函数逼近

主讲：王伟

Emal: wangw@tongji.edu.cn

同济大学数学科学学院

内容提要

1 前言

内容提要

1 前言

2 内积与正交多项式

内容提要

1. 前言
2. 内积与正交多项式
3. 最佳一致逼近与切比雪夫展开

内容提要

1 前言

2 内积与正交多项式

3 最佳一致逼近与切比雪夫展开

4 最佳平方逼近

内容提要

1. 前言
2. 内积与正交多项式
3. 最佳一致逼近与切比雪夫展开
4. 最佳平方逼近
5. 曲线拟合的最小二乘法

内容提要

1 前言

2 内积与正交多项式

3 最佳一致逼近与切比雪夫展开

4 最佳平方逼近

5 曲线拟合的最小二乘法

6 周期函数逼近与快速傅立叶变换

§1 前言

本章来回答第3章提出的第2个问题—-函数的逼近问题

函数逼近问题分类：一致逼近和平方逼近

本章来回答第3章提出的第2个问题—-函数的逼近问题

函数逼近问题分类：一致逼近和平方逼近

一致逼近

- 度量标准：以函数$f(x)$和$p(x)$的最大误差

$$\|p-f\|_\infty = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x) - f(x)|$$

作为度量逼近函数$p(x)$和被逼近函数$f(x)$的逼近程度。

本章来回答第3章提出的第2个问题—-函数的逼近问题

函数逼近问题分类：一致逼近和平方逼近

一致逼近

- 度量标准：以函数$f(x)$和$p(x)$的最大误差

$$\|p-f\|_\infty=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|p(x)-f(x)|$$

作为度量逼近函数$p(x)$和被逼近函数$f(x)$的逼近程度。

- 若存在一个函数序列$p_n(x)$，满足$\lim_{n\to\infty}\|p_n(x)-f(x)\|_\infty=0$，则意味着序列$\{p_n(x)\}$ 在区间$[a,b]$上一致收敛到$f(x)$。序列$\{p_n(x)\}$对$f(x)$的逼近称为一致逼近。

§1 前言

平方逼近

- 度量标准：用积分$\|p-f\|_2=\left(\int\limits_a^b (p(x)-f(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$作为度量逼近函数$p(x)$与被逼近函数$f(x)$的近似程度。

平方逼近

- 度量标准：用积分$\|p-f\|_2=\left(\int_a^b (p(x)-f(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$作为度量逼近函数$p(x)$与被逼近函数$f(x)$的近似程度。
- 若存在一个函数序列$\{p_n(x)\}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}\|p_n(x)-f(x)\|_2=0$，则意味着序列$\{p_n(x)\}$ 在区间$[a,b]$上平方收敛到$f(x)$。序列$\{p_n(x)\}$对$f(x)$的逼近称为平方逼近。

逼近小结：

- 若存在一个函数序列$\{p_n(x)\}$，满足$\lim\limits_{n\to+\infty}\|p_n-f\|=0$，则称$\{p_n(x)\}$是函数$f(x)$的逼近；
- 由范数的不同决定不同的逼近。

逼近小结：

- 若存在一个函数序列$\{p_n(x)\}$，满足$\lim\limits_{n\to+\infty}\|p_n-f\|=0$，则称$\{p_n(x)\}$是函数$f(x)$的逼近；
- 由范数的不同决定不同的逼近。

下面考虑：

“最佳”一致逼近函数和“最佳”平方逼近函数

“最佳”的意思？——本章来回答！

定义2.1

设$[a,b]$为有限或无限区间，$\rho(x)$满足:

- $\rho(x)$在$[a,b]$上非负;
- $\int_a^b x^k\rho(x)\mathrm{d}x$对于$k=0,1,\cdots$都存在;
- 对于任何$f(x)\in C[a,b]$, $f(x)\geqslant 0$, 若$\int_a^b f(x)\rho(x)\mathrm{d}x=0$, 则$f(x)\equiv 0$;

称$\rho(x)$为$[a,b]$上的权函数。

定义2.1

设$[a,b]$为有限或无限区间，$\rho(x)$满足:

- $\rho(x)$在$[a,b]$上非负;
- $\int_a^b x^k \rho(x)\mathrm{d}x$对于$k=0,1,\cdots$都存在;
- 对于任何$f(x)\in C[a,b]$, $f(x)\geqslant 0$, 若$\int_a^b f(x)\rho(x)\mathrm{d}x=0$, 则$f(x)\equiv 0$;

称$\rho(x)$为$[a,b]$上的权函数。

定义2.1

设$[a,b]$为有限或无限区间，$\rho(x)$满足:

- $\rho(x)$在$[a,b]$上非负;
- $\int_a^b x^k\rho(x)\mathrm{d}x$对于$k=0,1,\cdots$都存在;
- 对于任何$f(x)\in C[a,b]$, $f(x)\geqslant 0$, 若$\int_a^b f(x)\rho(x)\mathrm{d}x=0$, 则$f(x)\equiv 0$;

称$\rho(x)$为$[a,b]$上的权函数。

权函数值$\rho(x)$的意义—- 点x在$[a,b]$上所占据的重要性。

常见的权函数及其区间

$$\rho(x)=1,\quad [-1,1];\qquad \rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad [-1,1];$$
$$\rho(x)=\mathrm{e}^{-x},\quad [0,+\infty);\qquad \rho(x)=\mathrm{e}^{-x^2},\quad (-\infty,+\infty).$$

定义2.2

设$f(x), g(x) \in C[a, b]$，$\rho(x)$ 为$[a, b]$上的权函数，定义

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x)\, dx \tag{1}$$

为函数$f(x)$与$g(x)$的内积。

定义2.2

设$f(x), g(x) \in C[a,b]$，$\rho(x)$ 为$[a,b]$上的权函数，定义

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x)\, dx \tag{1}$$

为函数$f(x)$与$g(x)$的内积。

定义2.2

设$f(x), g(x) \in C[a,b]$，$\rho(x)$ 为$[a,b]$上的权函数，定义

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x)\, dx \qquad (1)$$

为函数$f(x)$与$g(x)$的内积。

注：该定义是R^n空间中两个向量$x = (x_1, \cdots, x_n)^T$与$y = (y_1, \cdots, y_n)^T$的数量积定义的推广

定义2.2

设$f(x), g(x) \in C[a,b]$，$\rho(x)$ 为$[a,b]$上的权函数，定义

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x)\, dx \tag{1}$$

为函数$f(x)$与$g(x)$的内积。

注：该定义是R^n空间中两个向量$x = (x_1, \cdots, x_n)^T$与$y = (y_1, \cdots, y_n)^T$的数量积定义的推广

内积的基本性质：
(1) $(f,g) = (g,f)$;
(2) $(c_1 f + c_2 g, h) = c_1(f,h) + c_2(g,h)$；
(3) $(f,f) \geqslant 0$,并且当且仅当$f \equiv 0$时，$(f,f) = 0$。

定义2.3

设$f(x), g(x) \in C[a,b]$，$\rho(x)$ 为$[a,b]$上的权函数，若内积

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x)\, dx = 0$$

则称$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上带权$\rho(x)$正交。

定义2.3

设$f(x), g(x) \in C[a,b]$，$\rho(x)$ 为$[a,b]$上的权函数，若内积

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x)\, dx = 0$$

则称$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上带权$\rho(x)$正交。

定义2.4

设函数系$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots\}$是$[a,b]$上的连续函数，若满足条件

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} 0, i \neq j \\ A_j > 0, i = j \end{cases} \quad (i, j = 0, 1, 2, \cdots)$$

则称函数系$\{\varphi_k(x)\}$ 是$[a,b]$上带权$\rho(x)$ 的正交函数系。

例2.1

三角函数系$1, sinx, cosx, sin2x, cos2x, \cdots$在$[0, 2\pi]$上是正交函数系*(*权$\rho(x) \equiv 1$ *)*。

例2.1

三角函数系$1, sinx, cosx, sin2x, cos2x, \cdots$在$[0, 2\pi]$上是正交函数系(权$\rho(x) \equiv 1$)。

解: 实际上$(1, 1) = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$，而

$$(\sin nx, \sin mx) = \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} \pi, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases} \quad n, m = 1, 2, \cdots$$

$$(\cos nx, \cos mx) = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} \pi, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases} \quad n, m = 1, 2, \cdots$$

$$(\cos nx, \sin mx) = \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx dx = 0, m, n = 0, 1, \cdots .$$

定义2.5

设$\varphi_n(x)$是首项系数$a_n \neq 0$的n次多项式，如果多项式序列$\{\varphi_n(x)\}_0^\infty$ 满足

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, i \neq j \\ A_j \neq 0, i = j \end{cases} \tag{2}$$

则称多项式序列$\varphi_n(x)$为在$[a, b]$上带权$\rho(x)$的n次正交多项式。

勒让德多项式是区间$[-1,1]$上权函数$\rho(x)=1$ 的正交多项式：

$$P_0(x)=1, P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\right\}, n=1,2,\cdots$$

$P_n(x)$的首项x^n的系数为$\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$，记

$$\widetilde{P}_0(x)=1, \widetilde{P}_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\right\}, n=1,2,\cdots$$

则$\widetilde{P}_n(x)$是首项x^n系数为1的勒让德多项式。

勒让德多项式的性质：

(1) 正交性

$$(P_n,P_m)=\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0, m\neq n\\ \frac{2}{2n+1}, m=n\end{cases}$$

(2) 递推公式

$$(n+1)\,P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x),(n=1,2,\cdots)$$

其中,$P_0(x)=1, P_1(x)=x$,易知

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \qquad P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

(2) 递推公式

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), (n = 1, 2, \cdots)$$

其中,$P_0(x) = 1, P_1(x) = x$,易知

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

(3) 奇偶性

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

下图给出了$P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$的图形。

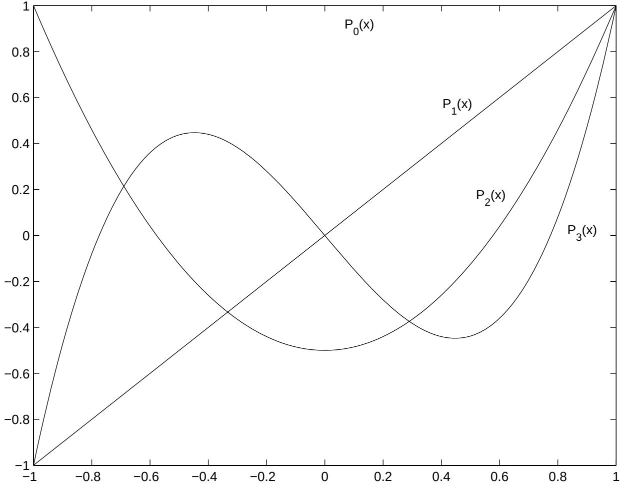


Figure 1: $P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$的图形

切比雪夫多项式为在区间$[-1,1]$上权函数$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的正交多项式：

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),\ n=0,1,\cdots$$

$T_n(x)$的主要性质：

(1) 正交性

$$(T_n,T_m)=\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0,\ m\neq n\\ \frac{\pi}{2},\ m=n\neq 0\\ \pi,\ m=n=0\end{cases}$$

切比雪夫多项式为在区间$[-1,1]$上权函数$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的正交多项式：

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),\, n=0,1,\cdots$$

$T_n(x)$的主要性质：

(1) 正交性

$$(T_n,T_m)=\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0,\, m\neq n\\ \frac{\pi}{2},\, m=n\neq 0\\ \pi,\, m=n=0\end{cases}$$

(2)递推公式

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),\, n=1,2,\cdots$$

其中$T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$.

