x - 1}{3(1 - L)} = x - 0.6472(x \ln x - 1).$$

	$\phi_3(x)$	加速方法
x_0	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00

	$\phi_3(x)$	加速方法
x_0	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00
x_1	1.756 890 790 371 00	1.763 379 158 584 34
x_2	1.760 194 735 991 50	1.763 220 601 443 68
x_3	1.761 775 690 112 28	1.763 222 866 181 40
x_4	1.762 531 452 898 81	1.763 222 833 898 16
x_5		1.763 222 834 358 36
x_6		1.763 222 834 351 80
x_7		1.763 222 834 351 90
x_8		1.763 222 834 351 90

	$\phi_3(x)$	加速方法
x_0	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00
x_1	1.756 890 790 371 00	1.763 379 158 584 34
x_2	1.760 194 735 991 50	1.763 220 601 443 68
x_3	1.761 775 690 112 28	1.763 222 866 181 40
x_4	1.762 531 452 898 81	1.763 222 833 898 16
x_5		1.763 222 834 358 36
x_6		1.763 222 834 351 80
x_7		1.763 222 834 351 90
x_8		1.763 222 834 351 90
	$\vdots$	
x_{41}	1.763 222 834 351 90	

若仅知$\varphi'(x)$而不知其具体数值

$$
\begin{aligned}
x_{k+1}-x^* &= \varphi(x_k)-\varphi(x^*) = \varphi'(\xi_k)(x_k-x^*),\\
x_k-x^* &= \varphi(x_{k-1})-\varphi(x^*) = \varphi'(\xi_{k-1})(x_{k-1}-x^*),
\end{aligned}
$$

若仅知$\varphi'(x)$而不知其具体数值

$$\begin{aligned} x_{k+1}-x^* &= \varphi(x_k)-\varphi(x^*) = \varphi'(\xi_k)(x_k-x^*), \\ x_k-x^* &= \varphi(x_{k-1})-\varphi(x^*) = \varphi'(\xi_{k-1})(x_{k-1}-x^*), \end{aligned}$$

假若$\varphi'(x)$变化不大,

若仅知$\varphi'(x)$而不知其具体数值

$$\begin{aligned} x_{k+1}-x^* &= \varphi(x_k)-\varphi(x^*) = \varphi'(\xi_k)(x_k-x^*), \\ x_k-x^* &= \varphi(x_{k-1})-\varphi(x^*) = \varphi'(\xi_{k-1})(x_{k-1}-x^*), \end{aligned}$$

假若$\varphi'(x)$变化不大,

$$\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*} \approx \frac{x_k-x^*}{x_{k-1}-x^*}.$$

若仅知$\varphi'(x)$而不知其具体数值

$$x_{k+1}-x^* = \varphi(x_k)-\varphi(x^*) = \varphi'(\xi_k)(x_k-x^*),$$
$$x_k-x^* = \varphi(x_{k-1})-\varphi(x^*) = \varphi'(\xi_{k-1})(x_{k-1}-x^*),$$

假若$\varphi'(x)$变化不大,

$$\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*} \approx \frac{x_k-x^*}{x_{k-1}-x^*}.$$

$$x^* \approx x_{k+1} - \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+1}-2x_k+x_{k-1}}.$$

§4.1 迭代加速——Aitken加速

若仅知$\varphi'(x)$而不知其具体数值

$$
\begin{aligned}
x_{k+1}-x^* &= \varphi(x_k)-\varphi(x^*) = \varphi'(\xi_k)(x_k-x^*),\\
x_k-x^* &= \varphi(x_{k-1})-\varphi(x^*) = \varphi'(\xi_{k-1})(x_{k-1}-x^*),
\end{aligned}
$$

假若$\varphi'(x)$变化不大,

$$
\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*} \approx \frac{x_k-x^*}{x_{k-1}-x^*}.
$$

$$
x^* \approx x_{k+1} - \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+1}-2x_k+x_{k-1}}.
$$

注意: x_{k-1}, x_k, x_{k+1}都是靠近x^*的数, 公式出现了分子分母都很靠近0的情况。

若仅知$\varphi'(x)$而不知其具体数值

$$\begin{aligned} x_{k+1}-x^* &= \varphi(x_k)-\varphi(x^*) = \varphi'(\xi_k)(x_k-x^*), \\ x_k-x^* &= \varphi(x_{k-1})-\varphi(x^*) = \varphi'(\xi_{k-1})(x_{k-1}-x^*), \end{aligned}$$

假若$\varphi'(x)$变化不大,

$$\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*} \approx \frac{x_k-x^*}{x_{k-1}-x^*}.$$

$$x^* \approx x_{k+1} - \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+1}-2x_k+x_{k-1}}.$$

注意: x_{k-1}, x_k, x_{k+1}都是靠近x^*的数, 公式出现了分子分母都很靠近0的情况。采用双精度计算方式。

另外的方式:

另外的方式:

$$\begin{cases} y_k = \varphi(x_k), \quad z_k = \varphi(y_k), \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots . \end{cases}$$

另外的方式:

$$\begin{cases} y_k = \varphi(x_k), \quad z_k = \varphi(y_k), \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots. \end{cases}$$

定理4.1

设不动点迭代$x_{k+1} = \varphi(x_k)$的迭代函数$\varphi(x)$在x^*的某个邻域内具有二阶连续导数，且$\varphi'(x^*) = L$, $L \neq 0, 1$, 则相应的艾特肯*(Aitken)*迭代加速是二阶收敛的，迭代序列的极限仍为x^*.

例4.2

对例3.3中的迭代函数$\phi_2(x)$做*Aitken*加速.

例4.2

对例3.3中的迭代函数$\phi_2(x)$做*Aitken*加速.

Aitken加速为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(\phi_2(x_k) - x_k)^2}{\phi_2(\phi_2(x_k)) - 2\phi_2(x_k) - x_k}.$$

例4.2

对例3.3中的迭代函数$\phi_2(x)$做*Aitken*加速.

Aitken加速为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(\phi_2(x_k) - x_k)^2}{\phi_2(\phi_2(x_k)) - 2\phi_2(x_k) - x_k}.$$

该方法每一步的计算量约为原迭代每一步计算量的两倍.

例4.2

对例3.3中的迭代函数$\phi_2(x)$做*Aitken*加速.

Aitken加速为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(\phi_2(x_k) - x_k)^2}{\phi_2(\phi_2(x_k)) - 2\phi_2(x_k) - x_k}.$$

该方法每一步的计算量约为原迭代每一步计算量的两倍.

	$\phi_2(x)$	艾特肯加速
x_0	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00

例4.2

对例*3.3*中的迭代函数$\phi_2(x)$做*Aitken*加速.

Aitken加速为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(\phi_2(x_k) - x_k)^2}{\phi_2(\phi_2(x_k)) - 2\phi_2(x_k) - x_k}.$$

该方法每一步的计算量约为原迭代每一步计算量的两倍.

	$\phi_2(x)$	艾特肯加速
x_0	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00
x_1	1.770 794 952 435 15	1.763 249 280 656 66
x_2	1.758 951 903 005 44	1.763 222 834 456 39
x_3	1.765 652 618 481 77	1.763 222 834 351 90

例4.2

对例3.3中的迭代函数$\phi_2(x)$做Aitken加速.

Aitken加速为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(\phi_2(x_k) - x_k)^2}{\phi_2(\phi_2(x_k)) - 2\phi_2(x_k) - x_k}.$$

该方法每一步的计算量约为原迭代每一步计算量的两倍.

	$\phi_2(x)$	艾特肯加速
x_0	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00
x_1	1.770 794 952 435 15	1.763 249 280 656 66
x_2	1.758 951 903 005 44	1.763 222 834 456 39
x_3	1.765 652 618 481 77	1.763 222 834 351 90
x_4	1.761 847 231 831 66	NaN

例4.2

对例3.3中的迭代函数$\phi_2(x)$做*Aitken*加速.

Aitken加速为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(\phi_2(x_k) - x_k)^2}{\phi_2(\phi_2(x_k)) - 2\phi_2(x_k) - x_k}.$$

该方法每一步的计算量约为原迭代每一步计算量的两倍.

	$\phi_2(x)$	艾特肯加速
x_0	1.750 000 000 000 00	1.750 000 000 000 00
x_1	1.770 794 952 435 15	1.763 249 280 656 66
x_2	1.758 951 903 005 44	1.763 222 834 456 39
x_3	1.765 652 618 481 77	1.763 222 834 351 90
x_4	1.761 847 231 831 66	NaN
x_{51}	1.763 222 834 351 90	

§5 牛顿法

考虑非线性方程$f(x)=0$,近似根为x_k,在近似根处的Taylor展开为

§5 牛顿法

考虑非线性方程$f(x)=0$,近似根为x_k,在近似根处的Taylor展开为

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2}(x-x_k)^2$$

§5 牛顿法

考虑非线性方程$f(x) = 0$,近似根为x_k,在近似根处的Taylor展开为

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2}(x - x_k)^2$$

取其线性部分有

§5 牛顿法

考虑非线性方程$f(x)=0$,近似根为x_k,在近似根处的Taylor展开为

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2}(x-x_k)^2$$

取其线性部分有

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

§5 牛顿法

考虑非线性方程$f(x)=0$,近似根为x_k,在近似根处的Taylor展开为

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2}(x-x_k)^2$$

取其线性部分有

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

Newton迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

考虑非线性方程$f(x)=0$,近似根为x_k,在近似根处的Taylor展开为

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2}(x-x_k)^2$$

取其线性部分有

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

Newton迭代格式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

注：可看作不动点迭代

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

考虑

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

考虑

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

有

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x^*)f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2} = 0$$

考虑

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

有

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x^*)f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2} = 0$$

若迭代格式$x = \varphi(x) = x + f(x)$, 取$L = \varphi'(x_k)$, 则其加速为

考虑

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

有

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x^*)f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2} = 0$$

若迭代格式$x = \varphi(x) = x + f(x)$, 取$L = \varphi'(x_k)$, 则其加速为

$$x_{k+1} = \frac{\varphi(x_k) - Lx_k}{1 - L} = \frac{x_k + f(x_k) - (1 + f'(x_k))x_k}{-f'(x_k)}$$

$$= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

§5 牛顿法

考虑

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

有

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x^*)f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2} = 0$$

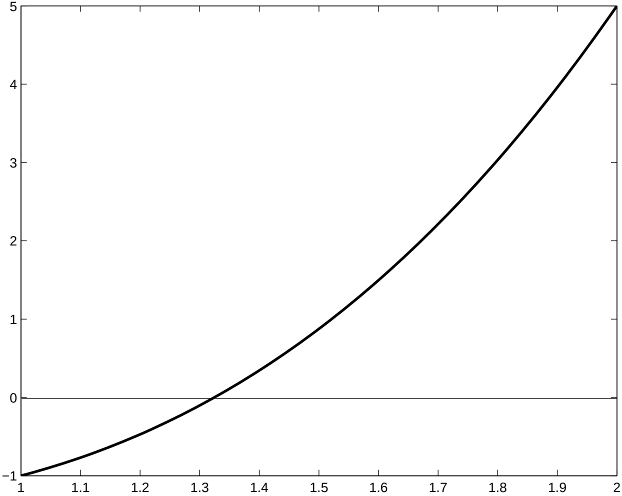
若迭代格式$x = \varphi(x) = x + f(x)$, 取$L = \varphi'(x_k)$, 则其加速为

$$x_{k+1} = \frac{\varphi(x_k) - Lx_k}{1 - L} = \frac{x_k + f(x_k) - (1 + f'(x_k))x_k}{-f'(x_k)}$$

