线性方程组的直接解法

主讲：王伟

Email：wangw@tongji.edu.cn

同济大学数学科学学院

March 6, 2019

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

求解大规模线性方程组:

给定n阶方阵$A \in R^{n\times n}$和n维向量$b \in R^n$, 寻找向量$x \in R^n$, 使得

$$Ax = b.$$

- 如何利用计算机来快速、稳定、有效地求解该问题是科学计算的核心问题之一。
- 直接法和迭代法
- 由于浮点运算的精度的影响，直接法不可能给出完全精确的计算解。

- 记线性方程组的分量形式为

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

下面演示用高斯消去法求解上述线性方程组的计算过程。

- 记线性方程组的分量形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

下面演示用高斯消去法求解上述线性方程组的计算过程。

- 计算过程分为消去过程和回代过程。记矩阵$A^{(1)} = A$，向量$b^{(1)} = b$，它们的元素分别为

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij},\ b_i^{(1)} = b_i \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

一、消去过程

- 第一步：如果$a_{11}^{(1)} \neq 0$，用数$m_{i1} = -a_{i1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}$ 依次乘以方程组的第一行，并加到第i行上去，$i = 2, 3, \ldots, n$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} + m_{i1} a_{1j}^{(1)}, \quad (i, j = 2, 3, \cdots, n), \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} + m_{i1} b_1^{(1)}, \quad (i = 2, 3, \cdots, n). \end{aligned}$$

- 第二步：如果$a_{22}^{(2)} \neq 0$，用数$m_{i2} = -a_{i2}^{(2)}/a_{22}^{(2)}$ 依次乘以方程组的第二行，并加到第i行上去，$i = 3, \ldots, n$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(3)} &= a_{ij}^{(2)} + m_{i2} a_{2j}^{(2)}, \quad (i, j = 3, \cdots, n), \\ b_i^{(3)} &= b_i^{(2)} + m_{i2} b_2^{(2)}, \quad (i = 3, \cdots, n). \end{aligned}$$

- 类似地，这样的运算过程一直可作到第$n-1$步，结果转化为一个上三角形方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & & \cdots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & & \cdots & a_{1,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(n-1)} \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

二、回代过程

- 如果$a_{nn}^{(n)} \neq 0$，可以逐次回代计算出线性方程组的解。

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)}/a_{nn}^{(n)} \\ x_i = (b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j)/a_{ii}^{(i)}, \quad (i = n-1, \cdots, 2, 1) \end{cases}$$

- 这就是求解线性方程组的高斯消去法。在没有浮点运算误差的情况下，该方法在有限的计算步骤内能够得到原线性方程组的精确解，是直接法的一种。

二、回代过程

- 如果$a_{nn}^{(n)} \neq 0$，可以逐次回代计算出线性方程组的解。

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)} \\ x_i = (b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j) / a_{ii}^{(i)}, \quad (i = n-1, \cdots, 2, 1) \end{cases}$$

- 这就是求解线性方程组的高斯消去法。在没有浮点运算误差的情况下，该方法在有限的计算步骤内能够得到原线性方程组的精确解，是直接法的一种。
- **算法2.1.1**(高斯消去法)
  (1)对$k = 1, 2, \cdots, n-1$做：
  对$i = k+1, k+2, \cdots, n$做：
  用数$m_{ik} = -a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$乘以方程组第k行加到第i行上;
  标记得到的矩阵及右端向量的上标(k+1);

二、回代过程

- 如果$a_{nn}^{(n)} \neq 0$，可以逐次回代计算出线性方程组的解。

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)}/a_{nn}^{(n)} \\ x_i = (b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j)/a_{ii}^{(i)}, \quad (i = n-1, \cdots, 2, 1) \end{cases}$$

- 这就是求解线性方程组的高斯消去法。在没有浮点运算误差的情况下，该方法在有限的计算步骤内能够得到原线性方程组的精确解，是直接法的一种。
- **算法2.1.1**(高斯消去法)

  (1)对$k = 1, 2, \cdots, n-1$做：

  对$i = k+1, k+2, \cdots, n$做：

  用数$m_{ik} = -a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$乘以方程组第k行加到第i行上;

  标记得到的矩阵及右端向量的上标(k+1);

  (2)$x_n = b_n^{(n)}/a_{nn}^{(n)}$ 且对于$i = n-1, n-2, \cdots, 1$做:

$$x_i = (b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j)/a_{ii}^{(i)}.$$