容易推出$T_2(x)$到$T_8(x)$如下：

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, \\
T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x, \\
T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1,
\end{aligned}$$

下图给出了 $T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x), T_4(x)$的图形。

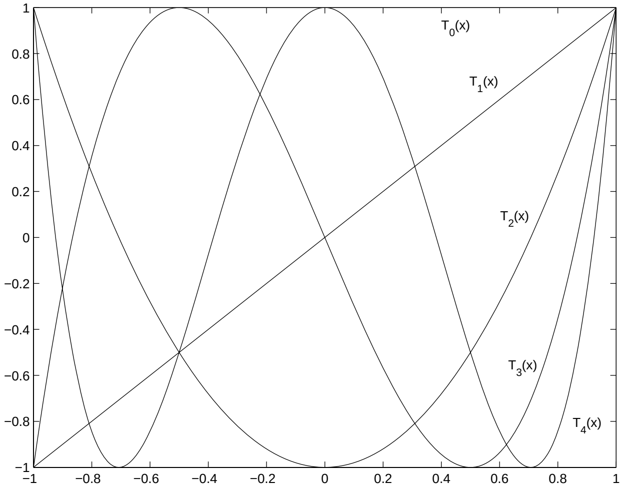


Figure 2: $T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x), T_4(x)$的图形

(3) 奇偶性

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

(3) 奇偶性

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

(4) $T_n(x)$在$(-1,1)$内的n个零点为$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, k = 1, 2, \cdots, n$,
在$[-1,1]$上有$n+1$个极值点$y_k = \cos\frac{k}{n}\pi, k = 0, 1, \cdots, n$ 。

(3) 奇偶性

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

(4) $T_n(x)$在$(-1,1)$内的n个零点为$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, k = 1, 2, \cdots, n,$
在$[-1,1]$上有$n+1$个极值点$y_k = \cos\frac{k}{n}\pi, k = 0, 1, \cdots, n$ 。

(5) $T_n(x)$的最高次幂x^n的系数为$2^{n-1}, n \geqslant 1.$

(1)拉盖尔（Laguerre）多项式

拉盖尔多项式的表达式为下式,它是区间$[0,\infty)$上权函数为$\rho(x)=e^{-x}$的正交多项式

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}),n=0,1,\cdots$$

(1)拉盖尔（Laguerre）多项式

拉盖尔多项式的表达式为下式,它是区间$[0,\infty)$上权函数为$\rho(x)=e^{-x}$ 的正交多项式

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}),n=0,1,\cdots$$

- 递推公式：

$$L_{n+1}(x)=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x),n=1,2,\cdots$$

其中,$L_0(x)=1,L_1(x)=1-x.$

(1)拉盖尔（Laguerre）多项式

拉盖尔多项式的表达式为下式,它是区间$[0,\infty)$上权函数为$\rho(x)=e^{-x}$ 的正交多项式

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}),n=0,1,\cdots$$

- 递推公式：

$$L_{n+1}(x)=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x),n=1,2,\cdots$$

其中,$L_0(x)=1,L_1(x)=1-x.$

- 正交性：

$$(L_n,L_m)=\int_0^{\infty}L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx=\begin{cases}0,m\neq n\\(n!)^2,m=n\end{cases}$$

(2) 埃尔米特（Hermite）多项式

埃尔米特多项式的表达式为下式,它是区间$(-\infty,+\infty)$上权函数为$\rho(x)=e^{-x^2}$的正交多项式：

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

(2) 埃尔米特（Hermite）多项式

埃尔米特多项式的表达式为下式,它是区间$(-\infty,+\infty)$上权函数为$\rho(x)=e^{-x^2}$的正交多项式：

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

- 递推公式：

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x),\, n=1,2,\cdots$$

其中$H_0(x)=1, H_1(x)=2x.$

(2) 埃尔米特（Hermite）多项式

埃尔米特多项式的表达式为下式,它是区间$(-\infty,+\infty)$上权函数为$\rho(x)=e^{-x^2}$的正交多项式：

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

- 递推公式：

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x), n=1,2,\cdots$$

其中$H_0(x)=1, H_1(x)=2x.$

- 正交性：

$$(H_n,H_m)=\int_{-\infty}^{\infty}H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx=\begin{cases}0, m\neq n\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, m=n\end{cases}$$

	勒让德(Legendre)	切比雪夫(Chebyshev)
权	1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
区间	$[-1,1]$	$[-1,1]$
通项	$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\{(x^2-1)^n\}$	$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$
正交	$(P_m,P_n)=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$	$(T_n,T_m)=\begin{cases}\pi, & m=n=0\\ \frac{\pi}{2}\delta_{mn}, & \text{other}\end{cases}$
递推	$P_0(x)=1,$ $P_1(x)=x,$ $P_{n+1}(x)$ $=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$	$T_0(x)=1,$ $T_1(x)=x,$ $T_{n+1}(x)$ $=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$
奇偶	$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$	$T_n(-x)=(-1)^nT_n(x)$
其它		根$\{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\}_1^n$极值点$\{\cos\frac{k}{n}\pi\}_0^n$

	拉盖尔(Laguerre)	埃尔米特(Hermite)
权	e^{-x}	e^{-x^2}
区间	$[0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
通项	$L_n(x)=\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-n})$	$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}$
正交	$(L_n,L_m)=(n!)^2\delta_{mn}$	$(H_n,H_m)=2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn}$
递推	$L_0(x)=1$, $L_1(x)=1-x$, $L_{n+1}(x)$ $=(1+2n-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x)$	$H_0(x)=1$, $H_1(x)=2x$, $H_{n+1}(x)$ $=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$
奇偶		$H_n(-x)=(-1)^nH_n(x)$
其它		

定义3.1

设$f(x) \in C[a,b]$，对任意ε，若存在多项式$p(x)$，使不等式

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |p(x) - f(x)| < \varepsilon$$

成立，则称多项式$p(x)$在$[a,b]$上一致逼近于$f(x)$。

定义3.1

设$f(x)\in C[a,b]$，对任意ε，若存在多项式$p(x)$，使不等式

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|p(x)-f(x)|<\varepsilon$$

成立，则称多项式$p(x)$在$[a,b]$上一致逼近于$f(x)$。

定义3.1

设$f(x) \in C[a,b]$，对任意ε，若存在多项式$p(x)$，使不等式

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x) - f(x)| < \varepsilon$$

成立，则称多项式$p(x)$在$[a,b]$上一致逼近于$f(x)$。

对于$[a,b]$上的连续函数$f(x)$，是否存在多项式$p(x)$一致逼近$f(x)$ 呢？

定义3.1

设$f(x) \in C[a,b]$，对任意ε，若存在多项式$p(x)$，使不等式

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x) - f(x)| < \varepsilon$$

成立，则称多项式$p(x)$在$[a,b]$上一致逼近于$f(x)$。

对于$[a,b]$上的连续函数$f(x)$，是否存在多项式$p(x)$一致逼近$f(x)$呢？

定理3.1

（*Weierstrass*定理）设$f(x) \in C[a,b]$，那么对于任意给定的$\varepsilon > 0$，都存在这样的多项式$p(x)$，使得$\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x) - f(x)| < \varepsilon$

在实际计算中，人们感兴趣下面两类问题:

- 问题1：若多项式次数n固定，求一个多项式$p_n^*(x)$，使$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|p_n^*(x)-f(x)|$最小.——最佳一致逼近多项式

在实际计算中，人们感兴趣下面两类问题:

- 问题1：若多项式次数n固定，求一个多项式$p_n^*(x)$，使 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|p_n^*(x)-f(x)|$最小.—-最佳一致逼近多项式
- 问题2：若给定逼近精度，求次数较低的逼近多项式。

定义3.2

- 设$f(x) \in C[a,b]$，$p(x) \in P_n$，$P_n = \{$次数不超过n的多项式全体$\}$，则

$$\|p-f\|_\infty = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x)-f(x)| = \mu$$

称为$p(x)$与$f(x)$的偏差。

定义3.2

- 设$f(x) \in C[a,b]$，$p(x) \in P_n$，$P_n = \{$次数不超过n的多项式全体$\}$，则

$$\|p - f\|_\infty = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x) - f(x)| = \mu$$

称为$p(x)$与$f(x)$的偏差。

定义3.2

- 设$f(x) \in C[a,b]$，$p(x) \in P_n$，$P_n = \{$次数不超过n的多项式全体$\}$，则
$$\|p - f\|_\infty = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x) - f(x)| = \mu$$
称为$p(x)$与$f(x)$的偏差。

- 若$\exists x_0 \in [a,b]$，使
$$|p(x_0) - f(x_0)| = \mu$$
则称x_0是$p(x)$关于$f(x)$的偏差点。

定义3.2

- 设$f(x) \in C[a,b]$，$p(x) \in P_n$，$P_n = \{$次数不超过n的多项式全体$\}$，则

$$\|p - f\|_\infty = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x) - f(x)| = \mu$$

称为$p(x)$与$f(x)$的偏差。

- 若$\exists x_0 \in [a,b]$，使

$$|p(x_0) - f(x_0)| = \mu$$

则称x_0是$p(x)$关于$f(x)$的偏差点。

- 若$p(x_0) - f(x_0) = \mu$ ，则称x_0为正偏差点，

定义3.2

- 设$f(x) \in C[a,b]$，$p(x) \in P_n$，$P_n = \{$次数不超过n的多项式全体$\}$，则
$$\|p-f\|_\infty = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x)-f(x)| = \mu$$
称为$p(x)$与$f(x)$的偏差。

- 若$\exists x_0 \in [a,b]$，使
$$|p(x_0)-f(x_0)| = \mu$$
则称x_0是$p(x)$关于$f(x)$的偏差点。

- 若$p(x_0)-f(x_0) = \mu$，则称x_0为正偏差点，

- 若$p(x_0)-f(x_0) = -\mu$，则称x_0 为负偏差点。

定义3.3

设$f(x) \in C[a,b]$，若存在$p_n^*(x) \in P_n$，使

$$\|p_n^* - f\|_\infty = \min_{p \in P_n} \|p - f\|_\infty \tag{3}$$

则称$p_n^*(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的最佳一致逼近多项式，简称最佳逼近多项式。

定义3.3

设$f(x) \in C[a,b]$，若存在$p_n^*(x) \in P_n$，使

$$\|p_n^* - f\|_\infty = \min_{p \in P_n} \|p - f\|_\infty \tag{3}$$

则称$p_n^*(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的最佳一致逼近多项式，简称最佳逼近多项式。

定义3.3

设$f(x) \in C[a,b]$，若存在$p_n^*(x) \in P_n$，使

$$\|p_n^* - f\|_\infty = \min_{p \in P_n} \|p - f\|_\infty \tag{3}$$

则称$p_n^*(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的最佳一致逼近多项式，简称最佳逼近多项式。

定理3.2

若$f(x) \in C[a,b]$，则存在唯一的$p_n^*(x) \in P_n$，使得

$$\|p_n^* - f\|_\infty = \min_{p \in P_n} \|p - f\|_\infty$$

注：最佳逼近多项式存在且唯一。

定理3.3 (切比雪夫定理)

$p_n^*(x) \in P_n$是$f(x) \in C[a,b]$ 的最佳逼近多项式的充分必要条件是：在$[a,b]$上至少有$n+2$ 个轮流为正负的偏差点，即至少有$n+2$个点$a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2} \leqslant b$，使得

$$p_n^*(x_k) - f(x_k) = (-1)^k \sigma \left\| f - p_n^* \right\|_\infty, \sigma = \pm 1, (k = 1, 2, \cdots, n+2)$$

点$\{x_k\}_1^{n+2}$称为切比雪夫交错点组

§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

问题：

设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且$f''(x)$在$[a,b]$ 上不变号，求$f(x)$的线性最佳一致逼近多项式$p_1(x) = a_0 + a_1 x$。

§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

问题：

设$f(x)$在$[a, b]$上有二阶导数，且$f''(x)$在$[a, b]$ 上不变号，求$f(x)$的线性最佳一致逼近多项式$p_1(x) = a_0 + a_1x$。

求解分两步：

§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

问题：

设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且$f''(x)$在$[a,b]$ 上不变号，求$f(x)$的线性最佳一致逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$。

求解分两步：

(1)确定$p_1(x)$对$f(x)$的3个偏差点的位置

$f''(x)\neq 0 \Rightarrow f'(x)$在$[a,b]$上单调

§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

问题：

设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且$f''(x)$在$[a,b]$ 上不变号，求$f(x)$的线性最佳一致逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$。

求解分两步：

(1)确定$p_1(x)$对$f(x)$的3个偏差点的位置

$f''(x)\neq 0 \Rightarrow f'(x)$在$[a,b]$上单调

$\Rightarrow f'(x)-p_1'(x)=f'(x)-a_1=0$在$[a,b]$上只有一个根

§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

问题：

设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且$f''(x)$在$[a,b]$ 上不变号，求$f(x)$的线性最佳一致逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$。

求解分两步：

(1)确定$p_1(x)$对$f(x)$的3个偏差点的位置

$f''(x)\neq 0 \Rightarrow f'(x)$在$[a,b]$上单调

$\Rightarrow f'(x)-p_1'(x)=f'(x)-a_1=0$在$[a,b]$上只有一个根

$\Rightarrow$且为$p_1(x)$对$f(x)$的第2个偏差点x_2

问题：

设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶导数，且$f''(x)$在$[a,b]$ 上不变号，求$f(x)$的线性最佳一致逼近多项式$p_1(x) = a_0 + a_1 x$。

求解分两步：

(1)确定$p_1(x)$对$f(x)$的3个偏差点的位置

$f''(x) \neq 0 \Rightarrow f'(x)$在$[a,b]$上单调

$\Rightarrow f'(x) - p_1'(x) = f'(x) - a_1 = 0$在$[a,b]$上只有一个根

$\Rightarrow$且为$p_1(x)$对$f(x)$的第2个偏差点x_2

$p_1(x)$对$f(x)$另两个偏差点只能在$[a,b]$ 的端点，故有$x_1 = a, x_3 = b$.