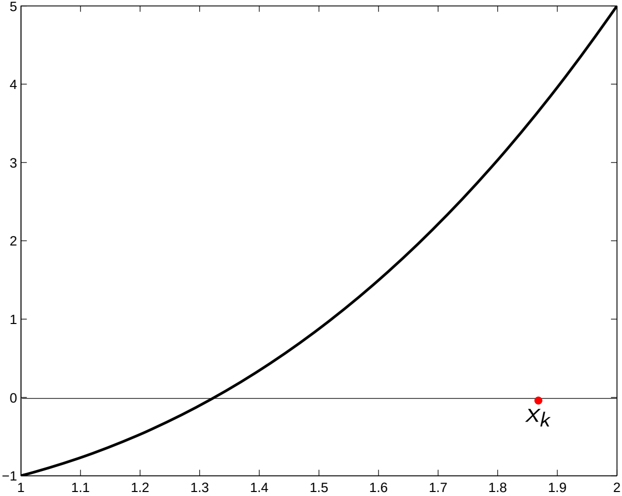
$$= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

特殊的加速法

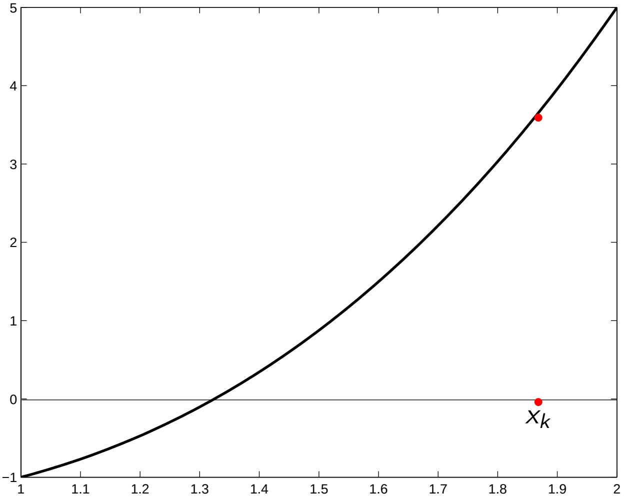
几何含义



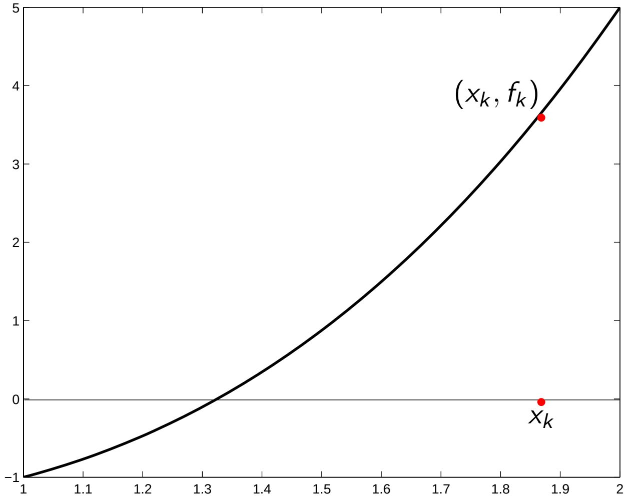
几何含义



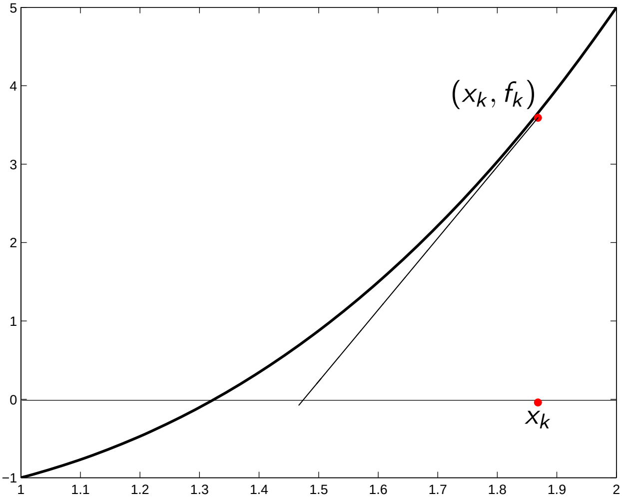
几何含义



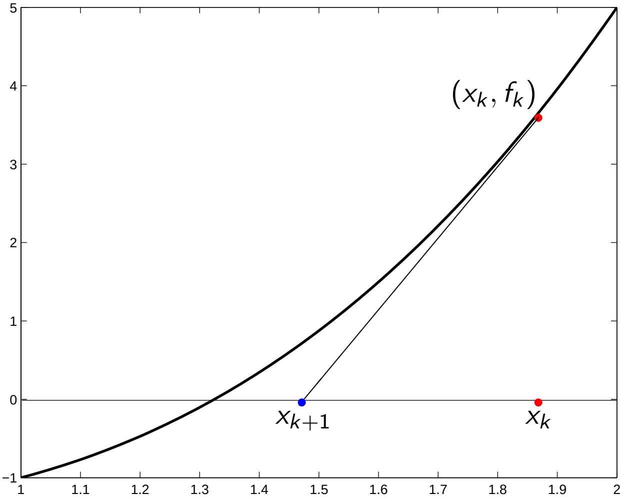
几何含义



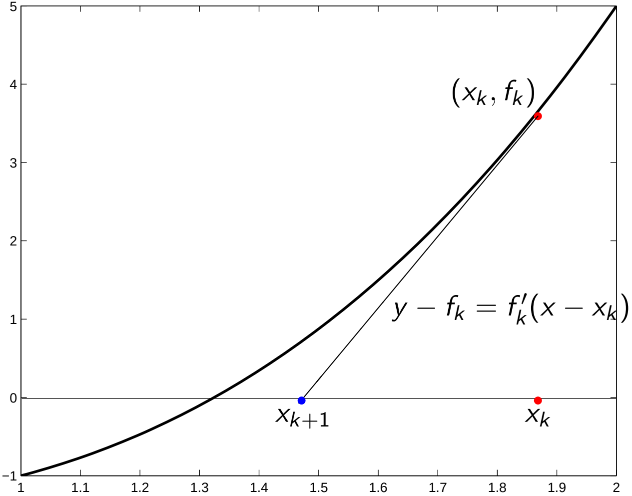
几何含义



几何含义



几何含义



定理5.1 (牛顿法)

设x^*是方程$f(x)=0$的根, f在某个包含x^*为内点的区间内足够光滑, 且$f'(x)\neq 0$. 那么存在x^*的一个邻域$N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$, 使得对于任意$x_0\in N(x^*)$, 牛顿法产生的迭代序列以不低于二阶的收敛速度收敛于解x^*.

定理5.1 (牛顿法)

设x^*是方程$f(x)=0$的根，f在某个包含x^*为内点的区间内足够光滑，且$f'(x)\neq 0$. 那么存在x^*的一个邻域$N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$, 使得对于任意$x_0\in N(x^*)$, 牛顿法产生的迭代序列以不低于二阶的收敛速度收敛于解x^*.

证:

定理5.1 (牛顿法)

设x^*是方程$f(x)=0$的根，f在某个包含x^*为内点的区间内足够光滑，且$f'(x)\neq 0$. 那么存在x^*的一个邻域$N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$，使得对于任意$x_0\in N(x^*)$，牛顿法产生的迭代序列以不低于二阶的收敛速度收敛于解x^*.

证:牛顿法是对应于函数$\phi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$的不动点迭代。

定理5.1 (牛顿法)

设x^*是方程$f(x)=0$的根，f在某个包含x^*为内点的区间内足够光滑，且$f'(x)\neq 0$. 那么存在x^*的一个邻域$N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$，使得对于任意$x_0\in N(x^*)$，牛顿法产生的迭代序列以不低于二阶的收敛速度收敛于解x^*.

证:牛顿法是对应于函数$\phi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$的不动点迭代。

$$\phi'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

定理5.1 (牛顿法)

设x^*是方程$f(x)=0$的根，f在某个包含x^*为内点的区间内足够光滑，且$f'(x)\neq 0$. 那么存在x^*的一个邻域$N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$，使得对于任意$x_0\in N(x^*)$，牛顿法产生的迭代序列以不低于二阶的收敛速度收敛于解x^*.

证: 牛顿法是对应于函数$\phi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$的不动点迭代。

$$\phi'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

若$f'(x)\neq 0$，则有$\phi'(x^*)=0$.

定理5.1 (牛顿法)

设x^*是方程$f(x)=0$的根，f在某个包含x^*为内点的区间内足够光滑，且$f'(x)\neq 0$. 那么存在x^*的一个邻域$N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$, 使得对于任意$x_0\in N(x^*)$, 牛顿法产生的迭代序列以不低于二阶的收敛速度收敛于解x^*.

证:牛顿法是对应于函数$\phi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$的不动点迭代。

$$\phi'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

若$f'(x)\neq 0$, 则有$\phi'(x^*)=0$. 局部收敛

定理5.1 (牛顿法)

设x^*是方程$f(x)=0$的根，f在某个包含x^*为内点的区间内足够光滑，且$f'(x)\neq 0$. 那么存在x^*的一个邻域$N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$，使得对于任意$x_0\in N(x^*)$，牛顿法产生的迭代序列以不低于二阶的收敛速度收敛于解x^*.

证:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1}-x^* &= \varphi(x_k)-\varphi(x^*)\\
&= \varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\frac{\varphi''(\xi_k)}{2}(x_k-x^*)^2-\varphi(x^*)\\
&= \frac{\varphi''(\xi_k)}{2}(x_k-x^*)^2,
\end{aligned}
$$

定理5.1 (牛顿法)

设x^*是方程$f(x)=0$的根，f在某个包含x^*为内点的区间内足够光滑，且$f'(x)\neq 0$. 那么存在x^*的一个邻域$N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$，使得对于任意$x_0\in N(x^*)$，牛顿法产生的迭代序列以不低于二阶的收敛速度收敛于解x^*.

证:

$$\begin{aligned}
x_{k+1}-x^* &= \varphi(x_k)-\varphi(x^*)\\
&= \varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\frac{\varphi''(\xi_k)}{2}(x_k-x^*)^2-\varphi(x^*)\\
&= \frac{\varphi''(\xi_k)}{2}(x_k-x^*)^2,
\end{aligned}$$

因此

定理5.1 (牛顿法)

设x^*是方程$f(x)=0$的根，f在某个包含x^*为内点的区间内足够光滑，且$f'(x)\neq 0$. 那么存在x^*的一个邻域$N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$，使得对于任意$x_0\in N(x^*)$，牛顿法产生的迭代序列以不低于二阶的收敛速度收敛于解x^*.

