数值积分和数值微分

主讲：王伟

Emal: wangw@tongji.edu.cn

同济大学数学科学学院

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x)$$

Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x)$$

数值(近似)积分的必要性

Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x)$$

数值(近似)积分的必要性

- 无解析原函数的被积函数: $\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2}, 等等

Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x)$$

数值(近似)积分的必要性

- 无解析原函数的被积函数: $\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2}, 等等
- 利用数据表给出的函数的积分

Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x)$$

数值(近似)积分的必要性

- 无解析原函数的被积函数: $\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2}, 等等
- 利用数据表给出的函数的积分
- 计算机程序提供的函数的积分

Newton-Leibniz公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x)$$

数值(近似)积分的必要性

- 无解析原函数的被积函数: $\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2}, 等等
- 利用数据表给出的函数的积分
- 计算机程序提供的函数的积分
- 被积函数表达式太复杂

§1 引言

设在$[a,b]$(不妨先设a,b为有限数)上，$f(x) \approx P_n(x)$，$P_n(x)$为某个较“简单”的函数，则有

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

设在$[a, b]$(不妨先设a, b为有限数)上, $f(x) \approx P_n(x)$, $P_n(x)$为某个较“简单”的函数, 则有

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

- 误差为:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x) - P_n(x)|\, dx$$
$$\leqslant (b-a) \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P_n(x)|$$

设在$[a,b]$(不妨先设a,b为有限数)上, $f(x)\approx P_n(x)$, $P_n(x)$为某个较“简单”的函数, 则有

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

- 误差为:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)-P_n(x)|\,dx$$
$$\leqslant (b-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n(x)|$$

- 因此只要$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n(x)|\leqslant\varepsilon$,就有误差估计

设在$[a,b]$(不妨先设a,b为有限数)上，$f(x)\approx P_n(x)$，$P_n(x)$为某个较“简单”的函数，则有

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

- 误差为:

$$\begin{aligned}|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)dx| &\leqslant \int_a^b |f(x)-P_n(x)|\,dx \\ &\leqslant (b-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n(x)|\end{aligned}$$

- 因此只要$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n(x)|\leqslant\varepsilon$,就有误差估计

设在$[a,b]$(不妨先设a,b为有限数)上, $f(x)\approx P_n(x)$, $P_n(x)$为某个较“简单”的函数, 则有

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

- 误差为:

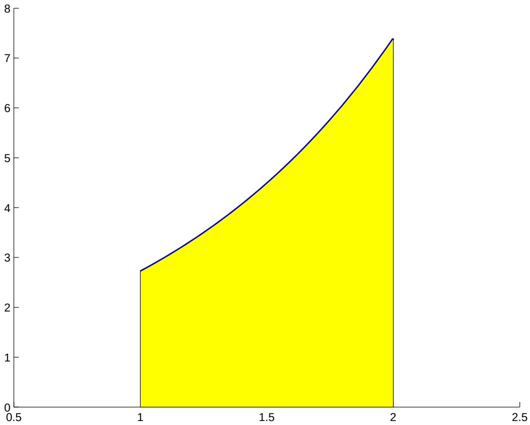
$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)-P_n(x)|\,dx$$
$$\leqslant (b-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n(x)|$$

- 因此只要 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P_n(x)|\leqslant\varepsilon$,就有误差估计

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_n(x)dx\right| \leqslant (b-a)\varepsilon$$

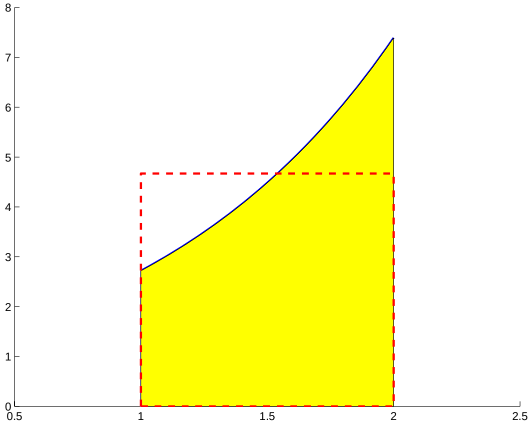
$$I = \int_1^2 e^x dx$$

$$I = \int_1^2 e^x dx$$



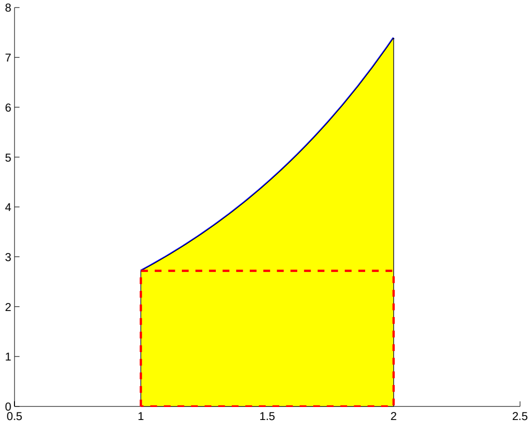
§2.1 几个常用积分公式及其复合公式——几个常用积分公式

$$I = \int_1^2 e^x dx \approx (2-1) \times e^{\xi}$$

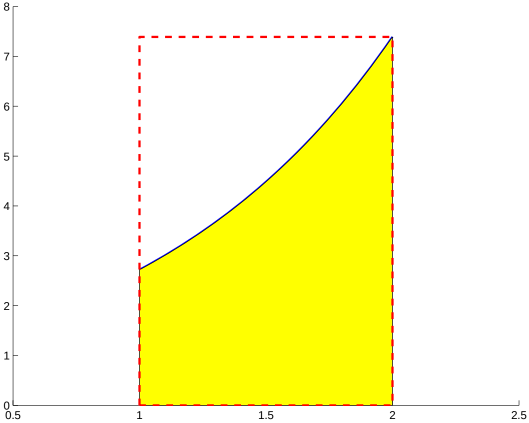


§2.1 几个常用积分公式及其复合公式——几个常用积分公式

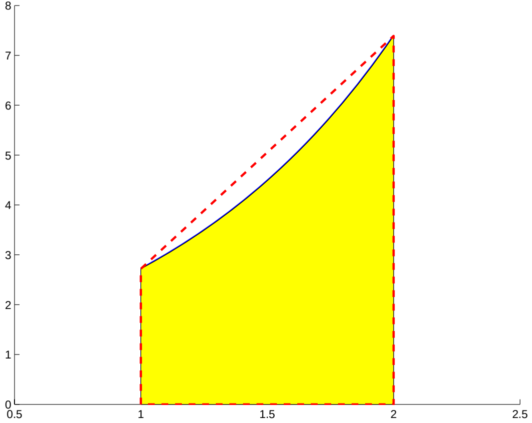
$$I = \int_1^2 e^x dx \approx (2-1) \times e^1$$



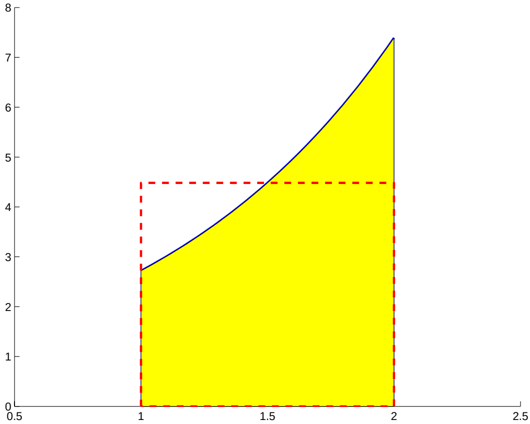
$$I = \int_1^2 e^x dx \approx (2-1) \times e^2$$



$$I=\int_1^2 e^x dx \approx \frac{1}{2}(2-1)\times(e^1+e^2)$$



$$I = \int_1^2 e^x dx \approx (2-1) \times e^{1.5}$$



- 设如果对函数$f(x)$, 用$x = \frac{a+b}{2}$ 上的函数值近似代替，即得中点公式

§2.1 几个常用积分公式及其复合公式——几个常用积分公式

- 设如果对函数$f(x)$, 用$x=\frac{a+b}{2}$ 上的函数值近似代替，即得中点公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

§2.1 几个常用积分公式及其复合公式——几个常用积分公式

- 设如果对函数$f(x)$, 用$x=\frac{a+b}{2}$ 上的函数值近似代替，即得中点公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

- 推导误差:设$f(x)\in C^2[a,b]$,由Taylor公式,

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\eta(x))(x-\frac{a+b}{2})^2,$$

§2.1 几个常用积分公式及其复合公式——几个常用积分公式

- 设如果对函数$f(x)$, 用$x=\frac{a+b}{2}$ 上的函数值近似代替，即得中点公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

- 推导误差:设$f(x)\in C^2[a,b]$,由Taylor公式,

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\eta(x))(x-\frac{a+b}{2})^2,$$

- 两边积分，即得

$$\int_a^b f(x)dx-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{12}(b-a)^3f''(\xi).$$

- 下面我们通过插值节点$x_0 = a$和$x_1 = b$作线性插值函数$L_1(x)$, 利用$f(x) \approx L_1(x)$，得梯形公式:

- 下面我们通过插值节点$x_0 = a$和$x_1 = b$作线性插值函数$L_1(x)$, 利用$f(x) \approx L_1(x)$，得梯形公式:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_1(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right].$$

§2.1 几个常用积分公式及其复合公式——几个常用积分公式

- 下面我们通过插值节点$x_0 = a$和$x_1 = b$作线性插值函数$L_1(x)$, 利用$f(x) \approx L_1(x)$，得梯形公式：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_1(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right].$$

- 上面求积公式的右端值可看成是由线段$x = a, x = b$, 过点$(a, f(a)), (b, f(b))$ 的直线以及x轴围成的梯形面积.

§2.1 几个常用积分公式及其复合公式——几个常用积分公式

- 下面我们通过插值节点$x_0 = a$和$x_1 = b$作线性插值函数$L_1(x)$, 利用$f(x) \approx L_1(x)$，得梯形公式：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_1(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right].$$

- 上面求积公式的右端值可看成是由线段$x = a, x = b$, 过点$(a, f(a)), (b, f(b))$ 的直线以及x轴围成的梯形面积.
- 如果$f(x) \in C^2[a, b]$,则由线性插值函数的误差公式(见第3章)以及积分中值定理得：

§2.1 几个常用积分公式及其复合公式——几个常用积分公式

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right]$$

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right]$$

§2.1 几个常用积分公式及其复合公式——几个常用积分公式

$$
\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right]
= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b L_1(x)dx
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right] \\
&= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b L_1(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b f''\left(\eta(x)\right)(x-a)(x-b)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right] \\
&= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b L_1(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b f''\left(\eta(x)\right)(x-a)(x-b)dx \\
&= -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi),\ \xi \in (a,b).
\end{aligned}
$$

§2.1 几个常用积分公式及其复合公式——几个常用积分公式

- 若$f(x)$用通过节点$x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$的二次插值多项式$L_2(x)$代替，

- 若$f(x)$用通过节点$x_0=a, x_1=\frac{a+b}{2}, x_2=b$的二次插值多项式$L_2(x)$代替，

$$
\begin{aligned}
& f(x) \approx L_2(x) \\
&= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) \\
&+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2),
\end{aligned}
$$

则得抛物型公式(或称Simpson公式)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b L_2(x)dx \\ &= \frac{1}{6}(b-a)[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)].\end{aligned}$$

则得抛物型公式(或称Simpson公式)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b L_2(x)dx \\ &= \frac{1}{6}(b-a)[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)].\end{aligned}$$

可以证明：若$f(x) \in C^4[a,b]$,则有误差公式:

则得抛物型公式(或称Simpson公式)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b L_2(x)dx \\ &= \frac{1}{6}(b-a)[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)].\end{aligned}$$

可以证明：若$f(x) \in C^4[a,b]$,则有误差公式:

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{6}(b-a)[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$
$$= -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi).\ \xi \in (a,b)$$

$$I[f]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)=Q[f]$$

§2.1 几个常用积分公式及其复合公式——几个常用积分公式

$$I[f]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)=Q[f]$$

$$R[f]=I(f)-Q[f]$$

$$I[f]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = Q[f]$$

$$R[f]=I(f)-Q[f]$$

求积公式$I[f]\approx Q[f]$、节点x_i、系数ω_i、余项$R[f]$.

定义2.1

如果对于所有次数$\leqslant m$的多项式f，等式$I[f]=Q[f]$精确成立，但对于某一次数为$m+1$的多项式不精确成立，则称此求积公式的代数精度为m次。

例2.1

试确定系数ω_i, $(i=0,1,2)$, 使得求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(1)$$

有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

例2.1

试确定系数ω_i, $(i=0,1,2)$, 使得求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \omega_0 f(-1)+\omega_1 f(0)+\omega_2 f(1)$$

有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

解:分别令$f(x)=1,\ x,\ x^2$, 代入使积分公式精确成立, 得到线性方程组

$$\left\{\begin{aligned} \omega_0+\omega_1+\omega_2 &= \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x = 2, \\ -\omega_0+\ 0\ +\omega_2 &= \int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = 0, \\ \omega_0+\ 0\ +\omega_2 &= \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}. \end{aligned}\right.$$

- 解得$\omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{3}$, $\omega_1 = \frac{4}{3}$. 这样求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$$

- 解得$\omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{3}$, $\omega_1 = \frac{4}{3}$. 这样求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$$

- 该公式对$f(x) = x^3$精确成立，但$f(x) = x^4$时不精确成立。因此具有三次代数精度。

- 设$H=b-a$, 由误差公式知当H很小时,中点公式, 梯形公式及抛物型公式的误差为$O(H^3)$,$O(H^3)$,$O(H^5)$.

- 设$H=b-a$, 由误差公式知当H很小时,中点公式, 梯形公式及抛物型公式的误差为$O(H^3)$,$O(H^3)$,$O(H^5)$.