（2）利用偏差点的性质确定系数a_0, a_1

由$p_1(a) - f(a) = -[p_1(x_2) - f(x_2)] = p_1(b) - f(b)$得

§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

（2）利用偏差点的性质确定系数a_0, a_1

由$p_1(a) - f(a) = -[p_1(x_2) - f(x_2)] = p_1(b) - f(b)$得

$$a_0 + a_1 a - f(a) = a_0 + a_1 b - f(b) \tag{4}$$

$$a_0 + a_1 a - f(a) = -[a_0 + a_1 x_2 - f(x_2)] \tag{5}$$

（2）利用偏差点的性质确定系数a_0, a_1

由$p_1(a) - f(a) = -[p_1(x_2) - f(x_2)] = p_1(b) - f(b)$得

$$a_0 + a_1 a - f(a) = a_0 + a_1 b - f(b) \tag{4}$$

$$a_0 + a_1 a - f(a) = -[a_0 + a_1 x_2 - f(x_2)] \tag{5}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

（2）利用偏差点的性质确定系数a_0, a_1

由$p_1(a) - f(a) = -[p_1(x_2) - f(x_2)] = p_1(b) - f(b)$得

$$a_0 + a_1 a - f(a) = a_0 + a_1 b - f(b) \tag{4}$$

$$a_0 + a_1 a - f(a) = -[a_0 + a_1 x_2 - f(x_2)] \tag{5}$$

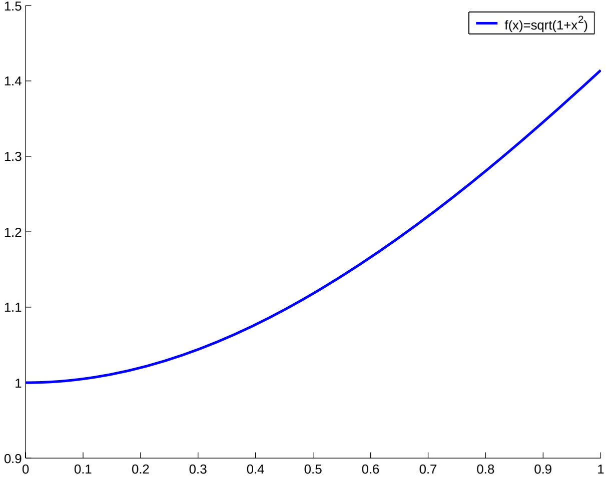
$$\Rightarrow a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{2}[f(a) + f(x_2)] - \frac{a + x_2}{2}\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

其中x_2由$f'(x_2) = a_1$得到。

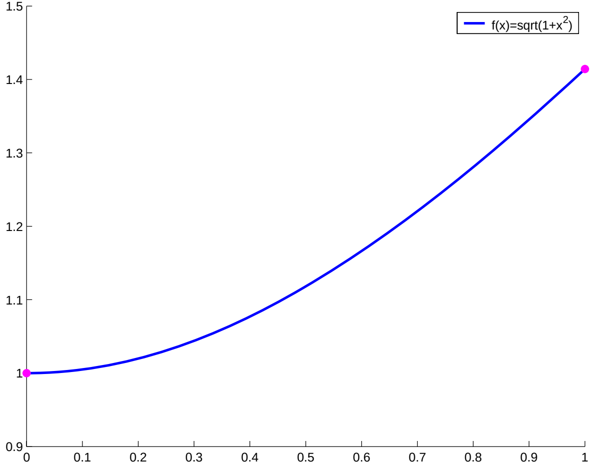
§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

$f(x)$在$[a, b]$ 上的最佳一次逼近多项式$p_1(x) = a_0 + a_1 x$的几何意义:



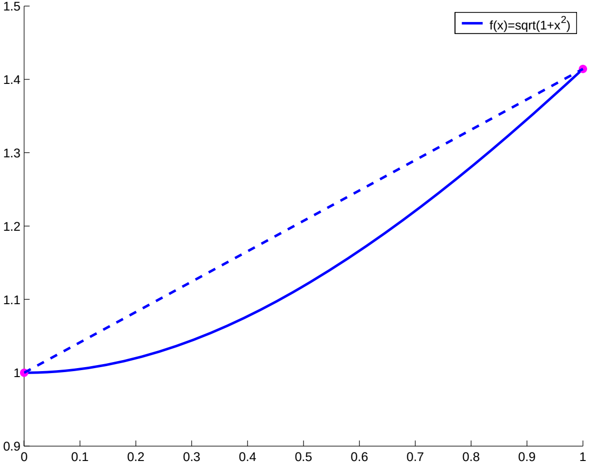
§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

$f(x)$在$[a,b]$ 上的最佳一次逼近多项式$p_1(x) = a_0 + a_1 x$的几何意义:



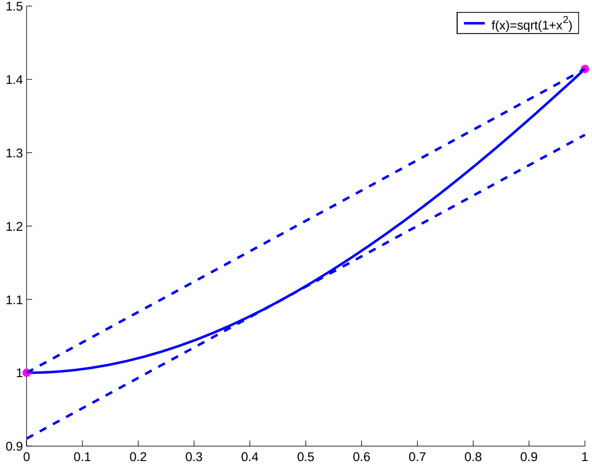
§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

$f(x)$在$[a, b]$ 上的最佳一次逼近多项式$p_1(x) = a_0 + a_1x$的几何意义:



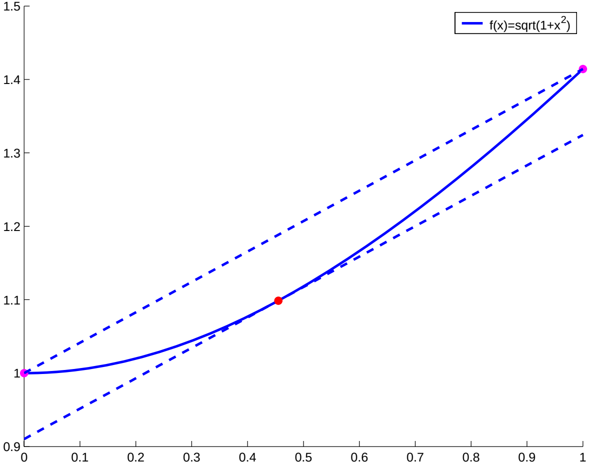
§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

$f(x)$在$[a,b]$ 上的最佳一次逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$的几何意义:

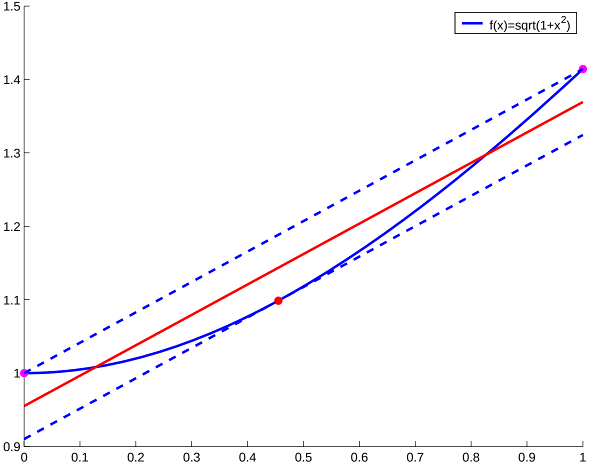


§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

$f(x)$在$[a,b]$ 上的最佳一次逼近多项式$p_1(x) = a_0 + a_1 x$的几何意义:



$f(x)$在$[a,b]$ 上的最佳一次逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$的几何意义:



§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

例3.1

设$f(x) = \sqrt{1+x^2}$，在$[0,1]$上求$f(x)$的最佳一次逼近多项式$p_1(x) = a_0 + a_1 x$.

解:

§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

例3.1

设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$，在$[0,1]$上求$f(x)$的最佳一次逼近多项式
$p_1(x)=a_0+a_1x$.

解:

$$a_1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\sqrt{2}-1=0.414.$$

§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

例3.1

设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$，在$[0,1]$上求$f(x)$的最佳一次逼近多项式
$p_1(x)=a_0+a_1x$.

解:

$$a_1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\sqrt{2}-1=0.414.$$

$$f'(x_2)=\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}=a_1$$

例3.1

设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$，在$[0,1]$上求$f(x)$的最佳一次逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$.

解:

$$a_1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\sqrt{2}-1=0.414.$$

$$f'(x_2)=\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}=a_1\Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=0.4551.$$

例3.1

设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$，在$[0,1]$上求$f(x)$的最佳一次逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$.

解:

$$a_1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\sqrt{2}-1=0.414.$$

$$f'(x_2)=\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}=a_1\Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=0.4551.$$

$$f(x_2)=1.0986$$

例3.1

设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$，在$[0,1]$上求$f(x)$的最佳一次逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$.

解:

$$a_1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\sqrt{2}-1=0.414.$$

$$f'(x_2)=\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}=a_1\Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=0.4551.$$

$$f(x_2)=1.0986$$

$$a_0=0.955$$

§3.2 最佳一致逼近与切比雪夫展开——线性最佳逼近多项式$p_1(x)$的求法

例3.1

设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$，在$[0,1]$上求$f(x)$的最佳一次逼近多项式$p_1(x)=a_0+a_1x$.

解:

$$a_1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\sqrt{2}-1=0.414.$$

$$f'(x_2)=\frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}}=a_1\Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=0.4551.$$

$$f(x_2)=1.0986$$

$$a_0=0.955\Rightarrow p_1(x)=0.955+0.414x$$

$\widetilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$是最高项系数为1的$n$次多项式。多项式$\widetilde{T}_n(x)$的性质如下：

定理3.4

所有最高项系数为1的n次多项式中，在区间$[-1,1]$上与零偏差最小的多项式是$\widetilde{T}_n(x)$。

证: 由于$\widetilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = x^n - p_{n-1}^*(x)$,
当$x_k = \cos\frac{k}{n}\pi, k = 0, 1, \cdots, n$时，有

$$\widetilde{T}_n(x_k) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x_k) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos k\pi, (k = 0, 1, \cdots, n)$$

表明$p_{n-1}^*(x)$与$f(x) = x^n$有$n+1$个轮流为正负的偏差点。

根据切比雪夫定理，$p_{n-1}^*(x) \in P_{n-1}$是$f(x) = x^n$的最佳逼近多项式，即

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left| \widetilde{T}_n(x) \right| = \min_{p_{n-1}(x) \in P_{n-1}} \|x^n - p_{n-1}(x)\|_\infty$$

即$\widetilde{T}_n(x)$是$[-1, 1]$上与零偏差最小的多项式。

例3.2

设$f(x)=x^4$，在$[-1,1]$上求$f(x)$在P_3 中的最佳逼近多项式.

解: $\widetilde{T}_4(x)=\frac{1}{8}\left(8x^4-8x^2+1\right)=x^4-\left(x^2-\frac{1}{8}\right)$，知所求最佳逼近多项式为$p_3^*(x)=\left(x^2-\frac{1}{8}\right)$.

例3.2

设$f(x)=x^4$，在$[-1,1]$上求$f(x)$在P_3 中的最佳逼近多项式.

解:$\widetilde{T}_4(x)=\frac{1}{8}\left(8x^4-8x^2+1\right)=x^4-\left(x^2-\frac{1}{8}\right)$，知所求最佳逼近多项式为$p_3^*(x)=\left(x^2-\frac{1}{8}\right)$.

- 由切比雪夫定理：若误差$f(x)-p_{n-1}^*(x)=aT_n(x)$，则$p_{n-1}^*(x)\in P_{n-1}$是区间$[-1,1]$上多项式$f(x)$ 的最佳一致逼近多项式

例3.2

设$f(x)=x^4$，在$[-1,1]$上求$f(x)$在P_3 中的最佳逼近多项式.

解: $\widetilde{T}_4(x)=\frac{1}{8}\left(8x^4-8x^2+1\right)=x^4-\left(x^2-\frac{1}{8}\right)$，知所求最佳逼近多项式为$p_3^*(x)=\left(x^2-\frac{1}{8}\right)$.

- 由切比雪夫定理：若误差$f(x)-p_{n-1}^*(x)=aT_n(x)$，则$p_{n-1}^*(x)\in P_{n-1}$是区间$[-1,1]$上多项式$f(x)$ 的最佳一致逼近多项式
- 一般地，若在$[-1,1]$上$f(x)-p_n(x)\approx aT_{n+1}(x)$，那么$p_n(x)\in P_n$可作为$f(x)$在$P_n$ 中的近似最佳逼近多项式。

- 线性空间Φ和基底：

- 线性空间Φ和基底：

设$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$是$[a, b]$上的线性无关的连续函数，$a_0, a_1, \cdots, a_n$是任意实数，则

$$\begin{aligned}\Phi &= \{s(x) \mid s(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)\} \\ &\triangleq \operatorname{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\}\end{aligned}$$

并称集合Φ是由$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$所生成的线性空间，$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$是生成空间Φ的一个基底。

- $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_n(x)$在$[a, b]$上线性无关的充分必要条件:

- $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_n(x)$在$[a, b]$上线性无关的充分必要条件:

设$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_n(x) \in C[a, b]$,则$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_n(x)$在$[a, b]$上线性无关的充分必要条件是$detG_n \neq 0$其中

$$G_n = G(\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_n) = \begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix}$$

这里$(\cdot, \cdot)$表示内积.

定义4.1

- 设$f(x) \in C[a,b]$，如果存在$s^*(x) \in \Phi$，使

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - s^*(x)]^2 dx = \min_{s(x)\in\Phi} \int_a^b \rho(x)[f(x) - s(x)]^2 dx \qquad (6)$$

则称$s^*(x)$是$f(x)$在集合Φ中的最佳平方逼近函数.

定义4.1

- 设$f(x) \in C[a,b]$，如果存在$s^*(x) \in \Phi$，使

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - s^*(x)]^2 dx = \min_{s(x)\in\Phi} \int_a^b \rho(x)[f(x) - s(x)]^2 dx \qquad (6)$$

则称$s^*(x)$是$f(x)$在集合Φ中的最佳平方逼近函数.

定义4.1

- 设$f(x) \in C[a,b]$，如果存在$s^*(x) \in \Phi$，使

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - s^*(x)]^2 dx = \min_{s(x)\in\Phi} \int_a^b \rho(x)[f(x) - s(x)]^2 dx \quad (6)$$

则称$s^*(x)$是$f(x)$在集合Φ中的最佳平方逼近函数.