证:

$$\begin{aligned} x_{k+1}-x^* &= \varphi(x_k)-\varphi(x^*) \\ &= \varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\frac{\varphi''(\xi_k)}{2}(x_k-x^*)^2-\varphi(x^*) \\ &= \frac{\varphi''(\xi_k)}{2}(x_k-x^*)^2, \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{|x_k-x^*|^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi''(\xi_k)}{2}=\frac{\varphi''(x^*)}{2}.$$

定理5.2

给定非线性函数f, 若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微, 满足$f(a)f(b)<0$, 并且对于所有$x\in[a,b]$, 有$f'(x)\neq 0$, $f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$, 则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

定理5.2

给定非线性函数f, 若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微, 满足$f(a)f(b)<0$, 并且对于所有$x\in[a,b]$, 有$f'(x)\neq 0$, $f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$, 则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证:

定理5.2

给定非线性函数f, 若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微, 满足$f(a)f(b)<0$, 并且对于所有$x\in[a,b]$, 有$f'(x)\neq 0$, $f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$, 则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证: $f'(x)$定号,

定理5.2

给定非线性函数f，若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微，满足$f(a)f(b)<0$，并且对于所有$x\in[a,b]$，有$f'(x)\neq 0$，$f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$，则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证： $f'(x)$定号，根是唯一的。

定理5.2

给定非线性函数f, 若它在区间$[a, b]$上二阶连续可微, 满足$f(a)f(b) < 0$, 并且对于所有$x \in [a, b]$, 有$f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$. 若选定初始点$x_0 \in [a, b]$满足$f(x_0)f''(x_0) > 0$, 则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证: $f'(x)$定号, 根是唯一的。f''定号,

定理5.2

给定非线性函数f, 若它在区间$[a, b]$上二阶连续可微, 满足$f(a)f(b) < 0$, 并且对于所有$x \in [a, b]$, 有$f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$. 若选定初始点$x_0 \in [a, b]$满足$f(x_0)f''(x_0) > 0$, 则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证: $f'(x)$定号, 根是唯一的。f''定号, 可得四种情形:

定理5.2

给定非线性函数f，若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微，满足$f(a)f(b)<0$，并且对于所有$x\in[a,b]$，有$f'(x)\neq 0$，$f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$，则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证：$f'(x)$定号，根是唯一的。f''定号，可得四种情形:

1. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$;

定理5.2

给定非线性函数f，若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微，满足$f(a)f(b)<0$，并且对于所有$x\in[a,b]$，有$f'(x)\neq 0$，$f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$，则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证: $f'(x)$定号，根是唯一的。f''定号，可得四种情形:

1. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$;
2. $f'(x)>0$且$f''(x)<0$;

定理5.2

给定非线性函数f，若它在区间$[a, b]$上二阶连续可微，满足$f(a)f(b) < 0$，并且对于所有$x \in [a, b]$，有$f'(x) \neq 0$，$f''(x) \neq 0$. 若选定初始点$x_0 \in [a, b]$满足$f(x_0)f''(x_0) > 0$，则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证： $f'(x)$定号，根是唯一的。f''定号，可得四种情形：

1. $f'(x) > 0$且$f''(x) > 0$;
2. $f'(x) > 0$且$f''(x) < 0$;
3. $f'(x) < 0$且$f''(x) > 0$;

定理5.2

给定非线性函数f, 若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微, 满足$f(a)f(b)<0$, 并且对于所有$x\in[a,b]$, 有$f'(x)\neq 0$, $f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$, 则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证: $f'(x)$定号, 根是唯一的。f''定号, 可得四种情形:

1. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$;
2. $f'(x)>0$且$f''(x)<0$;
3. $f'(x)<0$且$f''(x)>0$;
4. $f'(x)<0$且$f''(x)<0$.

定理5.2

给定非线性函数f，若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微，满足$f(a)f(b)<0$，并且对于所有$x\in[a,b]$，有$f'(x)\neq 0$，$f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$，则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证： $f'(x)$定号，根是唯一的。f''定号，可得四种情形:

1. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$;

定理5.2

给定非线性函数f, 若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微, 满足$f(a)f(b)<0$, 并且对于所有$x\in[a,b]$, 有$f'(x)\neq 0$, $f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$, 则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证: $f'(x)$定号, 根是唯一的。f''定号, 可得四种情形:

1. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$;

$f(a)<0$且$f(b)>0$, 函数单调递增。

定理5.2

给定非线性函数f，若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微，满足$f(a)f(b)<0$，并且对于所有$x\in[a,b]$，有$f'(x)\neq 0$，$f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$，则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证：$f'(x)$定号，根是唯一的。f''定号，可得四种情形：

1. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$;

$f(a)<0$且$f(b)>0$，函数单调递增。由于$f''(x_0)>0$，$f(x_0)>0=f(x^*)$，

定理5.2

给定非线性函数f，若它在区间$[a, b]$上二阶连续可微，满足$f(a)f(b) < 0$，并且对于所有$x \in [a, b]$，有$f'(x) \neq 0$，$f''(x) \neq 0$. 若选定初始点$x_0 \in [a, b]$满足$f(x_0)f''(x_0) > 0$，则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证： $f'(x)$定号，根是唯一的。f''定号，可得四种情形：

1. $f'(x) > 0$且$f''(x) > 0$;

$f(a) < 0$且$f(b) > 0$，函数单调递增。由于$f''(x_0) > 0$，$f(x_0) > 0 = f(x^*)$，因此$x_0 > x^*$.

定理5.2

给定非线性函数f, 若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微, 满足$f(a)f(b)<0$, 并且对于所有$x\in[a,b]$, 有$f'(x)\neq 0$, $f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$, 则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证: $f'(x)$定号, 根是唯一的。f''定号, 可得四种情形:

1. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$;

$f(a)<0$且$f(b)>0$, 函数单调递增。由于$f''(x_0)>0$, $f(x_0)>0=f(x^*)$, 因此$x_0>x^*$. 归纳证明: $x_k>x_{k+1}>x^*$

定理5.2

给定非线性函数f, 若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微, 满足$f(a)f(b)<0$, 并且对于所有$x\in[a,b]$, 有$f'(x)\neq 0$, $f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$, 则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证:

1. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$; $f(x_k)>0$.

定理5.2

给定非线性函数f, 若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微, 满足$f(a)f(b)<0$, 并且对于所有$x\in[a,b]$, 有$f'(x)\neq 0$, $f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$, 则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证:

1. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$; $f(x_k)>0$.

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}<x_k.$$

定理5.2

给定非线性函数f，若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微，满足$f(a)f(b)<0$，并且对于所有$x\in[a,b]$，有$f'(x)\neq 0$，$f''(x)\neq 0$。若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$，则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证：

1. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$；$f(x_k)>0$.

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}<x_k.$$

$$0=f(x^*)=f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\frac{1}{2}f''(\xi_k)(x^*-x_k)^2.$$

定理5.2

给定非线性函数f，若它在区间$[a, b]$上二阶连续可微，满足$f(a)f(b) < 0$，并且对于所有$x \in [a, b]$，有$f'(x) \neq 0$，$f''(x) \neq 0$. 若选定初始点$x_0 \in [a, b]$满足$f(x_0)f''(x_0) > 0$，则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证:

1. $f'(x) > 0$且$f''(x) > 0$; $f(x_k) > 0$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} < x_k.$$

$$0 = f(x^*) > f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k).$$

§5 牛顿法

定理5.2

给定非线性函数f，若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微，满足$f(a)f(b)<0$，并且对于所有$x\in[a,b]$，有$f'(x)\neq 0$，$f''(x)\neq 0$．若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$，则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*．

证：

1. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$；$f(x_k)>0$．

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}<x_k.$$

$$0=f(x^*)>f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k).$$

$$x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}>x^*$$

定理5.2

给定非线性函数f，若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微，满足$f(a)f(b)<0$，并且对于所有$x\in[a,b]$，有$f'(x)\neq 0$，$f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$，则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证:

1. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$; $f(x_k)>0$.

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}<x_k.$$

$$0=f(x^*)>f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k).$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}>x^*$$

定理5.2

给定非线性函数f, 若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微, 满足$f(a)f(b)<0$, 并且对于所有$x\in[a,b]$, 有$f'(x)\neq 0$, $f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$, 则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证:

1. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$; $f(x_k)>0$.

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}<x_k.$$

$\{x_k\}$单调下降且有下界x^*.

定理5.2

给定非线性函数f, 若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微, 满足$f(a)f(b)<0$, 并且对于所有$x\in[a,b]$, 有$f'(x)\neq 0$, $f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$, 则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

证:

1. $f'(x)>0$且$f''(x)>0$; $f(x_k)>0$.

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}<x_k.$$

$\{x_k\}$单调下降且有下界x^*. 两边取极限。

§5 牛顿法

定理5.2

给定非线性函数f，若它在区间$[a,b]$上二阶连续可微，满足$f(a)f(b)<0$，并且对于所有$x\in[a,b]$，有$f'(x)\neq 0$，$f''(x)\neq 0$. 若选定初始点$x_0\in[a,b]$满足$f(x_0)f''(x_0)>0$，则牛顿迭代法收敛于方程的唯一解x^*.

定理5.3

设在区间$[a,b]$上有二阶连续可微函数$f(x)$，$f(a)f(b)<0$，并且对于所有$x\in[a,b]$，有$f'(x)\neq 0$，$f''(x)\neq 0$. 若a,b两点满足

$$\max\left(\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|,\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|\right)<b-a,$$

则对于任何$x_0\in[a,b]$，牛顿法迭代收敛于方程的唯一根x^*.

例5.1

设计一个算法计算$\sqrt{a}$, 其中$a > 0$.

例5.1

设计一个算法计算$\sqrt{a}$, 其中$a > 0$.

计算$\sqrt{a}$相当于求解方程$x^2 - a = 0$的正根。

例5.1

设计一个算法计算$\sqrt{a}$, 其中$a > 0$.

计算$\sqrt{a}$相当于求解方程$x^2 - a = 0$的正根。

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right),$$

例5.1

设计一个算法计算$\sqrt{a}$, 其中$a > 0$.

计算$\sqrt{a}$相当于求解方程$x^2 - a = 0$的正根。

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right),$$

可证

$$x_{k+1} \pm \sqrt{a} = \frac{1}{2x_k}(x_k \pm \sqrt{a})^2,$$

例5.1

设计一个算法计算$\sqrt{a}$, 其中$a > 0$.

计算$\sqrt{a}$相当于求解方程$x^2 - a = 0$的正根。

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right),$$

可证

$$x_{k+1} \pm \sqrt{a} = \frac{1}{2x_k}(x_k \pm \sqrt{a})^2,$$

$$\frac{x_{k+1} - \sqrt{a}}{(x_k - \sqrt{a})^2} = \frac{x_{k+1} + \sqrt{a}}{(x_k + \sqrt{a})^2} \to \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

例5.1

设计一个算法计算$\sqrt{a}$, 其中$a > 0$.

$\sqrt{2}$的不同近似值

k	x_k	有效位
0	2.000 000 000 000 00	0
1	1.500 000 000 000 00	1
2	1.416 666 666 666 67	3
3	1.414 215 686 274 51	6
4	1.414 213 562 374 69	12
5	1.414 213 562 373 09	15
6	1.414 213 562 373 09	15

有重根的情形:

有重根的情形:设$f(x)=(x-x^*)^m g(x)$, 其中, $m\geqslant 2$且$g(x^*)\neq 0$.

有重根的情形:设$f(x) = (x - x^*)^m g(x)$, 其中, $m \geqslant 2$且$g(x^*) \neq 0$.

$$f'(x) = m(x - x^*)^{m-1} g(x) + (x - x^*)^m g'(x),$$

有重根的情形:设$f(x)=(x-x^*)^m g(x)$, 其中, $m\geqslant 2$且$g(x^*)\neq 0$.

$$f'(x)=m(x-x^*)^{m-1}g(x)+(x-x^*)^m g'(x),$$

$$\mu(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{(x-x^*)g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)}.$$

有重根的情形:设$f(x) = (x - x^*)^m g(x)$, 其中, $m \geqslant 2$且$g(x^*) \neq 0$.

$$f'(x) = m(x - x^*)^{m-1} g(x) + (x - x^*)^m g'(x),$$

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x - x^*) g(x)}{m g(x) + (x - x^*) g'(x)}.$$

单根

有重根的情形:设$f(x) = (x - x^*)^m g(x)$, 其中, $m \geqslant 2$且$g(x^*) \neq 0$.

$$f'(x) = m(x - x^*)^{m-1} g(x) + (x - x^*)^m g'(x),$$

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x - x^*)g(x)}{mg(x) + (x - x^*)g'(x)}.$$

单根

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\mu(x_k)}{\mu'(x_k)} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}.$$

牛顿下山法的迭代公式

$$x_{k+1}(\lambda) = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

牛顿下山法的迭代公式

$$x_{k+1}(\lambda) = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

参数λ依次取$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$使$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$成立.