- 设$H=b-a$, 由误差公式知当H很小时,中点公式, 梯形公式及抛物型公式的误差为$O(H^3)$,$O(H^3)$,$O(H^5)$.
- 通常情况下,积分区间$[a,b]$的长度$b-a$不是非常小,此时误差就比较大。为了确保计算精度, 提出了复合求积公式.

- 设$H=b-a$, 由误差公式知当H很小时,中点公式, 梯形公式及抛物型公式的误差为$O(H^3)$,$O(H^3)$,$O(H^5)$.
- 通常情况下,积分区间$[a,b]$的长度$b-a$不是非常小,此时误差就比较大。为了确保计算精度, 提出了复合求积公式.

- 设$H=b-a$, 由误差公式知当H很小时,中点公式, 梯形公式及抛物型公式的误差为$O(H^3)$,$O(H^3)$,$O(H^5)$.
- 通常情况下,积分区间$[a,b]$的长度$b-a$不是非常小,此时误差就比较大。为了确保计算精度, 提出了复合求积公式.
- 即将积分区间分为若干份,在每一个“小区间”上用低阶求积公式如中点公式, 梯形公式及抛物型公式进行计算, 再将计算值相加即得原积分的近似值.

复合中点公式

复合中点公式

- 等分求积区间,记小区间$[x_i, x_{i+1}]$中点为$x_{i+\frac{1}{2}}$,记步长$h = \frac{b-a}{n}$, 每个小区间上运用中点求积公式

复合中点公式

- 等分求积区间,记小区间$[x_i, x_{i+1}]$中点为$x_{i+\frac{1}{2}}$,记步长$h=\frac{b-a}{n}$, 每个小区间上运用中点求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) \triangleq M_n$$

复合中点公式

- 等分求积区间,记小区间$[x_i, x_{i+1}]$中点为$x_{i+\frac{1}{2}}$,记步长$h=\frac{b-a}{n}$, 每个小区间上运用中点求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) \triangleq M_n$$

- 设$f(x)\in C^2[a,b]$, 则(待证)存在$\eta\in(a,b)$,

$$I[f]-M_n=\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)=O(h^2)$$

```
function I = fmid(fun,a,b,n)
   h = (b-a)/n;
   x = linspace(a+h/2, b-h/2, n);
   y = feval(fun,x);
   I = h * sum(y);
```

复合梯形公式

§2.3 几个常用积分公式及其复合公式——积分公式的复合

复合梯形公式

- 等分求积区间，节点为$x_i = a + ih(i = 0, 1, \ldots, n)$，每个小区间上运用梯形求积公式

复合梯形公式

- 等分求积区间，节点为$x_i = a + ih(i = 0, 1, \ldots, n)$，每个小区间上运用梯形求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

复合梯形公式

- 等分求积区间，节点为$x_i = a + ih(i = 0, 1, \ldots, n)$，每个小区间上运用梯形求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)] = T_n$$

§2.3 几个常用积分公式及其复合公式——积分公式的复合

复合梯形公式

- 等分求积区间，节点为$x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$，每个小区间上运用梯形求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{2}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)] = T_n$$

- 设$f(x) \in C^2[a, b]$，则存在η_i及$\eta \in (a, b)$，

$$I[f] - T_n = \sum_{i=0}^{n-1}[-\frac{h^3}{12} f''(\eta_i)] = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta) = O(h^2)$$

```
function I = ftrapz(fun,a,b,n)
   h = (b-a)/n;
   x = linspace(a,b,n+1);
   y = feval(fun,x);
   I = h * (0.5*y(1) + sum(y(2:n)) + 0.5*y(n+1) );
```

§2.3 几个常用积分公式及其复合公式——积分公式的复合

复合Simpson公式

复合Simpson公式

- 等分求积区间，记小区间$[x_i, x_{i+1}]$中点为$x_{i+\frac{1}{2}}$,在每个小区间上Simpson求积公式，

复合Simpson公式

- 等分求积区间，记小区间$[x_i, x_{i+1}]$中点为$x_{i+\frac{1}{2}}$,在每个小区间上Simpson求积公式，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{6}[f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})]$$

复合Simpson公式

- 等分求积区间，记小区间$[x_i, x_{i+1}]$中点为$x_{i+\frac{1}{2}}$,在每个小区间上Simpson求积公式，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})]$$

$$=\frac{h}{6}[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(b)]=S_n$$

复合Simpson公式

- 等分求积区间，记小区间$[x_i, x_{i+1}]$中点为$x_{i+\frac{1}{2}}$,在每个小区间上Simpson求积公式，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{6}[f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})]$$

$$= \frac{h}{6}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(b)] = S_n$$

- 设$f(x) \in C^4[a, b]$，则

$$I[f] - S_n = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta) = O(h^4)$$

```
function I = fsimpson(fun,a,b,n)
   h = (b-a)/n;
   x = linspace(a,b,2*n+1);
   y = feval(fun,x);
   I = (h/6) * ( y(1)+2*sum(y(3:2:2*n-1))
       +4*sum(y(2:2:2*n))+y(2*n+1) );
```

§2.3 几个常用积分公式及其复合公式——积分公式的复合

定理2.1

设$g(y) \in C[a,b], a < y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b, \omega_i \geqslant 0$,则存在$\eta \in (a,b)$, 使得

$$\sum_{i=0}^{m} \omega_i g(y_i) = g(\eta) \sum_{i=0}^{m} \omega_i.$$

证 设$g^* = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant m} g(y_i) = g(y^*)$, $g_* = \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant m} g(y_i) = g(y_*)$, 其中 $y^*, y_* \in (a,b)$.则有

$$g(y_*) \sum_{i=0}^{m} \omega_i \leqslant \sum_{i=0}^{m} \omega_i g(y_i) \leqslant g(y^*) \sum_{i=0}^{m} \omega_i.$$

利用连续函数的中值定理，存在$\eta \in (a, b)$,满足:

$$\sum_{i=0}^{m} \omega_i g(y_i) = g(\eta) \sum_{i=0}^{m} \omega_i.$$

利用连续函数的中值定理，存在$\eta \in (a, b)$,满足:

$$\sum_{i=0}^{m} \omega_i g(y_i) = g(\eta) \sum_{i=0}^{m} \omega_i.$$

所以

$$\sum_{i=0}^{m} \omega_i g(y_i) = g(\eta) \sum_{i=0}^{m} \omega_i.$$

§2.3 几个常用积分公式及其复合公式——积分公式的复合

下面设$f(x) \in C^2[a,b]$,推导复合中点公式(5.13)的误差.

下面设$f(x) \in C^2[a,b]$,推导复合中点公式(5.13)的误差.

首先由(5.12), (5.13) 及误差公式(5.3),

$$R_M = \int_a^b f(x)dx - M_n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{12} h^3 f''(\xi).$$

下面设$f(x) \in C^2[a,b]$,推导复合中点公式(5.13)的误差.

首先由(5.12), (5.13) 及误差公式(5.3),

$$R_M = \int_a^b f(x)dx - M_n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{12} h^3 f''(\xi).$$

利用定理5.2.3，便有

$$\int_a^b f(x)dx - M_n = \frac{1}{12} nh^3 f''(\eta) = \frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta).$$

同理可推得复合梯形公式、复合Simpson公式 的误差估计：

$$R_T = \int_a^b f(x)dx - T_n = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\eta), \quad \eta \in (a,b),$$

$$R_S = \int_a^b f(x)dx - S_n = -\frac{1}{2880}(b-a)h^4 f^4(\eta), \quad \eta \in (a,b).$$

§2.3 几个常用积分公式及其复合公式——积分公式的复合

例2.2

设$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $f(x)$ 在9个节点处的值由下表给出，分别用复合梯形公式和复合Simpson公式计算积分 $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx.$

x	0	1/8	1/4	3/8	1/2
$f(x)$	1	0.9973978	0.9896158	0.9767267	0.9538510
x		5/8	3/4	7/8	1
$f(x)$		0.9361556	0.9088516	0.8771925	0.8414709

解 将积分区间[0, 1]八等分，由复合梯形公式(此时$h = \frac{1}{8}$)计算得:

$$
\begin{aligned}
T_8 &= \frac{1}{16}\left\{f(0) + 2\left[f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right)\right] + f(1)\right\} \\
&= 0.9456909.
\end{aligned}
$$

解 将积分区间$[0,1]$八等分，由复合梯形公式(此时$h=\frac{1}{8}$)计算得:

$$\begin{aligned} T_8 &= \frac{1}{16}\left\{f(0)+2\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]+f(1)\right\} \\ &= 0.9456909. \end{aligned}$$

如果将$[0,1]$四等分，由复合Simpson公式($h=\frac{1}{4}$)得:

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{24}\left\{f(0)+4\left[f\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{3}{8}\right)+f\left(\frac{5}{8}\right)+f\left(\frac{7}{8}\right)\right]\right. \\ &\qquad \left.+2\left[f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right]+f(1)\right\} \\ &= 0.9460832. \end{aligned}$$

与精确值I=0.9460831相比较：复合梯形公式两位有效数字,复合Simpson公式有六位有效数字!

与精确值I=0.9460831相比较：复合梯形公式两位有效数字,复合Simpson公式有六位有效数字!

```
function y =f(x)
  x = x + (x==0)*eps;
  y = sin(x) ./ x ;
```

调用：`ftrapz(@f,0,1,8)` 或 `fsimpson(@f,0,1,4)`

例2.3

利用n=5的复合Simpson公式计算积分 $I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

例2.3

利用n=5的复合Simpson公式计算积分 $I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

将$[0,1]$五等分，由复合Simpson公式($h=\frac{1}{5}$)得:

$$
\begin{aligned}
S_5 &= \frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{1+0}+\right.\\
&\quad 4\left[\frac{1}{1+0.1}+\frac{1}{1+0.3}+\frac{1}{1+0.5}+\frac{1}{1+0.7}+\frac{1}{1+0.9}\right]\\
&\quad \left.+2\left[\frac{1}{1+0.2}+\frac{1}{1+0.4}+\frac{1}{1+0.6}+\frac{1}{1+0.8}\right]+\frac{1}{1+1}\right\}\\
&= 0.69315.
\end{aligned}
$$

例2.4

使用三种不同的计算公式: 复合中点公式, 复合梯形公式,复合*Simpson*公式计算下列积分值, 并分别取$n = 2^k (k = 0, 1, \cdots, 8)$, 比较三种不同算法的收敛速度.

$$I = \int_0^{2\pi} xe^{-x} \cos(2x) dx.$$

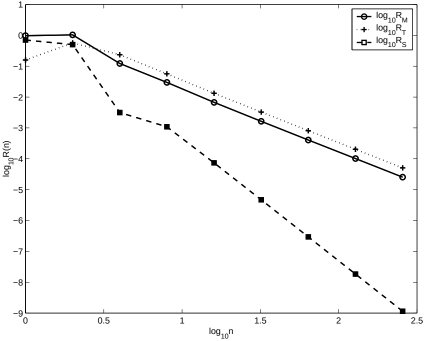
积分的精确值为

$$I = \frac{3(e^{-2\pi} - 1) - 10\pi e^{-2\pi}}{25} \approx -0.122122499\cdots.$$

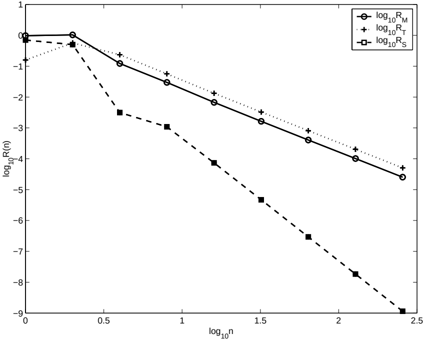
解 三种复合求积公式的计算结果分别用R_M, R_T, R_S表示，则计算结果如下表.

n	R_M	R_T	R_S
1	0.9751	0.1589	0.7030
2	1.0370	0.5670	0.5021
4	0.1222	0.2348	3.139×10^{-3}
8	2.980×10^{-2}	5.635×10^{-2}	1.085×10^{-3}
16	6.748×10^{-3}	1.327×10^{-2}	7.381×10^{-5}
32	1.639×10^{-3}	3.263×10^{-3}	4.682×10^{-6}
64	4.066×10^{-4}	8.123×10^{-4}	2.936×10^{-7}
128	1.014×10^{-4}	2.028×10^{-4}	1.836×10^{-8}
256	2.535×10^{-5}	5.070×10^{-5}	1.148×10^{-9}

三者的收敛速度比较图，其中横坐标为$\log_{10} n$，纵坐标为$\log_{10} R(n)$. 从图中可看出三种计算公式的误差分别为:



三者的收敛速度比较图, 其中横坐标为$\log_{10} n$, 纵坐标为$\log_{10} R(n)$. 从图中可看出三种计算公式的误差分别为:



$$R_M \approx Ch^2, R_T \approx Ch^2, R_S \approx Ch^4.$$

与理论误差估计相当吻合.

复合求积公式的稳定性:

- 设$f(x)$在节点x_i处的精确值为$f(x_i)$,实际值为$\bar{f}(x_i)$. 节点x_i处的误差为

§2.3 几个常用积分公式及其复合公式——积分公式的复合

复合求积公式的稳定性:

- 设$f(x)$在节点x_i处的精确值为$f(x_i)$,实际值为$\bar{f}(x_i)$. 节点x_i处的误差为
$$\varepsilon_i = f(x_i) - \bar{f}(x_i).$$
- 记由数值$f(x_i)$及$\bar{f}(x_i)$计算所得的梯形公式的值为T_n和$\bar{T}_n$,则

复合求积公式的稳定性:

- 设$f(x)$在节点x_i处的精确值为$f(x_i)$,实际值为$\bar{f}(x_i)$. 节点x_i处的误差为
$$\varepsilon_i = f(x_i) - \bar{f}(x_i).$$
- 记由数值$f(x_i)$及$\bar{f}(x_i)$计算所得的梯形公式的值为T_n和$\bar{T}_n$，则
$$T_n - \bar{T}_n = \frac{h}{2}\left(\varepsilon_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i + \varepsilon_n\right).$$
- 设 $\varepsilon = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} |\varepsilon_i|$, 则
$$|T_n - \bar{T}_n| \leqslant \frac{h}{2}(\varepsilon + 2(n-1)\varepsilon + \varepsilon) = (b-a)\varepsilon.$$

引言：

(1) 复合求积公式是有效的求积方法，当步长h越小，计算精度越高.