- 若$\Phi = P_n = span\{1, x, \cdots, x^n\}$，则满足上述定义的$s^*(x)$是$f(x)$的$n$次最佳平方逼近多项式。

定义4.1

- 设$f(x) \in C[a,b]$，如果存在$s^*(x) \in \Phi$，使
$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - s^*(x)]^2 dx = \min_{s(x)\in\Phi} \int_a^b \rho(x)[f(x) - s(x)]^2 dx \qquad (6)$$
则称$s^*(x)$是$f(x)$在集合Φ中的最佳平方逼近函数.
- 若$\Phi = P_n = span\{1, x, \cdots, x^n\}$，则满足上述定义的$s^*(x)$是$f(x)$的$n$次最佳平方逼近多项式。

最佳平方逼近函数是否存在呢？

定理4.1

设$f(x) \in C[a,b]$，则$f(x)$在Φ中存在唯一的最佳平方逼近函数$s^*(x)$.

此定理的证明分成两部分:

第一部分利用已知的条件借助多元函数求极值，构造出唯一的函数$s^*(x)$

第二部分证明$s^*(x)$即是$f(x)$在Φ中的最佳平方逼近函数。

证: 令$S(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)$, 则

证:令$S(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)$, 则

$$\int_a^b \rho(x)[f(x) - S(x)]^2 \mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)[f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)]^2 \mathrm{d}x$$

证:令$S(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)$, 则

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)[f(x)-\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=-2\int_a^b \rho(x)[f(x)-\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)]\varphi_k(x)\mathrm{d}x=0$$

证:令$S(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)$, 则

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)[f(x)-\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=-2\int_a^b \rho(x)[f(x)-\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)]\varphi_k(x)\mathrm{d}x=0$$

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_j,\varphi_k)a_j=(f,\varphi_k),\quad k=0,1,\cdots,n$$

称为法方程。因为$|G_n|\neq 0$, 此方程组有唯一解a_j^*.

证:令$S(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)$, 则

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)[f(x)-\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=-2\int_a^b \rho(x)[f(x)-\sum_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)]\varphi_k(x)\mathrm{d}x=0$$

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_j,\varphi_k)a_j=(f,\varphi_k),\quad k=0,1,\cdots,n$$

称为法方程。因为$|G_n|\neq 0$, 此方程组有唯一解a_j^*.
这样得到的解$S^*(x)$满足

$$(f-S^*,\varphi_k)=0$$

证:令$S(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)$, 则

$$\int_a^b \rho(x)[f(x)-S(x)]^2\mathrm{d}x=\int_a^b \rho(x)[f(x)-\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial I}{\partial a_k}=-2\int_a^b \rho(x)[f(x)-\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x)]\varphi_k(x)\mathrm{d}x=0$$

$$\sum_{j=0}^{n}(\varphi_j,\varphi_k)a_j=(f,\varphi_k),\quad k=0,1,\cdots,n$$

称为法方程。因为$|G_n|\neq 0$, 此方程组有唯一解a_j^*.
这样得到的解$S^*(x)$满足

$$(f-S^*,\varphi_k)=0\Rightarrow(f-S^*,S)=(f-S^*,S^*-S)=0$$

这样得到的解$S^*(x)$满足

$$(f - S^*, \varphi_k) = 0 \Rightarrow (f - S^*, S) = (f - S^*, S^* - S) = 0$$

这样得到的解$S^*(x)$满足

$$(f-S^*,\varphi_k)=0 \Rightarrow (f-S^*,S)=(f-S^*,S^*-S)=0$$

$$\begin{aligned}
& (f-S,f-S)-(f-S^*,f-S^*) \\
= & (S^*-S,2f-(S+S^*)) \\
= & (S^*-S,S^*-S)+2(S^*-S,f-S^*) \\
= & (S^*-S,S^*-S) \\
\geqslant & 0.
\end{aligned}$$

一个特例：

若在[0, 1]上取$\varphi_k(x) = x^k, k = 0, \cdots, n, \rho(x) = 1$, 则$f(x) \in C[0, 1]$

在$\Phi = P_n = span\{1, x, \cdots, x^n\}$上的最佳平方逼近多项式为

$$p_n^*(x) = a_0^* + a_1^* x + \cdots + a_n^* x^n$$

则

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \int_0^1 x^{j+k} dx = \frac{1}{j+k+1}, (j, k = 0, 1, \cdots, n)$$

$$(f, \varphi_k) = \int_0^1 f(x) x^k dx = d_k, (k = 0, 1, \cdots, n)$$

我们记

$$H_{n+1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix} \equiv (h_{ij})_{(n+1)\times(n+1)}$$

其中$h_{ij}=\frac{1}{i+j-1}$.H_{n+1}为希尔伯特（Hilbert）矩阵。

我们记

$$H_{n+1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix} \equiv (h_{ij})_{(n+1)\times(n+1)}$$

其中$h_{ij}=\frac{1}{i+j-1}$.H_{n+1}为希尔伯特（Hilbert）矩阵。

若记$a=(a_0,a_1,\cdots,a_n)^T, d=(d_0,d_1,\cdots,d_n)^T$，法方程为

$$H_{n+1}a=d$$

解为$a_k=a_k^*, k=0,1,\cdots,n$，由此得最佳平方逼近多项式$p_n^*(x)$.

例4.1

设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$，求$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式$p_1^*(x)=a_0^*+a_1^*x$.

例4.1

设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$，求$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式$p_1^*(x)=a_0^*+a_1^*x.$

解:

$$d_0=\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1.147$$

$$d_1=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\approx 0.609$$

例4.1

设$f(x)=\sqrt{1+x^2}$，求$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式$p_1^*(x)=a_0^*+a_1^*x$.

解:

$$d_0=\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 1.147$$

$$d_1=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\approx 0.609$$

法方程为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1.147 \\ 0.609 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$a_0^* = 0.934, a_1^* = 0.426$$

$\Rightarrow$

$$p_1^*(x) = 0.934 + 0.426x$$

$\Rightarrow$

$$a_0^* = 0.934, a_1^* = 0.426$$

$\Rightarrow$

$$p_1^*(x) = 0.934 + 0.426x$$

注：

- 在$n \geqslant 3$时,H_{n+1}是病态矩阵——直接解法方程的误差很大
- 对$n \geqslant 3$ 的情形，可用正交多项式作Φ的基的方法来求解最佳平方逼近多项式。

设$f(x) \in C[a,b], \Phi = span\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$,

- 若$\varphi_0(x), \cdots, \varphi_n(x)$是正交函数系,则当$i \neq j$时，$(\varphi_i, \varphi_j) = 0$,

  而$(\varphi_j, \varphi_j) > 0$，于是法方程的系数矩阵$G_n$ 为非奇异对角阵

设$f(x) \in C[a,b], \Phi = span\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$,

- 若$\varphi_0(x), \cdots, \varphi_n(x)$是正交函数系,则当$i \neq j$时，$(\varphi_i, \varphi_j) = 0$，

  而$(\varphi_j, \varphi_j) > 0$，于是法方程的系数矩阵$G_n$为非奇异对角阵
- 方程的解为

$$a_k^* = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}, k = 0, 1, \cdots, n$$

设$f(x) \in C[a,b], \Phi = span\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$,

- 若$\varphi_0(x), \cdots, \varphi_n(x)$是正交函数系,则当$i \neq j$时，$(\varphi_i, \varphi_j) = 0$,

  而$(\varphi_j, \varphi_j) > 0$，于是法方程的系数矩阵$G_n$ 为非奇异对角阵

- 方程的解为

$$a_k^* = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}, k = 0, 1, \cdots, n$$

- $f(x)$在Φ中的最佳平方逼近函数为

$$s^*(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \varphi_k(x), k = 0, 1, \cdots, n$$

设$f(x) \in C[a,b], \Phi = span\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$,

- 若$\varphi_0(x), \cdots, \varphi_n(x)$是正交函数系,则当$i \neq j$时，$(\varphi_i, \varphi_j) = 0$，

  而$(\varphi_j, \varphi_j) > 0$，于是法方程的系数矩阵$G_n$ 为非奇异对角阵

- 方程的解为

$$a_k^* = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}, k = 0, 1, \cdots, n$$

- $f(x)$在Φ中的最佳平方逼近函数为

$$s^*(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \varphi_k(x), k = 0, 1, \cdots, n$$

- 称上式为$f(x)$ 的广义傅里叶（Fourier）展开,相应系数a_k^* 称为$f(x)$的广义傅里叶系数。

例4.2

用勒让德正交多项式求$f(x) = e^x$ 在$[-1, 1]$上的最佳平方逼近多项式（取$n = 1, 3$）.

例4.2

用勒让德正交多项式求$f(x) = e^x$ 在$[-1, 1]$上的最佳平方逼近多项式（取$n = 1, 3$）.

解:先计算

$$(f, P_0) = \int_{-1}^{1} e^x dx = e - e^{-1} \approx 2.3504$$

$$(f, P_1) = \int_{-1}^{1} xe^x dx = 2e^{-1} \approx 0.7358$$

例4.2

用勒让德正交多项式求$f(x)=e^x$ 在$[-1,1]$上的最佳平方逼近多项式（取$n=1,3$）.

解:先计算

$$(f,P_0)=\int_{-1}^{1}e^x dx=e-e^{-1}\approx 2.3504$$

$$(f,P_1)=\int_{-1}^{1}xe^x dx=2e^{-1}\approx 0.7358$$

$$(f,P_2)=\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)e^x dx=e-7e^{-1}\approx 0.1431$$

$$(f,P_3)=\int_{-1}^{1}\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)e^x dx=37e^{-1}-5e\approx 0.02013$$

易得

$$a_0^* = 1.1752, a_1^* = 1.1036, a_2^* = 0.3578, a_3^* = 0.07046$$

最后得

$$s_1^*(x) = 1.1752 + 1.1036x,$$

$$s_3^*(x) = 0.9963 + 0.9979x + 0.5367x^2 + 0.1761x^3.$$

易得

$$a_0^* = 1.1752, a_1^* = 1.1036, a_2^* = 0.3578, a_3^* = 0.07046$$

最后得

$$s_1^*(x) = 1.1752 + 1.1036x,$$

$$s_3^*(x) = 0.9963 + 0.9979x + 0.5367x^2 + 0.1761x^3.$$

- 若区间不是$[-1, 1]$，而是$[a, b]$

易得
$$a_0^* = 1.1752, a_1^* = 1.1036, a_2^* = 0.3578, a_3^* = 0.07046$$
最后得
$$s_1^*(x) = 1.1752 + 1.1036x,$$
$$s_3^*(x) = 0.9963 + 0.9979x + 0.5367x^2 + 0.1761x^3.$$

- 若区间不是$[-1, 1]$，而是$[a, b]$

  可以通过变量置换$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$将它转化为区间$[-1, 1]$ 上

例4.3

求函数$f(x)=\sqrt{x}$ 在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式.

解: 作变换$x=\frac{1}{2}(1+t)$，则

$$f(x)=\frac{\sqrt{(1+t)}}{\sqrt{2}}=g(t),(-1\leqslant t\leqslant 1).$$

例4.3

求函数$f(x)=\sqrt{x}$ 在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式.

解:作变换$x=\frac{1}{2}(1+t)$，则

$$f(x)=\frac{\sqrt{(1+t)}}{\sqrt{2}}=g(t),(-1\leqslant t\leqslant 1).$$

求$g(t)$在区间$[-1,1]$上的一次最佳平方逼近多项式$q_1(t)$.

$$a_0^*=\frac{1}{2}(g,P_0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+t}dt=\frac{2}{3},$$
$$a_1^*=\frac{3}{2}(g,P_1)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t}{\sqrt{2}}\sqrt{1+t}dt=\frac{6}{15},$$

例4.3

求函数$f(x)=\sqrt{x}$ 在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式.

解:作变换$x=\frac{1}{2}(1+t)$，则

$$f(x)=\frac{\sqrt{(1+t)}}{\sqrt{2}}=g(t),(-1\leqslant t\leqslant 1).$$

求$g(t)$在区间$[-1,1]$上的一次最佳平方逼近多项式$q_1(t)$.

$$a_0^*=\frac{1}{2}(g,P_0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+t}dt=\frac{2}{3},$$

$$a_1^*=\frac{3}{2}(g,P_1)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{t}{\sqrt{2}}\sqrt{1+t}dt=\frac{6}{15},$$

知

$$q_1(t)=\frac{2}{3}P_0+\frac{6}{15}P_1=\frac{2}{3}+\frac{6}{15}t,(-1\leqslant t\leqslant 1)$$

把$t=2x-1$代入$q_1(t)$就得到$f(x)=\sqrt{x}$ 在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式为

$$s^*(x)=\frac{2}{3}+\frac{6}{15}(2x-1)=\frac{4}{15}+\frac{4}{5}x.$$

对函数表给出其函数关系通常有下列两个方法:

对函数表给出其函数关系通常有下列两个方法：

- 方法一，使用多项式插值；

对函数表给出其函数关系通常有下列两个方法：

- 方法一，使用多项式插值；
- 方法二，三次样条插值。

对函数表给出其函数关系通常有下列两个方法:

- 方法一，使用多项式插值;
- 方法二，三次样条插值。

使用多项式插值会带来两个问题:

对函数表给出其函数关系通常有下列两个方法:

- 方法一，使用多项式插值;
- 方法二，三次样条插值。

使用多项式插值会带来两个问题:

- 问题之一，当所给的数值点较多时，多项式次数要高，会出现数值震荡，即所谓的Runge现象;

对函数表给出其函数关系通常有下列两个方法：

- 方法一，使用多项式插值；
- 方法二，三次样条插值。

使用多项式插值会带来两个问题:

- 问题之一，当所给的数值点较多时，多项式次数要高，会出现数值震荡，即所谓的Runge现象；
- 问题之二，由于数值本身带有误差，使用插值条件来确定函数关系不合理。

对函数表给出其函数关系通常有下列两个方法：

- 方法一，使用多项式插值；
- 方法二，三次样条插值。

使用多项式插值会带来两个问题:

- 问题之一，当所给的数值点较多时，多项式次数要高，会出现数值震荡，即所谓的Runge现象；
- 问题之二，由于数值本身带有误差，使用插值条件来确定函数关系不合理。

注：

对函数表给出其函数关系通常有下列两个方法：

- 方法一，使用多项式插值；
- 方法二，三次样条插值。

使用多项式插值会带来两个问题:

- 问题之一，当所给的数值点较多时，多项式次数要高，会出现数值震荡，即所谓的Runge现象；
- 问题之二，由于数值本身带有误差，使用插值条件来确定函数关系不合理。

注：

- 三次样条插值克服了多项式插值的第一个缺点，但求三次样条插值带来了大的计算量。

对函数表给出其函数关系通常有下列两个方法：

- 方法一，使用多项式插值；
- 方法二，三次样条插值。

使用多项式插值会带来两个问题:

- 问题之一，当所给的数值点较多时，多项式次数要高，会出现数值震荡，即所谓的Runge现象；
- 问题之二，由于数值本身带有误差，使用插值条件来确定函数关系不合理。

注：

- 三次样条插值克服了多项式插值的第一个缺点，但求三次样条插值带来了大的计算量。
- 曲线拟合的最小二乘方法可以克服数值震荡，同时不引起大的计算量

什么是曲线拟合的最小二乘方法呢?

