多项式插值与样条插值

主讲：王伟

Email: wangw@tongji.edu.cn

同济大学数学科学学院

内容提要

1 前言

内容提要

内容提要

1. 前言
2. 多项式插值
3. 拉格朗日(Lagrange)插值

内容提要

内容提要

内容提要

本章和下一章论述的主题:
函数表达的问题

第一个问题，假定已有一个函数的数值表，

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

要问：是否能找到一个简单而便于计算的公式，利用它可以精确地重新算得这些给定点。—— 插值问题

第二个问题，设给定一个函数f，f的表达式非常复杂，计算f 的值很不经济。在这种情况下，就要寻找另一个函数p，它既易于求值且又是对f 的一个合理的逼近。—— 连续函数的逼近问题

定义2.1

定义2.1

定义2.1

- 设函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，且已知它在$n+1$个互异的点$a\leqslant x_0<x_1<\cdots<x_n\leqslant b$的函数值$y_0,y_1,\cdots,y_n$,若存在一个次数不超过$n$次的多项式$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$(其中$a_i$为实数)满足条件

$$p(x_i)=y_i(i=0,1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

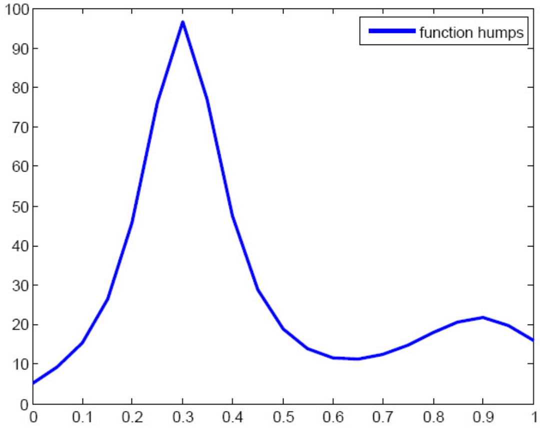
则称$p(x)$为函数$f(x)$的n次插值多项式。

定义2.1

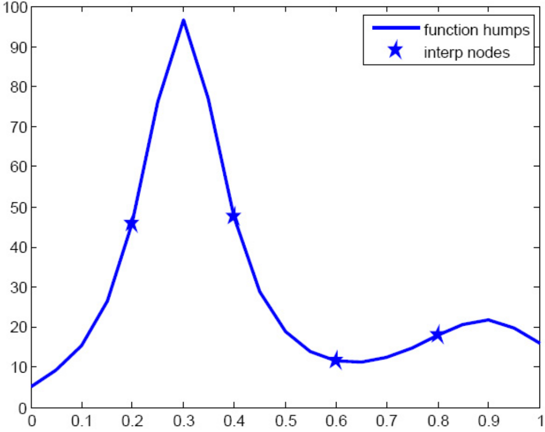
- 设函数$y = f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，且已知它在$n+1$个互异的点$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$的函数值$y_0, y_1, \cdots, y_n$,若存在一个次数不超过$n$次的多项式$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$(其中$a_i$为实数)满足条件
$$p(x_i) = y_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$
则称$p(x)$为函数$f(x)$的n次插值多项式。
- 按上述条件求函数$f(x)$的近似表达式$p(x)$的方法称为插值多项式插值法，称该条件为插值多项式插值条件，$x_i, i = 0, 1, \cdots, n$为插值多项式插值节点，包含插值节点的区间$[a,b]$为插值多项式插值区间。

几个常用术语:
插值法——按条件(1)求函数$f(x)$的近似表达式$p(x)$的方法
插值条件——条件(1)
插值节点——$x_i(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$
插值区间——包含插值节点的区间$[a, b]$

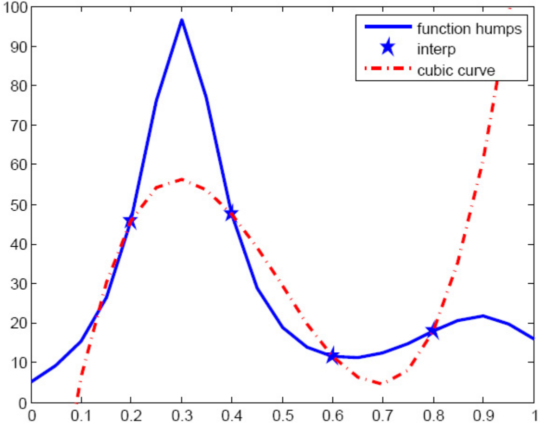
多项式插值的几何意义:


function humps
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

多项式插值的几何意义：


100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
function humps
interp nodes

多项式插值的几何意义：


100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
function humps
interp
cubic curve

§2.2 多项式插值——插值多项式的存在唯一性

定理2.1

n次插值多项式存在且唯一。

定理2.1

n次插值多项式存在且唯一。

定理2.1

n次插值多项式存在且唯一。

证:设n次多项式$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$是函数$y=f(x)$在$[a,b]$上的$n+1$个互异的节点$x_i(i=0,1,2,\cdots,n)$上的插值多项式，则求$p(x)$的问题就可归结为求它的系数$a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$为未知元的$n+1$阶线性方程组:

定理2.1

n次插值多项式存在且唯一。

证: 设n次多项式$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$是函数$y = f(x)$在$[a, b]$上的$n+1$个互异的节点$x_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$上的插值多项式，则求$p(x)$的问题就可归结为求它的系数$a_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$为未知元的$n+1$阶线性方程组：

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \tag{2}$$

其系数行列式是范德蒙德（Vandermode)行列式：

$$V(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j) \tag{3}$$

$$V(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j) \qquad (3)$$

因为x_i互不相同，所以式(3)不为零，根据解线性方程组的克莱姆(Cramer)法则，方程组的解a_i存在且唯一，从而$p(x)$被唯一确定，这就证得了n次代数插值问题的解是存在且唯一的。

基函数法：

由线性空间的基出发，构造满足插值条件的多项式方法。

用基函数法求插值多项式分两步：

(1)定义$n+1$个线性无关的特殊代数多项式（插值基函数），用$\varphi_0(x),\cdots,\varphi_n(x)$表示;

(2)利用插值条件，确定插值基函数的线性组合表示的n次插值多项式

$$p(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_n\varphi_n(x) \tag{4}$$

的系数$a_0,\cdots,a_n$.

§3.1 拉格朗日(Lagrange)插值——拉格朗日(Lagrange)插值基函数

定义3.1

若存在一个次数为n的多项式$l_k(x)$，在n个节点$(i=0,1,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n)$上$l_k(x)$ 的值为*0*，在节点x_k上其值为*1*, 即$l_k(x)$ 满足条件

$$l_k(x_i)=\begin{cases}1, i=k,\\ 0, i\neq k.\end{cases} \tag{5}$$

则称$l_k(x)$为节点$x_i(i=0,1,\cdots,n)$上的拉格朗日插值基函数。k为某固定的整数。

§3.1 拉格朗日(Lagrange)插值——拉格朗日(Lagrange)插值基函数

很容易找到$l_k(x)$:

$$l_k(x) = A_k(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)$$

其中A_k 为待定系数。

由条件$l_k(x_k) = 1$ 可定A_k ，于是

$$\begin{aligned} l_k(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j} \end{aligned} \tag{6}$$

记所要求的多项式为$L_n(x)$:

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \tag{7}$$

当$n = 1$时，拉格朗日插值多项式(7)为

$L_1(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1$ 即

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \tag{8}$$

用$L_1(x)$近似代替$f(x)$称为线性插值，公式(8)称为线性插值多项式或一次插值多项式。

当$n=2$时，拉格朗日插值多项式(7)为

$L_2(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1+l_2(x)y_2$ 即

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 \tag{9}$$

用$L_2(x)$近似代替$f(x)$称为二次插值或抛物线插值，称式(9)为二次插值多项式。

例3.1

已知函数$y = lnx$的函数如表所示：

x	10	11	12	13	14
lnx	2.3026	2.3979	2.4849	2.5649	2.6391

试分别用线性插值和抛物线插值求$ln11.75$的近似值。

解:插值节点选取原则：尽量选取与插值点距离较近的点
线性插值选取节点$x_0 = 11, x_1 = 12$,
用线性插值公式得

$$L_1(x) = \frac{x-12}{11-12} \times 2.3979 + \frac{x-11}{12-11} \times 2.4839$$

例3.1

已知函数$y = lnx$的函数如表所示：

x	10	11	12	13	14
lnx	2.3026	2.3979	2.4849	2.5649	2.6391

试分别用线性插值和抛物线插值求$ln11.75$的近似值。

将$x = 11.75$代入，即得

$$\ln 11.75 \approx L_1(11.75) \approx 2.4632$$

例3.1

已知函数$y = lnx$的函数如表所示：

x	10	11	12	13	14
lnx	2.3026	2.3979	2.4849	2.5649	2.6391

试分别用线性插值和抛物线插值求$ln11.75$的近似值。

解:抛物线插值时选取节点$x_0 = 11, x_1 = 12, x_2 = 13,$
所得$ln11.75$的近似值为

$$\ln 11.75 \approx L_2(11.75) = \frac{(11.75-12)\times(11.75-13)}{(11-12)\times(11-13)} \times 2.3979 + \frac{(11.75-11)\times(11.75-13)}{(12-11)\times(12-13)} \times 2.4839 + \frac{(11.75-11)\times(11.75-12)}{(13-11)\times(13-12)} \times 2.5649 \approx 2.4638$$

查对数表得$ln11.75 \approx 2.46385$

拉格朗日插值法的MatLab实现:

```
function yh = lagrange(x,y,xh)
n  = length(x);
m  = length(xh);
yh=zeros(1,m);
c1 = ones(n-1,1);
c2 = ones(1,m);
 for i = 1:n
   xp = x([1:i-1 i+1:n]);
   yh = yh + y(i) * prod((c1*xh-xp'*c2)./(x(i)-xp'*c2));
end
```