- 消去过程的第k步，对矩阵需作$(n-k)^2$次乘法运算及$n-k$次除法运算，对右端向量作$n-k$次乘法运算，在消去过程总的乘除法运算工作量为

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n$$

- 消去过程的第k步，对矩阵需作$(n-k)^2$次乘法运算及$n-k$次除法运算，对右端向量作$n-k$次乘法运算，在消去过程总的乘除法运算工作量为

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n$$

- 回代过程中，计算每个x_k需作$n-k+1$次乘除法运算，其工作量为

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)=\frac{1}{2}n(n+1)$$

- 消去过程的第k步，对矩阵需作$(n-k)^2$次乘法运算及$n-k$次除法运算，对右端向量作$n-k$次乘法运算，在消去过程总的乘除法运算工作量为

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n$$

- 回代过程中，计算每个x_k需作$n-k+1$次乘除法运算，其工作量为

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)=\frac{1}{2}n(n+1)$$

- 用高斯消去法计算线性方程组所需要总的乘除法运算工作量为

$$\frac{1}{3}n^3+n^2-\frac{1}{3}n.$$

定义2.1

在计算中做除数的元素$a_{ii}^{(i)}, i = 1, 2, \cdots, n$，被称为主导元素，简称主元。

- 高斯消去法能够顺利进行到底是有前提条件的，即要求所有的主导元素不等于零。如果某个主元为零，则高斯消去法中断。

例2.1

取$\varepsilon = 10^{-9}$，用高斯消去法计算下述线性方程组。（假定模型计算机具有8位字长的浮点表示）

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

例2.1

取$\varepsilon = 10^{-9}$，用高斯消去法计算下述线性方程组。（假定模型计算机具有8位字长的浮点表示）

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

解:

- 首先用高斯消去法，这时$m_{21} = -1/\varepsilon$，对方程组消元，于是得到

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1 \\ (1 - 1/\varepsilon)x_2 = 2 - 1/\varepsilon \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{2 - 1/\varepsilon}{1 - 1/\varepsilon}, \quad x_1 = \frac{1 - x_2}{\varepsilon}$$

- 在这个模型计算机上，具体计算是这样的：

$$\begin{aligned} 1/\varepsilon &= 10^9 = 0.10000 \times 10^{10} \\ 2 &= 0.0000000002 \times 10^{10} \end{aligned}$$

- 在这个模型计算机上，具体计算是这样的：

$$\begin{aligned} 1/\varepsilon &= 10^9 = 0.10000 \times 10^{10} \\ 2 &= 0.0000000002 \times 10^{10} \end{aligned}$$

- $(1/\varepsilon - 2) = 0.0999999998 \times 10^{10}$，通过四舍五入，输出结果变成$0.10000 \times 10^{10} = 1/\varepsilon$。同理，$(1/\varepsilon - 1)$的计算结果也是$0.10000 \times 10^{10} = 1/\varepsilon$。这样高斯消去的计算解为$x_1 = 0, x_2 = 1$。

- 在这个模型计算机上，具体计算是这样的：

$$\begin{aligned} 1/\varepsilon &= 10^9 = 0.10000 \times 10^{10} \\ 2 &= 0.0000000002 \times 10^{10} \end{aligned}$$

- $(1/\varepsilon - 2) = 0.0999999998 \times 10^{10}$，通过四舍五入，输出结果变成$0.10000 \times 10^{10} = 1/\varepsilon$。同理，$(1/\varepsilon - 1)$的计算结果也是$0.10000 \times 10^{10} = 1/\varepsilon$。这样高斯消去的计算解为$x_1 = 0, x_2 = 1$。
- 实际上方程组的精确解为

$$x_1 = 1/(1-\varepsilon) \approx 1, x_2 = (1-2\varepsilon)/(1-\varepsilon) \approx 1$$

这里未知量x_1的计算解的相对误差达到了惊人的100%，这就是“大数吃小数”的现象。

- 由于浮点运算误差的影响，高斯消去法过程中会得到错误的解。为了避免上述不稳定的现象，对一般的线性方程组而言，我们采用选主元的策略。

- 由于浮点运算误差的影响，高斯消去法过程中会得到错误的解。为了避免上述不稳定的现象，对一般的线性方程组而言，我们采用选主元的策略。
- 采用列主元素高斯消去法，对上述例子中方程组进行行交换：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ \varepsilon x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

这时$m_{21} = -\varepsilon$，进行消元后，可得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ (1-\varepsilon)x_2 = 1 - 2\varepsilon \end{cases}$$

在模型计算机上，$(1-\varepsilon)$和$(1-2\varepsilon)$都被算成为1。

- 若考虑方程

$$\begin{cases} x_1+\frac{1}{\varepsilon}x_2=\frac{1}{\varepsilon}. \\ x_1+\quad x_2=2. \end{cases}$$

- 若考虑方程

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{\varepsilon} x_2 = \frac{1}{\varepsilon}. \\ x_1 + \quad x_2 = 2. \end{cases}$$

此时, 选不选主元一样:

$$\begin{cases} \quad x_1 + \frac{1}{\varepsilon} x_2 = \frac{1}{\varepsilon}, \\ (1 - \frac{1}{\varepsilon}) x_2 = 2 - \frac{1}{\varepsilon}. \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{2 - 1/\varepsilon}{1 - 1/\varepsilon} = 1, \quad x_1 = 0$$