对函数表在函数空间Φ中求$s^*(x)$，使

$$\sum_{i=0}^{m}\omega_i\left[s^*(x_i)-f(x_i)\right]^2=\min_{s(x)\in\Phi}\sum_{i=0}^{m}\omega_i\left[s(x_i)-f(x_i)\right]^2$$

就是曲线拟合的最小二乘问题，其中ω_i是点x_i 处的权。

什么是曲线拟合的最小二乘方法呢？

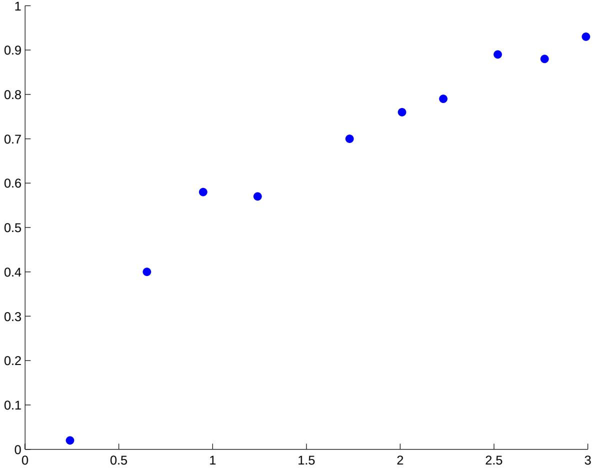
对函数表在函数空间Φ中求$s^*(x)$，使

$$\sum_{i=0}^{m}\omega_i\left[s^*(x_i)-f(x_i)\right]^2=\min_{s(x)\in\Phi}\sum_{i=0}^{m}\omega_i\left[s(x_i)-f(x_i)\right]^2$$

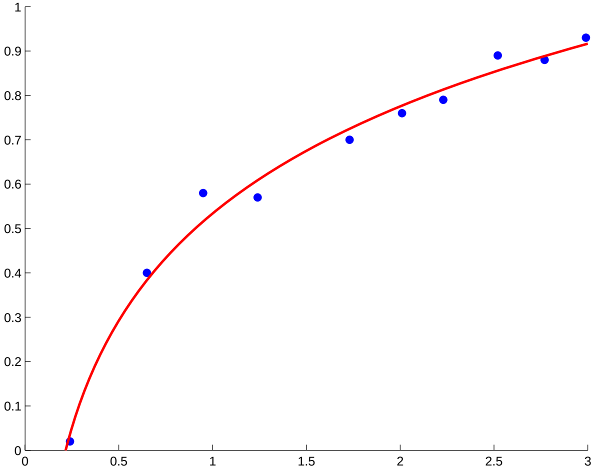
就是曲线拟合的最小二乘问题，其中ω_i是点x_i 处的权。

这个问题的实质是$f(x)$为离散情形的最佳平方逼近问题

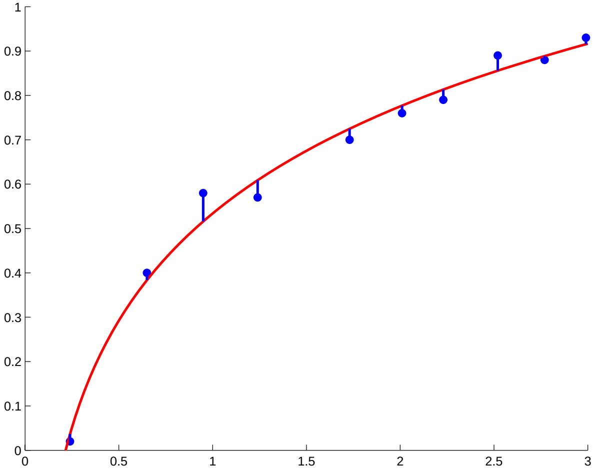
曲线拟合的最小二乘方法的几何意义：



曲线拟合的最小二乘方法的几何意义：



曲线拟合的最小二乘方法的几何意义：



曲线拟合的最小二乘方法的具体作法：

曲线拟合的最小二乘方法的具体作法:

(1) 求$s^*(x)$的问题等价于求多元函数

$$\min_{a_j} I(a_0, a_1, \cdots a_n) = \min_{a_j} \sum_{i=0}^{m} \omega_i \left[\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) - f(x_i) \right]^2$$

曲线拟合的最小二乘方法的具体作法：

(1) 求$s^*(x)$的问题等价于求多元函数

$$\min_{a_j} I(a_0, a_1, \cdots a_n) = \min_{a_j} \sum_{i=0}^{m} \omega_i \left[\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i) - f(x_i) \right]^2$$

(2) 由取极值的必要条件得法方程

$$\sum_{j=0}^{n} (\varphi_j, \varphi_k) a_j = (f, \varphi_k), k = 0, 1 \cdots, n$$

其中

$$\begin{cases} (\varphi_j, \varphi_k) = \sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i), \\ (f, \varphi_k) = \sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i f(x_i) \varphi_k(x_i). \end{cases}$$

- 由于$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_n(x)$ 线性无关，法方程系数矩阵非奇异，于是由法方程得唯一解，从而$s^*(x)$是存在唯一

- 由于$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_n(x)$ 线性无关，法方程系数矩阵非奇异，于是由法方程得唯一解，从而$s^*(x)$是存在唯一

在最小二乘逼近中，选择数学模型很重要即如何根据给定的$f(x)$ 来选择Φ

- 由于$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots \varphi_n(x)$ 线性无关，法方程系数矩阵非奇异，于是由法方程得唯一解，从而$s^*(x)$是存在唯一

在最小二乘逼近中，选择数学模型很重要即如何根据给定的$f(x)$ 来选择Φ

一般原则：根据物理定义，或$f(x_i)(i = 0, 1, \cdots, n)$ 数据分布的大致图形选择相应的数学模型。

例5.1

给定数据如下表，试选择适当模型，求最小二乘拟合函数$s^*(x)$.

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	-0.26	-1.10	-0.45	0.27	0.10	-0.29	0.24	0.56	1.00

解:

例5.1

给定数据如下表，试选择适当模型，求最小二乘拟合函数$s^*(x)$.

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	-0.26	-1.10	-0.45	0.27	0.10	-0.29	0.24	0.56	1.00

解：采用拟合函数$S(x) = alnx + bcosx + ce^x$,

例5.1

给定数据如下表，试选择适当模型，求最小二乘拟合函数$s^*(x)$.

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	-0.26	-1.10	-0.45	0.27	0.10	-0.29	0.24	0.56	1.00

解：采用拟合函数$S(x) = alnx + bcosx + ce^x$， 基函数为
$\varphi_0 = lnx$, $\varphi_1 = cosx$, $\varphi_2 = e^x$.

例5.1

给定数据如下表，试选择适当模型，求最小二乘拟合函数$s^*(x)$.

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	-0.26	-1.10	-0.45	0.27	0.10	-0.29	0.24	0.56	1.00

解: 采用拟合函数$S(x) = alnx + bcosx + ce^x$，法方程如下:

$$\begin{pmatrix} 6.7941 & -5.3475 & 63.259 \\ -5.3475 & 5.1084 & -49.009 \\ 63.259 & -49.009 & 1002.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6131 \\ -2.3827 \\ 26.773 \end{pmatrix}$$

例5.1

给定数据如下表，试选择适当模型，求最小二乘拟合函数$s^*(x)$.

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	-0.26	-1.10	-0.45	0.27	0.10	-0.29	0.24	0.56	1.00

解: 采用拟合函数$S(x) = a\ln x + b\cos x + ce^x$，法方程如下:

$$\begin{pmatrix} 6.7941 & -5.3475 & 63.259 \\ -5.3475 & 5.1084 & -49.009 \\ 63.259 & -49.009 & 1002.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6131 \\ -2.3827 \\ 26.773 \end{pmatrix}$$

解得$a = -1.0410$, $b = -1.2613$, $c = 0.03073$,

例5.1

给定数据如下表，试选择适当模型，求最小二乘拟合函数$s^*(x)$.

x_i	0.24	0.65	0.95	1.24	1.73	2.01	2.23	2.52	2.77	2.99
y_i	0.23	-0.26	-1.10	-0.45	0.27	0.10	-0.29	0.24	0.56	1.00

解: 采用拟合函数$S(x) = alnx + bcosx + ce^x$， 法方程如下:

$$\begin{pmatrix} 6.7941 & -5.3475 & 63.259 \\ -5.3475 & 5.1084 & -49.009 \\ 63.259 & -49.009 & 1002.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6131 \\ -2.3827 \\ 26.773 \end{pmatrix}$$

解得$a = -1.0410$, $b = -1.2613$, $c = 0.03073$, 因此,
$S(x) = -1.0410lnx - 1.2613cosx + 0.03073e^x$.

该问题的MatLab实现：

```
x=[0.24 0.65 0.95 1.24 1.73 2.01 2.23 2.52 2.77 2.99]';

y=[0.23 -0.26 -1.10 -0.45 0.27 0.10 -0.29 0.24 0.56 1.00]';

A=[log(x)cos(x)exp(x)];

Z = A\ y
```

则$a = Z(1), b = Z(2), c = Z(3)$.

对于曲线拟合一般取

$$\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\} = \{1, x, \cdots, x^n\}.$$

法方程为

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m}\omega_i & \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i & \cdots & \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^n \\ \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i & \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^n & \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m}\omega_i f_i \\ \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i f_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m}\omega_i x_i^n f_i \end{pmatrix}$$

此时$s^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* x^k$，称它为数据拟合多项式，简称为多项式拟合。

例5.2

求数据表的二次最小二乘拟合多项式。

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$f(x_i)$	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

解：

例5.2

求数据表的二次最小二乘拟合多项式。

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$f(x_i)$	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

解:设二次拟合多项式为

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

例5.2

求数据表的二次最小二乘拟合多项式。

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$f(x_i)$	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

解: 设二次拟合多项式为

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

将数据表代入法方程得

$$\begin{cases} 5a_0 + 2.5a_1 + 1.875a_2 = 8.7680 \\ 2.5a_0 + 1.875a_1 + 1.5625a_2 = 5.4514 \\ 1.875a_0 + 1.5625a_1 + 1.3828a_2 = 4.4015 \end{cases}$$

解为

$$a_0 = 1.0052, a_1 = 0.8641, a_2 = 0.8437$$

解为

$$a_0 = 1.0052, a_1 = 0.8641, a_2 = 0.8437$$

最小二乘拟合二次多项式为

$$p_2(x) = 1.0052 + 0.8641x + 0.8437x^2$$

解为

$$a_0 = 1.0052, a_1 = 0.8641, a_2 = 0.8437$$

最小二乘拟合二次多项式为

$$p_2(x) = 1.0052 + 0.8641x + 0.8437x^2$$

注：此问题没有给出各点的权函数值ω_i

一般情形下，若题目没有给出各点权函数值ω_i，视作各点权函数值为1。

有两个方法用MatLab求解该问题

方法一：

```
x=[0   0.25   0.50   0.75   1.00];
y=[1.00   1.284   1.6487   2.1170   2.7183];
x1=ones(5,1);
A=[x1 x x.^2];
Z = A\y
```

此时$a_0 = Z(1), a_1 = Z(2), a_2 = Z(3)$.

方法二:

```
x=[0  0.25  0.50  0.75  1.00];
y=[1.00  1.284  1.6487  2.1170  2.7183];
p=polyfit(x,y,2)
```

此时$a_2 = p(1), a_1 = p(2), a_0 = p(3)$.