用上述程序求解问题，调用如下：
线性插值：

```
>> x=[11 12];
>> y=[2.3979 2.4849];
>> xh=[11.75];
>> yh=Lagrange(x,y,xh)
```

抛物线插值：

```
>> x=[11 12 13];
>> y=[2.3979 2.4849 2.5649];
>> xh=[11.75];
>> yh=Lagrange(x,y,xh)
```

两个问题：
1.怎样估计用$L_n(x)$近似代替$f(x)$时所产生的误差？
2.是不是插值多项式的次数越高，其计算结果就越精确？

- 记插值余项为$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$，
  $R_n(x)$的性质：
  在节点x_i 上有

$$R_n(x_i) = f(x_i) - L_n(x_i) = 0(i = 0, 1, \cdots, n)$$

- 记插值余项为$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$，
  $R_n(x)$的性质：
  在节点x_i 上有

$$R_n(x_i) = f(x_i) - L_n(x_i) = 0(i = 0, 1, \cdots, n)$$

- 可设$R_n(x)$为

$$R_n(x) = K(x)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) = K(x)\Pi(x) \tag{10}$$

其中,$K(x)$为待定系数，$\Pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

- $K(x)$的确定方法
  引进辅助函数$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)\Pi(t)$, 视$x$为$(a, b)$上的一个固定点
  $\varphi(t)$在(a, b)上有$n+2$个零点：$x, x_0, x_1, \cdots, x_n$

- $K(x)$的确定方法
  引进辅助函数$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)\Pi(t)$, 视$x$为$(a, b)$上的一个固定点
  $\varphi(t)$在(a, b)上有$n+2$个零点：$x, x_0, x_1, \cdots, x_n$
- 反复运用Rolle定理,得

- $K(x)$的确定方法
  引进辅助函数$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)\Pi(t)$, 视$x$为$(a, b)$上的一个固定点
  $\varphi(t)$在(a, b)上有$n+2$个零点：$x, x_0, x_1, \cdots, x_n$
- 反复运用Rolle定理,得
  φ'有$n+1$个互异零点。(Rolle定理)

- $K(x)$的确定方法
  引进辅助函数$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)\Pi(t)$, 视$x$为$(a,b)$上的一个固定点
  $\varphi(t)$在(a,b)上有$n+2$个零点：$x,x_0,x_1,\cdots,x_n$
- 反复运用Rolle定理,得
  φ'有$n+1$个互异零点。(Rolle定理)

  φ''有n个互异零点。(Rolle定理)

- $K(x)$的确定方法
  引进辅助函数$\varphi(t)=f(t)-L_n(t)-K(x)\Pi(t)$, 视$x$为$(a,b)$上的一个固定点
  $\varphi(t)$在(a,b)上有$n+2$个零点：$x, x_0, x_1, \cdots, x_n$
- 反复运用Rolle定理,得
  φ'有$n+1$个互异零点。(Rolle定理)

  φ''有n个互异零点。(Rolle定理)

  $\cdots$

- $K(x)$的确定方法
  引进辅助函数$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)\Pi(t)$, 视$x$为$(a, b)$上的一个固定点
  $\varphi(t)$在(a, b)上有$n+2$个零点：$x, x_0, x_1, \cdots, x_n$
- 反复运用Rolle定理,得
  φ'有$n+1$个互异零点。(Rolle定理)

  φ''有n个互异零点。(Rolle定理)

  $\ldots$

  $\varphi^{(n+1)}$有1个零点，设为ξ, 即$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$。

- $K(x)$的确定方法
  引进辅助函数$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)\Pi(t)$, 视$x$为$(a, b)$上的一个固定点
  $\varphi(t)$在(a, b)上有$n+2$个零点：$x, x_0, x_1, \cdots, x_n$
- 反复运用Rolle定理,得
  φ'有$n+1$个互异零点。(Rolle定理)

  φ''有n个互异零点。(Rolle定理)

  $\cdots$

  $\varphi^{(n+1)}$有1个零点，设为ξ, 即$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$。

  对φ求$n+1$阶导数, 并令$t = \xi$, 有

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - K(x)(n+1)!$$

$$K(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

其中$\xi\in(a,b)$且依赖于x.

$$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

其中$\xi \in (a, b)$且依赖于x.

- f本身是n次多项式，余项为0;
- $|x - x_i|$越小，余项越小;

定理3.1

设$f(x)$在含节点$\{x_i\}_{i=0}^n$的区间$[a,b]$上$n+1$次可微，$L_n(x)$是$f(x)$关于给定的$n+1$个节点的n次插值多项式，则对于$[a,b]$,存在与x有关的$\xi\in(a,b)$，使式

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi(x) \tag{11}$$

成立。

注1：$R_n(x)$的不能精确计算！

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\Pi(x)| \tag{12}$$

其中$M_{n+1}=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$

注2：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\Pi(x)| \tag{13}$$

当节点个数大于插值多项式的次数加1时，应当选取靠近插值点的节点，使得$|\Pi(x)|$最小

例3.2

估计上例中用线性插值和抛物线插值计算$ln 11.75$的误差。

解: 由

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1), \xi \in [x_0, x_1]$$

例3.2

估计上例中用线性插值和抛物线插值计算$ln11.75$的误差。

解: 由

$$R_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1), \xi\in[x_0,x_1]$$

$f(x)=\ln(x)$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$, ξ介于11与12之间

例3.2

估计上例中用线性插值和抛物线插值计算$ln11.75$的误差。

解:由

$$R_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1),\xi\in[x_0,x_1]$$

$f(x)=\ln(x)$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$, ξ介于11与12之间
所以

$$\left|f''(\xi)\right|=\frac{1}{\xi^2}<\frac{1}{11^2}$$

例3.2

估计上例中用线性插值和抛物线插值计算$ln 11.75$的误差。

解: 由

$$R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1), \xi \in [x_0, x_1]$$

$f(x) = \ln(x)$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, ξ介于11与12之间
所以

$$|f''(\xi)| = \frac{1}{\xi^2} < \frac{1}{11^2}$$

于是

$$|R_1(11.75)| \leqslant \frac{|(11.75 - 11)(11.75 - 12)|}{2! \times 11^2} < 0.0008 = 8 \times 10^{-4}$$

由

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \xi \in [x_0, x_2]$$

由

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \xi \in [x_0, x_2]$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}, \left| f^{(3)}(\xi) \right| = \frac{2}{\xi^3} < \frac{2}{11^3}$$

由

$$R_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\xi\in[x_0,x_2]$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{2}{x^3},\left|f^{(3)}(\xi)\right|=\frac{2}{\xi^3}<\frac{2}{11^3}$$

$$|R_2(11.75)|\leqslant\frac{2}{3!\times 11^3}\left|(11.75-11)(11.75-12)(11.75-13)\right|<6\times 10^{-5}$$

可见，$L_2(11.75)$ 比$L_1(11.75)$ 的误差小。

问题：是否插值多项式的次数越高，插值多项式近似原来的函数精度越高？

- 若将插值基函数取为

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1, \\ \varphi_j(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1}) = \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i)(j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

- 若将插值基函数取为

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1, \\ \varphi_j(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1}) = \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i)(j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

- 用它们组合成如下形式的n次多项式

$$N_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \prod_{k=0}^{j-1}(x - x_k) \tag{14}$$

- 若将插值基函数取为

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1, \\ \varphi_j(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1}) = \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i)(j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

- 用它们组合成如下形式的n次多项式

$$N_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \prod_{k=0}^{j-1}(x - x_k) \tag{14}$$

- 例如

$$N_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0),$$

$$N_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1),$$

等等。其中$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为待定系数。

- 为使$N_n(x)$ 成为$f(x)$的插值多项式，需要按插值条件

$$N_n(x_i) = f_i, (i = 0, 1, \cdots, n)$$

- 为使$N_n(x)$ 成为$f(x)$的插值多项式，需要按插值条件

$$N_n(x_i) = f_i, (i = 0, 1, \cdots, n)$$

- 确定参数$a_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 令

$$N_n(x_i) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \prod_{k=0}^{j-1} (x_i - x_k) = f_i, (i = 0, 1, \cdots, n)$$

§4.1 牛顿(Newton)插值——差商

- 为使$N_n(x)$ 成为$f(x)$的插值多项式，需要按插值条件

$$N_n(x_i) = f_i, (i = 0, 1, \cdots, n)$$

- 确定参数$a_i(i = 0, 1, \cdots, n)$ 令

$$N_n(x_i) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \prod_{k=0}^{j-1} (x_i - x_k) = f_i, (i = 0, 1, \cdots, n)$$

- 可以求得，

$$a_0 = f_0,$$
$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0},$$
$$a_2 = \frac{\frac{f_2 - f_0}{x_2 - x_0} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1},$$

等等

定义4.1

- 设$f(x)$在互异的节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值为$f_0, f_1, \cdots, f_n$ ，称$f[x_i, x_k] = \frac{f_k - f_i}{x_k - x_i} (k \neq i)$ 为$f(x)$关于x_i, x_k 的一阶差商;

定义4.1

- 设$f(x)$在互异的节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值为$f_0, f_1, \cdots, f_n$ ，称$f[x_i, x_k] = \frac{f_k - f_i}{x_k - x_i} (k \neq i)$ 为$f(x)$关于x_i, x_k 的一阶差商;

定义4.1

- 设$f(x)$在互异的节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值为$f_0, f_1, \cdots, f_n$ ，称$f[x_i, x_k] = \frac{f_k - f_i}{x_k - x_i}(k \neq i)$ 为$f(x)$关于x_i, x_k 的一阶差商;
- 称$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_j}(i \neq j \neq k)$为$f(x)$关于$x_i, x_j, x_k$的二阶差商（一阶差商的差商）;

定义4.1

- 设$f(x)$在互异的节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值为$f_0, f_1, \cdots, f_n$ ，称$f[x_i, x_k] = \frac{f_k - f_i}{x_k - x_i}(k \neq i)$ 为$f(x)$关于x_i, x_k 的一阶差商;

- 称$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i,x_k] - f[x_i,x_j]}{x_k - x_j}(i \neq j \neq k)$为$f(x)$关于$x_i, x_j, x_k$的二阶差商（一阶差商的差商）;

- 一般地，称

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

为$f(x)$关于$x_0, x_1, \cdots, x_k$ 的k阶差商($k-1$阶差商的差商).