引言：

(1) 复合求积公式是有效的求积方法，当步长h越小，计算精度越高.

(2) 实际运用中，需选取一个合适的步长h ：

引言：

(1) 复合求积公式是有效的求积方法，当步长h越小, 计算精度越高.

(2) 实际运用中，需选取一个合适的步长h ：
若步长太大,计算精度就难以保证, 若步长太小, 则会增加不必要的计算开销;

引言：

(1) 复合求积公式是有效的求积方法，当步长h越小, 计算精度越高.

(2) 实际运用中，需选取一个合适的步长h：
若步长太大,计算精度就难以保证, 若步长太小, 则会增加不必要的计算开销;

(3) 在给定计算精度的情形下，往往通过不断调整步长的方式进行计算:

引言:

(1) 复合求积公式是有效的求积方法，当步长h越小，计算精度越高.

(2) 实际运用中，需选取一个合适的步长h：
若步长太大,计算精度就难以保证, 若步长太小, 则会增加不必要的计算开销;

(3) 在给定计算精度的情形下，往往通过不断调整步长的方式进行计算:
如采用让步长逐次折半的方式, 反复使用复合求积公式直至相邻两次计算结果之差的绝对值小于给定的计算精度为止. 这种方法即称为变步长算法.

下面以变步长的梯形公式加以说明：

由求积公式误差估计，

$$I - T_n = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\eta_1), \quad \eta_1 \in (a,b),$$

$$\Rightarrow I - T_{2n} = -\frac{1}{12}(b-a)\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\eta_2), \quad \eta_2 \in (a,b).$$

下面以变步长的梯形公式加以说明：

由求积公式误差估计，

$$I - T_n = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\eta_1), \quad \eta_1 \in (a,b),$$

$$\Rightarrow I - T_{2n} = -\frac{1}{12}(b-a)\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\eta_2), \quad \eta_2 \in (a,b).$$

若$f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$，则有

下面以变步长的梯形公式加以说明：

由求积公式误差估计，

$$I - T_n = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\eta_1), \quad \eta_1 \in (a,b),$$

$$\Rightarrow I - T_{2n} = -\frac{1}{12}(b-a)\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\eta_2), \quad \eta_2 \in (a,b).$$

若 $f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$，则有

下面以变步长的梯形公式加以说明：

由求积公式误差估计，

$$I - T_n = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\eta_1), \quad \eta_1 \in (a, b),$$

$$\Rightarrow I - T_{2n} = -\frac{1}{12}(b-a)\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\eta_2), \quad \eta_2 \in (a, b).$$

若$f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$，则有

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{4}(I - T_n),$$

下面以变步长的梯形公式加以说明：

由求积公式误差估计，

$$I - T_n = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\eta_1), \quad \eta_1 \in (a,b),$$

$$\Rightarrow I - T_{2n} = -\frac{1}{12}(b-a)\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\eta_2), \quad \eta_2 \in (a,b).$$

若$f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$，则有

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{4}(I - T_n),$$

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n).$$

下面以变步长的梯形公式加以说明：

由求积公式误差估计,

$$I - T_n = -\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\eta_1), \quad \eta_1 \in (a,b),$$

$$\Rightarrow I - T_{2n} = -\frac{1}{12}(b-a)\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\eta_2), \quad \eta_2 \in (a,b).$$

若$f''(\eta_1) \approx f''(\eta_2)$，则有

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{4}(I - T_n),$$

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n).$$

只要T_n和T_{2n}充分接近,就能保证T_{2n}的误差很小。

算法(区间折半法):

(1) 取初始步长h=b-a;

算法(区间折半法):

(1) 取初始步长h=b-a;

(2) 计算T_n;

算法(区间折半法):

(1) 取初始步长h=b-a;

(2) 计算T_n;

(3) 取步长$h_1 = \frac{h}{2}$,计算出相应的积分值T_{2n};

算法(区间折半法):

(1) 取初始步长h=b-a;

(2) 计算T_n;

(3) 取步长$h_1 = \frac{h}{2}$,计算出相应的积分值T_{2n};

(4) 若条件$|T_{2n} - T_n| \leqslant \varepsilon$满足, 则取$T_{2n}$为最后积分计算的近似值, 否则让步长折半,回到第(3)步.

变步长梯形积分

变步长梯形积分

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

变步长梯形积分

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

区间折半，新增区间$[x_i, x_{i+1}]$中点$x_{i+\frac{1}{2}}$，

变步长梯形积分

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

区间折半, 新增区间$[x_i, x_{i+1}]$中点$x_{i+\frac{1}{2}}$,

$$T_{2n} = \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + 2f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})]$$

变步长梯形积分

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

区间折半, 新增区间$[x_i, x_{i+1}]$中点$x_{i+\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} T_{2n} = & \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + 2f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})] \\ = & \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

变步长梯形积分

$$T_n = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

区间折半, 新增区间$[x_i, x_{i+1}]$中点$x_{i+\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} T_{2n} = & \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + 2f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1})] \\ = & \frac{h}{4}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) + f(x_{i+1})] + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\ = & \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

例3.1

用变步长梯形公式计算积分$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$的近似值，要求计算精度$|T_{2n} - T_n| \leqslant 10^{-7}$.

例3.1

用变步长梯形公式计算积分$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$的近似值，要求计算精度$|T_{2n}-T_n| \leqslant 10^{-7}$.

k	T_n	k	T_n
0	0.9207355	6	0.9460769
1	0.9397933	7	0.9460815
2	0.9445135	8	0.9460827
3	0.9456909	9	0.9460830
4	0.9459850	10	0.9460831
5	0.9460596		

将积分区间等分2^{10}份复合梯形公式才满足计算精度。

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)]$$

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

$$I \approx T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

$$I \approx T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

例如上例中，$T_4 = 0.9445135$，$T_8 = 0.9456909$，(各具有2,3个有效数字,) 新的近似值

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

$$I \approx T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

例如上例中，$T_4 = 0.9445135$，$T_8 = 0.9456909$，(各具有2,3个有效数字,)
新的近似值

$$I \approx T_8 + \frac{1}{3}(T_8 - T_4) = 0.9460833$$

具有6位有效数字。

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

$$I \approx T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

例如上例中，$T_4 = 0.9445135$，$T_8 = 0.9456909$，(各具有2,3个有效数字,) 新的近似值

$$I \approx T_8 + \frac{1}{3}(T_8 - T_4) = 0.9460833$$

具有6位有效数字。 实际上，

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

实际上,

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

例如,

$$T_2 + \frac{1}{3}(T_2 - T_1) = \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1$$

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

实际上，

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

例如，

$$T_2 + \frac{1}{3}(T_2 - T_1) = \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{b-a}{4}[f(a) + 2f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] - \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

实际上，

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

例如，

$$\begin{aligned}
& T_2 + \frac{1}{3}(T_2 - T_1) = \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1 \\
= \quad & \frac{4}{3}\cdot\frac{b-a}{4}[f(a) + 2f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] - \frac{1}{3}\cdot\frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] \\
= \quad & \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] \\
= \quad & S_1
\end{aligned}$$

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

实际上,

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

例如,

$$\begin{aligned} & T_2 + \frac{1}{3}(T_2 - T_1) = \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1 \\ = \quad & \frac{4}{3} \cdot \frac{b-a}{4}[f(a) + 2f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] - \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] \\ = \quad & \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] \\ = \quad & S_1 \end{aligned}$$

加上修正部分使精度从梯形的$O(h^2)$提高到了抛物形的$O(h^4)$.

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

实际上，

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

从抛物形积分组合得到Cotes积分：

$$C_n = S_{2n} + \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n)$$

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

实际上,

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

从抛物形积分组合得到Cotes积分:

$$C_n = S_{2n} + \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n)$$

从Cotes积分组合得到Romberg积分:

$$R_n = C_{2n} + \frac{1}{63}(C_{2n} - C_n)$$

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] \Rightarrow \frac{I - T_{2n}}{I - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

实际上,

$$S_n = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) = \frac{4T_{2n} - T_n}{3}$$

从抛物形积分组合得到Cotes积分:

$$C_n = S_{2n} + \frac{1}{15}(S_{2n} - S_n) = \frac{16S_{2n} - S_n}{15}$$

从Cotes积分组合得到Romberg积分:

$$R_n = C_{2n} + \frac{1}{63}(C_{2n} - C_n) = \frac{64C_{2n} - C_n}{63}$$

例3.2

用*Romberg*算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

例3.2

用$Romberg$算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$

例3.2

用*Romberg*算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0				

例3.2

用*Romberg*算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			

例3.2

用*Romberg*算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1				

例3.2

用Romberg算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933			

例3.2

用*Romberg*算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$)，计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		

例3.2

用$Romberg$算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2				

例3.2

用*Romberg*算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135			

例3.2

用*Romberg*算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	S_{2^k-1}	C_{2^k-2}	R_{2^k-3}
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869		

例3.2

用$Romberg$算法求积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon = 10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h = 1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	

例3.2

用*Romberg*算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3				

例3.2

用*Romberg*算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3	0.9456909			

例3.2

用$Romberg$算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3	0.9456909	0.9460834		

例3.2

用*Romberg*算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3	0.9456909	0.9460834	0.9460831	

例3.2

用*Romberg*算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3	0.9456909	0.9460834	0.9460831	0.9460831

注：

例3.2

用Romberg算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，要求精度$\varepsilon = 10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$)，计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3	0.9456909	0.9460834	0.9460831	0.9460831

注：

- i表示积分区间$[0,1]$的等分次数，节点数为$n=2^i+1$.

例3.2

用*Romberg*算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3	0.9456909	0.9460834	0.9460831	0.9460831

注：

- i表示积分区间$[0,1]$的等分次数, 节点数为$n=2^i+1$.
- Romberg方法最后采用的步长为$h=2^{-3}$,而上例中普通变步长法为$h=2^{-10}$.

例3.2

用Romberg算法求积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 要求精度$\varepsilon=10^{-10}$.

解：按照公式及不同的步长(初始步长$h=1$), 计算结果如下表：

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3	0.9456909	0.9460834	0.9460831	0.9460831

注：

- i表示积分区间$[0,1]$的等分次数, 节点数为$n=2^i+1$.
- Romberg方法最后采用的步长为$h=2^{-3}$,而上例中普通变步长法为$h=2^{-10}$.
- 两者的计算精度大致相同,因此Romberg加速收敛的效果是非常明显的.

设$f(x)$在节点$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$上的函数值为$f_i$,

设$f(x)$在节点$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$上的函数值为$f_i$,
作n次Lagrange插值多项式, 有

设$f(x)$在节点$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$上的函数值为$f_i$,
作n次Lagrange插值多项式, 有

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

设$f(x)$在节点$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$上的函数值为$f_i$，
作n次Lagrange插值多项式，有

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x$$

设$f(x)$在节点$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$上的函数值为$f_i$,
作n次Lagrange插值多项式, 有

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)\mathrm{d}x$$

§4 牛顿-科茨(Newton-Cotes)公式

设$f(x)$在节点$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$上的函数值为$f_i$，作$n$次Lagrange插值多项式，有

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad &\approx \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left[\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x \right] f_i\end{aligned}$$

设$f(x)$在节点$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$上的函数值为$f_i$，
作n次Lagrange插值多项式，有

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &\approx \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{n}\left[\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x\right] f_i = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f_i\end{aligned}$$

设$f(x)$在节点$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$上的函数值为$f_i$,
作n次Lagrange插值多项式, 有

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &\approx \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{n}\left[\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x\right] f_i = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f_i\end{aligned}$$

插值型求积公式

设$f(x)$在节点$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$上的函数值为$f_i$,
作n次Lagrange插值多项式, 有

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad &\approx \int_a^b L_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left[\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x \right] f_i = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f_i\end{aligned}$$

插值型求积公式 代数精度有几次?

§4 牛顿-科茨(Newton-Cotes)公式

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$R[f] = \int_a^b R_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\mathrm{d}x$$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

$$R[f] = \int_a^b R_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\mathrm{d}x$$

f次数$\leqslant n$时，$R[f] = 0$，代数精度至少n次。

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

$$R[f] = \int_a^b R_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\mathrm{d}x$$

f次数$\leqslant n$时，$R[f] = 0$，代数精度至少n次。反之，若代数精度至少n次，则必定是插值型的:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

$$R[f] = \int_a^b R_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\mathrm{d}x$$

f次数$\leqslant n$时，$R[f] = 0$，代数精度至少n次。反之，若代数精度至少n次，则必定是插值型的：用$l_k(x)$代入，

$$\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n}\omega_i l_k(x_i) = \omega_k.$$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

$$R[f] = \int_a^b R_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\mathrm{d}x$$

f次数$\leqslant n$时，$R[f]=0$，代数精度至少n次。反之，若代数精度至少n次，则必定是插值型的：用$l_k(x)$代入，

$$\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n}\omega_i l_k(x_i) = \omega_k.$$

定理4.1

求积公式$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)$至少具有$n$次代数精度的充分必要条件是它是插值型的。

§4 牛顿-科茨(Newton-Cotes)公式

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。
将区间$[a, b]$作n等分，步长$h = \frac{b-a}{n}$，等距节点$x_i = a + ih,\ i = 0, \cdots, n$.