牛顿下山法的迭代公式

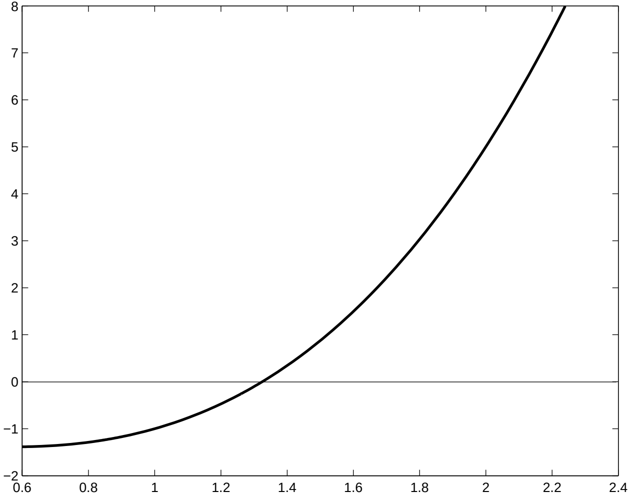
$$x_{k+1}(\lambda) = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

参数λ依次取$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$使$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$成立.

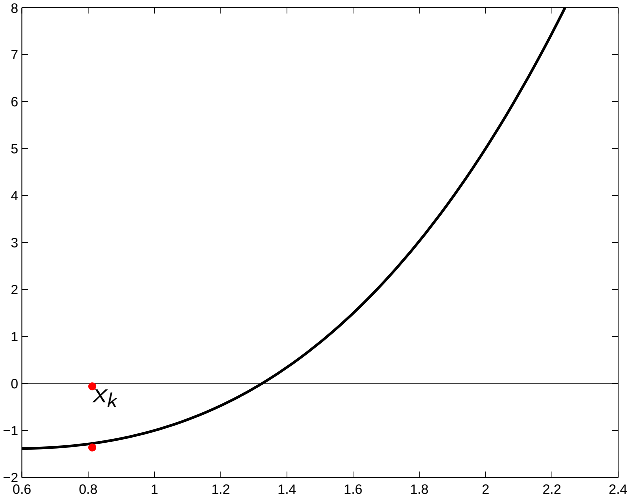
算法5.1 (牛顿下山法)

(1) 给定初始值x_0, 精度ε, $k = 0$;
(2) 若$|f(x_k)| \leqslant \varepsilon$, 近似解为$x_k$, 停止迭代;
(3) 令$d_k = -\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $\lambda = 1$;
(4) 若$|f(x_k + \lambda d_k)| < |f(x_k)|$, 则$x_{k+1} = x_k + \lambda d_k$, 转*(5)*;
否则, $\lambda = \frac{1}{2}\lambda$, 重复步骤*(4)*;
(5) $k = k + 1$, 转*(2)*.

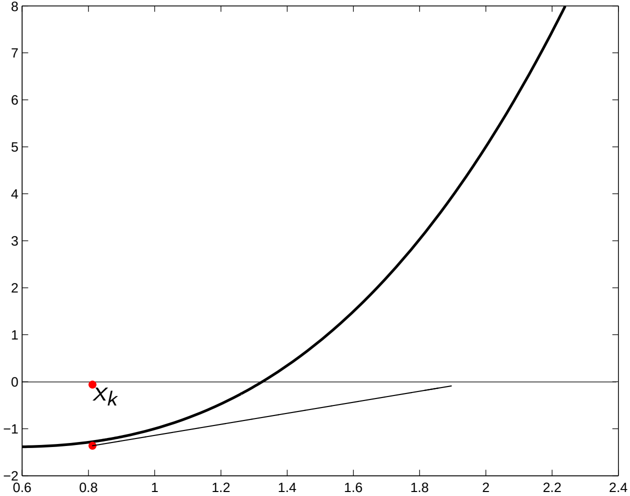
几何含义



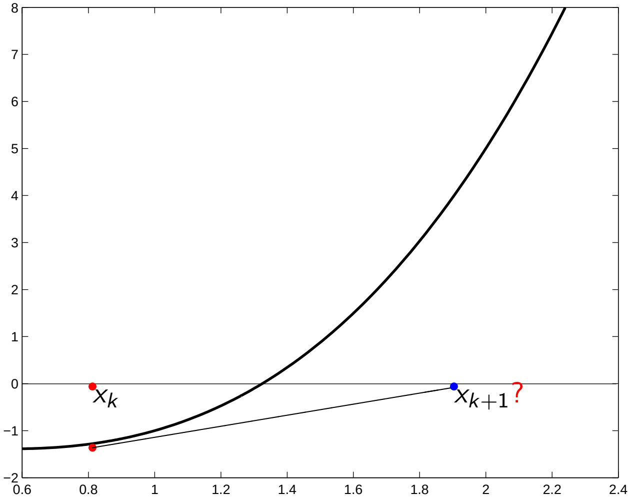
几何含义



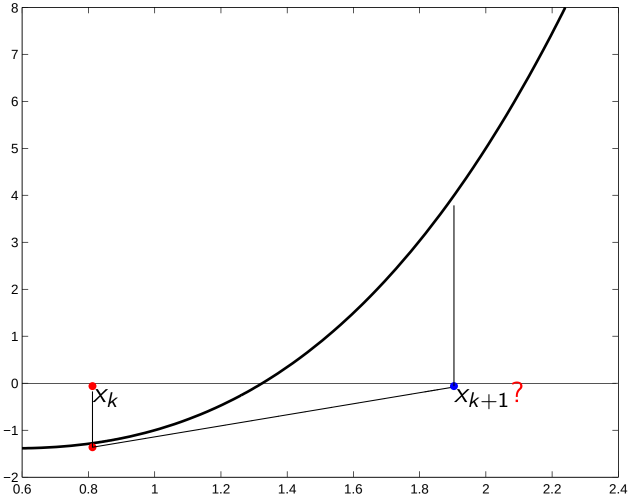
几何含义



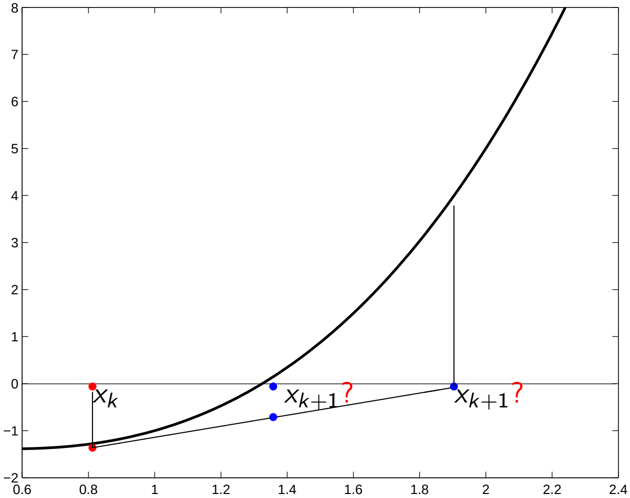
几何含义



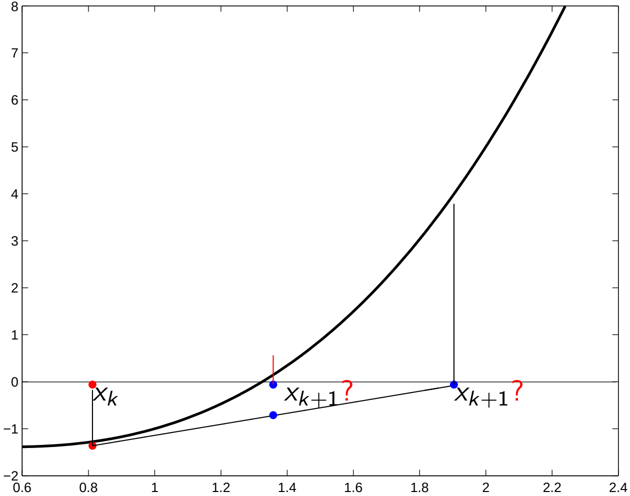
几何含义



几何含义



几何含义



```
function [x,it,convg] = newton(x0,f,g,maxit,tol)
% find the zero of function f, with gradient g provided
% Usage: [x,it,convg] = newton(x0,f,g,maxit,tol)
   if nargin<5,       tol = 1e-10;
       if nargin<4, maxit = 100;
       end; end
   x = x0;
   fx = feval(f,x);
   convg = 0;
   it = 1;
   while ~convg,
       it = it + 1;
       if norm(fx)<=tol,
           fprintf('Newton Iteration successes!!\n');
           convg = 1;
           return;
       end
```

```
d = - feval(g,x) \ fx;
lambda = 1;
lsdone = 0;
while ~lsdone,
    xn = x + lambda * d;
    fn = feval(f,xn);
    if abs(fn)<abs(fx),
        lsdone = 1;
    else
        lambda = 1/2 * lambda;
        if lambda<=eps,
            convg = -1;
            error('line search fails!!');
        end
    end
end
```

```
        x = xn;
    fx = fn;
    if it > maxit,
        convg = 0;
        error('Newton method needs more iterations.!!');
    end
end
```

例: 计算方程$f(x)=x^2+\sin 10x-1=0$的根。

例: 计算方程$f(x) = x^2 + \sin 10x - 1 = 0$的根。
编写两个Matlab文件:

例: 计算方程$f(x) = x^2 + \sin 10x - 1 = 0$的根。
编写两个Matlab文件:

```
function v = f(x)
   v = x.^2 + sin(10*x) - 1;
```

例: 计算方程$f(x) = x^2 + \sin 10x - 1 = 0$的根。
编写两个Matlab文件:

```
function v = f(x)
   v = x.^2 + sin(10*x) - 1;
```

和

```
function v = g(x)
   v = 2*x + 10*cos(10*x);
```

例: 计算方程$f(x) = x^2 + \sin 10x - 1 = 0$的根。
编写两个Matlab文件:

```
function v = f(x)
   v = x.^2 + sin(10*x) - 1;
```

和

```
function v = g(x)
   v = 2*x + 10*cos(10*x);
```

调用

```
>> [x,it,convg] = newton(30,'f','g')
Newton Iteration successes!!
 x =        -0.41210101366497l
it =          12
convg =        1
```

割线法

令 $f'(x_k) \approx \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ 代入牛顿法

割线法

令 $f'(x_k) \approx \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ 代入牛顿法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

割线法

令 $f'(x_k) \approx \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ 代入牛顿法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$$

割线法

令 $\quad f'(x_k) \approx \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ 代入牛顿法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$$

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k)x_{k-1} + [-f(x_{k-1})]x_k}{f(x_k) + [-f(x_{k-1})]}$$

割线法

$$\text{令}\quad f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad \text{代入牛顿法}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$$

$$x_{k+1} = \frac{f(x_k)x_{k-1} + [-f(x_{k-1})]x_k}{f(x_k) + [-f(x_{k-1})]}$$

几何含义: 用割线代替牛顿法中的切线

例6.1

用割线法求方程$x^3+x^2-1=0$的解。

例6.1

用割线法求方程$x^3+x^2-1=0$的解。有根区间: $[0,1]$.