差商的性质：

差商的性质:

(1) 差商可以表示为函数值的线性组合.

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0,\, i\neq j}^{k}(x_j - x_i)}$$

差商的性质：

(1) 差商可以表示为函数值的线性组合.

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0,\, i\neq j}^{k}(x_j - x_i)}$$

(2) 差商关于所含节点是对称的.
例如：在k阶差商$f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k]$中，任意调换节点$x_i$与$x_j$的次序，其值不变，即

$$f[x_0, \cdots, x_i, \cdots x_j, \cdots x_k] = f[x_0, \cdots, x_j, \cdots x_i, \cdots x_k]$$

差商的性质：

(1) 差商可以表示为函数值的线性组合.

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0,\ i\neq j}^{k}(x_j - x_i)}$$

(2) 差商关于所含节点是对称的.
例如：在k阶差商$f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k]$ 中，任意调换节点x_i 与x_j 的次序，其值不变，即

$$f[x_0, \cdots, x_i, \cdots x_j, \cdots x_k] = f[x_0, \cdots, x_j, \cdots x_i, \cdots x_k]$$

(3) 设$f(x)$在含有$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的区间$[a, b]$上具有n阶导数，则在这一区间上至少有一点ξ，使
$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \xi \in (a, b)$

差商可以列表计算，以$n=4$为例，差商表如表所示：

节点	函数值	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商

差商可以列表计算，以$n = 4$为例，差商表如表所示：

节点	函数值	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0					
x_1					
x_2					
x_3					
x_4					

差商可以列表计算，以$n = 4$为例，差商表如表所示：

节点	函数值	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$				
x_2	$f(x_2)$				
x_3	$f(x_3)$				
x_4	$f(x_4)$				

差商可以列表计算，以$n=4$为例，差商表如表所示：

节点	函数值	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f(x_1)$				
		$f[x_1,x_2]$			
x_2	$f(x_2)$				
		$f[x_2,x_3]$			
x_3	$f(x_3)$				
		$f[x_3,x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

差商可以列表计算，以$n = 4$为例，差商表如表所示：

节点	函数值	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$			
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

差商可以列表计算，以$n = 4$为例，差商表如表所示：

节点	函数值	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

差商可以列表计算，以$n = 4$为例，差商表如表所示：

节点	函数值	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, \cdots, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f(x_4)$				

MatLab计算差商的自定义函数:

```
function [p,q]=chashang(x,y)
n = length(x);
p(:,1) = x;
p(:,2) = y;
for j = 3:n+1
p(1:n+2-j,j) =
diff(p(1:n+3-j,j-1))./(x(j-1:n)-x(1:n+2-j));
end
q = p(1,2:n+1) ';
```

- 二维数组$p(n, n+1)$保存差商表。其中,n是函数表中节点的个数。

§4.1 牛顿(Newton)插值——差商

- 二维数组$p(n, n+1)$保存差商表。其中,n是函数表中节点的个数。
- 数组p的第 1 列为节点值x,

- 二维数组$p(n, n+1)$保存差商表。其中,n是函数表中节点的个数。
- 数组p的第 1 列为节点值x,

  第2列为函数值y ，

- 二维数组$p(n, n+1)$保存差商表。其中,n是函数表中节点的个数。
- 数组p的第 1 列为节点值x,

  第2列为函数值y ,

  第j列$(3 \leqslant j \leqslant n+1)$为$j-2$阶差商。
- 一维数组$q(n)$为上述差商表中带下划线的差商(规定$f(x_i)=y_i$ 为x_i处的零阶差商).

- n次牛顿插值多项式$N_n(x)$中的系数$a_0, a_1, \cdots, a_n$分别为

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$

$$\cdots$$

$$a_n = f[x_0, x_1, \cdots x_n]$$

- n次牛顿插值多项式$N_n(x)$中的系数$a_0, a_1, \cdots, a_n$分别为

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$

$$\cdots$$

$$a_n = f[x_0, x_1, \cdots x_n]$$

- 于是数据$\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^n$上的$n$次牛顿插值多项式

$$\begin{aligned} N_n(x) = \ & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots \\ & + f[x_0, x_1, \cdots x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{15}$$

牛顿插值余项$R_n(x) = f(x) - N_n(x)$

- 设$x \in [a, b]$,$x \neq x_i(i = 0, 1, \cdots, n)$.视x为一个节点.

牛顿插值余项$R_n(x) = f(x) - N_n(x)$

- 设$x \in [a, b]$,$x \neq x_i(i = 0, 1, \cdots, n)$.视x为一个节点.
- 设$N_n(t)$是数据$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n))\}$上的$n$次牛顿插值多项式,

牛顿插值余项$R_n(x) = f(x) - N_n(x)$

- 设$x \in [a, b]$,$x \neq x_i (i = 0, 1, \cdots, n)$.视x为一个节点.
- 设$N_n(t)$是数据$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n))\}$上的$n$次牛顿插值多项式,
- $N_{n+1}(t)$是数据$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n))(x, f(x))\}$上的$n+1$次牛顿插值多项式.

牛顿插值余项$R_n(x) = f(x) - N_n(x)$

- 设$x \in [a, b]$,$x \neq x_i(i = 0, 1, \cdots, n)$.视x为一个节点.
- 设$N_n(t)$是数据$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n))\}$上的$n$次牛顿插值多项式,
- $N_{n+1}(t)$是数据$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n))(x, f(x))\}$上的$n+1$次牛顿插值多项式.
- $n+1$次多项式$N_{n+1}(t)$与n次多项式$N_n(t)$有关系

$$N_{n+1}(t) = N_n(t) + f[x_0, x_1, \cdots x_n, x](t - x_0)(t - x_1)\cdots(t - x_n) \quad (16)$$

- 由于$N_{n+1}(t)$是数据$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n)), (x, f(x))\}$上的$n+1$次牛顿插值多项式，

  则在点x处，一定满足插值条件

$$N_{n+1}(x) = f(x)$$

- 由于$N_{n+1}(t)$是数据$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n)), (x, f(x))\}$上的$n+1$次牛顿插值多项式,

  则在点x处，一定满足插值条件

$$N_{n+1}(x) = f(x)$$

- 在式(2)的两边，自变量t用x来代替，得

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \cdots x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

- 由于$N_{n+1}(t)$是数据$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n)), (x, f(x))\}$上的$n+1$次牛顿插值多项式，

  则在点x处，一定满足插值条件

$$N_{n+1}(x) = f(x)$$

- 在式(2)的两边，自变量t用x来代替，得

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \cdots x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

- 即

$$f(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \cdots x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

(1) 牛顿插值多项式的余项

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x)$$

$$= f[x_0, x_1, \cdots x_n, x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = f[x_0, x_1, \cdots x_n, x]\Pi(x)$$

(1) 牛顿插值多项式的余项

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x)$$

$$= f[x_0, x_1, \cdots x_n, x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = f[x_0, x_1, \cdots x_n, x]\Pi(x)$$

(2) 根据插值多项式的唯一性，对于同一组数据$\{(x_i, f(x_i)\}_{i=0}^n$上的n次插值多项式$L_n(x)$和$N_n(x)$，应有$N_n(x) = L_n(x)$.

(1) 牛顿插值多项式的余项

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x)$$

$$= f[x_0, x_1, \cdots x_n, x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = f[x_0, x_1, \cdots x_n, x]\Pi(x)$$

(2) 根据插值多项式的唯一性，对于同一组数据$\{(x_i, f(x_i)\}_{i=0}^{n}$上的$n$次插值多项式$L_n(x)$和$N_n(x)$，应有$N_n(x) = L_n(x)$.

(3) 若$f(x)$在$[a, b]$上的$n+1$阶导数存在，则余项
$R_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots x_n, x]\Pi(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi(x)$,$\xi \in (a, b)$且依赖于$x$.

(1) 牛顿插值多项式的余项

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x)$$

$$= f[x_0, x_1, \cdots x_n, x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = f[x_0, x_1, \cdots x_n, x]\Pi(x)$$

(2) 根据插值多项式的唯一性，对于同一组数据$\{(x_i, f(x_i)\}_{i=0}^{n}$上的$n$次插值多项式$L_n(x)$和$N_n(x)$，应有$N_n(x) = L_n(x)$.

(3) 若$f(x)$在$[a, b]$上的$n+1$阶导数存在，则余项 $R_n(x) = f[x_0, x_1, \cdots x_n, x]\Pi(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Pi(x)$,$\xi \in (a, b)$且依赖于$x$.