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。
将区间$[a,b]$作n等分，步长$h=\frac{b-a}{n}$，等距节点$x_i=a+ih$，$i=0,\cdots,n$. 作变量代换$x=a+th$，代入ω_i中，有

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。
将区间$[a,b]$作n等分，步长$h=\frac{b-a}{n}$，等距节点$x_i=a+ih,\ i=0,\cdots,n$. 作变量代换$x=a+th$，代入ω_i中，有

$$\omega_i = \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x$$

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。
将区间$[a,b]$作n等分，步长$h=\frac{b-a}{n}$，等距节点$x_i=a+ih,\ i=0,\cdots,n$. 作变量代换$x=a+th$，代入ω_i中，有

$$\omega_i = \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}\mathrm{d}x$$

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。
将区间$[a,b]$作n等分，步长$h=\frac{b-a}{n}$，等距节点$x_i=a+ih$, $i=0,\cdots,n$. 作变量代换$x=a+th$，代入ω_i中，有

$$\begin{aligned}\omega_i = & \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}\mathrm{d}x \\ = & \ h\int_0^n \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{(t-k)}{(i-k)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。
将区间$[a, b]$作n等分，步长$h = \frac{b-a}{n}$，等距节点$x_i = a + ih$, $i = 0, \cdots, n$. 作变量代换$x = a + th$，代入ω_i中，有

$$\begin{aligned}
\omega_i = & \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}\mathrm{d}x \\
= & \ h\int_0^n \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{(t-k)}{(i-k)}\mathrm{d}t \\
= & \ \frac{(-1)^{n-i}(b-a)}{n\cdot i!(n-i)!}\int_0^n \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n}(t-k)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Newton-Cotes公式即是等距节点的插值型求积公式。
将区间$[a,b]$作n等分，步长$h=\frac{b-a}{n}$，等距节点$x_i=a+ih,\ i=0,\cdots,n$. 作变量代换$x=a+th$，代入ω_i中，有

$$
\begin{aligned}
\omega_i &= \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}\mathrm{d}x \\
&= h\int_0^n \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{(t-k)}{(i-k)}\mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^{n-i}(b-a)}{n\cdot i!(n-i)!}\int_0^n \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n}(t-k)\mathrm{d}t \\
&= (b-a)C_i^{(n)} \qquad\qquad (\text{NC系数})
\end{aligned}
$$

常见的Newton-Cotes公式

常见的Newton-Cotes公式

梯形公式(一次)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

常见的Newton-Cotes公式

梯形公式(一次)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

抛物线(Simpson)公式(二次)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$$

常见的Newton-Cotes公式

梯形公式(一次)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

抛物线(Simpson)公式(二次)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$$

Cotes公式(四次)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{90}\left[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)\right]$$

n	$C_i^{(n)}$

n	$C_i^{(n)}$
1	$\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}$

n	$C_i^{(n)}$		
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

n	$C_i^{(n)}$			
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

n	$C_i^{(n)}$				
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$		
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$

n	$C_i^{(n)}$					
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$			
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$		
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$	
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$

n	$C_i^{(n)}$						
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$				
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$			
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$		
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$	
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$

n	$C_i^{(n)}$							
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$					
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$				
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$			
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$		
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$	
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$

n	$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{588}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

§4 牛顿-科茨(Newton-Cotes)公式

n	$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{588}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

$$\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} = 1$$

n	$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{588}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

$$\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} = 1 \qquad C_i^{(n)} = C_{n-i}^{(n)}$$

n	$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{588}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

$$\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} = 1 \qquad C_i^{(n)} = C_{n-i}^{(n)} \qquad n \geqslant 8\text{有负系数}$$

定理4.2

当n为偶数时,牛顿-柯特斯公式的代数精度至少为$n+1$.

定理4.2

当n为偶数时,牛顿-柯特斯公式的代数精度至少为$n+1$.

证明:

定理4.2

当n为偶数时,牛顿-柯特斯公式的代数精度至少为$n+1$.

证明: 只需要证明$f(x)=x^{n+1}$时, 积分余项为0.

定理4.2

当n为偶数时,牛顿-柯特斯公式的代数精度至少为$n+1$.

证明: 只需要证明$f(x)=x^{n+1}$时, 积分余项为0. 余项为

$$R[f]=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\mathrm{d}x=\int_a^b \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\mathrm{d}x$$

定理4.2

当n为偶数时,牛顿-柯特斯公式的代数精度至少为$n+1$.

证明: 只需要证明$f(x)=x^{n+1}$时, 积分余项为0. 作变量替换$x=a+th$,

$$R[f]=h^{n+2}\int_0^n\prod_{i=0}^{n}(t-i)dt.$$

定理4.2

当n为偶数时,牛顿-柯特斯公式的代数精度至少为$n+1$.

证明: 只需要证明$f(x)=x^{n+1}$时, 积分余项为0. 作变量替换$x=a+th$,

$$R[f]=h^{n+2}\int_0^n\prod_{i=0}^n(t-i)dt.$$

对上述积分再做变量代换$n-t=s$,得

定理4.2

当n为偶数时,牛顿-柯特斯公式的代数精度至少为$n+1$.

证明: 只需要证明$f(x)=x^{n+1}$时, 积分余项为0. 作变量替换$x=a+th$,

$$R[f]=h^{n+2}\int_0^n\prod_{i=0}^n(t-i)dt.$$

对上述积分再做变量代换$n-t=s$,得

$$\begin{aligned}R[f] &= h^{n+2}\int_0^n\prod_{i=0}^n(n-i-s)ds\\ &= (-1)^{n+1}h^{n+2}\int_0^n\prod_{i=0}^n[s-(n-i)]ds\\ &= (-1)^{n+1}h^{n+2}\int_0^n\prod_{i=0}^n(t-i)ds=0\end{aligned}$$

稳定性即数据$f_i = f(x_i)$有误差, 只能有近似值$\bar{f}_i$. 是否有

$$|Q[\bar{f}] - Q[f]| \leqslant M \max_i |f_i - \bar{f}_i| \quad ?$$

稳定性即数据$f_i = f(x_i)$有误差, 只能有近似值$\bar{f}_i$. 是否有

$$|Q[\bar{f}] - Q[f]| \leqslant M \max_i |f_i - \bar{f}_i| \quad ?$$

若$Q[f] = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$,则

稳定性即数据$f_i = f(x_i)$有误差，只能有近似值$\bar{f}_i$. 是否有

$$|Q[\bar{f}] - Q[f]| \leqslant M \max_i |f_i - \bar{f}_i| \quad ?$$

若$Q[f] = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$,则

$|Q[f] - Q[\bar{f}]| =$

$$\left|\sum_{i=0}^{n} \omega_i (f_i - \bar{f}_i)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |\omega_i| \max_i |f_i - \bar{f}_i| \leqslant \max_i |f_i - \bar{f}_i| \sum_{i=0}^{n} |\omega_i|$$

稳定性即数据$f_i = f(x_i)$有误差, 只能有近似值$\bar{f}_i$. 是否有

$$|Q[\bar{f}] - Q[f]| \leqslant M \max_i |f_i - \bar{f}_i| \quad ?$$

若$Q[f] = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$,则

$|Q[f] - Q[\bar{f}]|=$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} \omega_i \left(f_i - \bar{f}_i\right) \right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |\omega_i| \max_i |f_i - \bar{f}_i| \leqslant \max_i |f_i - \bar{f}_i| \sum_{i=0}^{n} |\omega_i|$$

- 当$n \leqslant 7$时，$\omega_i \geqslant 0$,且$\sum_{i=0}^{n} \omega_i = b - a \Longrightarrow$稳定.

稳定性即数据$f_i = f(x_i)$有误差，只能有近似值$\bar{f}_i$. 是否有

$$|Q[\bar{f}] - Q[f]| \leqslant M \max_i |f_i - \bar{f}_i| \quad ?$$

若$Q[f] = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$,则

$|Q[f] - Q[\bar{f}]|=$

$$\left|\sum_{i=0}^{n} \omega_i \left(f_i - \bar{f}_i\right)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |\omega_i| \max_i |f_i - \bar{f}_i| \leqslant \max_i |f_i - \bar{f}_i| \sum_{i=0}^{n} |\omega_i|$$

- 当$n \leqslant 7$时，$\omega_i \geqslant 0$,且$\sum_{i=0}^{n} \omega_i = b - a \Longrightarrow$稳定.
- 而当$n > 7$时，由于求积系数ω_i有正有负,$\sum_{i=0}^{n} |\omega_i|$一般无界，因此稳定性不成立，收敛性也不成立.

- 考虑带权函数的求积公式

$$I[f]=\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)$$

其中$\rho(x)\geqslant 0$称为权函数.

- 考虑带权函数的求积公式

$$I[f]=\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)$$

其中$\rho(x)\geqslant 0$称为权函数.

- 若上面求积公式对任何次数小于等于于m的多项式$f(x)$等式成立, 但对于某一个次数为$m+1$的多项式不成立,则称积分公式的代数精度为m次。

- 考虑带权函数的求积公式

$$I[f]=\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

其中$\rho(x)\geqslant 0$称为权函数.

- 若上面求积公式对任何次数小于等于m的多项式$f(x)$等式成立, 但对于某一个次数为$m+1$的多项式不成立,则称积分公式的代数精度为m次。
- 显然$\rho(x)\equiv 1$时上述定义与第二节一致,因此可以将这里的代数精度的概念其概念的推广.

- 考虑带权函数的求积公式

$$I[f] = \int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

其中$\rho(x) \geqslant 0$称为权函数.

- 若上面求积公式对任何次数小于等于m的多项式$f(x)$等式成立，但对于某一个次数为$m+1$的多项式不成立,则称积分公式的代数精度为m次。
- 显然$\rho(x) \equiv 1$时上述定义与第二节一致,因此可以将这里的代数精度的概念其概念的推广.
- $\rho(x)$为一些特殊的函数。如$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,$[a,b] = [-1,1]$等.
而$f(x)$一般比较光滑的函数。

问：

对于等分节点的Newton-Cotes公式，代数精度一般为n或$n+1$，而如果采用非等分节点，即节点x_i与求积系数ω_i都待定的话，能否提高代数精度呢？

问：

对于等分节点的Newton-Cotes公式，代数精度一般为n或$n+1$，而如果采用非等分节点，即节点x_i与求积系数ω_i都待定的话，能否提高代数精度呢?

- 要使求积公式具有m 次代数精度，应对$f(x)=1,x,\cdots,x^m$成立下列等式(为叙述简单，以$\rho(x)\equiv 1$为例):

$$\sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^k=\frac{1}{k+1}(b^{k+1}-a^{k+1}),\quad k=0,1,\cdots,m.$$

问:

对于等分节点的Newton-Cotes公式，代数精度一般为n或$n+1$，而如果采用非等分节点，即节点x_i与求积系数ω_i都待定的话，能否提高代数精度呢?

- 要使求积公式具有m 次代数精度，应对$f(x)=1,x,\cdots,x^m$成立下列等式(为叙述简单，以$\rho(x)\equiv 1$为例):

$$\sum_{i=0}^{n}\omega_i x_i^k=\frac{1}{k+1}(b^{k+1}-a^{k+1}),\quad k=0,1,\cdots,m.$$

- 关于未知量x_i与ω_i 的非线性代数方程组，如何求解?

§5.1 高斯(Gauss)公式——高斯公式的定义及性质

$$I = \int_a^b \rho(x) f(x) \mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

$$I = \int_a^b \rho(x) f(x) \mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

- 如何选择ω_i和x_i使代数精度达到最高?

$$I = \int_a^b \rho(x) f(x) \mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

- 如何选择ω_i和x_i使代数精度达到最高?
- 最简单的例子$n = 1$： 试确定ω_i和x_i使下面的求积公式有尽量高的代数精度

$$\int_{-1}^{1} f(x) \mathrm{d}x \approx \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

假设$\omega_0, \omega_1 \neq 0$, $x_0 \neq x_1$.

假设$\omega_0, \omega_1 \neq 0$, $x_0 \neq x_1$. 令$f(x) = 1,\ x,\ x^2,\ x^3$, 代入

假设$\omega_0, \omega_1 \neq 0$, $x_0 \neq x_1$. 令$f(x) = 1,\ x,\ x^2,\ x^3$, 代入

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_0 \quad +\omega_1 \quad =2 \\ \omega_0 x_0+\omega_1 x_1=0 \\ \omega_0 x_0^2+\omega_1 x_1^2=\frac{2}{3} \\ \omega_0 x_0^3+\omega_1 x_1^3=0 \end{array}\right.$$

假设$\omega_0, \omega_1 \neq 0$, $x_0 \neq x_1$. 令$f(x) = 1,\ x,\ x^2,\ x^3$, 代入

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_0 + \omega_1 = 2 \\ \omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 = 0 \\ \omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2 = \frac{2}{3} \\ \omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_0 = \frac{2x_1}{x_1 - x_0} \\ \omega_1 = \frac{-2x_0}{x_1 - x_0} \end{array}\right.$$

假设$\omega_0, \omega_1 \neq 0$, $x_0 \neq x_1$. 令$f(x) = 1,\ x,\ x^2,\ x^3$, 代入

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \omega_0 + \omega_1 = 2 \\ \omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_0 = \frac{2x_1}{x_1 - x_0} \\ \omega_1 = \frac{-2x_0}{x_1 - x_0} \end{array}\right. \\ \left.\begin{array}{l} \omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2 = \frac{2}{3} \\ \omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_0 x_0^2 = \frac{2/3 x_1}{x_1 - x_0} \\ \omega_1 x_1^2 = \frac{-2/3 x_0}{x_1 - x_0} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

假设$\omega_0, \omega_1 \neq 0$, $x_0 \neq x_1$. 令$f(x) = 1, x, x^2, x^3$, 代入

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\omega_0 + \omega_1 = 2 \\ \omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\omega_0 = \frac{2x_1}{x_1 - x_0} \\ \omega_1 = \frac{-2x_0}{x_1 - x_0}\end{array}\right. \\ \left.\begin{array}{l}\omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2 = \frac{2}{3} \\ \omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3 = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\omega_0 x_0^2 = \frac{2/3x_1}{x_1 - x_0} \\ \omega_1 x_1^2 = \frac{-2/3x_0}{x_1 - x_0}\end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow x_0^2 = x_1^2 = \frac{1}{3}$$

假设$\omega_0,\omega_1\neq 0$, $x_0\neq x_1$. 令$f(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3$, 代入

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{array}{rl} \omega_0+\omega_1 &= 2 \\ \omega_0x_0+\omega_1x_1 &= 0 \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_0=\frac{2x_1}{x_1-x_0} \\ \omega_1=\frac{-2x_0}{x_1-x_0} \end{array}\right. \\ \begin{array}{rl} \omega_0x_0^2+\omega_1x_1^2 &= \frac{2}{3} \\ \omega_0x_0^3+\omega_1x_1^3 &= 0 \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_0x_0^2=\frac{2/3x_1}{x_1-x_0} \\ \omega_1x_1^2=\frac{-2/3x_0}{x_1-x_0} \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow x_0^2=x_1^2=\frac{1}{3}$$

因此,

$$x_0=-x_1=\frac{\sqrt{3}}{3},\qquad \omega_0=\omega_1=1.$$

定义5.1

若对于节点$x_i \in [a, b]$ 及求积系数ω_i, 求积公式*(5.26)* 的代数精度为$2n+1$, 则称节点x_i为高斯点, ω_i为高斯系数, 相应的求积公式称为带权的高斯公式.