例5.3

求下数据表形如$y = a + bx^2$的二次最小二乘拟合多项式。

x_i	19	25	31	38	44
$f(x_i)$	19.0	32.3	19.0	73.3	97.8

解:

例5.3

求下数据表形如$y = a + bx^2$的二次最小二乘拟合多项式。

x_i	19	25	31	38	44
$f(x_i)$	19.0	32.3	19.0	73.3	97.8

解:

例5.3

求下数据表形如$y = a + bx^2$的二次最小二乘拟合多项式。

x_i	19	25	31	38	44
$f(x_i)$	19.0	32.3	19.0	73.3	97.8

解:根据最佳平方逼近原理写出法方程

因$\varphi_0(x) = 1$，$\varphi_1(x) = x^2$，故

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=0}^{4} \varphi_0^2(x_i) = \sum_{i=0}^{4} 1 = 5$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{4} \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 = 5327$$

例5.3

求下数据表形如$y = a + bx^2$的二次最小二乘拟合多项式。

x_i	19	25	31	38	44
$f(x_i)$	19.0	32.3	19.0	73.3	97.8

解：

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{4} \varphi_1^2(x_i) = \sum_{i=0}^{4} x_i^4 = 7277699$$

$$(\varphi_0, y) = \sum_{i=0}^{4} \varphi_0(x_i) y_i = \sum_{i=0}^{4} y_i = 271.4$$

$$(\varphi_1, y) = \sum_{i=0}^{4} \varphi_1(x_i) y_i = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 y_i = 369321.5$$

将数据表代入法方程得

$$\begin{cases} 5a + 5237b = 271.4 \\ 5327a + 7277699b = 369321.5 \end{cases}$$

将数据表代入法方程得

$$\begin{cases} 5a + 5237b = 271.4 \\ 5327a + 7277699b = 369321.5 \end{cases}$$

解为

$$a = 0.9726045,\ b = 0.0500351$$

将数据表代入法方程得

$$\begin{cases} 5a + 5237b = 271.4 \\ 5327a + 7277699b = 369321.5 \end{cases}$$

解为

$$a = 0.9726045,\ b = 0.0500351$$

最小二乘拟合二次多项式为

$$p(x) = 0.9726045 + 0.0500351x^2$$

实际计算与理论分析表明，用多项式作最小二乘的基函数，当n 较大时，方程组的解对初始数据的微小变化非常敏感，属于"病态"问题

实际计算与理论分析表明，用多项式作最小二乘的基函数，当 n 较大时，方程组的解对初始数据的微小变化非常敏感，属于"病态"问题

如何避免求解"病态"问题？

§5.2 曲线拟合的最小二乘法——利用正交多项式作最小二乘拟合

定义5.1

设给定点集$\{x_i\}_{i=0}^m$以及各点的权系数$\{\omega_i\}_{i=0}^m$，如果多项式族$\{p_k(x)\}_{k=0}^n$满足

$$(p_k, p_j) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i p_k(x_i) p_j(x_i) = \begin{cases} 0, (j \neq k), \\ A_k > 0, (j = k). \end{cases}$$

则称$\{p_k(x)\}_{k=0}^n$为关于点集$\{x_i\}_{i=0}^m$的带权$\{\omega_i\}_{i=0}^m$正交的多项式族。

§5.2 曲线拟合的最小二乘法——利用正交多项式作最小二乘拟合

定义5.1

设给定点集$\{x_i\}_{i=0}^m$以及各点的权系数$\{\omega_i\}_{i=0}^m$，如果多项式族$\{p_k(x)\}_{k=0}^n$满足

$$(p_k, p_j) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i p_k(x_i) p_j(x_i) = \begin{cases} 0, (j \neq k), \\ A_k > 0, (j = k). \end{cases}$$

则称$\{p_k(x)\}_{k=0}^n$为关于点集$\{x_i\}_{i=0}^m$的带权$\{\omega_i\}_{i=0}^m$正交的多项式族。

§5.2 曲线拟合的最小二乘法——利用正交多项式作最小二乘拟合

定义5.1

设给定点集$\{x_i\}_{i=0}^m$以及各点的权系数$\{\omega_i\}_{i=0}^m$，如果多项式族$\{p_k(x)\}_{k=0}^n$满足

$$(p_k, p_j) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i p_k(x_i) p_j(x_i) = \begin{cases} 0, (j \neq k), \\ A_k > 0, (j = k). \end{cases}$$

则称$\{p_k(x)\}_{k=0}^n$为关于点集$\{x_i\}_{i=0}^m$的带权$\{\omega_i\}_{i=0}^m$正交的多项式族。

递推关系公式为

$$\begin{cases} p_0(x) = 1; \\ p_1(x) = (x - \alpha_0) p_0(x) = (x - \alpha_0); \\ \dots \\ p_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) p_k(x) - \beta_{k-1} p_{k-1}(x). \end{cases}$$

其中α_k, β_{k-1}为

$$\begin{cases} \alpha_k = \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i x_i p_k^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i p_k^2(x_i)} (k = 0, 1, \cdots, n); \\ \beta_{k-1} = \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i p_k^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{m} \omega_i p_{k-1}^2(x_i)} (k = 1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

其中α_k,β_{k-1}为

$$\begin{cases} \alpha_k = \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{m}\omega_i x_i p_k^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{m}\omega_i p_k^2(x_i)} (k=0,1,\cdots,n); \\ \beta_{k-1} = \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{m}\omega_i p_k^2(x_i)}{\sum\limits_{i=0}^{m}\omega_i p_{k-1}^2(x_i)} (k=1,2,\cdots,n). \end{cases}$$

法方程组为

$$(p_k,p_k)a_k = (f,p_k),(k=0,1,\cdots,n).$$

得

$$a_k = \frac{(f, p_k)}{(p_k, p_k)}, (k = 0, 1, \cdots, n) \tag{7}$$

得

$$a_k = \frac{(f, p_k)}{(p_k, p_k)}, (k = 0, 1, \cdots, n) \tag{7}$$

则n次多项式

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k p_k(x) \tag{8}$$

为给定的数据点的最小二乘拟合多项式。

注： 利用正交多项式作最小二乘拟合时，可以将构造正交多项式族$\{p_k(x)\}_{k=0}^{n}$与解法方程组求a_k以及形成拟合多项式$g_n(x)$ 穿插进行，见下面的例题。

例5.4

给定数据点(x_i, y_i)及ω_i如下表.

x_i	0	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_i	1	1.75	1.96	2.19	2.44	2.71	3.00
ω_i	1	1	1	1	1	1	1

试用最小二乘法求拟合这组数据的多项式。

例5.4

给定数据点(x_i, y_i)及ω_i如下表.

x_i	0	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_i	1	1.75	1.96	2.19	2.44	2.71	3.00
ω_i	1	1	1	1	1	1	1

试用最小二乘法求拟合这组数据的多项式。

解:为确定拟合多项式的次数，首先描点，如下图。根据数据点的分布情况，用二次多项式拟合这组数据。

例5.4

给定数据点(x_i, y_i)及ω_i如下表.

x_i	0	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_i	1	1.75	1.96	2.19	2.44	2.71	3.00
ω_i	1	1	1	1	1	1	1

试用最小二乘法求拟合这组数据的多项式。

解:为确定拟合多项式的次数，首先描点，如下图。根据数据点的分布情况，用二次多项式拟合这组数据。

基底取正交多项式$p_0(x), p_1(x), p_2(x)$，拟合函数为$g(x) = a_0p_0(x) + a_1p_1(x) + a_2p_2(x)$.

§5.2 曲线拟合的最小二乘法——利用正交多项式作最小二乘拟合

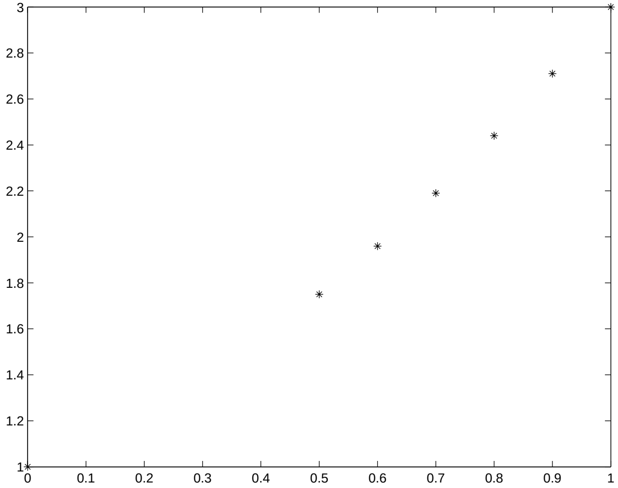


Figure 3: 数据点的分布情况

取$p_0(x) = 1$，则$p_0(x_i) = 1(i = 0, 1, \cdots, 6)$.

取$p_0(x)=1$，则$p_0(x_i)=1(i=0,1,\cdots,6)$.

$$(p_0,p_0)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i p_0^2(x_i)=7,$$

取$p_0(x)=1$，则$p_0(x_i)=1(i=0,1,\cdots,6)$.

$$(p_0,p_0)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i p_0^2(x_i)=7,$$

$$(f,p_0)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i y_i p_0(x_i)=15.050,$$

取$p_0(x)=1$，则$p_0(x_i)=1(i=0,1,\cdots,6)$.

$$(p_0,p_0)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i p_0^2(x_i)=7,$$

$$(f,p_0)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i y_i p_0(x_i)=15.050,$$

$$a_0=\frac{(f,p_0)}{(p_0,p_0)}=2.15,\quad g_0(x)=a_0p_0(x)=a_0,$$

取$p_0(x)=1$，则$p_0(x_i)=1(i=0,1,\cdots,6)$．

$$(p_0,p_0)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i p_0^2(x_i)=7,$$

$$(f,p_0)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i y_i p_0(x_i)=15.050,$$

$$a_0=\frac{(f,p_0)}{(p_0,p_0)}=2.15,\quad g_0(x)=a_0p_0(x)=a_0,$$

$$g_0(x_i)=a_0=2.15,(i=0,1,\cdots,6),$$

取$p_0(x)=1$，则$p_0(x_i)=1(i=0,1,\cdots,6)$.

$$(p_0,p_0)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i p_0^2(x_i)=7,$$

$$(f,p_0)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i y_i p_0(x_i)=15.050,$$

$$a_0=\frac{(f,p_0)}{(p_0,p_0)}=2.15,\quad g_0(x)=a_0p_0(x)=a_0,$$

$$g_0(x_i)=a_0=2.15,(i=0,1,\cdots,6),$$

$$\alpha_0=\frac{(xp_0,p_0)}{(p_0,p_0)}=\frac{4.5}{7}=0.642875,$$

取$p_0(x)=1$，则$p_0(x_i)=1(i=0,1,\cdots,6)$．

$$(p_0,p_0)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i p_0^2(x_i)=7,$$

$$(f,p_0)=\sum_{i=0}^{6}\omega_i y_i p_0(x_i)=15.050,$$

$$a_0=\frac{(f,p_0)}{(p_0,p_0)}=2.15,\quad g_0(x)=a_0p_0(x)=a_0,$$

$$g_0(x_i)=a_0=2.15,(i=0,1,\cdots,6),$$

$$\alpha_0=\frac{(xp_0,p_0)}{(p_0,p_0)}=\frac{4.5}{7}=0.642875,$$

$$p_1(x)=x-0.642875,$$

$$\{p_1(x_i)\}_{i=0}^{6} = \{-0.642857, -0.142857, -0.042857, 0.057143, 0.157143, 0.257143, 0.357143\},$$

§5.2 曲线拟合的最小二乘法——利用正交多项式作最小二乘拟合

$\{p_1(x_i)\}_{i=0}^{6} = \{-0.642857, -0.142857, -0.042857,$
$0.057143, 0.157143, 0.257143, 0.357143\},$

$$a_1 = \frac{(f, p_1)}{(p_1, p_1)} = \frac{1.3}{0.657143} = 1.978261,$$

$$\{p_1(x_i)\}_{i=0}^{6} = \{-0.642857, -0.142857, -0.042857,$$
$$0.057143, 0.157143, 0.257143, 0.357143\},$$

$$a_1 = \frac{(f, p_1)}{(p_1, p_1)} = \frac{1.3}{0.657143} = 1.978261,$$

$$g_1(x) = g_0(x) + a_1 p_1(x) = 2.15 + 1.978261(x - 0.642857),$$

$$\{p_1(x_i)\}_{i=0}^6 = \{-0.642857, -0.142857, -0.042857, 0.057143, 0.157143, 0.257143, 0.357143\},$$

$$a_1 = \frac{(f, p_1)}{(p_1, p_1)} = \frac{1.3}{0.657143} = 1.978261,$$

$$g_1(x) = g_0(x) + a_1 p_1(x) = 2.15 + 1.978261(x - 0.642857),$$

$$\{g_1(x_i)\}_{i=0}^6 = \{0.879391, 1.868522, 2.066348, 2.264174, 2.462000, 2.659826, 2.857652\},$$

§5.2 曲线拟合的最小二乘法——利用正交多项式作最小二乘拟合

$$\{p_1(x_i)\}_{i=0}^{6} = \{-0.642857, -0.142857, -0.042857, 0.057143, 0.157143, 0.257143, 0.357143\},$$

$$a_1 = \frac{(f, p_1)}{(p_1, p_1)} = \frac{1.3}{0.657143} = 1.978261,$$

$$g_1(x) = g_0(x) + a_1 p_1(x) = 2.15 + 1.978261(x - 0.642857),$$

$$\{g_1(x_i)\}_{i=0}^{6} = \{0.879391, 1.868522, 2.066348, 2.264174, 2.462000, 2.659826, 2.857652\},$$

$$\alpha_1 = \frac{(xp_1, p_1)}{(p_1, p_1)} = \frac{0.220408}{0.657143} = 0.335404,$$