(4) 差商与导数有如下关系：

$$f[x_0, x_1, \cdots x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

当插值多项式从n-1次增加到n次时,拉格朗日型插值必须重新计算所有的基本插值多项式;而对于牛顿型插值,只需用表格再计算一个n阶差商,然后加上一项即可。

例4.1

用牛顿线性插值和抛物线插值计算$ln11.75$。已知函数$y = ln(x)$ 的函数表如表所示。

表 1:

x	10	11	12	13	14
lnx	2.3026	2.3979	2.4849	2.5649	2.6391

解:

例4.1

用牛顿线性插值和抛物线插值计算$ln 11.75$。已知函数$y = ln(x)$ 的函数表如表所示。

表 1:

x	10	11	12	13	14
lnx	2.3026	2.3979	2.4849	2.5649	2.6391

解:

由于11.75位于11与12之间，可以取节点$x_0 = 11, x_1 = 12$作线性插值，取节点$x_0 = 11, x_1 = 12, x_2 = 13$作二次插值，由给定数据作差商表。

表 2:

k	x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商
0	11	2.3979		
			0.0870	
1	12	2.4849		-0.0035
			0.0800	
2	13	2.5649		

$$N_1(x) = 2.3979 + 0.0870(x-11)$$
$$N_2(x) = 2.3979 + 0.0870(x-11) + (-0.0035)(x-11)(x-12)$$

$$N_1(x) = 2.3979 + 0.0870(x - 11)$$

$$N_2(x) = 2.3979 + 0.0870(x - 11) + (-0.0035)(x - 11)(x - 12)$$

线性插值计算$ln11.75 \approx N_1(11.75) \approx 2.4632$
二次插值计算$ln11.75 \approx N_2(11.75) \approx 2.4638$

前面介绍的代数插值的特点:

前面介绍的代数插值的特点：

- 只要求插值多项式$p(x)$在节点上与被插值$f(x)$相等

前面介绍的代数插值的特点：

- 只要求插值多项式$p(x)$在节点上与被插值$f(x)$相等

埃尔米特插值问题：

§5 埃尔米特(Hermite)插值

前面介绍的代数插值的特点：

- 只要求插值多项式$p(x)$在节点上与被插值$f(x)$相等

埃尔米特插值问题：

- 要求插值多项式$p(x)$在节点上与被插值$f(x)$相等

§5 埃尔米特(Hermite)插值

前面介绍的代数插值的特点：

- 只要求插值多项式$p(x)$在节点上与被插值$f(x)$相等

埃尔米特插值问题：

- 要求插值多项式$p(x)$在节点上与被插值$f(x)$相等
- 同时要求在某些节点或全部节点上与$f(x)$ 的导数值也相等，甚至要求高阶导数值也相等

定义5.1

设已知函数$f(x)$在插值区间$[a,b]$上$n+1$ 个互异的节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$处的函数值$f(x_i)=f_i$及一阶导数值$f'(x_i)=f_i',(i=0,1,\cdots,n)$，若存在函数$H(x)$,满足条件：

（1）$H(x)$ 是一个次数不超过$2n+1$ 次的多项式；

（2）$H(x_i)=f(x_i),H'(x_i)=f'(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$ ，

则称$H(x)$ 为埃尔米特插值多项式。

两点三次埃尔米特插值几何意义：

两点三次埃尔米特插值几何意义：

- 不仅要求代数曲线$y = H(x)$ 与函数曲线$y = f(x)$ 在$n+1$个互异的点(x_i, y_i)处完全重合，

两点三次埃尔米特插值几何意义：

- 不仅要求代数曲线$y = H(x)$ 与函数曲线$y = f(x)$ 在$n+1$个互异的点(x_i, y_i)处完全重合，
- 而且还有公切线。

下面讨论两点三次埃尔米特插值的求解问题

已知函数$f(x)$在节点x_0, x_1上的函数值以及一阶导数值如下表:

表 3:

x	x_0	x_1
$f(x)$	y_0	y_1
$f'(x)$	y_0'	y_1'

下面讨论两点三次埃尔米特插值的求解问题

已知函数$f(x)$在节点x_0, x_1上的函数值以及一阶导数值如下表:

表 3:

x	x_0	x_1
$f(x)$	y_0	y_1
$f'(x)$	y'_0	y'_1

求一个三次埃尔米特插值多项式$H_3(x)$，使满足

$$\begin{cases} H_3(x_i) = y_i, (i = 0, 1), \\ H'_3(x_i) = y'_i, (i = 0, 1). \end{cases} \tag{17}$$

采用基函数的方法来求解该问题:

- 记

$$H_3(x) = y_0 h_0(x) + y_1 h_1(x) + y_0' \bar{h}_0(x) + y_1' \bar{h}_1(x)$$

其中

表 4: $h_0(x)$

x	x_0	x_1
h_0	1	0
h_0'	0	0

$h_1(x)$

x	x_0	x_1
h_1	0	1
h_1'	0	0

$\bar{h}_0(x)$

x	x_0	x_1
$\bar{h}_0$	0	0
$\bar{h}_0'$	1	0

$\bar{h}_1(x)$

x	x_0	x_1
$\bar{h}_1$	0	0
$\bar{h}_1'$	0	1

表 5: $h_0(x)$

x	x_0	x_1
h_0	1	0
h_0'	0	0

表 5: $h_0(x)$

x	x_0	x_1
h_0	1	0
h_0'	0	0

- 显然x_1是$h_0(x)$的二重零点,$h_0(x)$含有因子$(x-x_1)^2$, $h_0(x)=(ax+b)(x-x_1)^2$.

表 5: $h_0(x)$

x	x_0	x_1
h_0	1	0
h_0'	0	0

- 显然x_1是$h_0(x)$的二重零点,$h_0(x)$含有因子$(x-x_1)^2$, $h_0(x)=(ax+b)(x-x_1)^2$.
- 方便起见，令

$$h_0(x)=\left(a+b\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2.$$

表 5: $h_0(x)$

x	x_0	x_1
h_0	1	0
h_0'	0	0

- 显然x_1是$h_0(x)$的二重零点,$h_0(x)$含有因子$(x-x_1)^2$, $h_0(x)=(ax+b)(x-x_1)^2$.
- 方便起见，令

$$h_0(x)=\left(a+b\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2.$$

$$h_0(x_0)=1 \quad \Rightarrow \quad a=1$$

表 5: $h_0(x)$

x	x_0	x_1
h_0	1	0
h_0'	0	0

- 显然x_1是$h_0(x)$的二重零点,$h_0(x)$含有因子$(x-x_1)^2$, $h_0(x)=(ax+b)(x-x_1)^2$.
- 方便起见, 令

$$h_0(x)=\left(a+b\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2.$$

$$h_0(x_0)=1 \quad \Rightarrow \quad a=1$$

$$h_0'(x_0)=\frac{b}{x_1-x_0}\cdot(1)+a\cdot 2\cdot(1)\frac{1}{x_0-x_1}=0 \quad \Rightarrow \quad b=-2$$

表 6: $\bar{h}_0(x)$

x	x_0	x_1
$\bar{h}_0$	0	0
$\bar{h}_0'$	1	0

表 6: $\bar{h}_0(x)$

x	x_0	x_1
$\bar{h}_0$	0	0
$\bar{h}'_0$	1	0

- x_1是$\bar{h}_0(x)$的二重零点, x_0是$\bar{h}_0(x)$的一重零点, 所以,

$$\bar{h}_0(x) = A(x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2.$$

表 6: $\bar{h}_0(x)$

x	x_0	x_1
$\bar{h}_0$	0	0
$\bar{h}_0'$	1	0

- x_1是$\bar{h}_0(x)$的二重零点，x_0是$\bar{h}_0(x)$的一重零点，所以，

$$\bar{h}_0(x) = A(x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2.$$

- 令$\bar{h}'(x_0) = 1$，有$A = 1$.

- 同理

$$h_1(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_1}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

$$\bar{h}_1(x) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

- 同理

$$h_1(x) = \left(1 - 2\frac{x - x_1}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$
$$\bar{h}_1(x) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

- 两个节点的三次埃尔米特插值多项式

$$H_3(x) = y_0\left(1 - 2\frac{x - x_0}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 + y_1\left(1 - 2\frac{x - x_1}{x_1 - x_0}\right)\cdot \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 + y_0'(x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 + y_1'(x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

例5.1

求一个次数不高于3的多项式$P_3(x)$ 满足下列插值条件:

x_i	1	2	3
y_i	2	4	12
y_i'		3	

解:

例5.1

求一个次数不高于3的多项式$P_3(x)$ 满足下列插值条件:

x_i	1	2	3
y_i	2	4	12
y_i'		3	

解:用插值法如待定系数法解决:

设$P_2(x)$满足$P_2(1) = 2, P_2(2) = 4, P_2(3) = 12$,则

例5.1

求一个次数不高于3的多项式$P_3(x)$ 满足下列插值条件:

x_i	1	2	3
y_i	2	4	12
y_i'		3	

解:用插值法如待定系数法解决:

设$P_2(x)$满足$P_2(1)=2, P_2(2)=4, P_2(3)=12$,则

$$P_2(x)=3x^2-7x+6$$

例5.1

求一个次数不高于3的多项式$P_3(x)$ 满足下列插值条件:

x_i	1	2	3
y_i	2	4	12
y_i'		3	

解:用插值法如待定系数法解决:

设$P_2(x)$满足$P_2(1)=2, P_2(2)=4, P_2(3)=12$,则

$$P_2(x)=3x^2-7x+6$$

为求得$P_3(x)$，根据插值条件知，$P_3(x)$应具有形式:

例5.1

求一个次数不高于3的多项式$P_3(x)$ 满足下列插值条件:

x_i	1	2	3
y_i	2	4	12
y'_i		3	

解:用插值法如待定系数法解决:

设$P_2(x)$满足$P_2(1)=2, P_2(2)=4, P_2(3)=12$,则

$$P_2(x)=3x^2-7x+6$$

为求得$P_3(x)$，根据插值条件知，$P_3(x)$应具有形式:

$$P_3(x)=P_2(x)+K(x-1)(x-2)(x-3)$$

例5.1

求一个次数不高于3的多项式$P_3(x)$ 满足下列插值条件:

x_i	1	2	3
y_i	2	4	12
y_i'		3	

解: 用插值法如待定系数法解决:

设$P_2(x)$满足$P_2(1)=2, P_2(2)=4, P_2(3)=12$,则

$$P_2(x)=3x^2-7x+6$$

为求得$P_3(x)$，根据插值条件知，$P_3(x)$应具有形式:

$$P_3(x)=P_2(x)+K(x-1)(x-2)(x-3)$$

这样$P_3(x)$自然满足$P_3(x_i)=y_i(i=1,2,3)$。

为确定系数K，利用条件$P_3'(2) = 3$

为确定系数K，利用条件$P_3'(2)=3$,得$K=2$.