- 一旦确定了高斯点, 由于它的代数精度为$2n+1$, 因此仍然可用待定系数法的方法来确定系数ω_i. 特别地, 若在高斯公式中令$f(x) = l_j(x)$,则有

$$\omega_j = \int_a^b \rho(x) l_j(x) dx.$$

因此高斯公式仍可看成是一种插值型求积公式。

定理5.1

$x_i(i=0,1,\cdots,n)$是求积公式的高斯点的充分必要条件是多项式$\Pi(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$与任意次数不超过$n$的多项式$q(x)$关于权函数$\rho(x)$正交:

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)q(x)dx=0$$

必要性:因为$f(x) = \Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

必要性:因为$f(x) = \Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Pi(x_i)p(x_i) = 0.$$

必要性:因为$f(x)=\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\omega_i\Pi(x_i)p(x_i)=0.$$

充分性:对于任意给定的次数不超过$2n+1$次的多项式$f(x)$,

$$f(x)=q(x)\Pi(x)+r(x),$$

其中$q(x)$, $r(x)$次数不超过n.

必要性:因为$f(x) = \Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \Pi(x_i)p(x_i) = 0.$$

充分性:对于任意给定的次数不超过$2n+1$次的多项式$f(x)$,

$$f(x) = q(x)\Pi(x) + r(x),$$

其中$q(x)$, $r(x)$次数不超过n.
令$\omega_i = \int_a^b \rho(x) l_i(x)\mathrm{d}x$.

必要性: 因为$f(x)=\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\omega_i\Pi(x_i)p(x_i)=0.$$

充分性: 对于任意给定的次数不超过$2n+1$次的多项式$f(x)$,

$$f(x)=q(x)\Pi(x)+r(x),$$

其中$q(x)$, $r(x)$次数不超过n.
令$\omega_i=\int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)\sum_{i=0}^{n}r(x_i)l_i(x)\mathrm{d}x$$

必要性:因为$f(x)=\Pi(x)p(x)$次数不超过$2n+1$,

$$\int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\omega_i\Pi(x_i)p(x_i)=0.$$

充分性:对于任意给定的次数不超过$2n+1$次的多项式$f(x)$,

$$f(x)=q(x)\Pi(x)+r(x),$$

其中$q(x)$, $r(x)$次数不超过n.

令$\omega_i=\int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)\sum_{i=0}^{n}r(x_i)l_i(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=0}^{n}r(x_i)\int_a^b \rho(x)l_i(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\omega_i r(x_i)$$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \rho(x)\Pi(x)p(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \rho(x)r(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=0}^{n} \omega_i r(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)
\end{aligned}
$$

定理5.2

插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

的代数精度最高不超过$2n+1$.

证:

定理5.2

插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

的代数精度最高不超过$2n+1$.

证： 令$f(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$, 则$f(x)$是$2n+2$次的多项式。

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = 0 \qquad \int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2\mathrm{d}x > 0,$$

定理5.2

插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

的代数精度最高不超过$2n+1$.

证： 令$f(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$, 则$f(x)$是$2n+2$次的多项式。

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = 0 \neq \int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2\mathrm{d}x > 0,$$

定理5.2

插值型求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$$

的代数精度最高不超过$2n+1$.

证： 令$f(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$, 则$f(x)$是$2n+2$次的多项式。

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) = 0 \neq \int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2\mathrm{d}x > 0,$$

该积分公式的代数精度不可能达到$2n+2$.

求积公式的稳定性

求积公式的稳定性

令$f(x)=l_j^2(x)$为$2n$次多项式,

求积公式的稳定性

令$f(x) = l_j^2(x)$为$2n$次多项式,$\Longrightarrow$ Gauss积分精确成立

求积公式的稳定性

令$f(x)=l_j^2(x)$为$2n$次多项式,$\Longrightarrow$ Gauss积分精确成立$\Longrightarrow$

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)l_j^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\omega_i l_j^2(x_i)=\omega_j>0.$$

求积公式的稳定性

令$f(x)=l_j^2(x)$为$2n$次多项式,$\Longrightarrow$ Gauss积分精确成立$\Longrightarrow$

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)l_j^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\omega_i l_j^2(x_i)=\omega_j>0.$$

若在高斯公式中取$f(x)\equiv 1$, 则有

$$\int_a^b \rho(x)dx=\sum_{i=0}^{n}\omega_i.$$

求积公式的稳定性

令$f(x)=l_j^2(x)$为$2n$次多项式,$\Longrightarrow$ Gauss积分精确成立$\Longrightarrow$

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)l_j^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\omega_i l_j^2(x_i)=\omega_j>0.$$

若在高斯公式中取$f(x)\equiv 1$, 则有

$$\int_a^b \rho(x)dx=\sum_{i=0}^{n}\omega_i.$$

利用$\omega_i>0$的性质及稳定性的讨论知高斯公式对任意n都是稳定的.

求积公式的稳定性

令$f(x)=l_j^2(x)$为$2n$次多项式,$\Longrightarrow$ Gauss积分精确成立$\Longrightarrow$

$$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)l_j^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n}\omega_i l_j^2(x_i)=\omega_j>0.$$

若在高斯公式中取$f(x)\equiv 1$, 则有

$$\int_a^b \rho(x)dx=\sum_{i=0}^{n}\omega_i.$$

利用$\omega_i>0$的性质及稳定性的讨论知高斯公式对任意n都是稳定的.

定理5.3

设a,b为有限数, 则对任意的函数$f(x)\in C[a,b]$, 当$n\to\infty$时,高斯求积公式均收敛, 即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)=\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

例5.1

求高斯型求积公式

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\mathrm{d}x \approx \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的系数ω_i和节点x_i。

高斯型公式有三次代数精度，

高斯型公式有三次代数精度， 令$f(x) = 1,\ x,\ x^2,\ x^3$，代入

高斯型公式有三次代数精度， 令$f(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3$，代入

$$
\begin{cases}
\omega_0+\omega_1=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2 \\
\omega_0x_0+\omega_1x_1=\int_0^1 \sqrt{x}dx=\frac{2}{3} \\
\omega_0x_0^2+\omega_1x_1^2=\int_0^1 \sqrt{x}xdx=\frac{2}{5} \\
\omega_0x_0^3+\omega_1x_1^3=\int_0^1 \sqrt{x}x^2dx=\frac{2}{7}
\end{cases}
$$

高斯型公式有三次代数精度， 令$f(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3$, 代入

$$\begin{cases} \omega_0+\omega_1=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2 \\ \omega_0x_0+\omega_1x_1=\int_0^1 \sqrt{x}dx=\frac{2}{3} \\ \omega_0x_0^2+\omega_1x_1^2=\int_0^1 \sqrt{x}xdx=\frac{2}{5} \\ \omega_0x_0^3+\omega_1x_1^3=\int_0^1 \sqrt{x}x^2dx=\frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0=\dfrac{2x_1-\frac{2}{3}}{x_1-x_0} \\ \omega_1=\dfrac{\frac{2}{3}-2x_0}{x_1-x_0} \end{cases}$$

高斯型公式有三次代数精度， 令$f(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3$, 代入

$$
\left\{
\begin{aligned}
\omega_0+\omega_1 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\\
\omega_0x_0+\omega_1x_1 &= \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\\
\omega_0x_0^2+\omega_1x_1^2 &= \int_0^1 \sqrt{x}xdx = \frac{2}{5}\\
\omega_0x_0^3+\omega_1x_1^3 &= \int_0^1 \sqrt{x}x^2dx = \frac{2}{7}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\Rightarrow \left\{
\begin{aligned}
\omega_0 &= \frac{2x_1-\frac{2}{3}}{x_1-x_0}\\
\omega_1 &= \frac{\frac{2}{3}-2x_0}{x_1-x_0}
\end{aligned}
\right.
\qquad
\Rightarrow \left\{
\begin{aligned}
\omega_0x_0^2 &= \frac{2/5x_1-2/7}{x_1-x_0}\\
\omega_1x_1^2 &= \frac{2/7-2/5x_0}{x_1-x_0}
\end{aligned}
\right.
$$

高斯型公式有三次代数精度， 令$f(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3$, 代入

$$\left\{\begin{aligned} \omega_0+\omega_1 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2 \\ \omega_0 x_0+\omega_1 x_1 &= \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3} \\ \omega_0 x_0^2+\omega_1 x_1^2 &= \int_0^1 \sqrt{x}xdx = \frac{2}{5} \\ \omega_0 x_0^3+\omega_1 x_1^3 &= \int_0^1 \sqrt{x}x^2dx = \frac{2}{7} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{2x_1-\frac{2}{3}}{x_1-x_0} \\ \omega_1 &= \frac{\frac{2}{3}-2x_0}{x_1-x_0} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \omega_0 x_0^2 &= \frac{2/5x_1-2/7}{x_1-x_0} \\ \omega_1 x_1^2 &= \frac{2/7-2/5x_0}{x_1-x_0} \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow x_0=\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \qquad x_1=\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$$

高斯型公式有三次代数精度， 令$f(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3$，代入

$$
\left\{\begin{aligned}
\omega_0+\omega_1 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\\
\omega_0x_0+\omega_1x_1 &= \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\\
\omega_0x_0^2+\omega_1x_1^2 &= \int_0^1 \sqrt{x}xdx = \frac{2}{5}\\
\omega_0x_0^3+\omega_1x_1^3 &= \int_0^1 \sqrt{x}x^2dx = \frac{2}{7}
\end{aligned}\right.
$$

$$
\Rightarrow \left\{\begin{aligned}
\omega_0 &= \frac{2x_1-\frac{2}{3}}{x_1-x_0}\\
\omega_1 &= \frac{\frac{2}{3}-2x_0}{x_1-x_0}
\end{aligned}\right.
\qquad
\Rightarrow \left\{\begin{aligned}
\omega_0x_0^2 &= \frac{2/5x_1-2/7}{x_1-x_0}\\
\omega_1x_1^2 &= \frac{2/7-2/5x_0}{x_1-x_0}
\end{aligned}\right.
$$

$$\Rightarrow x_0=\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \qquad x_1=\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$$

因此，

$$\omega_0=1+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}} \qquad \omega_1=1-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

几个常见的Gauss-Legendre公式

1. 高斯–勒让德(Gauss-Legendre)求积公式

取$\rho(x) \equiv 1, [a, b] = [-1, 1]$,知高斯点$x_i$即为$n+1$次勒让德正交多项式的零点，$P_{n+1}(x_i) = 0, i = 0, 1, \cdots, n.$

几个常见的Gauss-Legendre公式

1.高斯–勒让德(Gauss-Legendre)求积公式

取$\rho(x)\equiv 1, [a,b]=[-1,1]$,知高斯点$x_i$即为$n+1$次勒让德正交多项式的零点，$P_{n+1}(x_i)=0, i=0,1,\cdots,n.$

$$n=0, \quad \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2f(0)$$

几个常见的Gauss-Legendre公式

1.高斯–勒让德(Gauss-Legendre)求积公式

取$\rho(x) \equiv 1, [a,b] = [-1,1]$,知高斯点$x_i$即为$n+1$次勒让德正交多项式的零点，$P_{n+1}(x_i) = 0, i = 0, 1, \cdots, n$.

$$n = 0, \quad \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2f(0)$$

$$n = 1, \quad \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

几个常见的Gauss-Legendre公式

1. 高斯–勒让德(Gauss-Legendre)求积公式

取$\rho(x)\equiv 1,[a,b]=[-1,1]$,知高斯点$x_i$即为$n+1$次勒让德正交多项式的零点，$P_{n+1}(x_i)=0, i=0,1,\cdots,n$.

$$n=0,\quad \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2f(0)$$

$$n=1,\quad \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(-\frac{\sqrt{3}}{3})+f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$n=2,\quad \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{5}{9}f(-\frac{\sqrt{15}}{5})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(\frac{\sqrt{15}}{5})$$

节点个数$n+1$	高斯点x_i	高斯系数ω_i
1	0.0000000	2.0000000
2	±0.5773503	1.0000000
3	±0.7745967 0.0000000	0.5555556 0.8888889
4	±0.8611363 ±0.3399810	0.3478548 0.6521452
5	±0.9061798 ±0.5384693 ±0.0000000	0.2369269 0.4786287 0.5688889
6	±0.93246951 ±0.66120939 ±0.23861919	0.17132449 0.36076157 0.46791393

对于一般区间$[a,b]$上的积分, 我们可以做变量代换

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

将积分区间化为$[-1,1]$,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt.$$

对于一般区间$[a, b]$上的积分，我们可以做变量代换

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

将积分区间化为$[-1, 1]$,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt.$$

然后再用相应的高斯–勒让德公式来计算

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\omega_i f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_i\right),$$

其中x_i即为高斯点，ω_i为高斯系数.