$\{p_1(x_i)\}_{i=0}^{6} = \{-0.642857, -0.142857, -0.042857,$
$0.057143, 0.157143, 0.257143, 0.357143\},$

$$a_1 = \frac{(f, p_1)}{(p_1, p_1)} = \frac{1.3}{0.657143} = 1.978261,$$

$$g_1(x) = g_0(x) + a_1 p_1(x) = 2.15 + 1.978261(x - 0.642857),$$

$\{g_1(x_i)\}_{i=0}^{6} = \{0.879391, 1.868522, 2.066348,$
$2.264174, 2.462000, 2.659826, 2.857652\},$

$$\alpha_1 = \frac{(xp_1, p_1)}{(p_1, p_1)} = \frac{0.220408}{0.657143} = 0.335404,$$

$$\beta_0 = \frac{(p_1, p_1)}{(p_0, p_0)} = \frac{0.657143}{7} = 0.093878.$$

则

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= (x - 0.335404)p_1(x) - \beta_0 p_0(x) \\
&= x^2 - 0.978261x + 0.121739,
\end{aligned}
$$

则

$$p_2(x) = (x - 0.335404)p_1(x) - \beta_0 p_0(x)$$
$$= x^2 - 0.978261x + 0.121739,$$

$$\{p_2(x_i)\}_{i=0}^{6} = \{0.121739, -0.117391, -0.105217,$$
$$-0.07304, -0.020870, 0.051304, 0.143478\}$$

则

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= (x-0.335404)p_1(x) - \beta_0 p_0(x) \\
&= x^2 - 0.978261x + 0.121739,
\end{aligned}
$$

$$
\{p_2(x_i)\}_{i=0}^{6} = \{0.121739, -0.117391, -0.105217, \\
-0.07304, -0.020870, 0.051304, 0.143478\}
$$

$$
a_2 = \frac{(f, p_2)}{(p_2, p_2)} = \frac{0.068661}{0.068661} = 1.00000.
$$

则

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= (x-0.335404)p_1(x)-\beta_0 p_0(x)\\
&= x^2-0.978261x+0.121739,
\end{aligned}
$$

$$
\{p_2(x_i)\}_{i=0}^{6}=\{0.121739,-0.117391,-0.105217,\\
-0.07304,-0.020870,0.051304,0.143478\}
$$

$$
a_2=\frac{(f,p_2)}{(p_2,p_2)}=\frac{0.068661}{0.068661}=1.00000.
$$

从而拟合多项式为

$$
g_2(x)=g_1(x)+a_2p_2(x)=x^2+x+1.
$$

用MatLab工具解决此问题的方法如下：

```
x=[0  0.5  0.6  0.7  0.8  0.9  1.0];
y=[1  1.75  1.96  2.19  2.44  2.71  3.00];
p=polyfit(x,y,2)
```

则运行该程序的结果为

```
p=[1  1  1]
```

非线性最小二乘问题:

用指数函数类$s(x) = ae^{bx}$，幂函数类$g(x) = ax^b$或三角函数$h(x) = asinbx$ 等非多项式函数拟合给定的一组数据，按最小二乘准则，用极值原理建立的法方程组将是关于待定参数的非线性方程组

其中某些简单的情形可以转化为线性最小二乘问题求解。

例5.5

设给定数据$(x_i, f_i)(i = 0, 1, 2, 3, 4)$如下表，

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$f(x_i)$	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

试用最小二乘法求拟合这组数据的函数。

解:所给数据接近一个指数曲线，选择数学模型为指数函数$y = ae^{bx}$，（a, b 为待定常数）

例5.5

设给定数据$(x_i, f_i)(i = 0, 1, 2, 3, 4)$如下表,

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$f(x_i)$	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

试用最小二乘法求拟合这组数据的函数。

解:所给数据接近一个指数曲线，选择数学模型为指数函数$y = ae^{bx}$，（a, b 为待定常数）

这是一个关于a, b的非线性模型，为此对$y = ae^{bx}$两边取对数得$lny = lna + bx$ ，令$u = lny, A = lna$，于是有$u = A + bx$，这是一个线性模型，可用最小二乘求解。

取$\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x$,对$u = A + bx$与$(x_i, u_i)$ 做最小二乘拟合，法方程为

$$\begin{cases} 5A + 7.50b = 9.404 \\ 7.50A + 11.875b = 14.422 \end{cases}$$

解得$A = 1.122, b = 0.5056$,从而$a = e^A = 3.071$

取$\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x$,对$u = A + bx$与$(x_i, u_i)$ 做最小二乘拟合，法方程为

$$\begin{cases} 5A + 7.50b = 9.404 \\ 7.50A + 11.875b = 14.422 \end{cases}$$

解得$A = 1.122, b = 0.5056$,从而$a = e^A = 3.071$

最小二乘拟合曲线方程

$$y = 3.071e^{0.5056x}.$$

对某些问题，不能将非线性问题转化为线性最小二乘问题

只能按最小二乘原则，用极值原理建立法方程组。这里得到的法方程组将是关于待定参数的非线性方程组。用合适的求解非线性方程组的方法求解即可得非线性最小二乘问题的解.

例5.6

用函数$y = asinbx$拟合数据(见下表）.

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y	0.6	1.1	1.6	1.8	2.0	1.9	1.7	1.3

解:这是一个非线性最小二乘问题，按照最小二乘原理，应选取参数a, b使得表达式$I = \sum_{i=1}^{8}(a\sin bx_i - y_i)^2$ 达到极小值。通过对I关于a和b求偏导数，并置这些偏导数等于0得：

例5.6

用函数$y = asinbx$拟合数据(见下表）.

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y	0.6	1.1	1.6	1.8	2.0	1.9	1.7	1.3

解:这是一个非线性最小二乘问题，按照最小二乘原理，应选取参数a, b使得表达式$I = \sum_{i=1}^{8}(a\sin bx_i - y_i)^2$达到极小值。通过对$I$关于$a$和$b$求偏导数，并置这些偏导数等于0得：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial a} = \sum\limits_{i=1}^{8} 2(a\sin bx_i - y_i)\sin bx_i = 0, \\ \dfrac{\partial I}{\partial b} = \sum\limits_{i=1}^{8} 2(a\sin bx_i - y_i)a(\cos bx_i)x_i = 0. \end{cases}$$

分别解出a并置这两个值相等，得

$$\frac{\sum_{i=1}^{8} y_i \sin bx_i}{\sum_{i=1}^{8} (\sin bx_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i y_i \cos bx_i}{\sum_{i=1}^{8} x_i \sin bx_i \cos bx_i},$$

再用非线性方程求根的数值方法如弦截法解出参数b.最后计算方程的任一边作为a 的值。

用MatLab工具解决此问题需要借助fminsearch函数（求多元函数的极小值）来求$I=\sum_{i=1}^{8}(a\sin bx_i-y_i)^2$ 的极小值。

用MatLab工具解决此问题需要借助fminsearch函数（求多元函数的极小值）来求$I=\sum_{i=1}^{8}(a\sin bx_i-y_i)^2$的极小值。

具体做法分两步:

- 第一步创建函数fitfun, fitfun实际上是$I^{\frac{1}{2}}$;

用MatLab工具解决此问题需要借助fminsearch函数（求多元函数的极小值）来求$I=\sum_{i=1}^{8}(a\sin bx_i-y_i)^2$的极小值。

具体做法分两步：

- 第一步创建函数fitfun，fitfun实际上是$I^{\frac{1}{2}}$；
- 第二步用fminsearch求fitfun的极小值。

§5.3 曲线拟合的最小二乘法——非线性最小二乘问题

用MatLab工具解决此问题需要借助fminsearch函数（求多元函数的极小值）来求$I=\sum_{i=1}^{8}(a\sin bx_i-y_i)^2$ 的极小值。

具体做法分两步：

- 第一步创建函数fitfun, fitfun实际上是$I^{\frac{1}{2}}$；
- 第二步用fminsearch求fitfun的极小值。

fminsearch函数的使用方法如下：

$[xmin, value, flag, output]=fminsearch('f', x_0)$，其中$f$是向量参数$x$ 的标量函数，x_0是搜索开始的向量；输出参数有4个：最小值出现的点$xmin$,在最小值点的函数值$value$，一个表明运行成功的标志符$flag$，以及一个算法统计结构$output$。

函数fitfun以b作为自变量，以计算的y值与实际数据的y值的误差的模为返回的函数值，那么当返回的函数值达到最小时，就是最小二乘法拟合到的a和b 参数值。

```
function [err,a,b]=nlfit(x,y)
if nargin<2,
x=[1:8]'/10;
y=[0.6
1.11.6 1.8 2.0 1.9 1.7 1.3]';
end
c=fminsearch(@fitfun,[0;0],optimset,x,y);
fprintf('The nonlinear
least square fitting y=a*sin(b*x) for
    data\n\n');
fprintf('%6.1f',x);
fprintf('\n');
fprintf('%6.1f',y);
fprintf('\n\n is \n\t y=%7.4f * sin(%7.4f *x)\n\n',c(1),c(2));
z=linspace(x(1),x(end),100);
plot(x,y,'r+',z,c(1)*sin(c(2)*z),'b-.')
```

```
function err=fitfun(c,x,y)
a=c(1);          %coefficients
b=c(2);
err=y-a*sin(b*x);
err=err'*err;
```

运行结果如下:

```
>>nlfit
The nonlinear least square fitting y=a*sin(b*x) for  data

0.1  0.2  0.3  0.4  0.5  0.6  0.7  0.8

0.6  1.1  1.6  1.8  2.0  1.9  1.7  1.3

is

y=1.9751*sin(3.0250*x)
```

下图就是利用fminsearch进行非线性最小二乘拟合的结果，'+'为原始数据点，虚线为拟合得到的曲线$y = asinbx = 1.9750sin3.0249x$

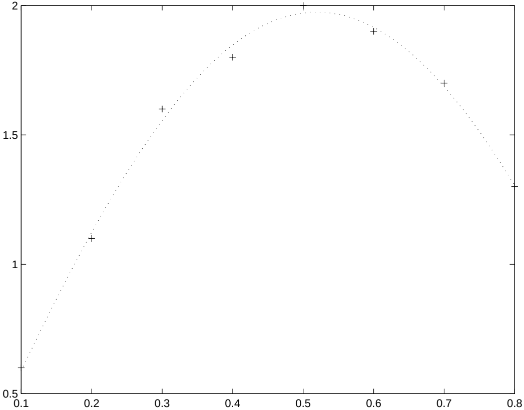


Figure 4: 非线性最小二乘拟合

也可以用Matlab 函数nlinfit（非线性拟合函数），具体程序如下：

```
function [err,a,b]=nlfitb(x,y)
if nargin<2,
   x=[1:8]'/10;
   y=[0.6 1.11.6 1.8 2.0 1.9 1.7 1.3]';
end
beta0=[1,1]';
beta=nlinfit(x,y,@mymodel,beta0);
fprintf('The
nonlinear least square fitting y=a*sin(b*x) for data\n\n');
fprintf('%6.1f',x);
fprintf('\n');
fprintf('%6.1f',y);
fprintf('\n\n is \n\t y=%7.4f * sin(%7.4f *x)\n\n',beta);
z=linspace(x(1),x(end),100);
plot(x,y,'r+',z,beta(1)*sin(beta(2)*z),'b-.')
```

```
function yb=mymodel(beta,xb)
yb=beta(1)*sin(beta(2)*xb);
```

残差:

对方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k, 1 \leqslant k \leqslant m \tag{9}$$

如果将给定的n元组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$代入式(9)的左边，第k 个方程的两边之间的差称为第k个残差。

残差:

对方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k, 1 \leqslant k \leqslant m \tag{9}$$

如果将给定的n元组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$代入式(9)的左边，第k 个方程的两边之间的差称为第k个残差。

理想中所有的残差都该是0

残差:

对方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k, 1 \leqslant k \leqslant m \tag{9}$$

如果将给定的n元组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$代入式(9)的左边，第k 个方程的两边之间的差称为第k个残差。

理想中所有的残差都该是0

矛盾方程组:

如果不可能取到$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 使所有的残差都是0，则方程组(9)为矛盾的或不相容的。

残差:

对方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = b_k, 1 \leqslant k \leqslant m \tag{9}$$

如果将给定的n元组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$代入式(9)的左边，第k 个方程的两边之间的差称为第k个残差。

理想中所有的残差都该是0

矛盾方程组:

如果不可能取到$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 使所有的残差都是0，则方程组(9)为矛盾的或不相容的。

在这种情况下，替而代之的是要求残差的平方和极小。

具体作法：

- 适当选取$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使表达式

$$I(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - b_k)^2$$

取到极小值

具体作法：

- 适当选取$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使表达式

$$I(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - b_k)^2$$

  取到极小值

- 对x_i取偏导数，并令其等于0，就得到法方程

$$\sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{m} a_{ki} a_{kj}) x_j = \sum_{k=1}^{m} b_k a_{ki}$$

  这是n个未知数$x_1, x_2, \cdots, x_n$的n 个方程的线性方程组。

具体作法：

- 适当选取$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使表达式

$$I(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - b_k)^2$$

取到极小值

- 对x_i取偏导数，并令其等于0，就得到法方程

$$\sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{m} a_{ki} a_{kj}) x_j = \sum_{k=1}^{m} b_k a_{ki}$$

这是n个未知数$x_1, x_2, \cdots, x_n$的n 个方程的线性方程组。

可以证明，如果原始系数阵中的列向量是线性无关的，则这个方程组是相容的，从而可以解出方程组.

例5.7

确定矛盾方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-4y=-9 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$$

在最小二乘意义下的最佳近似解.