为确定系数K，利用条件$P_3'(2)=3$,得$K=2$.
于是我们有

$$P_3(x)=2x^3-9x^2+15x-6$$

为确定系数K，利用条件$P_3'(2)=3$,得$K=2$.
于是我们有

$$P_3(x)=2x^3-9x^2+15x-6$$

例5.2

求一个次数不高于4的多项式$P_4(x)$ 满足下列插值条件:

x_i	0	1	2
y_i	0	1	1
y_i'	0	1	

解:

为确定系数K，利用条件$P_3'(2)=3$,得$K=2$.
于是我们有

$$P_3(x)=2x^3-9x^2+15x-6$$

例5.2

求一个次数不高于4的多项式$P_4(x)$ 满足下列插值条件:

x_i	0	1	2
y_i	0	1	1
y_i'	0	1	

解:用插值法如待定系数法解决:

设$P_2(x)$满足$P_2(0) = 0, P_2(1) = 1, P_2(2) = 1$,则

设$P_2(x)$满足$P_2(0)=0, P_2(1)=1, P_2(2)=1$,则

$$P_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$

设$P_2(x)$满足$P_2(0)=0, P_2(1)=1, P_2(2)=1$,则

$$P_2(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$$

为求得$P_4(x)$，根据插值条件知，$P_4(x)$应具有形式：

设$P_2(x)$满足$P_2(0)=0, P_2(1)=1, P_2(2)=1$,则

$$P_2(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$$

为求得$P_4(x)$，根据插值条件知，$P_4(x)$应具有形式：

$$P_4(x)=P_2(x)+(Ax+B)(x-0)(x-1)(x-2)$$

这样$P_4(x)$自然满足$P_2(x)$的插值条件,利用两个导数条件确定系数A和B.

设$P_2(x)$满足$P_2(0)=0, P_2(1)=1, P_2(2)=1$,则

$$P_2(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$$

为求得$P_4(x)$，根据插值条件知，$P_4(x)$应具有形式：

$$P_4(x)=P_2(x)+(Ax+B)(x-0)(x-1)(x-2)$$

这样$P_4(x)$自然满足$P_2(x)$的插值条件,利用两个导数条件确定系数A和B. 由

$$\begin{cases} P_4'(0)=\frac{3}{2}+2B=0 \\ P_4'(1)=\frac{1}{2}-(A+B)=1 \end{cases}$$

设$P_2(x)$满足$P_2(0)=0, P_2(1)=1, P_2(2)=1$,则

$$P_2(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$$

为求得$P_4(x)$，根据插值条件知，$P_4(x)$应具有形式：

$$P_4(x)=P_2(x)+(Ax+B)(x-0)(x-1)(x-2)$$

这样$P_4(x)$自然满足$P_2(x)$的插值条件,利用两个导数条件确定系数A和B. 由

$$\begin{cases} P_4'(0)=\frac{3}{2}+2B=0 \\ P_4'(1)=\frac{1}{2}-(A+B)=1 \end{cases}$$

解得

$$A=\frac{1}{4}, B=-\frac{3}{4}$$

设$P_2(x)$满足$P_2(0)=0, P_2(1)=1, P_2(2)=1$,则

$$P_2(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$$

为求得$P_4(x)$，根据插值条件知，$P_4(x)$应具有形式：

$$P_4(x)=P_2(x)+(Ax+B)(x-0)(x-1)(x-2)$$

这样$P_4(x)$自然满足$P_2(x)$的插值条件,利用两个导数条件确定系数A和B. 由

$$\begin{cases} P_4'(0)=\frac{3}{2}+2B=0 \\ P_4'(1)=\frac{1}{2}-(A+B)=1 \end{cases}$$

解得

$$A=\frac{1}{4}, B=-\frac{3}{4}$$

于是我们有

$$P_4(x)=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$$

§5.3 埃尔米特(Hermite)插值——插值多项式$H_3(x)$ 的余项

定理5.1

设$f(x)$在$[x_0, x_1]$上4阶连续可导, 则对于任意的$x \in [x_0, x_1]$, 都存在$\xi \in [x_0, x_1]$,

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2.$$

证:

定理5.1

设$f(x)$在$[x_0, x_1]$上4阶连续可导, 则对于任意的$x \in [x_0, x_1]$, 都存在$\xi \in [x_0, x_1]$,

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2.$$

证:

定理5.1

设$f(x)$在$[x_0, x_1]$上4阶连续可导，则对于任意的$x \in [x_0, x_1]$，都存在$\xi \in [x_0, x_1]$，

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2.$$

证: 固定x，$x \neq x_1, x_2$.

§5.3 埃尔米特(Hermite)插值——插值多项式$H_3(x)$ 的余项

定理5.1

设$f(x)$在$[x_0, x_1]$上4阶连续可导, 则对于任意的$x \in [x_0, x_1]$, 都存在$\xi \in [x_0, x_1]$,

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2.$$

证: 固定x, $x \neq x_1, x_2$. 令

$$g(t) = f(t) - H_3(t) - K(x)(t - x_0)^2(t - x_1)^2,$$

其中$K(x)$满足$g(x) = 0$.

定理5.1

设$f(x)$在$[x_0, x_1]$上4阶连续可导，则对于任意的$x \in [x_0, x_1]$，都存在$\xi \in [x_0, x_1]$，

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2.$$

证:固定x，$x \neq x_1, x_2$. 令

$$g(t) = f(t) - H_3(t) - K(x)(t - x_0)^2(t - x_1)^2,$$

其中$K(x)$满足$g(x) = 0$.
则$g(x)$有五个零点x, x_0, x_0, x_1, x_1，

§5.3 埃尔米特(Hermite)插值——插值多项式$H_3(x)$ 的余项

定理5.1

设$f(x)$在$[x_0, x_1]$上4阶连续可导, 则对于任意的$x \in [x_0, x_1]$, 都存在$\xi \in [x_0, x_1]$,

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2.$$

证: 固定x, $x \neq x_1, x_2$. 令

$$g(t) = f(t) - H_3(t) - K(x)(t - x_0)^2(t - x_1)^2,$$

其中$K(x)$满足$g(x) = 0$.
则$g(x)$有五个零点x, x_0, x_0, x_1, x_1,
反复运用Rolle定理, 可得

§5.3 埃尔米特(Hermite)插值——插值多项式$H_3(x)$ 的余项

定理5.1

设$f(x)$在$[x_0, x_1]$上4阶连续可导，则对于任意的$x \in [x_0, x_1]$，都存在$\xi \in [x_0, x_1]$，

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2.$$

证: 固定x，$x \neq x_1, x_2$. 令

$$g(t) = f(t) - H_3(t) - K(x)(t - x_0)^2(t - x_1)^2,$$

其中$K(x)$满足$g(x) = 0$.
则$g(x)$有五个零点x, x_0, x_0, x_1, x_1，
反复运用Rolle定理，可得存在$\xi \in [x_0, x_1]$，使得$g^{(4)}(\xi) = 0$，有

定理5.1

设$f(x)$在$[x_0, x_1]$上4阶连续可导，则对于任意的$x \in [x_0, x_1]$，都存在$\xi \in [x_0, x_1]$，

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2.$$

证: 固定x，$x \neq x_1, x_2$．令

$$g(t) = f(t) - H_3(t) - K(x)(t - x_0)^2(t - x_1)^2,$$

其中$K(x)$满足$g(x) = 0$.
则$g(x)$有五个零点x, x_0, x_0, x_1, x_1，
反复运用Rolle定理，可得存在$\xi \in [x_0, x_1]$，使得$g^{(4)}(\xi) = 0$，有

$$K(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}.$$

§5.4 埃尔米特(Hermite)插值——$n+1$个点$2n+1$次埃尔米特插值多项式$H_{2n+1}(x)$及其余项$R_{2n+1}(x)$

$2n+1$次埃尔米特插值多项式$H_{2n+1}(x)$的表达式为:

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}(1-2l_k'(x_k)(x-x_k))l_k^2(x)f_k+\sum_{k=0}^{n}(x-x_k)l_k^2(x)f_k'$$

其中$l_k(x)$ 为节点x_k上的拉格朗日基函数。

§5.4 埃尔米特(Hermite)插值——$n+1$个点$2n+1$次埃尔米特插值多项式$H_{2n+1}(x)$及其余项$R_{2n+1}(x)$

$2n+1$次埃尔米特插值多项式$H_{2n+1}(x)$的表达式为:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (1 - 2l_k'(x_k)(x - x_k))l_k^2(x)f_k + \sum_{k=0}^{n} (x - x_k)l_k^2(x)f_k'$$

其中$l_k(x)$ 为节点x_k上的拉格朗日基函数。

余项$R_{2n+1}(x)$的表达式

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}[\Pi(x)]^2$$

其中，$\Pi(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j), \xi \in (a, b)$，且$\xi$与$x$有关。

- 现在来回答问题：是否插值多项式的次数越高，精度越好？

- 现在来回答问题：是否插值多项式的次数越高，精度越好?