因为这种方程的选主元同等变形变得毫无意义。

- 若考虑方程

$$\begin{cases} x_1+\frac{1}{\varepsilon}x_2=\frac{1}{\varepsilon}. \\ x_1+\ \ x_2=2. \end{cases}$$

此时, 选不选主元一样:

$$\begin{cases} x_1+\frac{1}{\varepsilon}x_2 =\frac{1}{\varepsilon}, \\ (1-\frac{1}{\varepsilon})x_2 =2-\frac{1}{\varepsilon}. \end{cases} \Rightarrow x_2=\frac{2-1/\varepsilon}{1-1/\varepsilon}=1, \quad x_1=0$$

因为这种方程的选主元同等变形变得毫无意义。

- 两边同乘了一个很大的数。

§3 矩阵的三角分解

定义3.1

把一个n阶矩阵分解成结构简单的三角形矩阵的乘积称为矩阵的三角分解。

常见的矩阵三角分解有：

1. LU分解（杜利脱尔分解，克洛脱分解）
2. LDU分解
3. 乔列斯基分解

- 高斯消去法的消去过程与左乘下述矩阵是等价的：

$$L_{n-1}\cdots L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \triangleq U$$

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & m_{n,i} & & & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

- 易知

$$L_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -m_{n,i} & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

- 易知

$$L_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -m_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -m_{n,i} & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

- 则

$$A = LU$$

其中

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -m_{21} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -m_{n1} & \cdots & -m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

- 这里，L是单位下三角矩阵，U是上三角矩阵，这种矩阵分解称为杜利脱尔（Doolittle）分解，或者杜利脱尔三角分解。

- 这里，L是单位下三角矩阵，U是上三角矩阵，这种矩阵分解称为杜利脱尔（Doolittle）分解，或者杜利脱尔三角分解。
- 克洛脱(Crout)分解
  $A = LU$，这里L是下三角矩阵，U是单位上三角矩阵。

- 这里，L是单位下三角矩阵，U是上三角矩阵，这种矩阵分解称为杜利脱尔（Doolittle）分解，或者杜利脱尔三角分解。
- 克洛脱(Crout)分解
  $A = LU$，这里L是下三角矩阵，U是单位上三角矩阵。
- LDU分解
  $A = LDU$，这里L是单位下三角矩阵，D是对角矩阵，U是单位上三角矩阵。

- 这里，L是单位下三角矩阵，U是上三角矩阵，这种矩阵分解称为杜利脱尔（Doolittle）分解，或者杜利脱尔三角分解。
- 克洛脱(Crout)分解
  $A = LU$，这里L是下三角矩阵，U是单位上三角矩阵。
- LDU分解
  $A = LDU$，这里L是单位下三角矩阵，D是对角矩阵，U是单位上三角矩阵。
- 以上三种分解统称为矩阵的三角分解，或者LU分解。如果不作特殊说明，一般我们所说的LU分解就是指杜利脱尔三角分解。

矩阵三角分解的存在唯一性

定理3.1

(存在性) 利用高斯消去法求解方程组$Ax=b$时的主元素$a_{kk}^{(k)} \neq 0, (k=1,2,\cdots,n)$ 的充要条件是n阶矩阵A的所有顺序主子式均不为零。

矩阵三角分解的存在唯一性

定理3.1

(存在性) 利用高斯消去法求解方程组$Ax=b$时的主元素$a_{kk}^{(k)}\neq 0,(k=1,2,\cdots,n)$ 的充要条件是n阶矩阵A的所有顺序主子式均不为零。

定理3.2

(唯一性) 若A为n阶矩阵，且所有顺序主子式均不等于零，则A可分解为一个单位下三角矩阵L 与一个上三角矩阵U的乘积:$A=LU$，且分解是唯一的。

杜利脱尔算法

算法3.1

(1) 对$k=1,2,\cdots,n$做:

(2)

$$u_{kj}=a_{kj}-\sum_{s=1}^{k-1}l_{ks}u_{sj},\quad j=k,k+1,\cdots,n;$$

(3)

$$l_{ik}=(a_{ik}-\sum_{s=1}^{k-1}l_{is}u_{sk})/u_{kk},\quad j=k+1,\cdots,n.$$

克洛脱算法

算法3.2

(1) 对$k=1,2,\cdots,n$,做:

(2)
$$l_{ik}=a_{ik}-\sum_{s=1}^{k-1}l_{is}u_{sk},\quad i=k+1,\cdots,n,$$

(3)
$$u_{kj}=(a_{kj}-\sum_{s=1}^{k-1}l_{ks}u_{sj})/l_{kk},\quad j=k,k+1,\cdots,n.$$

回代

算法3.3

(1) 对$i = 1, 2, \cdots, n$做：

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j;$$

(2) 对$i = n, n-1, \cdots, 1$ 做：

$$x_i = (y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j)/u_{ii}.$$

例3.1

已知$Ax=b$，作A的杜利脱尔分解，并求解方程组，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 9 & 16\\ 1 & 8 & 27 & 64\\ 1 & 16 & 81 & 256\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}2\\ 10\\ 44\\ 190\end{bmatrix}$$