2.高斯–切比雪夫(Gauss-Chebyshev)公式

取$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $[a,b]=[-1,1]$. 知此时的高斯点为区间$[-1,1]$关于权函数$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的正交多项式——切比雪夫正交多项式$T_{n+1}(x)$的零点.

2. 高斯–切比雪夫(Gauss-Chebyshev)公式

取$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $[a,b]=[-1,1]$. 知此时的高斯点为区间$[-1,1]$关于权函数$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的正交多项式——切比雪夫正交多项式$T_{n+1}(x)$的零点.

高斯点

$$x_i=\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi,\quad (i=0,1,\cdots,n)$$

高斯系数

$$\omega_i=\frac{\pi}{n+1}.$$

2.高斯–切比雪夫(Gauss-Chebyshev)公式

取$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $[a,b]=[-1,1]$. 知此时的高斯点为区间$[-1,1]$关于权函数$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的正交多项式——切比雪夫正交多项式 $T_{n+1}(x)$的零点.

高斯点

$$x_i=\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi,\quad (i=0,1,\cdots,n)$$

高斯系数

$$\omega_i=\frac{\pi}{n+1}.$$

2.高斯–切比雪夫(Gauss-Chebyshev)公式

取$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $[a,b]=[-1,1]$. 知此时的高斯点为区间$[-1,1]$关于权函数$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的正交多项式——切比雪夫正交多项式$T_{n+1}(x)$的零点.

高斯点

$$x_i=\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi,\quad (i=0,1,\cdots,n)$$

高斯系数

$$\omega_i=\frac{\pi}{n+1}.$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx\approx\frac{\pi}{n+1}\sum_{i=0}^{n}f\left[\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right].$$

2. 高斯–切比雪夫(Gauss-Chebyshev)公式

取$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $[a,b]=[-1,1]$. 知此时的高斯点为区间$[-1,1]$关于权函数$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的正交多项式——切比雪夫正交多项式$T_{n+1}(x)$的零点.

高斯点

$$x_i=\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi,\quad (i=0,1,\cdots,n)$$

高斯系数

$$\omega_i=\frac{\pi}{n+1}.$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx\approx\frac{\pi}{n+1}\sum_{i=0}^{n}f\left[\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right].$$

$$n=1,\quad \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx\approx\frac{\pi}{2}\left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$$

3. 高斯–拉盖尔(Gauss-Laguerre)求积公式：

取$\rho(x)=e^{-x}$, $[a,b]=[0,\infty]$,高斯点应为区间$[0,\infty]$上关于权函数$\rho(x)=e^{-x}$正交的多项式零点——$n+1$ 次拉盖尔(Laguerre)正交多项式$L_{n+1}(x)$的零点.

3.高斯–拉盖尔(Gauss-Laguerre)求积公式:

取$\rho(x) = e^{-x}$, $[a, b] = [0, \infty]$,高斯点应为区间$[0, \infty]$上关于权函数$\rho(x) = e^{-x}$正交的多项式零点——$n+1$ 次拉盖尔(Laguerre)正交多项式$L_{n+1}(x)$的零点.

高斯系数

$$\omega_i = \frac{x_i}{L_{n+2}^2(x_i)}. \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

3. 高斯–拉盖尔(Gauss-Laguerre)求积公式：

取$\rho(x)=e^{-x}$, $[a,b]=[0,\infty]$,高斯点应为区间$[0,\infty]$上关于权函数$\rho(x)=e^{-x}$正交的多项式零点——$n+1$ 次拉盖尔(Laguerre)正交多项式$L_{n+1}(x)$的零点.

高斯系数

$$\omega_i=\frac{x_i}{L_{n+2}^2(x_i)}.\quad (i=0,1,\cdots,n)$$

$$\int_0^\infty e^{-x}f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)$$

3.高斯–拉盖尔(Gauss-Laguerre)求积公式：

取$\rho(x)=e^{-x}$, $[a,b]=[0,\infty]$,高斯点应为区间$[0,\infty]$上关于权函数$\rho(x)=e^{-x}$正交的多项式零点——$n+1$ 次拉盖尔(Laguerre)正交多项式$L_{n+1}(x)$的零点.

高斯系数

$$\omega_i=\frac{x_i}{L_{n+2}^2(x_i)}.\quad (i=0,1,\cdots,n)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)$$

3.高斯–拉盖尔(Gauss-Laguerre)求积公式:

取$\rho(x)=e^{-x}$, $[a,b]=[0,\infty]$,高斯点应为区间$[0,\infty]$上关于权函数$\rho(x)=e^{-x}$正交的多项式零点——$n+1$ 次拉盖尔(Laguerre)正交多项式$L_{n+1}(x)$的零点.

高斯系数

$$\omega_i=\frac{x_i}{L_{n+2}^2(x_i)}.\quad (i=0,1,\cdots,n)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i)$$

$$n=1,\int_0^{\infty} e^{-x}f(x)dx\approx\frac{2+\sqrt{2}}{4}f(2-\sqrt{2})+\frac{2-\sqrt{2}}{4}f(2+\sqrt{2}).$$

4. 高斯–埃尔米特(Gauss-Hermite)求积公式

取$\rho(x)=e^{-x^2}, [a,b]=[-\infty,+\infty]$, 高斯点为$[-\infty,+\infty]$ 上关于权函数 $\rho(x)=e^{-x^2}$正交的多项式——$n+1$次埃尔米特正交多项式$H_{n+1}(x)$的零点. 高斯系数ω_i的计算公式为

$$\omega_i=\frac{2^{n+2}(n+1)!\sqrt{\pi}}{[H_{n+2}(x_i)]^2}. \quad (i=0,1,\cdots,n)$$

4. 高斯–埃尔米特(Gauss-Hermite)求积公式

取$\rho(x)=e^{-x^2}, [a,b]=[-\infty,+\infty]$，高斯点为$[-\infty,+\infty]$ 上关于权函数 $\rho(x)=e^{-x^2}$ 正交的多项式——$n+1$次埃尔米特正交多项式$H_{n+1}(x)$的零点. 高斯系数ω_i的计算公式为

$$\omega_i=\frac{2^{n+2}(n+1)!\sqrt{\pi}}{[H_{n+2}(x_i)]^2}. \quad (i=0,1,\cdots,n)$$

求积公式为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i),$$

4. 高斯–埃尔米特(Gauss-Hermite)求积公式

取$\rho(x) = e^{-x^2}$, $[a, b] = [-\infty, +\infty]$, 高斯点为$[-\infty, +\infty]$ 上关于权函数 $\rho(x) = e^{-x^2}$ 正交的多项式——$n+1$次埃尔米特正交多项式$H_{n+1}(x)$的零点. 高斯系数ω_i的计算公式为

$$\omega_i = \frac{2^{n+2}(n+1)!\sqrt{\pi}}{[H_{n+2}(x_i)]^2}. \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

求积公式为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i),$$

4.高斯–埃尔米特(Gauss-Hermite)求积公式

取$\rho(x)=e^{-x^2}$, $[a,b]=[-\infty,+\infty]$, 高斯点为$[-\infty,+\infty]$ 上关于权函数 $\rho(x)=e^{-x^2}$正交的多项式——$n+1$次埃尔米特正交多项式$H_{n+1}(x)$的零点. 高斯系数ω_i的计算公式为

$$\omega_i=\frac{2^{n+2}(n+1)!\sqrt{\pi}}{[H_{n+2}(x_i)]^2}. \quad (i=0,1,\cdots,n)$$

求积公式为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n}\omega_i f(x_i),$$

$$n=2,\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}f(x)dx\approx\frac{\sqrt{\pi}}{6}f(-\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{\sqrt{\pi}}{24}f(0)+\frac{\sqrt{\pi}}{6}f(\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

例5.2

用**高斯–勒让德**公式计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.(精确值$I=0.9460831\cdots$)

解

例5.2

用**高斯–勒让德**公式计算积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.(精确值$I = 0.9460831\cdots$)

解 先作变换$x = \frac{1}{2}(t+1)$, 则积分区间$[0,1]$化为$[-1,1]$, 且

例5.2

用**高斯–勒让德**公式计算积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.(精确值$I = 0.9460831\cdots$)

解 先作变换$x = \frac{1}{2}(t+1)$, 则积分区间$[0,1]$化为$[-1,1]$, 且

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{\sin \frac{1}{2}(t+1)}{t+1} \mathrm{d}t.$$

例5.2

用**高斯–勒让德公式**计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.(精确值$I=0.9460831\cdots$)

解 先作变换$x=\frac{1}{2}(t+1)$, 则积分区间$[0,1]$化为$[-1,1]$, 且

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 \frac{\sin\frac{1}{2}(t+1)}{t+1}\mathrm{d}t.$$

用两点高斯-勒让德公式得(四位有效数字):

$$I\approx \frac{\sin\frac{1}{2}(-0.5773503+1)}{-0.5773503+1}+\frac{\sin\frac{1}{2}(0.5773503+1)}{0.5773503+1}=0.9460411.$$

例5.2

用**高斯–勒让德公式**计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.(精确值$I=0.9460831\cdots$)

解 先作变换$x=\frac{1}{2}(t+1)$, 则积分区间$[0,1]$化为$[-1,1]$, 且

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 \frac{\sin\frac{1}{2}(t+1)}{t+1}\mathrm{d}t.$$

用两点高斯-勒让德公式得(四位有效数字):

$$I\approx \frac{\sin\frac{1}{2}(-0.5773503+1)}{-0.5773503+1}+\frac{\sin\frac{1}{2}(0.5773503+1)}{0.5773503+1}=0.9460411.$$

用三点高斯-勒让德公式(7位有效数字):

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{5}{9}\frac{\sin\frac{1}{2}(-0.7745967+1)}{-0.7745967+1}+\frac{8}{9}\frac{\sin\frac{1}{2}}{0+1}+\frac{5}{9}\frac{\sin\frac{1}{2}(0.7745967+1)}{0.7745967+1}\\ &= 0.9460831. \end{aligned}$$

例5.2

用**高斯–勒让德公式**计算积分$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.(精确值$I = 0.9460831\cdots$)

解 先作变换$x = \frac{1}{2}(t+1)$, 则积分区间$[0,1]$化为$[-1,1]$, 且

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{\sin \frac{1}{2}(t+1)}{t+1}\mathrm{d}t.$$

用两点高斯-勒让德公式得(四位有效数字):

$$I \approx \frac{\sin \frac{1}{2}(-0.5773503+1)}{-0.5773503+1} + \frac{\sin \frac{1}{2}(0.5773503+1)}{0.5773503+1} = 0.9460411.$$

用三点高斯-勒让德公式(7位有效数字):

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{5}{9}\frac{\sin \frac{1}{2}(-0.7745967+1)}{-0.7745967+1} + \frac{8}{9}\frac{\sin \frac{1}{2}}{0+1} + \frac{5}{9}\frac{\sin \frac{1}{2}(0.7745967+1)}{0.7745967+1} \\ &= 0.9460831. \end{aligned}$$

例5.2

用**高斯–勒让德公式**计算积分$I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.(精确值$I=0.9460831\cdots$)

解 先作变换$x=\frac{1}{2}(t+1)$, 则积分区间$[0,1]$化为$[-1,1]$, 且

$$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 \frac{\sin\frac{1}{2}(t+1)}{t+1}\mathrm{d}t.$$

用两点高斯-勒让德公式得(四位有效数字):

$$I\approx\frac{\sin\frac{1}{2}(-0.5773503+1)}{-0.5773503+1}+\frac{\sin\frac{1}{2}(0.5773503+1)}{0.5773503+1}=0.9460411.$$

用三点高斯-勒让德公式(7位有效数字):

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{5}{9}\frac{\sin\frac{1}{2}(-0.7745967+1)}{-0.7745967+1}+\frac{8}{9}\frac{\sin\frac{1}{2}}{0+1}+\frac{5}{9}\frac{\sin\frac{1}{2}(0.7745967+1)}{0.7745967+1}\\ &= 0.9460831. \end{aligned}$$

复合梯形公式要求$2^{10}+1$个点上的值才能达到同样的精度.

例5.3

用**高斯–勒让德公式**计算下列积分

$$\int_{-1}^{1} |x|^{\alpha+\frac{3}{5}} dx.$$

分别取$\alpha = 0, 1, 2$,观察误差随高斯点数的变化规律.

解 当$\alpha = 0, 1, 2$时，$f(x) = |x|^{\alpha+\frac{3}{5}}$在$x = 0$处分别为连续、一阶连续可导以及二阶连续可导的. 令误差

$$R_n = |\int_{-1}^{1} f(x)dx - Q[f]|.$$

例5.3

用**高斯–勒让德公式**计算下列积分

$$\int_{-1}^{1} |x|^{\alpha+\frac{3}{5}} dx.$$

分别取$\alpha = 0, 1, 2$,观察误差随高斯点数的变化规律.

解 当$\alpha = 0, 1, 2$时，$f(x) = |x|^{\alpha+\frac{3}{5}}$在$x = 0$处分别为连续、一阶连续可导以及二阶连续可导的. 令误差

$$R_n = \left|\int_{-1}^{1} f(x)dx - Q[f]\right|.$$

用$\log_{10} n, \log_{10} R_n$表示横坐标和纵坐标，则计算结果如下图.