对龙格（Runge）函数$f(x)=\frac{1}{1+x^2}(-5\leqslant x\leqslant 5)$，取等距的插值节点$x_k=-5+kh(h=\frac{10}{n},k=0,1,\cdots,n)$ 做拉格朗日插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)\frac{1}{1+x_k^2}\tag{18}$$

当$n=10$，观察$L_{10}(x)$与$f(x)$之间的差别，

- 现在来回答问题：是否插值多项式的次数越高，精度越好？

对龙格（Runge）函数$f(x)=\frac{1}{1+x^2}(-5\leqslant x\leqslant 5)$，取等距的插值节点$x_k=-5+kh(h=\frac{10}{n},k=0,1,\cdots,n)$ 做拉格朗日插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)\frac{1}{1+x_k^2} \tag{18}$$

当$n=10$，观察$L_{10}(x)$与$f(x)$之间的差别,运行Rung.m

观察$L_{10}(x)$与$f(x)$之间的差别的程序：

```
x=[-5:1:5];
y=1./(1+x.^2);
xh=[-5:0.25:5];
yh=lagrange(x,y,xh);
x1=[-5:0.25:5];
y1=interp1(x,y,x1);
x=x1;
y=1./(1+x.^2);
plot(xh,yh,'r--',x1,y1,'go',x,y)
```

运行程序后，所得图形见下图

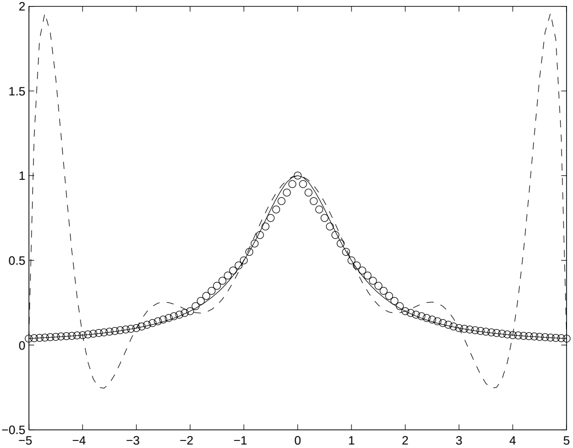


Figure 1: 龙格函数10阶拉格朗日插值多项式$L_{10}(x)$(虚线)、龙格函数的分段线性多项式（ooo）与龙格函数（实线）

- 由图看出：在接近区间两端点附近，$L_{10}(x)$ 与$f(x)$的偏离很大。

- 由图看出：在接近区间两端点附近，$L_{10}(x)$ 与$f(x)$的偏离很大。
- 还可以证明：在节点等距的条件下，当$n \to \infty$ 时，插值多项式$L_n(x)$只在$|x| \leqslant 3.63$内收敛，除此范围以外，有

$$\lim_{n\to\infty} \max_{3.63<|x|\leqslant 5} |f(x) - L_n(x)| = \infty$$

- 由图看出：在接近区间两端点附近，$L_{10}(x)$ 与$f(x)$的偏离很大。
- 还可以证明：在节点等距的条件下，当$n \to \infty$ 时，插值多项式$L_n(x)$只在$|x| \leqslant 3.63$内收敛，除此范围以外，有

$$\lim_{n\to\infty} \max_{3.63<|x|\leqslant 5} |f(x) - L_n(x)| = \infty$$

- 龙格现象：插值多项式不收敛现象
- 龙格现象说明并非插值多项式的次数越高，其精度就越高。

分段低次插值

分段低次插值

(1) 基本思想：用分段多项式来代替单个多项式作插值。

分段低次插值

(1) 基本思想：用分段多项式来代替单个多项式作插值。

(2) 具体作法：

§6.1 三次样条插值——样条插值概念的产生

分段低次插值

(1) 基本思想：用分段多项式来代替单个多项式作插值。

(2) 具体作法：

- 插值时，先把整个区间分成若干个小区间；

分段低次插值

(1) 基本思想：用分段多项式来代替单个多项式作插值。

(2) 具体作法：

- 插值时，先把整个区间分成若干个小区间；
- 然后在每个小区间上分别作低次插值多项式，

分段低次插值

(1) 基本思想：用分段多项式来代替单个多项式作插值。

(2) 具体作法：

- 插值时，先把整个区间分成若干个小区间；
- 然后在每个小区间上分别作低次插值多项式，
- 例如可用线性插值、抛物线插值、3次插值；

分段低次插值

(1) 基本思想：用分段多项式来代替单个多项式作插值。

(2) 具体作法：

- 插值时，先把整个区间分成若干个小区间；
- 然后在每个小区间上分别作低次插值多项式，
- 例如可用线性插值、抛物线插值、3次插值；
- 再将每个小区间上的插值函数拼接在一起作为整个插值区间上的插值函数。

分段低次插值

(1) 基本思想：用分段多项式来代替单个多项式作插值。

(2) 具体作法：

- 插值时，先把整个区间分成若干个小区间；
- 然后在每个小区间上分别作低次插值多项式，
- 例如可用线性插值、抛物线插值、3次插值；
- 再将每个小区间上的插值函数拼接在一起作为整个插值区间上的插值函数。

注：

(1) 分段低次插值的优点：

分段低次插值

(1) 基本思想：用分段多项式来代替单个多项式作插值。

(2) 具体作法：

- 插值时，先把整个区间分成若干个小区间；
- 然后在每个小区间上分别作低次插值多项式，
- 例如可用线性插值、抛物线插值、3次插值；
- 再将每个小区间上的插值函数拼接在一起作为整个插值区间上的插值函数。

注：

(1) 分段低次插值的优点：

- 公式简单、运算量节省、稳定性好、收敛性有保证

分段低次插值

(1) 基本思想：用分段多项式来代替单个多项式作插值。

(2) 具体作法：

- 插值时，先把整个区间分成若干个小区间；
- 然后在每个小区间上分别作低次插值多项式，
- 例如可用线性插值、抛物线插值、3次插值；
- 再将每个小区间上的插值函数拼接在一起作为整个插值区间上的插值函数。

注：

(1) 分段低次插值的优点：

- 公式简单、运算量节省、稳定性好、收敛性有保证

(2) 分段低次插值的缺点：

- 节点处的导数值不连续
- 样条插值函数可以克服分段低次插值的缺点

定义6.1

- 若函数$s(x) \in C^2[a,b]$ ($C^2[a,b]$表示区间$[a,b]$上具有二阶连续导数的函数的全体)，且在每个小区间$[x_j, x_{j+1}]$上是三次多项式，其中$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$是给定节点，则称$s(x)$是节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$上的三次样条函数

定义6.1

- 若函数$s(x) \in C^2[a,b]$ ($C^2[a,b]$表示区间$[a,b]$上具有二阶连续导数的函数的全体)，且在每个小区间$[x_j, x_{j+1}]$上是三次多项式，其中$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$是给定节点，则称$s(x)$是节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$上的三次样条函数

定义6.1

- 若函数$s(x) \in C^2[a,b]$ ($C^2[a,b]$表示区间$[a,b]$上具有二阶连续导数的函数的全体)，且在每个小区间$[x_j, x_{j+1}]$上是三次多项式，其中$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$是给定节点，则称$s(x)$是节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$上的三次样条函数
- 若在节点x_j上给定函数值$y_j = f(x_j)$ $(j = 0, 1, \cdots, n)$，并使

$$s(x_j) = y_j \quad (j = 0, 1, \cdots, n)$$

则称$s(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的三次样条插值函数。

如何求$f(x)$的三次样条插值函数$s(x)$，使满足$s(x_j) = y_j$，我们首先考虑：

如何求$f(x)$的三次样条插值函数$s(x)$，使满足$s(x_j) = y_j$，我们首先考虑：

问题的适定性：待定参数的个数与已知的条件个数是否相等？

待定参数的个数：4n

如何求$f(x)$的三次样条插值函数$s(x)$，使满足$s(x_j)=y_j$，我们首先考虑：

问题的适定性：待定参数的个数与已知的条件个数是否相等？

待定参数的个数：4n

- 由定义知，$s(x)$是$[a,b]$上的分段三次插值多项式，即

$$s(x)=\begin{cases} s_1(x), x\in[x_0,x_1], \\ s_2(x), x\in[x_1,x_2], \\ \cdots \\ s_n(x), x\in[x_{n-1},x_n]. \end{cases}$$

其中$s_k(x)$ 应是子区间$[x_{k-1},x_k]$上的两点三次插值多项式，故在每个子区间上待定参数的个数为4.

已知的条件个数：$4n-2$

已知的条件个数：$4n-2$

- 插值条件：$n+1$

$$s(x_j) = y_j \ (j = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

已知的条件个数：$4n-2$

- 插值条件：$n+1$

$$s(x_j)=y_j\ (j=0,1,2,\cdots,n)$$

- 三次样条函数$s(x)$内节点上条件：$3(n-1)$

由$s(x)\in C^2[a,b]$，故有

$$\lim_{x\to x_k^-} s^{(p)}(x)=\lim_{x\to x_k^+} s^{(p)}(x)\quad (k=1,\cdots,n-1)$$

其中，$p=0,1,2$表示导数阶数, 即在$(n-1)$个内节点上有$3(n-1)$个条件。

问题不适定：待定参数的个数$4n$大于已知的条件个数$4n-2$

解决的办法：补充边界条件

问题不适定：待定参数的个数$4n$大于已知的条件个数$4n-2$

解决的办法：补充边界条件

通常使用的边界条件有以下三类：

问题不适定：待定参数的个数$4n$大于已知的条件个数$4n-2$

解决的办法：补充边界条件

通常使用的边界条件有以下三类：

- 第一类边界条件是

$$\begin{cases} s'(x_0) = f'_0 \\ s'(x_n) = f'_n \end{cases}$$

f'_0, f'_n为给定值。

问题不适定：待定参数的个数$4n$大于已知的条件个数$4n-2$

解决的办法：补充边界条件

通常使用的边界条件有以下三类：

- 第一类边界条件是

$$\begin{cases} s'(x_0) = f_0' \\ s'(x_n) = f_n' \end{cases}$$

  f_0', f_n'为给定值。

- 第二类边界条件是

$$\begin{cases} s''(x_0) = f_0'' \\ s''(x_n) = f_n'' \end{cases}$$

  f_0'', f_n''为给定值。当$s''(x_0) = s''(x_n) = 0$时，样条函数在两端点不受力，呈自然状态，故称之为自然边界条件。

- 第三类边界条件是周期性条件。

  设$f(x)$是周期函数，不妨设以$x_n - x_0$ 为一个周期，这时$s(x)$也应是以$x_n - x_0$为周期的周期函数，于是$s(x)$在端点处满足条件

$$\lim_{x \to x_0^+} s^p(x) = \lim_{x \to x_n^-} s^p(x)(p = 1, 2)$$

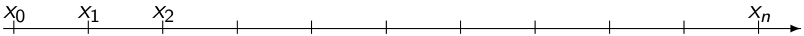
求解三次样条插值函数方法：三转角方法和三弯矩方法。

- 三转角方法：从样条函数的一阶导数出发而得到三次样条插值函数的方法——参考本书第5章基于样条的求导方法

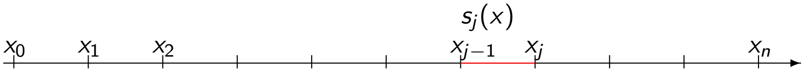
求解三次样条插值函数方法：三转角方法和三弯矩方法。

- 三转角方法：从样条函数的一阶导数出发而得到三次样条插值函数的方法—-参考本书第5章基于样条的求导方法
- 三弯矩方法：从样条函数的二阶导数出发而得到三次样条插值函数的方法—-本节给出