例3.1

已知$Ax=b$，作A的杜利脱尔分解，并求解方程组，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\\1&16&81&256\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}2\\10\\44\\190\end{bmatrix}$$

解:假设

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\\1&16&81&256\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\l_{31}&l_{32}&1&\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}&u_{14}\\&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\&&u_{33}&u_{34}\\&&&u_{44}\end{bmatrix}$$

- 经计算可得

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 3 & 1 & \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 2 & 6 & 12 \\ & & 6 & 24 \\ & & & 24 \end{bmatrix}$$

- 经计算可得

$$L=\begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&3&1&\\1&7&6&1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\&2&6&12\\&&6&24\\&&&24\end{bmatrix}$$

- 对$Ly=b$进行回代可得$y=[2\ 8\ 18\ 24]^T$；再对$Ux=y$进行回代，则$x=[-1\ 1\ \ -1\ 1]^T$。

- 经计算可得

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 3 & 1 & \\ 1 & 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 2 & 6 & 12 \\ & & 6 & 24 \\ & & & 24 \end{bmatrix}$$

- 对$Ly = b$进行回代可得$y = [2\ 8\ 18\ 24]^T$；再对$Ux = y$进行回代，则$x = [-1\ 1\ \ -1\ 1]^T$。
- 用MATLAB可以计算矩阵的LU分解，其语法为:

$$[L,U]\text{=lu(A)},$$

例3.2

利用LU分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

解:

例3.2

利用LU分解求解$Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

解:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = LU$$

例3.2

利用LU分解求解$Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

解:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = LU$$

例3.2

利用LU分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

解:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = LU$$

例3.2

利用LU分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

解:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = LU$$

例3.2

利用LU分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

解:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = LU$$

例3.2

利用LU分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

解:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

例3.2

利用LU分解求解$Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

解:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b$$

例3.2

利用LU分解求解$Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

解:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=LU$$

$$Ax=b \Leftrightarrow LUx=b \Leftrightarrow Ly=b,\ Ux=y$$

例3.2

利用LU分解求解$Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

解:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow Ly = b,\ Ux = y$$
$$Ly = b \Rightarrow y = (4, 3, 2)^T$$

例3.2

利用LU分解求解$Ax=b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

解:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

$$Ax=b \Leftrightarrow LUx=b \Leftrightarrow Ly=b,\ Ux=y$$
$$Ly=b \Rightarrow y=(4,3,2)^T$$
$$Ux=y \Rightarrow x=(1,1,1)^T$$

- 用MATLAB可以计算矩阵的LU分解，其语法为:

$$[L,U]=\mathrm{lu(A)},$$

```
>> A = [ 2 1 1;
         2 3 2;
         2 3 4];
>> [l,u] = lu(A)
l =
     1     0     0
     1     1     0
     1     1     1
u =
     2     1     1
     0     2     1
     0     0     2
```

```
>> b = [4 7 9]';
>> y = L\b;
y =
      4
      3
      2
>> x = U\y
x =
      1
      1
      1
```

例3.3

已知$Ax=b$，作A的克洛托分解，并求解方程组，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 9 & 16\\ 1 & 8 & 27 & 64\\ 1 & 16 & 81 & 256\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}2\\ 10\\ 44\\ 190\end{bmatrix}$$

例3.3

已知$Ax=b$，作A的克洛托分解，并求解方程组，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\\1&16&81&256\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}2\\10\\44\\190\end{bmatrix}$$

解:假设

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\\1&16&81&256\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{11}&&&\\l_{21}&l_{22}&&\\l_{31}&l_{32}&l_{33}&\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&l_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&u_{12}&u_{13}&u_{14}\\&1&u_{23}&u_{24}\\&&1&u_{34}\\&&&1\end{bmatrix}$$

- 经计算可得

$$L=\begin{bmatrix}1&&&\\1&2&&\\1&6&6&\\1&14&36&24\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\&1&3&6\\&&1&4\\&&&1\end{bmatrix}$$

- 经计算可得

$$L=\begin{bmatrix}1 & & & \\ 1 & 2 & & \\ 1 & 6 & 6 & \\ 1 & 14 & 36 & 24\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ & 1 & 3 & 6\\ & & 1 & 4\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