解:令$I=(2x+3y-1)^2+(x-4y+9)^2+(2x-y+1)^2$, 求使得$I$达到极小的$x$和$y$的值。

例5.7

确定矛盾方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 4y = -9 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

在最小二乘意义下的最佳近似解.

解: 令 $I = (2x + 3y - 1)^2 + (x - 4y + 9)^2 + (2x - y + 1)^2$, 求使得$I$达到极小的$x$和$y$的值。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial x} = 4(2x + 3y - 1) + 2(x - 4y + 9) + 4(2x - y + 1) = 0 \\ \dfrac{\partial I}{\partial y} = 6(2x + 3y - 1) + (-8)(x - 4y + 9) + (-2)(2x - y + 1) = 0 \end{cases}$$

例5.7

确定矛盾方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-4y=-9 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$$

在最小二乘意义下的最佳近似解.

解: 令$I=(2x+3y-1)^2+(x-4y+9)^2+(2x-y+1)^2$, 求使得$I$达到极小的$x$和$y$的值。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial x}=4(2x+3y-1)+2(x-4y+9)+4(2x-y+1)=0 \\ \dfrac{\partial I}{\partial y}=6(2x+3y-1)+(-8)(x-4y+9)+(-2)(2x-y+1)=0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{20}{13} \end{cases}$$

借助MatLab完成此题，其做法如下：

```
A=[2 3; 1 -4;2 -1];
b=[1 -9 -1]';
c = A\b
```

则$x = c(1), y = c(2)$

问题：假定$f(x) \in C(-\infty, \infty)$,并且$f(x+2\pi) = f(x)$,
在$\Phi = Span\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx\}$上求最佳平方逼近函数

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \tag{10}$$

由于函数族$\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx\}$在$[0, 2\pi]$上是正交函数族,
因此$f(x)$在$[0, 2\pi]$ 上的最佳平方逼近函数(10)中的系数由(7)可得

$$\begin{cases} a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos jx dx, j = 0, 1, \cdots, n \\ b_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin jx dx, j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{11}$$

a_j, b_j称为$f(x)$的傅里叶系数。

借助最佳平方逼近的性质可得下列贝塞尔不等式

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)dx \tag{12}$$

由于右边不依赖n, 故正项级数$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$收敛，并有$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$。

显然三角多项式(10)是$f(x)$的傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \tag{13}$$

的部分和。

§6.1 周期函数逼近与快速傅立叶变换——周期函数的最佳平方逼近

实际问题中，有时$f(x)$仅在离散点集$\left\{x_k=\frac{2\pi}{N}k\right\}_0^{N-1}$上给出函数值$f\left(\frac{2\pi}{N}k\right), k=0,1,\cdots,N-1$。

可以证明，当$2n+1\leqslant N$时，三角函数族$\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx\}$为离散点集$\left\{x_k=\frac{2\pi}{N}k\right\}_0^{N-1}$的正交函数族，即对任何$k,l=0,1,\cdots,n$有

$$\sum_{j=0}^{N-1}\sin l\frac{2\pi j}{N}\sin k\frac{2\pi j}{N}=\begin{cases}0, l\neq k\\ \frac{N}{2},(l=k\neq 0)\end{cases}\quad (l,k=1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1}\cos l\frac{2\pi j}{N}\sin k\frac{2\pi j}{N}=0$$

$$\sum_{j=0}^{N-1}\cos l\frac{2\pi j}{N}\cos k\frac{2\pi j}{N}=\begin{cases}0, l\neq k\\ \frac{N}{2}, l=k\neq 0\\ N, l=k=0\end{cases}$$

于是由离散点集$\{x_k = \frac{2\pi}{N}k\}_0^{N-1}$给出的$f(x)$在三角函数族$\Phi = Span\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx\}$中的最小二乘解，仍可用(10)中的$s_n(x)$表示，其中系数为

$$\begin{cases} a_k = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\cos\frac{2\pi kj}{N}, k = 0, 1, \cdots, n \\ b_k = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\sin\frac{2\pi kj}{N}, k = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{14}$$

这里$2n+1 \leqslant N$.

当$2n+1 = N$时，则有

$$s_n(x_j) = f(x_j), j = 0, 1, \cdots, N-1$$

此时$s_n(x)$就是三角插值多项式。

更一般的情形，假定$f(x)$是以2π为周期的复值函数，在N个节点$\left\{x_k = \frac{2\pi}{N}k\right\}_0^{N-1}$上的函数值$f\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$已知，

令$\psi_k(x) = e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx, i = \sqrt{-1}, k = 0, 1, \cdots, N-1$，

则$\{\psi_k\}_0^{N-1}$关于节点集$\{x_j\}_0^{N-1}$正交，即

$$(\psi_l, \psi_k) = \sum_{j=0}^{N-1} \psi_l(x_j)\overline{\psi}_k(x_j) = \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(l-k)\frac{2\pi}{N}j} = \begin{cases} 0, l \neq k \\ N, l = k \end{cases} \tag{15}$$

因此$f(x)$在点集$\{x_k = \frac{2\pi}{N}k\}_0^{N-1}$上的最小二乘解为

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k e^{ikx}, n < N \tag{16}$$

其中

$$C_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)e^{-ikj\frac{2\pi}{N}}, k = 0, 1, \cdots, n \tag{17}$$

如果取$n = N - 1$，则$s_n(x)$为$f(x)$在点$x_j, j = 0, 1, \cdots, N - 1$ 上的插值函数，即有$s_n(x_j) = f(x_j), j = 0, 1, \cdots, N - 1$，利用(16)有

$$f(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{ikx_j}, j = 0, 1, \cdots, N - 1 \tag{18}$$

§6.1 周期函数逼近与快速傅立叶变换——周期函数的最佳平方逼近

f的离散傅里叶变换（Discrete Fourier Transformation）DFT：
由$\{f(x_j)\}_0^{N-1}$求$\{C_k\}_0^{N-1}$的过程

DFT的逆变换：由$\{C_k\}_0^{N-1}$求$\{f(x_j)\}_0^{N-1}$ 的过程

§6.2 周期函数逼近与快速傅立叶变换——快速傅里叶变换（FFT）

(17)和(18)都可以归结为计算

$$C_j = \sum_{k=0}^{N-1} B_k W^{kj}, j = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{19}$$

其中$\{B_k\}_0^{N-1}$是给定复数列，$W = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$(正变换)或$W = e^{i\frac{2\pi}{N}}$（逆变换）。

计算量的问题：直接计算一个C_j需要N次复数乘法和$N-1$次复数加法，计算全部$\{C_j\}_0^{N-1}$需要N^2次复数乘法和$N(N-1)$次复数加法。

FFT的思想是尽量减少(19)中乘法的次数。

由于W是N等分复平面单位圆上的一点，且$W^N=1$，所以$\{W^{jk}\}_{j,k=0}^{N-1}$实际上仍是单位圆上的N个点，用N去除jk，可得$jk=qN+r(0\leqslant r\leqslant N-1)$,故$W^{jk}=W^r$只有$N$个不同的值$W^0,W^1,\cdots,W^{N-1}$，特别当$N=2^m$时，只有$\frac{N}{2}$个不同值，因此可把同一个$W^r$对应的$B_k$相加后再乘$W^r$，这就能大量减少乘法的次数。

§6.2 周期函数逼近与快速傅立叶变换——快速傅里叶变换（FFT）

$N=2^m$时的算法：把k,j分别用二进制表示为

$$k=k_{m-1}2^{m-1}+\cdots+k_1 2^1+k_0 2^0=(k_{m-1}\cdots k_1 k_0),$$

$$j=j_{m-1}2^{m-1}+\cdots+j_1 2^1+j_0 2^0=(j_{m-1}\cdots j_1 j_0),$$

其中$k_r,j_r(r=0,1,\cdots,m-1)$只能取0或1，相应地令

$$C_j=C(j)=C(j_{m-1}\cdots j_1 j_0),$$

$$B_k=B_0(k)=B_0(k_{m-1}\cdots k_1 k_0),$$

$$W^{kj}=W^{(k_{m-1}\cdots k_1 k_0)(j_{m-1}\cdots j_1 j_0)}$$
$$=W^{j_0(k_{m-1}\cdots k_1 k_0)+j_1(k_{m-2}\cdots k_0 0)+\cdots j_{m-1}(k_0 0\cdots 0)}$$

于是(19)可分解为m层求和，即

$$C(j)=\sum_{k=0}^{N-1}B_0(k)W^{kj}$$
$$=\sum_{k_0=0}^{1}\left\{\sum_{k_1=0}^{1}\cdots\left(\sum_{k_{m-1}=0}^{1}B_0(k_{m-1}\cdots k_1k_0)W^{j_0(k_{m-1}\cdots k_0)}\right)W^{j_1(k_{m-2}\cdots k_0 0)}\ldots\right. \tag{20}$$

上式的m层求和由里往外，分别引入记号

$$B_1(k_{m-2}\cdots k_0j_0)=\sum_{k_{m-1}=0}^{1}B_0(k_{m-1}\cdots k_1k_0)W^{j_0(k_{m-1}\cdots k_0)}$$

$$B_2(k_{m-3}\cdots k_0j_1j_0)=\sum_{k_{m-2}=0}^{1}B_1(k_{m-2}\cdots k_0j_0)W^{j_1(k_{m-2}\cdots k_0 0)}$$

$$\cdots\cdots$$

§6.2 周期函数逼近与快速傅立叶变换——快速傅里叶变换（FFT）

$$B_m(j_{m-1}\cdots j_1 j_0)=\sum_{k_0=0}^{1} B_{m-1}(k_0 j_{m-2}\cdots j_0)W^{j_{m-1}(k_0 0\cdots 0)}$$

由此看到

$$B_m(j_{m-1}\cdots j_1 j_0)=C(j_{m-1}\cdots j_1 j_0)=C(j)$$

为简化每个和式的计算，利用$W^{j_0 2^{m-1}}=W^{j_0\frac{N}{2}}=(-1)^{j_0}$，并将二进制$(0k_{m-2}\cdots k_0)_2=k$表示为$k=k_{m-2}2^{m-2}+\cdots k_0 2^0$,即为十进制数，于是

$$\begin{aligned}
&B_1(k_{m-2}\cdots k_0 j_0)=B_0(0k_{m-2}\cdots k_0)W^{j_0(0k_{m-2}\cdots k_0)}\\
&+B_0(1k_{m-2}\cdots k_0)W^{j_0 2^{m-1}}\times W^{j_0(0k_{m-2}\cdots k_0)}\\
&=\left[B_0(0k_{m-2}\cdots k_0)+(-1)^{j_0}B_0(1k_{m-2}\cdots k_0)\right]W^{j_0(0k_{m-2}\cdots k_0)}
\end{aligned}$$

§6.2 周期函数逼近与快速傅立叶变换——快速傅里叶变换（FFT）

由于$j_0=0$或1，并将上式中的二进制数表示为十进制数得

$$\left\{\begin{array}{l} B_1(2k)=B_1(k_{m-2}\cdots k_0 0)=B_0(k)+B_0(k+2^{m-1}) \\ B_1(2k+1)=B_1(k_{m-2}\cdots k_0 1)=\left[B_0(k)-B_0(k+2^{m-1})\right]W^k \end{array}\right.$$
$$k=0,1,\cdots,2^{m-1}-1 \tag{21}$$

同理可推出

$$\left\{\begin{array}{l} B_2(k2^2+j)=B_1(2k+j)+B_1(2k+j+2^{m-1}) \\ B_2(k2^2+j+2)=\left[B_1(2k+j)-B_1(2k+j+2^{m-1})\right]W^{2k} \end{array}\right. \tag{22}$$
$$j=0,1;k=0,1,\cdots,2^{m-2}-1$$

一般情况可得

$$\left\{\begin{array}{l} B_l(k2^l+j)=B_{l-1}(k2^{l-1}+j)+B_1(k2^{l-1}+j+2^{m-1}) \\ B_l(k2^l+j+2^{l-1})=\left[B_{l-1}(k2^{l-1}+j)-B_{l-1}(k2^{l-1}+j+2^{m-1})\right]W^{k2^{l-1}} \end{array}\right.$$
$$l=1,2,\cdots,m;j=0,1,\cdots,2^{l-1}-1;k=0,1,\cdots,2^{m-l}-1 \tag{23}$$

§6.2 周期函数逼近与快速傅立叶变换——快速傅里叶变换（FFT）

例6.1

给出一张记录$\{f_j\} = (2, 1, 0, 1)$，用公式*(19)*和*MATLAB*软件计算$\{f_j\}$的离散谱$\{C_j\}$。

解:此时公式(19)中的$N = 4$，$W = e^{-i\frac{2\pi}{4}} = -i$，故

$$C_0 = \sum_{k=0}^{3} f_k = 4$$

$$C_1 = \sum_{k=0}^{3} f_k(-i)^k = 2 + 1 \times (-i) + 0 \times (-i)^2 + 1 \times (-i)^3 = 2$$

$$C_2 = \sum_{k=0}^{3} f_k(-i)^{2k} = 2 + 1 \times (-i)^2 + 0 \times (-i)^4 + 1 \times (-i)^6 = 0$$

§6.2 周期函数逼近与快速傅立叶变换——快速傅里叶变换（FFT）

$$C_3 = \sum_{k=0}^{3} f_k(-i)^{3k} = 2 + 1 \times (-i)^3 + 0 \times (-i)^6 + 1 \times (-i)^9 = 2$$

用MATLAB计算该题的调用命令为：

```
>>f=[2 1 0 1]
>>C=FFT(f)
>>C=
4 2 0 2
```