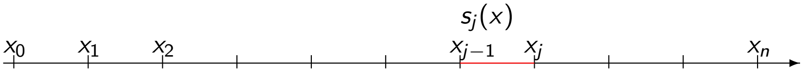
§6.3 三次样条插值——三弯矩方法



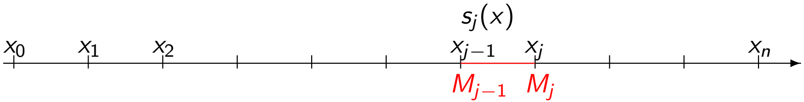
§6.3 三次样条插值——三弯矩方法



§6.3 三次样条插值——三弯矩方法

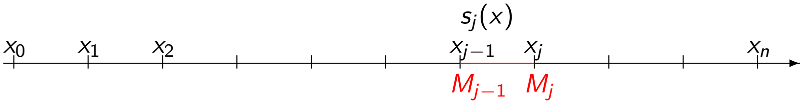


设 $s_j''(x_j) = M_j$, $h_j = x_j - x_{j-1}$,



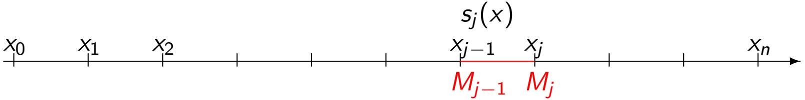
设 $s_j''(x_j) = M_j$, $h_j = x_j - x_{j-1}$,

§6.3 三次样条插值——三弯矩方法



设 $s_j''(x_j) = M_j$, $h_j = x_j - x_{j-1}$,

$$s_j''(x) = \frac{x_j - x}{h_j} M_{j-1} + \frac{x - x_{j-1}}{h_j} M_j$$



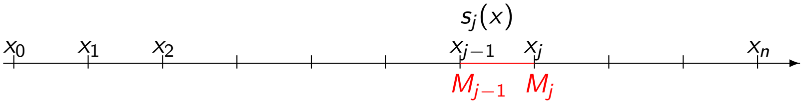
设 $s_j''(x_j) = M_j$, $h_j = x_j - x_{j-1}$,

$$s_j''(x) = \frac{x_j - x}{h_j} M_{j-1} + \frac{x - x_{j-1}}{h_j} M_j$$

积分两次, 可得

$$s_j(x) = \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} M_{j-1} + \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} M_j + C_1 \frac{x_j - x}{h_j} + C_2 \frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

§6.3 三次样条插值——三弯矩方法



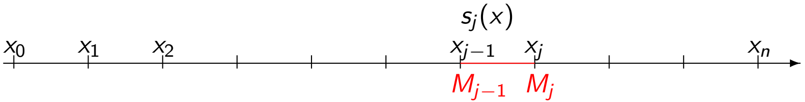
设 $s_j''(x_j) = M_j$, $h_j = x_j - x_{j-1}$,

$$s_j''(x) = \frac{x_j - x}{h_j} M_{j-1} + \frac{x - x_{j-1}}{h_j} M_j$$

积分两次, 利用 $s_j(x_{j-1}) = y_{j-1}$, $s_j(x_j) = y_j$ 确定 C_1 和 C_2, 可得

$$s_j(x) = \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} M_{j-1} + \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} M_j + C_1 \frac{x_j - x}{h_j} + C_2 \frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

§6.3 三次样条插值——三弯矩方法



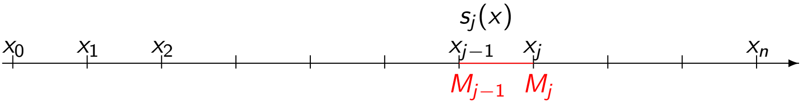
设$s_j''(x_j) = M_j$, $h_j = x_j - x_{j-1}$,

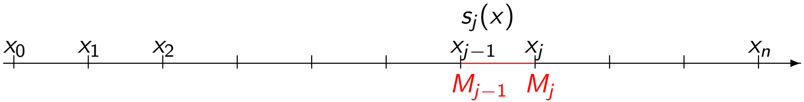
$$s_j''(x) = \frac{x_j - x}{h_j} M_{j-1} + \frac{x - x_{j-1}}{h_j} M_j$$

积分两次, 利用$s_j(x_{j-1}) = y_{j-1}$, $s_j(x_j) = y_j$确定C_1和C_2, 可得

$$\begin{aligned} s_j(x) = &\ \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} M_{j-1} + \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} M_j + C_1 \frac{x_j - x}{h_j} + C_2 \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \\ = &\ \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} M_{j-1} + \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} M_j + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1} h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} \\ &+ \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \end{aligned}$$

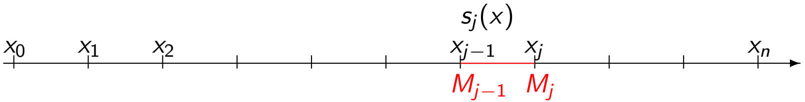
§6.3 三次样条插值——三弯矩方法





$$
\begin{aligned}
s_j(x) = \ & \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} M_{j-1} + \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} M_j + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1} h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} \\
& + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}
\end{aligned}
$$

§6.3 三次样条插值——三弯矩方法

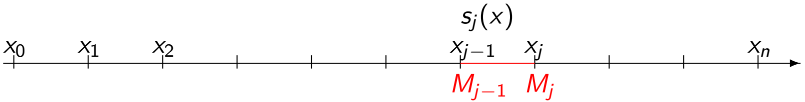


$$s_j(x) = \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} M_{j-1} + \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} M_j + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1} h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

因此

$$s_j'(x) = -\frac{(x_j - x)^2}{2h_j} M_{j-1} + \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}$$

§6.3 三次样条插值——三弯矩方法

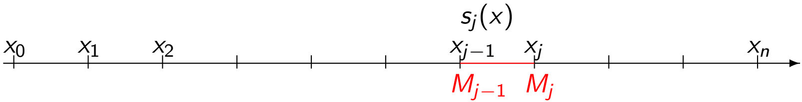


$$s_j(x) = \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} M_{j-1} + \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} M_j + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1} h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

因此

$$s_j'(x) = -\frac{(x_j - x)^2}{2h_j} M_{j-1} + \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}$$

$$s_j'(x_j-) = \frac{h_j}{2} M_j - \frac{h_j}{6} (M_j - M_{j-1}) + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}$$



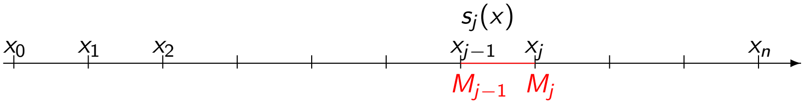
$$s_j(x) = \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} M_{j-1} + \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} M_j + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

因此

$$s_j'(x) = -\frac{(x_j - x)^2}{2h_j} M_{j-1} + \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}$$

$$s_j'(x_j-) = \frac{h_j}{2} M_j - \frac{h_j}{6}(M_j - M_{j-1}) + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} = \frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j}{3} M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}$$

§6.3 三次样条插值——三弯矩方法



$$s_j(x) = \frac{(x_j-x)^3}{6h_j}M_{j-1} + \frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}M_j + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_j^2}{6}\right)\frac{x_j-x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_jh_j^2}{6}\right)\frac{x-x_{j-1}}{h_j}$$

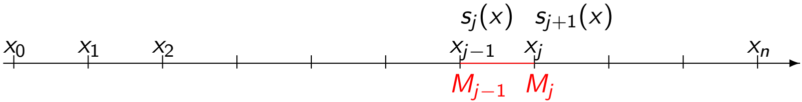
因此

$$s_j'(x) = -\frac{(x_j-x)^2}{2h_j}M_{j-1} + \frac{(x-x_{j-1})^2}{2h_j}M_j + \frac{y_j-y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j-M_{j-1}}{6h_j}$$

$$s_j'(x_j-) = \frac{h_j}{2}M_j - \frac{h_j}{6}(M_j-M_{j-1}) + \frac{y_j-y_{j-1}}{h_j} = \frac{h_j}{6}M_{j-1} + \frac{h_j}{3}M_j + \frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}$$

$$s_j'(x_{j-1}+) = -\frac{h_j}{3}M_{j-1} - \frac{h_j}{6}M_j + \frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}$$

§6.3 三次样条插值——三弯矩方法



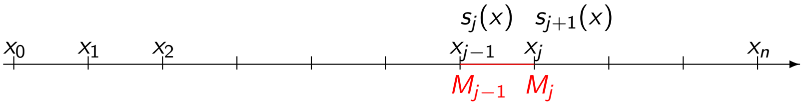
$$s_j(x) = \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} M_{j-1} + \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} M_j + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_j^2}{6} \right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

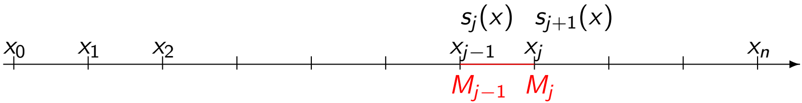
因此

$$s_j'(x) = -\frac{(x_j - x)^2}{2h_j} M_{j-1} + \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6h_j}$$

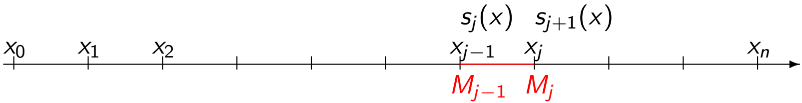
$$s_j'(x_j-) = \frac{h_j}{2} M_j - \frac{h_j}{6}(M_j - M_{j-1}) + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} = \frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j}{3} M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}$$

$$s_j'(x_{j-1}+) = -\frac{h_j}{3} M_{j-1} - \frac{h_j}{6} M_j + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}$$