- 对$Ly=b$进行回代可得$y=[2\ 4\ 1\ 3]^T$；再对$Ux=y$进行回代，则$x=[-1\ 1\ \ -1\ 1]^T$。

- 当矩阵A为对称正定时，它的所有顺序主子式都大于零，易知存在唯一的LU分解：

$$A = LDU$$

- 当矩阵A为对称正定时，它的所有顺序主子式都大于零，易知存在唯一的LU分解：

$$A = LDU$$

- 由A的对称性可得

$$LDU = U^T DL^T$$

按照分解的唯一性可得

$$L = U^T$$

即

$$A = LDL^T$$

- 根据A是对称正定矩阵，有

$$x_i^T A x_i > 0$$

从而

$$d_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$$

- 根据A是对称正定矩阵，有

$$x_i^T A x_i > 0$$

从而

$$d_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$$

- 记$D^{1/2} = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \cdots, \sqrt{d_n})$，$G = LD^{1/2}$ 则有

$$A = LDL^T = LD^{1/2}D^{1/2}L^T = GG^T$$

其中，G是对角元均大于零的下三角矩阵。

- 根据A是对称正定矩阵，有

$$x_i^T A x_i > 0$$

从而

$$d_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$$

- 记$D^{1/2} = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \cdots, \sqrt{d_n})$，$G = LD^{1/2}$ 则有

$$A = LDL^T = LD^{1/2}D^{1/2}L^T = GG^T$$

其中，G是对角元均大于零的下三角矩阵。

- 易证这个三角分解是唯一的，称之为**乔列斯基(Choleskey)**分解。

乔列斯基分解算法

算法3.4

(1) 对$k = 1, 2, \cdots, n$,

(2) $g_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{s=1}^{i-1} g_{is}^2}$,

(3) $g_{ki} = (a_{ki} - \sum_{s=1}^{i-1} g_{is} g_{ks})/g_{ii}, \quad k = i+1, i+2, \cdots, n.$

平方根法

- 给定乔列斯基分解，线性方程组$Ax = b$的求解可转化为

$$\begin{cases} Gy & = b \\ G^T x & = y \end{cases}$$

平方根法

- 给定乔列斯基分解，线性方程组$Ax=b$的求解可转化为

$$\begin{cases} Gy &= b \\ G^T x &= y \end{cases}$$

- 计算公式为

$$\begin{cases} y_i &= (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} g_{ij} y_j)/g_{ii}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \\ x_i &= (y_i - \sum_{j=i+1}^{n} g_{ji} x_j)/g_{ii}, \quad i = n, n-1, \cdots, 1 \end{cases}$$

例3.4

利用平方根法求解下述对称正定方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解: 设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

例3.4

利用平方根法求解下述对称正定方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解: 设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = GG^T$$

例3.4

利用平方根法求解下述对称正定方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解:设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = GG^T$$

例3.4

利用平方根法求解下述对称正定方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解: 设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & & 0 \\ -1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = GG^T$$

例3.4

利用平方根法求解下述对称正定方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解:设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = GG^T$$

例3.4

利用平方根法求解下述对称正定方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解:设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = GG^T$$

例3.4

利用平方根法求解下述对称正定方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解: 设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = GG^T$$

例3.4

利用平方根法求解下述对称正定方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解:设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = GG^T$$

回代

例3.4

利用平方根法求解下述对称正定方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解: 设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = GG^T$$

回代

$$Ax = b \Leftrightarrow GG^T x = b$$

例3.4

利用平方根法求解下述对称正定方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解:设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = GG^T$$

回代

$$Ax = b \Leftrightarrow GG^T x = b \Leftrightarrow Gy = b,\ G^T x = y$$

例3.4

利用平方根法求解下述对称正定方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解: 设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = GG^T$$

回代

$$Ax = b \Leftrightarrow GG^Tx = b \Leftrightarrow Gy = b,\ G^Tx = y$$
$$Gy = b \Rightarrow y = (2, -1, 3)^T$$

例3.4

利用平方根法求解下述对称正定方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解:设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = GG^T$$

回代

$$Ax = b \Leftrightarrow GG^Tx = b \Leftrightarrow Gy = b,\ G^Tx = y$$
$$Gy = b \Rightarrow y = (2, -1, 3)^T$$
$$G^Tx = y \Rightarrow x = (1, 1, 1)^T$$

例3.5

求下列矩阵的乔列斯基分解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 35 \end{bmatrix}$$

解:设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

§3.2 矩阵的三角分解——乔列斯基分解

例3.5

求下列矩阵的乔列斯基分解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 35 \end{bmatrix}$$

解: 设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = GG^T$$

例3.5

求下列矩阵的乔列斯基分解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 35 \end{bmatrix}$$

解:设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & & 0 \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = GG^T$$

例3.5

求下列矩阵的乔列斯基分解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 35 \end{bmatrix}$$

解:设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & & 0 \\ 3 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = GG^T$$

例3.5

求下列矩阵的乔列斯基分解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 35 \end{bmatrix}$$

解:设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = GG^T$$

例3.5

求下列矩阵的乔列斯基分解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 35 \end{bmatrix}$$

解: 设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = GG^T$$

例3.5

求下列矩阵的乔列斯基分解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 35 \end{bmatrix}$$

解:设A的乔列斯基分解$A = GG^T$，经计算得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = GG^T$$

利用矩阵的三角分解，很容易导出一些特殊方程组的解法。

- 设A为三对角矩阵，即

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

利用矩阵的三角分解，很容易导出一些特殊方程组的解法。

- 设A为三对角矩阵，即

$$A=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}, \quad d=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