例6.1

用割线法求方程$x^3+x^2-1=0$的解。有根区间: $[0,1]$.

$$x_{k+1}=x_k-(x_k^3+x_k^2-1)\cdot\frac{x_k-x_{k-1}}{x_k^3+x_k^2-1-(x_{k-1}^3+x_{k-1}^2-1)}$$

例6.1

用割线法求方程$x^3+x^2-1=0$的解。有根区间: $[0,1]$.

$$x_{k+1}=x_k-(x_k^3+x_k^2-1)\cdot\frac{x_k-x_{k-1}}{x_k^3+x_k^2-1-(x_{k-1}^3+x_{k-1}^2-1)}$$

k	牛顿法	割线法
0	1.000 000 000 000 000	0.000 000 000 000 000
1	0.800 000 000 000 000	1.000 000 000 000 000
2	0.756 818 181 818 182	0.500 000 000 000 000
3	0.754 881 474 439 750	0.692 307 692 307 692
4	0.754 877 666 261 399	0.775 603 392 041 748
5	0.754 877 666 246 693	0.753 523 252 510 624
6		0.754 849 585 765 241
7		0.754 877 704 852 898
8		0.754 877 666 245 593
9		0.754 877 666 246 693

定理6.1 (割线法)

给定非线性方程$f(x)=0$. 若函数$f(x)$在其解x^*的某个邻域内二阶连续可导, 且$f'(x^*)\neq 0$, 则存在x^*的一个邻域$N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$, 使得对于任意$x_0, x_1\in N(x^*)$, 割线法产生的序列收敛于解$x^*$, 且收敛阶为$r=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

§6 割线法

定理6.1 (割线法)

给定非线性方程$f(x)=0$. 若函数$f(x)$在其解x^*的某个邻域内二阶连续可导, 且$f'(x^*)\neq 0$, 则存在x^*的一个邻域$N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$, 使得对于任意$x_0, x_1 \in N(x^*)$, 割线法产生的序列收敛于解$x^*$, 且收敛阶为$r=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)\frac{x_k-x_0}{f(x_k)-f(x_0)}$$

定理6.1 (割线法)

给定非线性方程$f(x)=0$. 若函数$f(x)$在其解x^*的某个邻域内二阶连续可导, 且$f'(x^*)\neq 0$, 则存在x^*的一个邻域$N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$, 使得对于任意$x_0, x_1\in N(x^*)$, 割线法产生的序列收敛于解$x^*$, 且收敛阶为$r=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)\frac{x_k-x_0}{f(x_k)-f(x_0)}$$

单点割线法

定理6.1 (割线法)

给定非线性方程$f(x)=0$. 若函数$f(x)$在其解x^*的某个邻域内二阶连续可导，且$f'(x^*)\neq 0$, 则存在x^*的一个邻域$N(x^*)=[x^*-\delta, x^*+\delta]$, 使得对于任意$x_0, x_1\in N(x^*)$, 双点割线法产生的序列收敛于解$x^*$, 且收敛阶为$r=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)\frac{x_k-x_0}{f(x_k)-f(x_0)}$$

单点割线法

§7 非线性方程组简介

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \end{cases}$$

§7 非线性方程组简介

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \end{cases}$$

记: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$,

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \end{cases}$$

记: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $f_i(\mathbf{x}) = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

§7 非线性方程组简介

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \end{cases}$$

记: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $f_i(\mathbf{x}) = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,
$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_n(\mathbf{x}))^T$.

§7 非线性方程组简介

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \end{cases}$$

记: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $f_i(\mathbf{x}) = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,
$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_n(\mathbf{x}))^T$.
定义: 若对于某个$\mathbf{x}$, 存在$\mathbf{x}$的一个邻域$\{\mathbf{z} \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon\} \subset D$, 则称$\mathbf{x}$是$D$的内点。

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \end{cases}$$

记: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $f_i(\mathbf{x}) = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,
$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_n(\mathbf{x}))^T$.
定义: 若对于某个$\mathbf{x}$, 存在$\mathbf{x}$的一个邻域$\{\mathbf{z} \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon\} \subset D$, 则称$\mathbf{x}$是$D$的内点。称$\mathbf{F}$在$\mathbf{x}$点处可微, 若

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \end{cases}$$

记: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $f_i(\mathbf{x}) = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,
$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_n(\mathbf{x}))^T$.
定义: 若对于某个$\mathbf{x}$, 存在$\mathbf{x}$的一个邻域$\{\mathbf{z} \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon\} \subset D$, 则称$\mathbf{x}$是$D$的内点。称$\mathbf{F}$在$\mathbf{x}$点处可微, 若

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{\|\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0,$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \end{cases}$$

记: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $f_i(\mathbf{x}) = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,
$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_n(\mathbf{x}))^T$.
定义: 若对于某个$\mathbf{x}$, 存在$\mathbf{x}$的一个邻域$\{\mathbf{z} \mid \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon\} \subset D$, 则称$\mathbf{x}$是$D$的内点。称$\mathbf{F}$在$\mathbf{x}$点处可微, 若

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{\|\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{F}'(\mathbf{x})\right)_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}.$$

算法7.1 (非线性方程组的高斯–赛德尔迭代方法)

算法7.1 (非线性方程组的高斯–赛德尔迭代方法)

(1) 给定$\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T$, $k = 0$, 控制精度ε;

(2) 对$j = 1, 2, \cdots, n$, 以$t = x_j^{(k)}$为初始值求解如下问题:

$$f_j(x_1^{(k+1)}, \cdots, x_{j-1}^{(k+1)}, t, x_{j+1}^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)}) = 0,$$

并把其解记为$x_j^{(k+1)}$;

(3) 若$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leqslant \varepsilon$, 则迭代收敛, 方程组的近似解为$\mathbf{x}^{(k+1)}$; 否则, $k = k + 1$, 转步骤*(2)*.

定理7.1 (压缩映像定理)

定理7.1 (压缩映像定理)

设$\mathbf{\Phi}: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$在某区域$D_0\subset D$上满足$\mathbf{\Phi}(D_0)\subset D_0$，并且存在压缩因子$L<1$，使得对于任意$\mathbf{x},\mathbf{y}\in D_0$成立
$\|\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})-\mathbf{\Phi}(\mathbf{y})\|\leqslant L\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$. 那么下面的结论成立:

1. $\mathbf{\Phi}$在D_0上存在唯一不动点$\mathbf{x}^*$，即$\mathbf{x}^*=\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}^*)$;
2. 对于任意的$\mathbf{x}^{(0)}\in D_0$，不动点迭代$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}^{(k)})$ 收敛到该唯一不动点$\mathbf{x}^*$，且收敛速度有估计

$$\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*\|\leqslant\frac{1}{1-L}\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\|$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^*\|\leqslant\frac{L^k}{1-L}\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|.$$

§7 非线性方程组简介

牛顿法

§7 非线性方程组简介

牛顿法设函数$\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$连续可微,

牛顿法设函数$\mathbf{F}(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$连续可微, 有近似值
$\mathbf{x}^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$,

牛顿法设函数$\mathbf{F}(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$连续可微, 有近似值
$\mathbf{x}^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$,

$$f_i(\mathbf{x})\approx f_i(\mathbf{x}^{(k)})+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}}(x_j-x_j^{(k)}),$$

§7 非线性方程组简介

牛顿法设函数$\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$连续可微, 有近似值
$\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^T$,

$$f_i(\mathbf{x}) \approx f_i(\mathbf{x}^{(k)}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}} (x_j - x_j^{(k)}),$$

向量形式

牛顿法设函数$\mathbf{F}(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$连续可微, 有近似值
$\mathbf{x}^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$,

$$f_i(\mathbf{x})\approx f_i(\mathbf{x}^{(k)})+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}}(x_j-x_j^{(k)}),$$

向量形式

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})\approx\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})+\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k)}).$$

牛顿法设函数$\mathbf{F}(\mathbf{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$连续可微, 有近似值
$\mathbf{x}^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$,

$$f_i(\mathbf{x})\approx f_i(\mathbf{x}^{(k)})+\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}}(x_j-x_j^{(k)}),$$

向量形式

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})\approx\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})+\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k)}).$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}-[\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

§7 非线性方程组简介

例7.1

求解非线性方程组$\begin{cases} x_1 + \cos x_2 - 1 = 0, \\ \sin x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{cases}$

例7.1

求解非线性方程组$\begin{cases} x_1 + \cos x_2 - 1 = 0, \\ \sin x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{cases}$

不动点迭代

例7.1

求解非线性方程组
$$\begin{cases} x_1+\cos x_2-1=0,\\ \sin x_1+x_2-1=0. \end{cases}$$

不动点迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=1-\cos x_2^{(k)},\\ x_2^{(k+1)}=1+\sin x_1^{(k)}. \end{cases}$$

例7.1

求解非线性方程组 $\begin{cases} x_1+\cos x_2-1=0, \\ \sin x_1+x_2-1=0. \end{cases}$

不动点迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=1-\cos x_2^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)}=1+\sin x_1^{(k)}. \end{cases}$$

高斯—赛德尔迭代

例7.1

求解非线性方程组 $\begin{cases} x_1+\cos x_2-1=0, \\ \sin x_1+x_2-1=0. \end{cases}$

不动点迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=1-\cos x_2^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)}=1+\sin x_1^{(k)}. \end{cases}$$

高斯—赛德尔迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=1-\cos x_2^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)}=1+\sin x_1^{(k+1)}. \end{cases}$$

例7.1

求解非线性方程组 $\begin{cases} x_1 + \cos x_2 - 1 = 0, \\ \sin x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{cases}$

不动点迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - \cos x_2^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} = 1 + \sin x_1^{(k)}. \end{cases}$$

高斯—赛德尔迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - \cos x_2^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} = 1 + \sin x_1^{(k+1)}. \end{cases}$$

牛顿法

例7.1

求解非线性方程组 $\begin{cases} x_1+\cos x_2-1=0, \\ \sin x_1+x_2-1=0. \end{cases}$

不动点迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=1-\cos x_2^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)}=1+\sin x_1^{(k)}. \end{cases}$$

高斯—赛德尔迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=1-\cos x_2^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)}=1+\sin x_1^{(k+1)}. \end{cases}$$

牛顿法

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -\sin x_2^{(k+1)} \\ \cos x_1^{(k+1)} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1^{(k)}+\cos x_2^{(k)}-1 \\ \sin x_1^{(k)}+x_2^{(k)}-1 \end{bmatrix}.$$

方程组的三种不同迭代

k	不动点	高斯—赛德尔	牛顿法
0	$(-1,1)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$
1	(0.459 697 69,0.158 529 02)	(0.459 697 69,1.443 677 20)	(0.490 236 85,1.036 292 58)
2	(0.012 539 43,1.443 677 20)	(0.873 222 96,1.766 403 21)	(0.242 367 19,0.747 841 06)
3	(0.873 222 96,1.012 539 10)	(1.194 361 88,1.929 981 27)	(0.262 089 09,0.740 853 22)
4	(0.470 291 18,1.766 403 21)	(1.351 511 31,1.976 053 23)	(0.262 119 52,0.740 871 74)
5	(1.194 361 88,1.453 145 88)	(1.394 254 86,1.984 456 99)	(0.262 119 53,0.740 871 74)
6	(0.882 620 77,1.929 981 27)	(1.401 963 92,1.985 781 63)	(0.262 119 53,0.740 871 74)
⋮	⋮	⋮	
23	⋮	(1.403 395 71,1.986 021 20)	
⋮	⋮		
47	(1.403 395 71,1.986 021 20)		

设$(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{F}^{(k)})$, $(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{F}^{(k+1)})$分别是第$k$步和$k+1$步的点。

设$(\mathbf{x}^{(k)},\mathbf{F}^{(k)})$, $(\mathbf{x}^{(k+1)},\mathbf{F}^{(k+1)})$分别是第$k$步和$k+1$步的点。通过$(\mathbf{x}^{(k)},\mathbf{F}^{(k)})$的任一直线方程为

$$\mathbf{z}-\mathbf{F}^{(k)}=\mathbf{B}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k)}),$$

设$(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{F}^{(k)})$, $(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{F}^{(k+1)})$分别是第$k$步和$k+1$步的点。通过$(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{F}^{(k)})$的任一直线方程为

$$\mathbf{z} - \mathbf{F}^{(k)} = \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}),$$

若它也通过另一点, 则

$$\mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{F}^{(k)} = \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}).$$

设$(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{F}^{(k)})$, $(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{F}^{(k+1)})$分别是第$k$步和$k+1$步的点。通过$(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{F}^{(k)})$的任一直线方程为

$$\mathbf{z} - \mathbf{F}^{(k)} = \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}),$$

若它也通过另一点，则

$$\mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{F}^{(k)} = \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}).$$

拟牛顿方程

设$(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{F}^{(k)})$, $(\mathbf{x}^{(k+1)}, \mathbf{F}^{(k+1)})$分别是第$k$步和$k+1$步的点。通过$(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{F}^{(k)})$的任一直线方程为

$$\mathbf{z} - \mathbf{F}^{(k)} = \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}),$$

若它也通过另一点, 则

$$\mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{F}^{(k)} = \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}).$$

拟牛顿方程
在第$k+1$步之后, 修正$\mathbf{B}$.