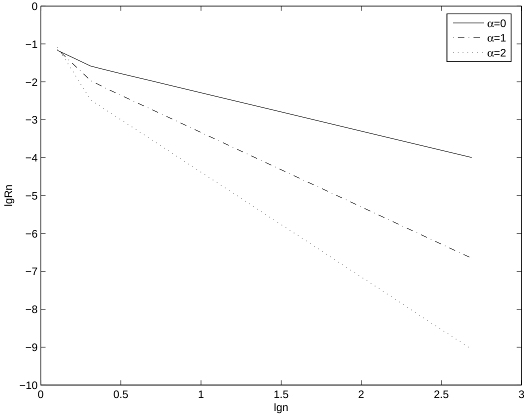


Figure 1: 被积函数的光滑性与高斯公式收敛速度之间的关系

- 从上图可看到无论 α 取 0, 1 或 2，随着高斯点n的增加，误差也相应地减小,即高斯公式是收敛的.

- 从上图可看到无论 α 取 0, 1 或 2，随着高斯点n的增加，误差也相应地减小,即高斯公式是收敛的.
- 当n较大时，误差R_n有近似表达式

$$R_n \approx cn^{-s}$$

(c为与n无关的正常数). 刻划收敛速度的指标 s 随着被积函数 $f(x)$ 的光滑性的提高而变大. 从而可知高斯公式的收敛速度与被积函数的光滑性有关.

- 从上图可看到无论 α 取 0, 1 或 2，随着高斯点n的增加，误差也相应地减小,即高斯公式是收敛的.
- 当n较大时，误差R_n有近似表达式

$$R_n \approx cn^{-s}$$

(c为与n无关的正常数). 刻划收敛速度的指标 s 随着被积函数 $f(x)$ 的光滑性的提高而变大. 从而可知高斯公式的收敛速度与被积函数的光滑性有关.

- 当函数为无穷次可微的解析函数时，可以证明此时误差为指数收敛（或称为无穷次收敛速度）

$$R_n \approx c_1 e^{-c_2 n}$$

c_1, c_2为正常数.

例6.1

用复合Simpson公式,取$m=n=2$计算积分(真值=1):

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x+y)\mathrm{d}y.$$

解：设$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x+y)\mathrm{d}y$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(x)\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{24}[F_0+F_4+2F_2+4(F_1+F_3)],$$

例6.1

用复合Simpson公式,取$m=n=2$计算积分(真值=1):

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x+y)\mathrm{d}y.$$

解：设$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x+y)\mathrm{d}y$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(x)\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{24}[F_0+F_4+2F_2+4(F_1+F_3)],$$

其中, $F_i=F(\frac{i}{8}\pi)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\frac{i}{8}\pi+y)\mathrm{d}y.$

例6.1

用复合Simpson公式,取$m=n=2$计算积分*(真值=1):*

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x+y)\mathrm{d}y.$$

解：设$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(x+y)\mathrm{d}y$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(x)\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{24}[F_0+F_4+2F_2+4(F_1+F_3)],$$

其中, $F_i=F(\frac{i}{8}\pi)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(\frac{i}{8}\pi+y)\mathrm{d}y.$
同理，再次利用Simpson公式得
$F_0=0.292940, F_1=0.541269,\ F_2=0.707211,$
$F_3=0.765475, F_4=0.707211.$

例6.1

用复合*Simpson*公式,取$m = n = 2$计算积分*(真值=1):*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)\mathrm{d}y.$$

解：设$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)\mathrm{d}y$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{24}[F_0 + F_4 + 2F_2 + 4(F_1 + F_3)],$$

其中, $F_i = F(\frac{i}{8}\pi) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\frac{i}{8}\pi + y)\mathrm{d}y$.
同理，再次利用Simpson公式得
$F_0 = 0.292940, F_1 = 0.541269$, $F_2 = 0.707211$,
$F_3 = 0.765475, F_4 = 0.707211$.
$I = 1.00028$.

使用同样思路，可得到矩形区域$\Omega = \{a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$上的复合Simpson 公式. 将$x$方向和$y$方向分成$2n$份和$2m$份，记

$$h_x = \frac{b-a}{2n}, \quad x_i = a + ih_x, \quad (i = 0, 1, \cdots, 2n)$$

$$h_y = \frac{d-c}{2m}, \quad y_j = c + jh_y, \quad (j = 0, 1, \cdots, 2m)$$

则计算二重积分的复合Simpson 公式为：

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\approx \frac{h_1 h_2}{9}\Bigg[f(x_0,y_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i},y_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1},y_0) + f(x_{2n},y_0) \\
&+2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_0,y_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i},y_{2j}) + 8\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1},y_{2j}) \\
&+2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2n},y_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_0,y_{2j-1}) + 8\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i},y_{2j-1}) \\
&+16\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1},y_{2j-1}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2n},y_{2j-1}) \\
&+ f(x_0,y_{2m}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i},y_{2m}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1},y_{2m}) + f(x_{2n},y_{2m})\Bigg].
\end{aligned}
$$

上述复合Simpson公式原则上可推广至任何有界区域上的多重积分.推导如下：

上述复合Simpson公式原则上可推广至任何有界区域上的多重积分.推导如下:
取d维长方体

$$\Omega^* = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d] \supset \Omega.$$

将被积函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_d)$延拓为Ω^*上的函数f^*,

上述复合Simpson公式原则上可推广至任何有界区域上的多重积分.推导如下：
取d维长方体

$$\Omega^* = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d] \supset \Omega.$$

将被积函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_d)$延拓为Ω^*上的函数f^*,

$$f^*(x_1, x_2, \cdots, x_d) = \begin{cases} f(x_1, x_2, \cdots, x_d), & (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \Omega, \\ 0, & (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \Omega^* \setminus \Omega \end{cases}$$

上述复合Simpson公式原则上可推广至任何有界区域上的多重积分.推导如下:
取d维长方体

$$\Omega^* = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d] \supset \Omega.$$

将被积函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_d)$延拓为Ω^*上的函数f^*,

$$f^*(x_1, x_2, \cdots, x_d) = \begin{cases} f(x_1, x_2, \cdots, x_d), & (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \Omega, \\ 0, & (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \Omega^* \setminus \Omega \end{cases}$$

则$I = \int\limits_{\Omega} f(x_1, x_2, \cdots, x_d) dx_1 dx_2 \cdots dx_d$化为$d$维长方体上的积分:

$$I = \int\limits_{\Omega^*} f^*(x_1, x_2, \cdots, x_d) dx_1 dx_2 \cdots dx_d.$$

上述复合Simpson公式原则上可推广至任何有界区域上的多重积分.推导如下：
取d维长方体

$$\Omega^* = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d] \supset \Omega.$$

将被积函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_d)$延拓为Ω^*上的函数f^*,

$$f^*(x_1, x_2, \cdots, x_d) = \begin{cases} f(x_1, x_2, \cdots, x_d), & (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \Omega, \\ 0, & (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \Omega^* \setminus \Omega \end{cases}$$

则$I = \int\limits_{\Omega} f(x_1, x_2, \cdots, x_d) dx_1 dx_2 \cdots dx_d$化为$d$维长方体上的积分：

$$I = \int\limits_{\Omega^*} f^*(x_1, x_2, \cdots, x_d) dx_1 dx_2 \cdots dx_d.$$

由于Ω^*为长方体，可以使用上述复合Simpson公式计算I的值.

§6.1 多重积分的计算——二重积分的计算

- 多重积分的计算误差与计算节点数之间的关系

- 多重积分的计算误差与计算节点数之间的关系
- 以复合Simpson公式为例，设函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_d)$充分光滑.复合Simpson公式计算时每个方向取n个点

- 多重积分的计算误差与计算节点数之间的关系
- 以复合Simpson公式为例，设函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_d)$充分光滑.复合Simpson公式计算时每个方向取n个点
- $\Longrightarrow$ 则每个方向的计算误差约为$\frac{C_0}{n^4}$，而总的求积误差$R \approx \frac{C_1}{n^4}$($C_0$及$C_1$均为正常数).

- 多重积分的计算误差与计算节点数之间的关系
- 以复合Simpson公式为例，设函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_d)$充分光滑.复合Simpson公式计算时每个方向取n个点
- $\Longrightarrow$ 则每个方向的计算误差约为$\frac{C_0}{n^4}$，而总的求积误差$R \approx \frac{C_1}{n^4}$($C_0$及$C_1$均为正常数).
- 由于区域是d维，因此总的节点数为$m = n^d$.

§6.1 多重积分的计算——二重积分的计算

- 多重积分的计算误差与计算节点数之间的关系
- 以复合Simpson公式为例，设函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_d)$充分光滑.复合Simpson公式计算时每个方向取n个点
- $\Longrightarrow$ 则每个方向的计算误差约为$\frac{C_0}{n^4}$，而总的求积误差$R \approx \frac{C_1}{n^4}$($C_0$及$C_1$均为正常数).
- 由于区域是d维，因此总的节点数为$m = n^d$.
- $\Longrightarrow$ d维复合Simpson公式的误差R与节点数m的关系为

$$R \approx Cm^{-4/d}.$$

- 多重积分的计算误差与计算节点数之间的关系
- 以复合Simpson公式为例，设函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_d)$充分光滑.复合Simpson公式计算时每个方向取n个点
- $\Longrightarrow$ 则每个方向的计算误差约为$\frac{C_0}{n^4}$，而总的求积误差$R \approx \frac{C_1}{n^4}$($C_0$及$C_1$均为正常数).
- 由于区域是d维，因此总的节点数为$m = n^d$.
- $\Longrightarrow$ d维复合Simpson公式的误差R与节点数m的关系为

$$R \approx Cm^{-4/d}.$$

- 维数d的增大，节点数$m = n^d$急剧增多$\Longrightarrow$计算量大大增加. 计算的误差R的减少却很缓慢$\Longrightarrow$**维数灾难**

- 多重积分的计算误差与计算节点数之间的关系
- 以复合Simpson公式为例，设函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_d)$充分光滑.复合Simpson公式计算时每个方向取n个点
- $\Longrightarrow$ 则每个方向的计算误差约为$\frac{C_0}{n^4}$，而总的求积误差$R \approx \frac{C_1}{n^4}$($C_0$及$C_1$均为正常数).
- 由于区域是d维，因此总的节点数为$m = n^d$.
- $\Longrightarrow$ d维复合Simpson公式的误差R与节点数m的关系为

$$R \approx Cm^{-4/d}.$$

- 维数d的增大，节点数$m = n^d$急剧增多$\Longrightarrow$计算量大大增加. 计算的误差R的减少却很缓慢$\Longrightarrow$**维数灾难**
- 计算高维($n > 3$) 数值积分的**蒙特卡罗(Monte Carlo)**方法.

§6.2 多重积分的计算——蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟求积法简介

- 考虑区间[0,1]上的积分，可直接推广到多维的情形.

§6.2 多重积分的计算——蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟求积法简介

- 考虑区间[0,1]上的积分，可直接推广到多维的情形.
- 设随机变量X服从[0,1]上的均匀分布，即$X \sim U(0,1)$.$f(x)$为任意可积函数，则

$$E[f(X)] = \int_0^1 f(x)dx.$$

§6.2 多重积分的计算——蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟求积法简介

- 考虑区间[0,1]上的积分，可直接推广到多维的情形.
- 设随机变量X服从[0,1]上的均匀分布，即$X \sim U(0,1)$.$f(x)$为任意可积函数，则
$$E[f(X)] = \int_0^1 f(x)dx.$$
- 随机变量X的函数$f(X)$的数学期望$\longleftrightarrow$ 函数$f(x)$在区间[0,1]上的积分.

§6.2 多重积分的计算——蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟求积法简介

- 考虑区间[0,1]上的积分，可直接推广到多维的情形.
- 设随机变量X服从[0,1]上的均匀分布，即$X \sim U(0,1)$.$f(x)$为任意可积函数，则
$$E[f(X)] = \int_0^1 f(x)dx.$$
- 随机变量X的函数$f(X)$的数学期望$\longleftrightarrow$ 函数$f(x)$在区间[0,1]上的积分.
-
$$\Longrightarrow \quad \int_0^1 f(x)dx = E[f(X)] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_i).$$

- 记

$$I_N[f] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_i).$$

§6.2 多重积分的计算——蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟求积法简介

- 记

$$I_N[f] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_i).$$

- 则$I_N[f]$是$I[f]$的一个无偏估计量：

$$EI_N[f] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Ef(X_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 f(x)dx = I[f].$$

§6.2 多重积分的计算——蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟求积法简介

- 记
$$I_N[f] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_i).$$
- 则$I_N[f]$是$I[f]$的一个无偏估计量：
$$EI_N[f] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Ef(X_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 f(x)dx = I[f].$$
- 由概率论中的大数定理，当$N \to \infty$时，$I_N[f]$依概率收敛于$I[f]$，即
$$I_N[f] \xrightarrow{P} I[f].$$

§6.2 多重积分的计算——蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟求积法简介

估计误差:$R_N[f] = I_N[f] - I[f]$.由于$R_N[f]$仍为随机变量，我们估计其方差(一般认为均方差即是误差).

估计误差:$R_N[f]=I_N[f]-I[f]$.由于$R_N[f]$仍为随机变量，我们估计其方差(一般认为均方差即是误差).

由于$ER_N[f]=0$，所以

$$\begin{aligned}VarR_N[f]&=ER_N^2[f]=E(I_N[f]-I[f])^2\\&=\frac{1}{N^2}E\left\{\sum_{i=1}^{N}(f(X_i)-I[f])\sum_{j=1}^{N}(f(X_j)-I[f])\right\}.\end{aligned}$$

§6.2 多重积分的计算——蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟求积法简介

估计误差:$R_N[f] = I_N[f] - I[f]$.由于$R_N[f]$仍为随机变量，我们估计其方差(一般认为均方差即是误差).