- 对矩阵A作克洛脱分解，得

$$L=\begin{bmatrix} l_1 & & & & \\ v_2 & l_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & v_{n-1} & l_{n-1} & \\ & & & v_n & l_n \end{bmatrix}, \quad U=\begin{bmatrix} 1 & u_1 & & & \\ & 1 & u_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & u_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix},$$

追赶法

算法3.5

(1) 设$u_0 = y_0 = a_1 = 0$,

(2) 对$k = 1, 2, \cdots, n$

(3)

$$\begin{cases} l_i = b_i - a_i u_{i-1}, & i = 1, 2, \cdots, n \\ y_i = (d_i - y_{i-1} a_i)/l_i, & i = 1, 2, \cdots, n \\ u_i = c_i / l_i, & i = 1, 2, \cdots, n-1 \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_i = y_i - u_i x_{i+1}, & i = n-1, \cdots, 2, 1 \end{cases}$$

追赶法的Matlab 程序tridiagsolver.m 如下:

```
function x = tridiagsolver(A,b)
[n,n] = size(A);
for i=1:n
    if (i==1)
        l(i) = a(i,i);
        y(i) = b(i)/l(i);
    else
        l(i) = a(i,i)- a(i,i-1)*u(i-1);
        y(i) = (b(i)-y(i-1)*a(i,i-1))/l(i);
    end
    if (i<n)
        u(i) = a(i,i+1)/l(i);
    end
```

追赶法的Matlab 程序tridiagsolver.m 如下:

```
end
x(n)= y(n)
for j=n-1:-1:1
    x(j) =y(j)-u(j)*x(j+1);
end
```

例3.6

用追赶法求解下述三对角线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 3 & -2 & \\ & -2 & 4 & -3 \\ & & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解:

追的过程为

$$\begin{aligned}
&l_1 = b_1 = 2, && y_1 = d_1/l_1 = 3, && u_1 = -\tfrac{1}{2}; \\
&l_2 = b_2 - a_2 u_1 = 5/2, && y_2 = (d_2 - a_2 y_1)/l_2 = 8/5, && u_2 = -\tfrac{4}{5}; \\
&l_3 = b_3 - a_3 u_2 = 12/5, && y_3 = (d_3 - a_3 y_2)/l_3 = 1/2, && u_3 = -\tfrac{5}{4}; \\
&l_4 = b_4 - a_4 u_3 = 5/4, && y_4 = (d_4 - a_4 y_3)/l_4 = 2.
\end{aligned}$$

- 赶的过程为

$$\begin{aligned} x_4 &= y_4 = 2, \\ x_3 &= y_3 - u_2 x_4 = 3, \\ x_2 &= y_2 - u_2 x_3 = 4, \\ x_1 &= y_1 - u_1 x_2 = 5 \end{aligned}$$

- 赶的过程为

$$\begin{aligned} x_4 &= y_4 = 2, \\ x_3 &= y_3 - u_2 x_4 = 3, \\ x_2 &= y_2 - u_2 x_3 = 4, \\ x_1 &= y_1 - u_1 x_2 = 5 \end{aligned}$$

- 因此，原方程组的解为$x = [5\ 4\ 3\ 2]^T$。

- 设
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
且$\mathcal{L}$和$\mathcal{U}$分别是分块下三角矩阵和分块上三角矩阵
$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ E & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} F & G \\ 0 & S \end{pmatrix}$$
满足$\mathcal{A} = \mathcal{L}\mathcal{U}$。

- 经计算

$$E = CA^{-1}, \quad F = A, \quad G = B, \quad S = D - CA^{-1}B.$$

即

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

其中，$S = D - CA^{-1}B$成为A的舒尔(Schur)补。

- 经计算

$$E = CA^{-1}, \quad F = A, \quad G = B, \quad S = D - CA^{-1}B.$$

即

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

其中，$S = D - CA^{-1}B$成为A的舒尔(Schur)补。

- 这样的矩阵分解称为矩阵的分块三角分解。

例3.7

求分块矩阵

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

的一个分块三角分解，其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

解:因为

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},$$

所以，

$$E = CA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},$$

- $$S = D - CA^{-1}B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

  因此，2×2分块矩阵$\mathcal{A}$的一个分块三角分解为:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ E & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

矩阵除了三角分解以外，还有

- QR分解

$$A = QR$$

Q为正交矩阵，R为上三角矩阵。

矩阵除了三角分解以外，还有

- QR分解

$$A = QR$$

Q为正交矩阵，R为上三角矩阵。

- 奇异值分解

$$A = U\Sigma V^T$$

U和V为正交矩阵，Σ为对角矩阵。

定义4.1

矩阵$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$，满足$QQ^T = Q^TQ = I$，我们称这样的矩阵$Q$为正交矩阵。

正交矩阵Q有如下性质：

- $Q^{-1} = Q^T$;
- $\det(Q) = \pm 1$;
- Qx的长度与x的长度相等。

- 单位矩阵

- 单位矩阵
- 置换矩阵: 将单位矩阵的任意两行（列）交换得到的矩阵。譬如，交换第i行和第j行，得：

$$P_{ij} = \begin{array}{c@{}c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