常用的修正公式

常用的修正公式

秩一修正(Rank 1 Update)公式:

常用的修正公式

秩一修正(Rank 1 Update)公式:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \frac{(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{B}_k s^{(k)})\mathbf{s}^{(k)\,T}}{\mathbf{s}^{(k)\,T}\mathbf{s}^{(k)}}.$$

常用的修正公式

秩一修正(Rank 1 Update)公式:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \frac{(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{B}_k s^{(k)})\mathbf{s}^{(k)\,T}}{\mathbf{s}^{(k)\,T}\mathbf{s}^{(k)}}.$$

BFGS(Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)修正公式:

§7.1 非线性方程组简介——拟牛顿方法

常用的修正公式

秩一修正(Rank 1 Update)公式:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \frac{(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{B}_k s^{(k)})\mathbf{s}^{(k)^T}}{\mathbf{s}^{(k)^T}\mathbf{s}^{(k)}}.$$

BFGS(Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)修正公式:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \frac{\mathbf{B}_k \mathbf{s}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)^T} \mathbf{B}_k}{s^{(k)^T} \mathbf{B}_k \mathbf{s}^{(k)}} + \frac{\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)^T}}{\mathbf{s}^{(k)^T} \mathbf{y}^{(k)}}.$$

常用的修正公式

秩一修正(Rank 1 Update)公式:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \frac{(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{B}_k s^{(k)})\mathbf{s}^{(k)^T}}{\mathbf{s}^{(k)^T}\mathbf{s}^{(k)}}.$$

BFGS(Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)修正公式:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k - \frac{\mathbf{B}_k\mathbf{s}^{(k)}\mathbf{s}^{(k)^T}\mathbf{B}_k}{s^{(k)^T}\mathbf{B}_k\mathbf{s}^{(k)}} + \frac{\mathbf{y}^{(k)}\mathbf{y}^{(k)^T}}{\mathbf{s}^{(k)^T}\mathbf{y}^{(k)}}.$$

其中, $\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$, $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{F}^{(k)}$.

算法7.2

(1) 给定初始值$\mathbf{x}^{(0)}$, 初始矩阵$\mathbf{B}_0$, 控制精度ε, $k=0$;
(2) 若$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})\| \leqslant \varepsilon$或者$k \geqslant 1$且$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| \leqslant \varepsilon$, $\mathbf{x}^{(k)}$为近似解, 停止迭代;
(3) 求解$\mathbf{B}_k\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$;
(4) 令$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda_k\mathbf{s}^{(k)}$;
(5) $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$;
(6) 利用秩一修正公式或*BFGS*修正公式计算$\mathbf{B}_{k+1}$;
(7) $k = k+1$, 转*(2)*.

算法7.2

(1) 给定初始值$\mathbf{x}^{(0)}$, 初始矩阵$\mathbf{B}_0$, 控制精度ε, $k=0$;
(2) 若$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})\| \leqslant \varepsilon$或者$k \geqslant 1$且$\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\| \leqslant \varepsilon$, $\mathbf{x}^{(k)}$为近似解, 停止迭代;
(3) 求解$\mathbf{B}_k\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$;
(4) 令$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda_k\mathbf{s}^{(k)}$;
(5) $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$;
(6) 利用秩一修正公式或BFGS修正公式计算$\mathbf{B}_{k+1}$;
(7) $k=k+1$, 转(2).

记算法中矩阵$\mathbf{B}_k$的逆为$\mathbf{H}_k$,

算法7.2

(1) 给定初始值$\mathbf{x}^{(0)}$, 初始矩阵$\mathbf{B}_0$, 控制精度ε, $k=0$;

(2) 若$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})\|\leqslant\varepsilon$或者$k\geqslant 1$且$\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\|\leqslant\varepsilon$, $\mathbf{x}^{(k)}$为近似解, 停止迭代;

(3) 求解$\mathbf{B}_k\mathbf{s}^{(k)}=-\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$;

(4) 令$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}+\lambda_k\mathbf{s}^{(k)}$;

(5) $\mathbf{y}^{(k)}=\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k+1)})-\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$;

(6) 利用秩一修正公式或*BFGS*修正公式计算$\mathbf{B}_{k+1}$;

(7) $k=k+1$, 转*(2)*.

记算法中矩阵$\mathbf{B}_k$的逆为$\mathbf{H}_k$, 仅需修正$\mathbf{H}_{k+1}$.

定理7.2 (Sherman-Morrison公式)

若矩阵$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$可逆，且$\mathbf{I} + \mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}$可逆，其中$\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times m}$，$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m\times m}$是单位矩阵，则

$$(\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{V}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{I} + \mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}.$$

定理7.2 (Sherman-Morrison公式)

若矩阵$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$可逆，且$\mathbf{I} + \mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}$可逆，其中$\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times m}$，$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m\times m}$是单位矩阵，则

$$(\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{V}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{I} + \mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}.$$

逆矩阵秩一修正

定理7.2 (Sherman-Morrison公式)

若矩阵$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$可逆，且$\mathbf{I}+\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}$可逆，其中$\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times m}$，$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m\times m}$是单位矩阵，则

$$(\mathbf{A}+\mathbf{U}\mathbf{V}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{I}+\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}.$$

逆矩阵秩一修正

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{(\mathbf{s}^{(k)} - \mathbf{H}_k\mathbf{y}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)\,T}\mathbf{H}_k}{\mathbf{s}^{(k)\,T}\mathbf{H}_k\mathbf{y}^{(k)}}$$

定理7.2 (Sherman-Morrison公式)

若矩阵$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$可逆，且$\mathbf{I} + \mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}$可逆，其中$\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times m}$，$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m\times m}$是单位矩阵，则

$$(\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{V}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{I} + \mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}.$$

逆矩阵秩一修正

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{(\mathbf{s}^{(k)} - \mathbf{H}_k\mathbf{y}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)\,T}\mathbf{H}_k}{\mathbf{s}^{(k)\,T}\mathbf{H}_k\mathbf{y}^{(k)}}$$

逆矩阵BFGS修正

定理7.2 (Sherman-Morrison公式)

若矩阵$\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$可逆，且$\mathbf{I}+\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}$可逆，其中$\mathbf{U},\mathbf{V}\in\mathbb{R}^{n\times m}$，$\mathbf{I}\in\mathbb{R}^{m\times m}$是单位矩阵，则

$$(\mathbf{A}+\mathbf{U}\mathbf{V}^T)^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{I}+\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{V}^T\mathbf{A}^{-1}.$$

逆矩阵秩一修正

$$\mathbf{H}_{k+1}=\mathbf{H}_k+\frac{(\mathbf{s}^{(k)}-\mathbf{H}_k\mathbf{y}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)\,T}\mathbf{H}_k}{\mathbf{s}^{(k)\,T}\mathbf{H}_k\mathbf{y}^{(k)}}$$

逆矩阵BFGS修正

$$\mathbf{H}_{k+1}=\mathbf{H}_k-\frac{\mathbf{H}_k\mathbf{y}^{(k)}\mathbf{s}^{(k)\,T}+\mathbf{s}^{(k)}\mathbf{y}^{(k)\,T}\mathbf{H}_k}{\mathbf{y}^{(k)\,T}\mathbf{s}^{(k)}}+\left(1+\frac{\mathbf{y}^{(k)\,T}\mathbf{H}_k\mathbf{y}^{(k)}}{\mathbf{y}^{(k)\,T}\mathbf{s}^{(k)}}\right)\frac{\mathbf{s}^{(k)}\mathbf{s}^{(k)\,T}}{\mathbf{y}^{(k)\,T}\mathbf{s}^{(k)}}$$

算法7.3 (实用拟牛顿法)

(1) 给定初始值$\mathbf{x}^{(0)}$, 初始矩阵$\mathbf{H}_0 = \mathbf{I}$(单位矩阵), 控制精度$\varepsilon$, $k = 0$;
(2) 若$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})\| \leqslant \varepsilon$或者$k \geqslant 1$且$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| \leqslant \varepsilon$, $\mathbf{x}^{(k)}$为近似解, 停止迭代;
(3) 计算$\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{H}_k\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$;
(4) 令$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda_k\mathbf{s}^{(k)}$;
(5) $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$;
(6) 利用逆矩阵的秩一修正公式或BFGS修正公式计算$\mathbf{H}_{k+1}$;
(7) $k = k + 1$, 转步骤(2).

§8 非线性最小二乘问题

最小二乘

§8 非线性最小二乘问题

最小二乘 假设有数据(t_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, N$,

§8 非线性最小二乘问题

最小二乘 假设有数据(t_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, N$, 以$y = f(t)$拟合,

最小二乘 假设有数据(t_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, N$, 以$y = f(t)$拟合,

$$\min \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(t_i))^2 .$$

最小二乘 假设有数据(t_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, N$, 以$y = f(t)$拟合,

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - f(t_i))^2 .$$

若

$$f(t) = x_1\phi_1(t) + x_2\phi_2(t) + \cdots + x_n\phi_n(t),$$

线性

最小二乘 假设有数据(t_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, N$, 以$y = f(t)$拟合,

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - f(t_i))^2 .$$

若

$$f(t) = x_1\phi_1(t) + x_2\phi_2(t) + \cdots + x_n\phi_n(t),$$

线性

$$f(t) = x_1 + x_2 t + x_3 \mathrm{e}^{-x_4 t} \quad \text{或} \quad f(t) = x_1 \sin x_2 t.$$

非线性

§8 非线性最小二乘问题

设以函数$y = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$拟合数据$(t_i, y_i)$, $i = 1, \cdots, N$

§8 非线性最小二乘问题

设以函数$y = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$拟合数据$(t_i, y_i)$, $i = 1, \cdots, N$

$$\min F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(t_i, x_1, x_2, \cdots, x_n))^2 .$$

设以函数$y = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$拟合数据$(t_i, y_i)$, $i = 1, \cdots, N$

$$\min F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(t_i, x_1, x_2, \cdots, x_n))^2 .$$

稳定点的条件:

$$F'(\mathbf{x}) = [\mathbf{J}(\mathbf{x})]^T \mathbf{r}(\mathbf{x}) = 0,$$

§8 非线性最小二乘问题

设以函数$y = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$拟合数据$(t_i, y_i)$, $i = 1, \cdots, N$

$$\min F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(t_i, x_1, x_2, \cdots, x_n))^2 .$$

稳定点的条件:

$$F'(\mathbf{x}) = [\mathbf{J}(\mathbf{x})]^T\mathbf{r}(\mathbf{x}) = 0,$$

其中,

§8 非线性最小二乘问题

设以函数$y = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$拟合数据$(t_i, y_i)$, $i = 1, \cdots, N$

$$\min F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(t_i, x_1, x_2, \cdots, x_n))^2 .$$

稳定点的条件:

$$F'(\mathbf{x}) = [\mathbf{J}(\mathbf{x})]^T \mathbf{r}(\mathbf{x}) = 0,$$

其中,

$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = (r_1(\mathbf{x}), r_2(\mathbf{x}), \cdots, r_n(\mathbf{x}))^T$, $r_i(x) = y_i - f(t_i, x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

§8 非线性最小二乘问题

设以函数$y = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$拟合数据$(t_i, y_i)$, $i = 1, \cdots, N$

$$\min F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(t_i, x_1, x_2, \cdots, x_n))^2 .$$

稳定点的条件:

$$F'(\mathbf{x}) = [\mathbf{J}(\mathbf{x})]^T \mathbf{r}(\mathbf{x}) = 0,$$

其中,

$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = (r_1(\mathbf{x}), r_2(\mathbf{x}), \cdots, r_n(\mathbf{x}))^T$, $r_i(x) = y_i - f(t_i, x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}'(\mathbf{x}) = \left(\dfrac{\partial r_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right)$