由于$ER_N[f] = 0$，所以

$$\begin{aligned} VarR_N[f] &= ER_N^2[f] = E(I_N[f] - I[f])^2 \\ &= \tfrac{1}{N^2} E\left\{ \sum_{i=1}^{N} (f(X_i) - I[f]) \sum_{j=1}^{N} (f(X_j) - I[f]) \right\}. \end{aligned}$$

由于$X_i, X_j (i \neq j)$相互独立，可推出当$i \neq j$时，

$$E\left\{ (f(X_i) - I[f])(f(X_j) - I[f]) \right\} = E(f(X_i) - I[f]) E(f(X_j) - I[f]) = 0.$$

因此 $$VarR_N[f] = \tfrac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} E(f(X_i) - I[f])^2 = \frac{1}{N} Var(f).$$

§6.2 多重积分的计算——蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟求积法简介

- 高维区域积分

$$I = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, x_2, \cdots, x_d) dx_1 dx_2 \cdots dx_d.$$

§6.2 多重积分的计算——蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟求积法简介

- 高维区域积分

$$I=\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,x_2,\cdots,x_d)dx_1dx_2\cdots dx_d.$$

- 可取N次独立取样值的算术平均

$$I_N[f]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f((x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_d^{(i)})$$

作为积分I的无偏估计量.

§6.2 多重积分的计算——蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟求积法简介

- 高维区域积分

$$I = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, x_2, \cdots, x_d) dx_1 dx_2 \cdots dx_d.$$

- 可取N次独立取样值的算术平均

$$I_N[f] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f((x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_d^{(i)})$$

  作为积分I的无偏估计量.

- 方差仍为$\frac{Var(f)}{N}$，即收敛速度不受积分区域维数d的影响！正因为**蒙特卡罗方法**具有这个特性，才能成为计算高维积分的有效数值方法. 另外我们可以看出，**蒙特卡罗方法**的收敛速度为$N^{-\frac{1}{2}}$，与被积函数的光滑性无关.这一性质与插值型积分公式大不相同!

例6.2

用蒙特卡罗方法计算积分$I=\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$.

解:首先令$t=\frac{x}{2}$，将积分化为标准区间[0,1]上的积分：$I=\int_0^1 \frac{\sin 2t}{t}dt.$

§6.2 多重积分的计算——蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟求积法简介

例6.2

用蒙特卡罗方法计算积分$I = \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$.

解: 首先令$t = \frac{x}{2}$，将积分化为标准区间[0,1]上的积分：$I = \int_0^1 \frac{\sin 2t}{t} dt$.

其次取x_i为N次相互独立的均匀分布$U(0,1)$的样本，则

$$I \approx I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\sin 2x_i}{x_i}.$$

分别取$N = 10, 20, 50, \cdots, 50000$，计算出积分的近似值 I_N.

§6.2 多重积分的计算——蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟求积法简介

程序如下：

$x = [10\ 20\ 50\ 100\ 200\ 500\ 1000\ 2000\ 5000\ 10000\ 20000\ 50000];$
$I = quad('sin(x)./x', 0, 2, 1.e-16);$
$for\ \ i = 1 : length(x)$
$\quad z = rand(x(i), 1);$
$\quad In = sin(2 * z)./z;$
$\quad In = mean(In);$
$\quad y(i) = abs(In - I);$
end
$x = log(x); y = log(y); plot(x, y,' .-')$
$xlabel('logN'); ylabel('logR'_N);$

§6.2 多重积分的计算——蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟求积法简介

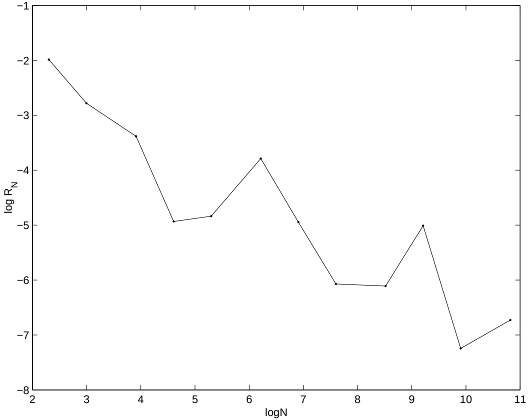


Figure 2: 图**5.5** 误差R_N随节点N的变化规律

插值余项

插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in (a, b)$$

§7.1 数值微分——基于拉格朗日插值多项式的求导方法

插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in (a, b)$$

两边求导

插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in (a, b)$$

两边求导

$$f'(x) - P_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Big[\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\Big]' + \frac{\left[f^{(n+1)}(\xi)\right]'}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in (a, b)$$

两边求导

$$f'(x) - P_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left[\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right]' + \frac{\left[f^{(n+1)}(\xi)\right]'}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

令$x = x_i$

插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in (a, b)$$

两边求导

$$f'(x) - P_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left[\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right]' + \frac{\left[f^{(n+1)}(\xi)\right]'}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

令$x = x_i$

$$f'(x_i) - P_n'(x_i)$$

插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in (a, b)$$

两边求导

$$f'(x) - P_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left[\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right]' + \frac{\left[f^{(n+1)}(\xi)\right]'}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

令$x = x_i$

$$f'(x_i) - P_n'(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left.\left[\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right]'\right|_{x=x_i}$$

插值余项

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in (a, b)$$

两边求导

$$f'(x) - P_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left[\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right]' + \frac{\left[f^{(n+1)}(\xi)\right]'}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

令$x = x_i$

$$f'(x_i) - P_n'(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left[\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right]'\Bigg|_{x=x_i} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{j=0,\, j\neq i}^{n}(x_i - x_j)$$

两点公式

两点公式

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

两点公式

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

两点公式

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

同理

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{h}{2} f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

三点公式$(x_0 < x_1 < x_2, h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0)$,

三点公式$(x_0 < x_1 < x_2, h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0)$,

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

三点公式($x_0 < x_1 < x_2, h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$),

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi),$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi),$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi).$$

三点公式($x_0 < x_1 < x_2, h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$),

$$
\begin{aligned}
L_2(x) = \ & \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) = \ & \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi), \\
f'(x_1) = \ & \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi), \\
f'(x_2) = \ & \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi).
\end{aligned}
$$

$$
f''(x_1) = \frac{1}{h^2}[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)
$$

例7.1

给定函数$f(x) = \mathrm{e}^x$的下列数据表，试利用二点、三点微分公式计算$x = 2.7$处的一阶导数值。

x	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$f(x)$	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

例7.1

给定函数$f(x)=\mathrm{e}^x$的下列数据表，试利用二点、三点微分公式计算$x=2.7$处的一阶导数值。

x	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$f(x)$	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

解:两点公式

$$f'(2.7)\approx \frac{1}{0.1}[f(2.7)-f(2.6)]=14.1600$$
$$f'(2.7)\approx \frac{1}{0.1}[f(2.8)-f(2.7)]=15.6490$$

例7.1

给定函数$f(x) = \mathrm{e}^x$的下列数据表，试利用二点、三点微分公式计算$x = 2.7$处的一阶导数值。

x	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$f(x)$	12.1825	13.4637	14.8797	16.4446	18.1741

三点公式

$$f'(2.7) \approx \frac{1}{2 \times 0.1}[f(2.8) - f(2.6)] = 14.9045$$

$$f'(2.7) \approx \frac{1}{2 \times 0.2}[f(2.9) - 2f(2.5)] = 14.9790$$

例7.2

给定下列数据表，试利用三点微分公式计算$x = 1.2$处的一阶和二阶导数值。

x	1.1	1.2	1.3
$f(x)$	0.4860	0.8616	1.5975

例7.2

给定下列数据表，试利用三点微分公式计算$x=1.2$处的一阶和二阶导数值。

x	1.1	1.2	1.3
$f(x)$	0.4860	0.8616	1.5975

解：

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

例7.2

给定下列数据表，试利用三点微分公式计算$x = 1.2$处的一阶和二阶导数值。

x	1.1	1.2	1.3
$f(x)$	0.4860	0.8616	1.5975

$$L_2'(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

例7.2

给定下列数据表，试利用三点微分公式计算$x = 1.2$处的一阶和二阶导数值。

x	1.1	1.2	1.3
$f(x)$	0.4860	0.8616	1.5975

$$L_2'(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 + \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}y_2$$

$$L_2''(x) = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

例7.2

给定下列数据表，试利用三点微分公式计算$x = 1.2$处的一阶和二阶导数值。

x	1.1	1.2	1.3
$f(x)$	0.4860	0.8616	1.5975

$$L_2'(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}y_0 + \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}y_1 + \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}y_2$$

$$L_2''(x) = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$f'(1.2) \approx 5.5575 \qquad f''(1.2) \approx 36.0300$$

- h越小一般精度越高.但在实际计算中，数据f_i有误差，并不是h越小计算效果越好.

- h越小一般精度越高.但在实际计算中，数据f_i有误差，并不是h越小计算效果越好.
- 理由说明如下.

设$L_n'(x_i) = \dfrac{1}{h}\sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$，并令$f(x) \equiv 1$，则可得

$$\sum_{j=0}^{n} A_j = 0.$$

§7.2 数值微分——基于样条函数的求导方法

- h越小一般精度越高.但在实际计算中，数据f_i有误差，并不是h越小计算效果越好.
- 理由说明如下.

  设$L_n'(x_i) = \dfrac{1}{h}\sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$，并令$f(x) \equiv 1$，则可得

$$\sum_{j=0}^{n} A_j = 0.$$

- 由此可见系数A_j有正数，也有负数.并且当数据$f(x_j)$有一定误差以及h很小时，由于$L_n'(x_i)$的表达式中会出现分母为“小数”h，因此会造成较大的数值误差，即算法不是一个**稳定的算法**.因此实际应用中步长h不要取得太小. **基于样条函数的求导方法**

- 我们将用样条函数$S(x)$代替拉格朗日插值多项式$L_n(x)$ 作为函数$f(x)$ 的近似.若$f(x) \in C^4[a,b]$，则有估计

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)| \leqslant Ch^{4-k}, \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

其中$h = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} h_i$.

- 我们将用样条函数$S(x)$代替拉格朗日插值多项式$L_n(x)$ 作为函数$f(x)$ 的近似.若$f(x) \in C^4[a,b]$，则有估计

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)| \leqslant Ch^{4-k}, \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

其中$h = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} h_i$.

即此时不但$f(x)$与$S(x)$的函数值很“接近”，它们的导数值也很“接近”.

- 我们将用样条函数$S(x)$代替拉格朗日插值多项式$L_n(x)$ 作为函数$f(x)$ 的近似.若$f(x) \in C^4[a,b]$，则有估计

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)| \leqslant Ch^{4-k}, \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

其中$h = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} h_i$.

即此时不但$f(x)$与$S(x)$的函数值很“接近”，它们的导数值也很“接近”.

- 如何求$S(x)$?三弯矩方法、三转角方法。

- 我们将用样条函数$S(x)$代替拉格朗日插值多项式$L_n(x)$ 作为函数$f(x)$ 的近似.若$f(x) \in C^4[a,b]$，则有估计

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)| \leqslant Ch^{4-k}, \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

  其中$h = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} h_i$.
  即此时不但$f(x)$与$S(x)$的函数值很“接近”，它们的导数值也很“接近”.
- 如何求$S(x)$?三弯矩方法、三转角方法。
  计算三次样条函数的三弯矩方法已在第3章介绍，下面我们将推导直接以节点处的导数值$S'(x_i) = m_i$作为未知量的**三转角方程组**.

设$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, h_i = x_{i+1} - x_i$. 假定样条函数$S(x)$在$x_i$处的导数值$S'(x_i) = m_i$，则在区间$[x_i, x_i + 1]$上，$S(x)$为三次多项式.

设$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, h_i = x_{i+1} - x_i$. 假定样条函数$S(x)$在$x_i$处的导数值$S'(x_i) = m_i$，则在区间$[x_i, x_i + 1]$上，$S(x)$为三次多项式.

利用Hermite插值公式，可得

$$S(x) = \frac{h_i + 2(x - x_i)}{h_i^3}(x - x_{i+1})^2 f_i + \frac{h_i - 2(x - x_{i+1})}{h_i^3}(x - x_i)^2 f_{i+1} + \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})^2}{h_i^2} m_i + \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+1})^2}{h_i^2} m_{i+1}.$$

设$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, h_i = x_{i+1} - x_i$. 假定样条函数$S(x)$在$x_i$处的导数值$S'(x_i) = m_i$，则在区间$[x_i, x_i + 1]$上，$S(x)$为三次多项式.

利用Hermite插值公式，可得

$$S(x) = \frac{h_i + 2(x - x_i)}{h_i^3}(x - x_{i+1})^2 f_i + \frac{h_i - 2(x - x_{i+1})}{h_i^3}(x - x_i)^2 f_{i+1} + \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})^2}{h_i^2} m_i + \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+1})^2}{h_i^2} m_{i+1}.$$

求出$m_i (i = 0, 1, \cdots, n)$的值，需要$S''(x)$在$x = x_i$处的连续性条件:

$$S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0), \quad (i = 1, 2, \cdots, n - 1),$$

以及在区间$[a, b]$端点$x = a$及$x = b$处的附加条件.

1. 设$S'(x_0)=f_0'=m_0, S'(x_n)=f_n'=m_n$为已知. 使用与第3章类似的方法可知$m_i$满足下列方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1-\lambda_1 f_0' \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1}-\mu_{n-1} f_n' \end{bmatrix} \quad (1)$$

2. 若$S''(x_0)=f''_0, S''(x_n)=f''_n$已知，则方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

3.若满足周期性条件：$S(x_0)=S(x_n), S'(x_0)=S'(x_n), S''(x_0)=S''(x_n)$，则方程组变为

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \tag{3}$$