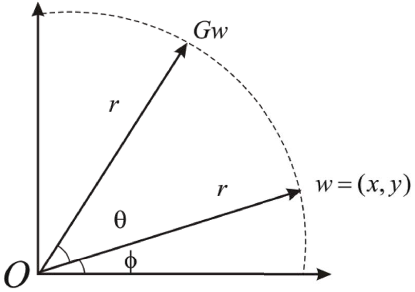
任意个置换矩阵的乘积仍然是正交矩阵。

- 旋转矩阵（Givens变换）形如

$$G(i,j,\theta)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\theta & & \sin\theta & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -\sin\theta & & \cos\theta & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}$$

的矩阵被称为Given矩阵或Givens变换，或称（平面）旋转矩阵（或旋转变换），其中θ为旋转的角度。

平面旋转变换的几何意义：



- 反射矩阵（Householder变换）设$w \in R^n$，且$\|w\|_2 = 1$，则

$$P = I - 2ww^T$$

称为Householder变换，或者Householder矩阵。

- 反射矩阵（Householder变换）设$w \in R^n$，且$\|w\|_2 = 1$，则

$$P = I - 2ww^T$$

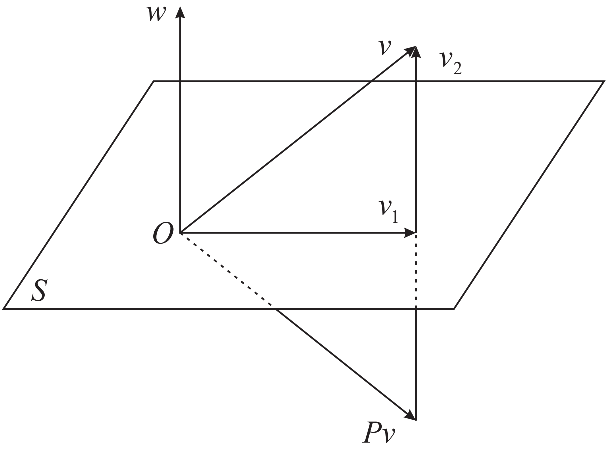
称为Householder变换，或者Householder矩阵。

- Householder矩阵有如下性质：
  (1) $P^T = P$，即P是对称阵。
  (2) $PP^T = P^2 = I - 2ww^T - 2ww^T + 4w(w^Tw)w^T$，即$P$是正交阵。
  (3) 设$w \in R^3$，S为过原点的平面且$w \perp S$.
  $\forall v \in R^3$，可分解成为$v = v_1 + v_2$，其中$v_1 \in S, v_2 \perp S$。
  不难验证

$$Pv = P(v1 + v2) = v_1 - v_2.$$

  所以，Householder变换又称镜面反射变换，Householder矩阵也称初等反射矩阵。

镜面反射变换的几何意义：



一个重要的应用是对$x \neq 0$，求Householder矩阵P，使得

$$Px = ke_1$$

其中，$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$。
由$\|Px\|_2 = \|ke_1\|_2 = \|x\|_2$知$k = \pm\|x\|_2$，由$P$的构造，有

$$u = x - ke_1, \quad w = \frac{u}{\|u\|_2}$$

设$x = (x_1, \cdots, x_n)^T$，为了使$x - ke_1$计算时不损失有效数位，取

$$k = -\mathrm{sgn}(x_1)\|x\|_2, \quad \mathrm{sgn}(x_1) = \begin{cases} 1, & 当 x_1 \leqslant 0 \\ -1, & 当 x_1 < 0 \end{cases}$$

则$u = (x_1 + \mathrm{sgn}(x_1)\|x\|_2, x_2, \cdots, x_n)^T$ 从而

$$P = I - \beta uu^T$$

其中,

$$\beta = 2(\|u\|_2^2)^{-1} = (\|x\|_2(\|x\|_2 + |x_1|))^{-1}$$

例4.1

已知$x=(3,5,1,1)^T$，求Householder矩阵P，使得$Px=-6e_1$，其中$\|x\|_2=6$。

解:取$k=-6$，$u=x-ke_1=(9,5,1,1)^T$，$\|u\|_2^2=108$，$\beta=\frac{1}{54}$，则

$$P=I-\beta uu^T=\frac{1}{54}\begin{pmatrix}-27 & -45 & -9 & -9\\ -45 & 29 & -5 & -5\\ -9 & -5 & 53 & -1\\ -9 & -5 & -1 & 53\end{pmatrix}$$