§8 非线性最小二乘问题

设以函数$y = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$拟合数据$(t_i, y_i)$, $i = 1, \cdots, N$

$$\min F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(t_i, x_1, x_2, \cdots, x_n))^2 .$$

稳定点的条件:

$$F'(\mathbf{x}) = [\mathbf{J}(\mathbf{x})]^T \mathbf{r}(\mathbf{x}) = 0,$$

其中,

$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = (r_1(\mathbf{x}), r_2(\mathbf{x}), \cdots, r_n(\mathbf{x}))^T$, $r_i(x) = y_i - f(t_i, x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}'(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial r_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right)$ (雅可比矩阵)

§8 非线性最小二乘问题

设以函数$y = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$拟合数据$(t_i, y_i)$, $i = 1, \cdots, N$

$$\min F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(t_i, x_1, x_2, \cdots, x_n))^2 .$$

稳定点的条件:

$$F'(\mathbf{x}) = [\mathbf{J}(\mathbf{x})]^T \mathbf{r}(\mathbf{x}) = 0,$$

其中,

$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = (r_1(\mathbf{x}), r_2(\mathbf{x}), \cdots, r_n(\mathbf{x}))^T$, $r_i(x) = y_i - f(t_i, x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}'(\mathbf{x}) = \left(\dfrac{\partial r_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right)$ (雅可比矩阵)

$$F''(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x})^T \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n} r_i(\mathbf{x}) r_i''(\mathbf{x}).$$

用牛顿法计算非线性方程$F'(\mathbf{x}) = 0$的根,

§8 非线性最小二乘问题

用牛顿法计算非线性方程$F'(\mathbf{x}) = 0$的根, 已有近似值$\mathbf{x}^{(k)}$,

用牛顿法计算非线性方程$F'(\mathbf{x}) = 0$的根，已有近似值$\mathbf{x}^{(k)}$,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [F''(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} F'(\mathbf{x}^{(k)})$$

用牛顿法计算非线性方程$F'(\mathbf{x})=0$的根，已有近似值$\mathbf{x}^{(k)}$,

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}-[F''(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}F'(\mathbf{x}^{(k)})$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}-\left[\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^T\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})+\sum_{i=1}^{n}r_i(\mathbf{x}^{(k)})r_i''(\mathbf{x}^{(k)})\right]^{-1}[\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^T\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)})$$

用牛顿法计算非线性方程$F'(\mathbf{x})=0$的根，已有近似值$\mathbf{x}^{(k)}$,

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}-[F''(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1}F'(\mathbf{x}^{(k)})$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}-\left[\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^T\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})+\sum_{i=1}^{n}r_i(\mathbf{x}^{(k)})r_i''(\mathbf{x}^{(k)})\right]^{-1}[\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^T\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)})$$

用牛顿法计算非线性方程$F'(\mathbf{x}) = 0$的根，已有近似值$\mathbf{x}^{(k)}$，

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - [F''(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} F'(\mathbf{x}^{(k)})$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left[\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^T \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \qquad\qquad\qquad\qquad \right]^{-1} [\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})]^T \mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)})$$

算法8.1

高斯—牛顿法

(1) 给定初始点$\mathbf{x}^{(0)}$, 控制精度ε, $k=0$;

(2) 如果$\|\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)})\| \leqslant \varepsilon$, $\|\mathbf{J}(\mathbf{x})^T\mathbf{r}(\mathbf{x})\| \leqslant \varepsilon$ 或者$k>1$且 $\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\| \leqslant \varepsilon$, 则$\mathbf{x}^{(k)}$为近似解, 停止迭代;

(3) 求解

$$\left(\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^T\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \qquad\qquad \right)\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^T\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)});$$

(4) $\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}+\lambda\mathbf{s}^{(k)}$, $k=k+1$, 转*(2)*.

§8 非线性最小二乘问题

算法8.1

高斯—牛顿法(Levenberg-Marquardt算法)

(1) 给定初始点$\mathbf{x}^{(0)}$, 控制精度ε, $k=0$;

(2) 如果$\|\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)})\| \leqslant \varepsilon$, $\|\mathbf{J}(\mathbf{x})^T\mathbf{r}(\mathbf{x})\| \leqslant \varepsilon$ 或者$k>1$且 $\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\| \leqslant \varepsilon$, 则$\mathbf{x}^{(k)}$为近似解, 停止迭代;

(3) 求解

$$\left(\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^T\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})+\mu_k D_k\right)\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})^T\mathbf{r}(\mathbf{x}^{(k)});$$

(4) $\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}+\lambda\mathbf{s}^{(k)}$, $k=k+1$, 转(2).

§9 大范围求解方法

欲求 $f(x) = 0$

§9 大范围求解方法

欲求 $f(x)=0$

已有 $g(x)=0$

§9 大范围求解方法

欲求 $\qquad f(x) = 0$

令$h(t, x) = tf(x) + (1 - t)g(x) = 0,$

已有 $\qquad g(x) = 0$

§9 大范围求解方法

欲求 $\qquad f(x) = 0$

令$h(t,x) = tf(x) + (1-t)g(x) = 0$,

已有$h(0,x) = g(x) = 0$

§9 大范围求解方法

欲求$h(1,x)=f(x)=0$

令$h(t,x)=tf(x)+(1-t)g(x)=0$,

已有$h(0,x)=g(x)=0$

§9 大范围求解方法

欲求$h(1, x) = f(x) = 0$

令$h(t, x) = tf(x) + (1 - t)g(x) = 0, \quad t \in [0, 1],$

已有$h(0, x) = g(x) = 0$

欲求$h(1,x)=f(x)=0$

令$h(t,x)=tf(x)+(1-t)g(x)=0,\ \ t\in[0,1],\ \ x(t)$

已有$h(0,x)=g(x)=0$

同伦算法

欲求$h(1,x)=f(x)=0$

令$h(t,x)=tf(x)+(1-t)g(x)=0,\ \ t\in[0,1],\ \ x(t)$

已有$h(0,x)=g(x)=0$

§9 大范围求解方法

设$x = x(t)$是t的连续函数，满足$h(t, x(t)) = 0$.

§9 大范围求解方法

设$x = x(t)$是t的连续函数，满足$h(t, x(t)) = 0$.

$$0 = h_t(t, x(t)) + h_x(t, x(t))x'(t),$$

设$x = x(t)$是t的连续函数，满足$h(t, x(t)) = 0$.

$$0 = h_t(t, x(t)) + h_x(t, x(t))x'(t),$$

$$x'(t) = -[h_x(t, x(t))]^{-1} h_t(t, x(t)).$$

§9 大范围求解方法

设$x = x(t)$是t的连续函数，满足$h(t, x(t)) = 0$.

$$0 = h_t(t, x(t)) + h_x(t, x(t))x'(t),$$

$$x'(t) = -[h_x(t, x(t))]^{-1} h_t(t, x(t)).$$

若$g(x) = 0$的根为a,

设$x=x(t)$是t的连续函数，满足$h(t,x(t))=0$.

$$0=h_t(t,x(t))+h_x(t,x(t))x'(t),$$

$$x'(t)=-[h_x(t,x(t))]^{-1}h_t(t,x(t)).$$

若$g(x)=0$的根为a,

$$\begin{cases} x'(t)=-[h_x(t,x(t))]^{-1}h_t(t,x(t)), \\ x(0)=a, \quad 0\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

常微分方程初值问题

设$x=x(t)$是t的连续函数，满足$h(t,x(t))=0$.

$$0=h_t(t,x(t))+h_x(t,x(t))x'(t),$$

$$x'(t)=-[h_x(t,x(t))]^{-1}h_t(t,x(t)).$$

若$g(x)=0$的根为a,

$$\begin{cases} x'(t)=-[h_x(t,x(t))]^{-1}h_t(t,x(t)), \\ x(0)=a, \quad 0\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

常微分方程初值问题　令$x'(t)\approx\dfrac{x(t+\delta t)-x(t)}{\delta t}$,

设$x = x(t)$是t的连续函数，满足$h(t, x(t)) = 0$.

$$0 = h_t(t, x(t)) + h_x(t, x(t))x'(t),$$

$$x'(t) = -[h_x(t, x(t))]^{-1} h_t(t, x(t)).$$

若$g(x) = 0$的根为a,

$$\begin{cases} x'(t) = -[h_x(t, x(t))]^{-1} h_t(t, x(t)), \\ x(0) = a, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

常微分方程初值问题　令$x'(t) \approx \dfrac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t}$,

$$x(t+\delta t) = x(t) - \delta t[h_x(t, x(t))]^{-1} h_t(t, x(t)).$$

设$x = x(t)$是t的连续函数，满足$h(t, x(t)) = 0$.

$$0 = h_t(t, x(t)) + h_x(t, x(t))x'(t),$$

$$x'(t) = -[h_x(t, x(t))]^{-1}h_t(t, x(t)).$$

若$g(x) = 0$的根为a,

$$\begin{cases} x'(t) = -[h_x(t, x(t))]^{-1}h_t(t, x(t)), \\ x(0) = a, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

常微分方程初值问题　令$x'(t) \approx \dfrac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t}$,

$$x(t+\delta t) = x(t) - \delta t[h_x(t, x(t))]^{-1}h_t(t, x(t)).$$

用牛顿法迭代,

设$x = x(t)$是t的连续函数，满足$h(t, x(t)) = 0$.

$$0 = h_t(t, x(t)) + h_x(t, x(t))x'(t),$$

$$x'(t) = -[h_x(t, x(t))]^{-1} h_t(t, x(t)).$$

若$g(x) = 0$的根为a,

$$\begin{cases} x'(t) = -[h_x(t, x(t))]^{-1} h_t(t, x(t)), \\ x(0) = a, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

常微分方程初值问题　令$x'(t) \approx \dfrac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t}$,

$$x(t+\delta t) = x(t) - \delta t [h_x(t, x(t))]^{-1} h_t(t, x(t)).$$

用牛顿法迭代,

$$\bar{x}(t+\delta t) = x(t+\delta t) - \frac{h(t+\delta t, x(t+\delta t))}{h'_x(t+\delta t, x(t+\delta t))}.$$

§9 大范围求解方法

例9.1

考虑下面三个方程的同伦算法:

(1) 求$f(x)=x^3+x-6$的根，初值$x_0=1$;

(2) 求$f(x)=x^2-6x+8$的根，初值$x_0=1$;

(3) 求$f(x)=x^3+5x^2+x+5$的根，初值$x_0=1$;

例9.1

考虑下面三个方程的同伦算法:

(1) 求$f(x) = x^3 + x - 6$的根, 初值$x_0 = 1$;

(2) 求$f(x) = x^2 - 6x + 8$的根, 初值$x_0 = 1$;

(3) 求$f(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5$的根, 初值$x_0 = 1$;

$$h(t, x) = tf(x) + (1 - t)(x - 1)$$

例9.1

考虑下面三个方程的同伦算法:

(1) 求$f(x)=x^3+x-6$的根，初值$x_0=1$;

(2) 求$f(x)=x^2-6x+8$的根，初值$x_0=1$;

(3) 求$f(x)=x^3+5x^2+x+5$的根，初值$x_0=1$;

$$h(t,x)=tf(x)+(1-t)(x-1)$$

(1) 当$0\leqslant t\leqslant 1$时，$h'_x(t,x)=3tx^2+1>0$，函数关于x严格单增，有唯一实根。

例9.1

考虑下面三个方程的同伦算法:

(1) 求$f(x)=x^3+x-6$的根, 初值$x_0=1$; (单值)

(2) 求$f(x)=x^2-6x+8$的根, 初值$x_0=1$;

(3) 求$f(x)=x^3+5x^2+x+5$的根, 初值$x_0=1$;

$$h(t,x)=tf(x)+(1-t)(x-1)$$

(1) 当$0\leqslant t\leqslant 1$时, $h'_x(t,x)=3tx^2+1>0$, 函数关于x严格单增, 有唯一实根。

例9.1

考虑下面三个方程的同伦算法:

(1) 求$f(x)=x^3+x-6$的根, 初值$x_0=1$; (单值)

(2) 求$f(x)=x^2-6x+8$的根, 初值$x_0=1$;

(3) 求$f(x)=x^3+5x^2+x+5$的根, 初值$x_0=1$;

$$h(t,x)=tf(x)+(1-t)(x-1)$$

(2) $h(0,x)=0$和$h(1,x)=0$有实根;

例9.1

考虑下面三个方程的同伦算法:

(1) 求$f(x) = x^3 + x - 6$的根，初值$x_0 = 1$; (单值)

(2) 求$f(x) = x^2 - 6x + 8$的根，初值$x_0 = 1$;

(3) 求$f(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5$的根，初值$x_0 = 1$;

$$h(t, x) = tf(x) + (1 - t)(x - 1)$$

(2) $h(0, x) = 0$和$h(1, x) = 0$有实根;
但$h(\frac{1}{2}, x) = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 7) = \frac{1}{2}(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{3}{8} = 0$无实根。

例9.1

考虑下面三个方程的同伦算法:

(1) 求$f(x) = x^3 + x - 6$的根, 初值$x_0 = 1$; (单值)

(2) 求$f(x) = x^2 - 6x + 8$的根, 初值$x_0 = 1$; (断开)

(3) 求$f(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5$的根, 初值$x_0 = 1$;

$$h(t, x) = tf(x) + (1 - t)(x - 1)$$

(2) $h(0, x) = 0$和$h(1, x) = 0$有实根;
但$h(\frac{1}{2}, x) = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 7) = \frac{1}{2}(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{3}{8} = 0$无实根。

例9.1

考虑下面三个方程的同伦算法:

(1) 求$f(x)=x^3+x-6$的根，初值$x_0=1$; (单值)

(2) 求$f(x)=x^2-6x+8$的根，初值$x_0=1$; (断开)

(3) 求$f(x)=x^3+5x^2+x+5$的根，初值$x_0=1$;

$$h(t,x)=tf(x)+(1-t)(x-1)$$

(3) $h(1,x)=x^3+5x^2+x+5=(x^2+1)(x-5)=0$有唯一实根。

例9.1

考虑下面三个方程的同伦算法:

(1) 求$f(x)=x^3+x-6$的根，初值$x_0=1$; (单值)

(2) 求$f(x)=x^2-6x+8$的根，初值$x_0=1$; (断开)

(3) 求$f(x)=x^3+5x^2+x+5$的根，初值$x_0=1$;

$$h(t,x)=tf(x)+(1-t)(x-1)$$

(3) $h(1,x)=x^3+5x^2+x+5=(x^2+1)(x-5)=0$有唯一实根。

$t=\frac{1}{5}$时，

$h(\frac{1}{5},x)=\frac{1}{5}(x^3+5x^2+5x+1)=\frac{1}{5}(x+1)(x^2+4x-1)$有三个实根。

§9 大范围求解方法

例9.1

考虑下面三个方程的同伦算法:

(1) 求$f(x)=x^3+x-6$的根, 初值$x_0=1$; (单值)

(2) 求$f(x)=x^2-6x+8$的根, 初值$x_0=1$; (断开)

(3) 求$f(x)=x^3+5x^2+x+5$的根, 初值$x_0=1$; (迂回)

$$h(t,x)=tf(x)+(1-t)(x-1)$$

(3) $h(1,x)=x^3+5x^2+x+5=(x^2+1)(x-5)=0$有唯一实根。

$t=\frac{1}{5}$时,

$h(\frac{1}{5},x)=\frac{1}{5}(x^3+5x^2+5x+1)=\frac{1}{5}(x+1)(x^2+4x-1)$有三个实根。

§9 大范围求解方法

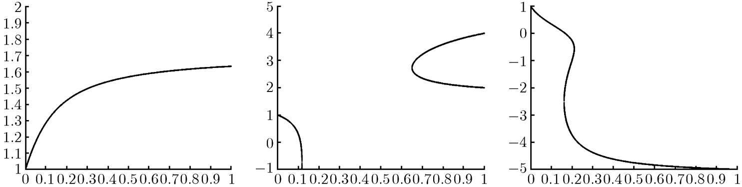
例9.1

考虑下面三个方程的同伦算法:

(1) 求$f(x) = x^3 + x - 6$的根, 初值$x_0 = 1$; (单值)

(2) 求$f(x) = x^2 - 6x + 8$的根, 初值$x_0 = 1$; (断开)

(3) 求$f(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5$的根, 初值$x_0 = 1$; (迂回)



例9.2

利用同伦算法计算非线性方程(组)的根:

(1) 求$f(x) = x^3 + x - 6$的根, 取初值$x_0 = 1$;

(2) 求

$$\begin{cases} x_1 + \cos x_2 - 1 = 0, \\ \sin x_1 + x_2 - 1 = 0, \end{cases}$$

例9.2

利用同伦算法计算非线性方程(组)的根:

(1) 求$f(x)=x^3+x-6$的根, 取初值$x_0=1$;

(2) 求

$$\begin{cases} x_1+\cos x_2-1=0, \\ \sin x_1+x_2-1=0, \end{cases}$$

编写程序`homo.m`,

例9.2

利用同伦算法计算非线性方程(组)的根:

(1) 求$f(x)=x^3+x-6$的根, 取初值$x_0=1$;

(2) 求

$$\begin{cases} x_1+\cos x_2-1=0, \\ \sin x_1+x_2-1=0, \end{cases}$$

编写程序homo.m, 调用

```
>> x=homo('f','g',1)
x =
         1.63436529303759
>> x=homo('f1','g1',[-1 1]')
x =
        0.262119524902768
        0.740871739227832
```

用同伦方法推出牛顿法

用同伦方法推出牛顿法

设有方程$f(x) = 0$,

用同伦方法推出牛顿法

设有方程$f(x)=0$, 初始值为x_0.

用同伦方法推出牛顿法

设有方程$f(x)=0$, 初始值为x_0. 令$h(t,x)=f(x)-\mathrm{e}^{-t}f(x_0)$,

用同伦方法推出牛顿法

设有方程$f(x)=0$, 初始值为x_0. 令$h(t,x)=f(x)-\mathrm{e}^{-t}f(x_0)$, 则

$$h(0,x)=f(x)-f(x_0);$$

用同伦方法推出牛顿法

设有方程$f(x)=0$, 初始值为x_0. 令$h(t,x)=f(x)-\mathrm{e}^{-t}f(x_0)$, 则

$$h(0,x)=f(x)-f(x_0); \qquad \lim_{t\to+\infty} h(t,x)=f(x).$$

用同伦方法推出牛顿法

设有方程$f(x)=0$, 初始值为x_0. 令$h(t,x)=f(x)-\mathrm{e}^{-t}f(x_0)$, 则

$$h(0,x)=f(x)-f(x_0); \qquad \lim_{t\to+\infty} h(t,x)=f(x).$$

$$0=f(x(t))-\mathrm{e}^{-t}f(x_0).$$

用同伦方法推出牛顿法

设有方程$f(x)=0$, 初始值为x_0. 令$h(t,x)=f(x)-\mathrm{e}^{-t}f(x_0)$, 则

$$h(0,x)=f(x)-f(x_0); \qquad \lim_{t\to+\infty} h(t,x)=f(x).$$

$$0=f(x(t))-\mathrm{e}^{-t}f(x_0).$$

两边求导,

用同伦方法推出牛顿法

设有方程$f(x)=0$, 初始值为x_0. 令$h(t,x)=f(x)-\mathrm{e}^{-t}f(x_0)$, 则

$$h(0,x)=f(x)-f(x_0); \qquad \lim_{t\to+\infty} h(t,x)=f(x).$$

$$0=f(x(t))-\mathrm{e}^{-t}f(x_0).$$

两边求导,

$$0=f'(x(t))x'(t)+\mathrm{e}^{-t}f(x_0)$$

用同伦方法推出牛顿法

设有方程$f(x)=0$, 初始值为x_0. 令$h(t,x)=f(x)-\mathrm{e}^{-t}f(x_0)$, 则

$$h(0,x)=f(x)-f(x_0); \qquad \lim_{t\to+\infty} h(t,x)=f(x).$$

$$0=f(x(t))-\mathrm{e}^{-t}f(x_0).$$

两边求导,

$$0=f'(x(t))x'(t)+\mathrm{e}^{-t}f(x_0)=f'(x(t))x'(t)+f(x(t)).$$

用同伦方法推出牛顿法

设有方程$f(x)=0$, 初始值为x_0. 令$h(t,x)=f(x)-\mathrm{e}^{-t}f(x_0)$, 则

$$h(0,x)=f(x)-f(x_0); \qquad \lim_{t\to+\infty} h(t,x)=f(x).$$

$$0=f(x(t))-\mathrm{e}^{-t}f(x_0).$$

两边求导,

$$0=f'(x(t))x'(t)+\mathrm{e}^{-t}f(x_0)=f'(x(t))x'(t)+f(x(t)).$$

即

$$-[f'(x(t))]^{-1}f(x(t))=x'(t)$$

§9 大范围求解方法

用同伦方法推出牛顿法

设有方程$f(x) = 0$，初始值为x_0。令$h(t, x) = f(x) - \mathrm{e}^{-t} f(x_0)$，则

$$h(0, x) = f(x) - f(x_0); \qquad \lim_{t \to +\infty} h(t, x) = f(x).$$

$$0 = f(x(t)) - \mathrm{e}^{-t} f(x_0).$$

两边求导，

$$0 = f'(x(t))x'(t) + \mathrm{e}^{-t} f(x_0) = f'(x(t))x'(t) + f(x(t)).$$

即

$$-[f'(x(t))]^{-1} f(x(t)) = x'(t) = \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t}.$$

§9 大范围求解方法

用同伦方法推出牛顿法

设有方程$f(x)=0$, 初始值为x_0. 令$h(t,x)=f(x)-\mathrm{e}^{-t}f(x_0)$, 则

$$h(0,x)=f(x)-f(x_0); \qquad \lim_{t\to+\infty} h(t,x)=f(x).$$

$$0=f(x(t))-\mathrm{e}^{-t}f(x_0).$$

两边求导,

$$0=f'(x(t))x'(t)+\mathrm{e}^{-t}f(x_0)=f'(x(t))x'(t)+f(x(t)).$$

即

$$-[f'(x(t))]^{-1}f(x(t))=x'(t)=\frac{x(t+\delta t)-x(t)}{\delta t}.$$

令$\delta t=1$, 则

用同伦方法推出牛顿法

设有方程$f(x)=0$, 初始值为x_0. 令$h(t,x)=f(x)-\mathrm{e}^{-t}f(x_0)$, 则

$$h(0,x)=f(x)-f(x_0);\qquad \lim_{t\to+\infty}h(t,x)=f(x).$$

$$0=f(x(t))-\mathrm{e}^{-t}f(x_0).$$

两边求导,

$$0=f'(x(t))x'(t)+\mathrm{e}^{-t}f(x_0)=f'(x(t))x'(t)+f(x(t)).$$

即

$$-[f'(x(t))]^{-1}f(x(t))=x'(t)=\frac{x(t+\delta t)-x(t)}{\delta t}.$$

令$\delta t=1$, 则

$$x(t+1)=x(t)-[f'(x(t))]^{-1}f(x(t)).$$

§10 评注

- 非线性方程求根、非线性最小二乘、非线性最优化

§10 评注

- 非线性方程求根、非线性最小二乘、非线性最优化
- 优化算法: 拟牛顿法、信赖域方法、遗传算法、模拟退火算法等

§10 评注

- 非线性方程求根、非线性最小二乘、非线性最优化
- 优化算法: 拟牛顿法、信赖域方法、遗传算法、模拟退火算法等
- 算法的性能及稳定性