定理4.1

设$A \in R^{n\times n}$，则存在正交阵P，使$PA = R$，其中R为上三角阵。

证:我们给出构造性证明如下。
首先，考虑A的第一列$a_1 = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1})^T$，可找到Householder矩阵$P_1$，使得$P_1 a_1$的除了第1个元素以外都为零。
同理，找到P_2使得$P_2 P_1 A$的第2列对角元以下元素为0，而第一列对角元以下元素与$P_1 A$一样是0。依次这样下去，可以得到

$$P_{n-1} P_{n-2} \cdots P_1 A = R$$

其中R为上三角矩阵，$P = P_{n-1} P_{n-2} \cdots P_1$为正交阵。定理证毕。

定理4.2

$A \in R^{n\times n}$，设A非奇异，则存在正交阵Q与上三角阵R，使得A有如下分解

$$A = QR$$

且当R的对角元均为正时，分解是唯一的。

该定理保证了A可分解为$A = QR$，若A非奇异，则R也非奇异。如果不规定R的对角元为正，则分解不是唯一的。

例4.2

用*Householder*变换作矩阵A的QR分解

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

解:Householder矩阵$P_1 \in R^{n\times n}$，使

$$P \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

则有

$$P_1 = \begin{pmatrix} -0.816497 & -0.408248 & -0.408248 \\ -0.408248 & 0.908248 & -0.091751 \\ -0.408248 & -0.091751 & 0.908248 \end{pmatrix}$$

- 和

$$P_1A = \begin{pmatrix} -2.44949 & 0 & 2.44949 \\ 0 & 1.44949 & -0.224745 \\ 0 & 3.44949 & -2.22474 \end{pmatrix}$$

- 和

$$P_1A=\begin{pmatrix}-2.44949 & 0 & 2.44949\\ 0 & 1.44949 & -0.224745\\ 0 & 3.44949 & -2.22474\end{pmatrix}$$

- 再找$\overline{P}_2\in R^{2\times 2}$，使$\overline{P}_2=(1.44949,3.44949)^T=(*,0)^T$，得

$$P_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \overline{P}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -0.387392 & -0.921915\\ 0 & -0.921915 & 0.387392\end{pmatrix}$$

且

$$P_2(P_1A)=\begin{pmatrix}-2.44949 & 0 & -2.44949\\ 0 & -3.74166 & 2.13809\\ 0 & 0 & -0.654654\end{pmatrix}$$

这是一个下三角矩阵，但对角元皆为负数。

- 只要令$D=-I$，则有$R=-P_2P_1A$是对角元为正的上三角矩阵，使得$A=QR$。其中，

$$Q=-(P_2P_1)^T=\begin{pmatrix} 0.816497 & -0.534522 & -0.218218 \\ 0.408248 & 0.267261 & 0.872872 \\ 0.408248 & 0.801783 & -0.436436 \end{pmatrix}$$

定义4.2

设$A \in C^{m\times n}$，A^HA的n个特征值的非负平方根叫作A的奇异值，记为$\sigma_i(A)$。

定理4.3

（奇异值分解）设$A \in C^{m\times n}$，则存在酉阵$U \in C^{m\times m}$和$V \in C^{n\times n}$，使得：

$$A = USV^H$$

其中$S = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_i > 0 (i = 1, \ldots, r)$, $r = rank(A)$。

- 奇异值分解与对称矩阵基于特征向量的对角化类似，但还是有明显的不同。对称矩阵特征向量分解的基础是谱分析，而奇异值分解则是谱分析理论在任意矩阵上的推广。

- 奇异值分解与对称矩阵基于特征向量的对角化类似，但还是有明显的不同。对称矩阵特征向量分解的基础是谱分析，而奇异值分解则是谱分析理论在任意矩阵上的推广。
- 奇异值分解提供了一些关于A的信息，例如非零奇异值的数目（S的阶数）和A的秩相同。一旦秩r确定，那么U的前r列构成了A的列向量空间的正交基。

- 奇异值分解与对称矩阵基于特征向量的对角化类似，但还是有明显的不同。对称矩阵特征向量分解的基础是谱分析，而奇异值分解则是谱分析理论在任意矩阵上的推广。
- 奇异值分解提供了一些关于A的信息，例如非零奇异值的数目（S的阶数）和A的秩相同。一旦秩r确定，那么U的前r列构成了A的列向量空间的正交基。
- 奇异值分解非常有用和可靠的分解，但是它比QR 分解要花上近十倍的计算时间。

本章小结

- 高斯消去法

本章小结

- 高斯消去法
- 矩阵的三角分解法

本章小结

- 高斯消去法
- 矩阵的三角分解法
- 矩阵的QR分解法

本章小结

- 高斯消去法
- 矩阵的三角分解法
- 矩阵的QR分解法
- 直接法相对来说，工作量小，精度高，但程序复杂，并且对于高阶线性方程组易于受计算机容量的限制，所以它适于求解中小型方程组。

本章小结

- 高斯消去法
- 矩阵的三角分解法
- 矩阵的QR分解法
- 直接法相对来说，工作量小，精度高，但程序复杂，并且对于高阶线性方程组易于受计算机容量的限制，所以它适于求解中小型方程组。
- 对于高阶大型线性方程组，有效的解法是第六章要讨论的迭代法。