$s_j(x)$
$s_{j+1}(x)$
x_0
x_1
x_2
x_{j-1}
x_j
x_n
M_{j-1}
M_j



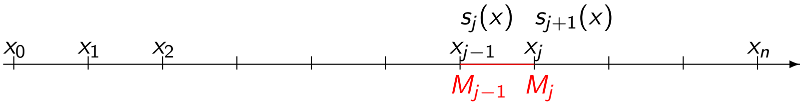
$$s'_{j+1}(x_j+) = -\frac{h_{j+1}}{3}M_j - \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}$$



$$s'_{j+1}(x_j+) = -\frac{h_{j+1}}{3}M_j - \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}$$

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, \quad (j = 1, 2, \cdots, n-1)$$

§6.3 三次样条插值——三弯矩方法



$$s'_{j+1}(x_j+) = -\frac{h_{j+1}}{3}M_j - \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}$$

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, \quad (j = 1, 2, \cdots, n-1)$$

其中

$$\lambda_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}}, \qquad \mu_j = 1 - \lambda_j,$$

$$d_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}}\left(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}\right) = 6f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]$$

- 第一类边界条件: $S'(x_0) = y_0', S'(x_n) = y_n'$

利用$s_0'(x_0)$和$s_n'(x_n)$可得

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0'\right)$$
$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n}\left(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$$

- 第一类边界条件: $S'(x_0) = y_0', S'(x_n) = y_n'$

利用$s_0'(x_0)$和$s_n'(x_n)$可得

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0'\right) \triangleq d_0$$
$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n}\left(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right) \triangleq d_n$$

- 第一类边界条件: $S'(x_0) = y_0', S'(x_n) = y_n'$

利用$s_0'(x_0)$和$s_n'(x_n)$可得

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y_0'\right) \triangleq d_0$$

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n}\left(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right) \triangleq d_n$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \tag{19}$$

- 第二类边界条件: $S''(x_0) = y_0''$, $S''(x_n) = y_n''$

- 第二类边界条件: $S''(x_0) = y_0'' = M_0$, $S''(x_n) = y_n'' = M_n$

- 第二类边界条件: $S''(x_0) = y_0'' = M_0$, $S''(x_n) = y_n'' = M_n$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 y_0'' \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} y_n'' \end{bmatrix} \tag{20}$$

- 第二类边界条件: $S''(x_0) = y_0'' = M_0$, $S''(x_n) = y_n'' = M_n$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 y_0'' \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} y_n'' \end{bmatrix} \tag{20}$$

$M_0 = M_n = 0$时，称为自然边界条件。

- 第三类边界条件: $S''(x_0+) = S''(x_n-)$, $S'(x_0+) = S'(x_n-)$

- 第三类边界条件: $S''(x_0+) = S''(x_n-)$, $S'(x_0+) = S'(x_n-)$

$$\begin{aligned} &M_0 = M_n \\ &\mu_n M_{n-1} + 2M_n + \lambda_n M_1 = d_n, \end{aligned}$$

- 第三类边界条件: $S''(x_0+) = S''(x_n-)$, $S'(x_0+) = S'(x_n-)$

$$\begin{aligned} & M_0 = M_n \\ & \mu_n M_{n-1} + 2M_n + \lambda_n M_1 = d_n, \end{aligned}$$

其中$\lambda_n = \dfrac{h_1}{h_1 + h_n}$, $\quad \mu_n = 1 - \lambda_n$, $\quad d_n = \dfrac{6}{h_n + h_1}\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_1} - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$.

- 第三类边界条件: $S''(x_0+) = S''(x_n-)$, $S'(x_0+) = S'(x_n-)$

$$\begin{aligned} &M_0 = M_n \\ &\mu_n M_{n-1} + 2M_n + \lambda_n M_1 = d_n, \end{aligned}$$

其中$\lambda_n = \dfrac{h_1}{h_1 + h_n}$, $\quad \mu_n = 1 - \lambda_n$, $\quad d_n = \dfrac{6}{h_n + h_1}\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_1} - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$.

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \tag{21}$$

综上:对于给定的函数表$(x_i, f(x_i))(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 满足第一(或第二、第三)种边界条件的三次样条插值函数$s(x)$是存在且唯一的

其计算过程可归纳如下：

(1) 根据给定的数据$(x_i, f(x_i))(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 及相应的边界条件建立方程组(19)或(20)或(21)。

其计算过程可归纳如下：

(1) 根据给定的数据$(x_i, f(x_i))(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 及相应的边界条件建立方程组(19)或(20)或(21)。

(2) 解上述线性方程组，求出$M_0, M_1, \cdots, M_n$ 。

其计算过程可归纳如下：

(1) 根据给定的数据$(x_i, f(x_i))(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 及相应的边界条件建立方程组(19)或(20)或(21)。

(2) 解上述线性方程组，求出$M_0, M_1, \cdots, M_n$ 。

(3) 把求出的$M_0, M_1, \cdots, M_n$ 代入$s_j(x)$ 的表达式(19)，即得$s(x)$在每一个小区间$[x_{j-1}, x_j]$ 上的分段表达式。

其计算过程可归纳如下：

(1) 根据给定的数据$(x_i, f(x_i))(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 及相应的边界条件建立方程组(19)或(20)或(21)。

(2) 解上述线性方程组，求出$M_0, M_1, \cdots, M_n$ 。

(3) 把求出的$M_0, M_1, \cdots, M_n$ 代入$s_j(x)$ 的表达式(19)，即得$s(x)$在每一个小区间$[x_{j-1}, x_j]$ 上的分段表达式。

(4) 整个区间$[a, b]$上的三次样条插值函数可表示为

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x), x \in [x_0, x_1], \\ s_2(x), x \in [x_1, x_2], \\ \cdots \\ s_n(x), x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

例6.1

设$f(x)$为定义在区间$[0,3]$上的函数，剖分节点为$x_i = i, (i = 0, 1, 2, 3)$.并给出$f(x_0) = 0, f(x_1) = 0.5, f(x_2) = 2.0, f(x_3) = 1.5$,和$f'(x_0) = 0.2, f'(x_3) = -1$.试求区间$[0,3]$上满足上述条件的三次样条插值函数$s(x)$。

解:利用三弯矩方程组(19)进行求解

易知$h_i = 1, i = 0, 1, 2$.

$$\lambda_0 = 1, \mu_3 = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2},$$
$$d_0 = 6\big(f[x_0, x_1] - f'(x_0)\big)/h_0 = 1.8,$$
$$d_1 = 6f[x_0, x_1, x_2] = 3,$$
$$d_2 = 6f[x_1, x_2, x_3] = -6,$$
$$d_3 = 6\big(f'(x_3) - f[x_2, x_3]\big)/h_2 = -3,$$

例6.1

设$f(x)$为定义在区间$[0,3]$上的函数，剖分节点为$x_i = i, (i = 0, 1, 2, 3)$.并给出$f(x_0) = 0, f(x_1) = 0.5, f(x_2) = 2.0, f(x_3) = 1.5$,和$f'(x_0) = 0.2, f'(x_3) = -1$.试求区间$[0,3]$上满足上述条件的三次样条插值函数$s(x)$。

解:于是三弯矩方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 0.5 & 2 & 0.5 & \\ & 0.5 & 2 & 0.5 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 3 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

例6.1

设$f(x)$为定义在区间$[0,3]$上的函数，剖分节点为$x_i=i,(i=0,1,2,3)$.并给出$f(x_0)=0, f(x_1)=0.5, f(x_2)=2.0, f(x_3)=1.5$,和$f'(x_0)=0.2, f'(x_3)=-1$.试求区间$[0,3]$上满足上述条件的三次样条插值函数$s(x)$。

解:得$M_0=-0.36, M_1=2.52, M_2=-3.72, M_3=0.36$,

代入$S(x)$表达式经简化得到

$$s(x)=\begin{cases}0.48x^3-0.18x^2+0.2x, x\in[0,1],\\ -1.04(x-1)^3+1.26(x-1)^2+1.28(x-1)+0.5, x\in[1,2],\\ 0.68(x-2)^3-1.86(x-2)^2+0.68(x-2)+2.0, x\in[2,3].\end{cases}$$

用MatLab做此题，程序为：

```
x=[0 1 2 3];
y=[0.2 0 0.5 2.0 1.5 -1];
pp=csape(x,y,'complete')
%注： second or periodic
[breaks,coefs,npolys,ncoefs,dim]=unmkpp(pp)
%注：节点 系数矩阵 多项式个数  系数个数 样条维数
 ppval(pp,0:3)
%注：求值
```

运行结果如下：

```
pp=
    form: ´pp´
breaks:[0 1 2 3]
coefs:[3x4 double]
pieces:3
order:4
dim:1
```

```
breaks=
     0   1   2   3
coefs=
    0.4800  -0.1800   0.2000        0
   -1.0400   1.2600   1.2800   0.5000
    0.6800  -1.8600   0.6800   2.0000
npolys=
     3
ncoefs=
     4
dim=
      1
```

注：*coefs*中第i行的元素是形如

$$s_i(x) = a_0(x - x_{i-1})^3 + a_1(x - x_{i-1})^2 + a_2(x - x_{i-1}) + a_3, x \in [x_{i-1}, x_i]$$

中的系数$a_j(j = 0, \cdots, 3)$.

例6.2

已知函数表：

x_i	1	2	4	5
$y_i = f(x_i)$	1	3	4	2

在区间$[1, 5]$上求满足上述函数表所给出的插值条件的三次自然样条插值函数。

例6.2

已知函数表：

x_i	1	2	4	5
$y_i = f(x_i)$	1	3	4	2

在区间$[1,5]$上求满足上述函数表所给出的插值条件的三次自然样条插值函数。

解:这是第二种边界条件下的插值问题，故确定M_0, M_1, M_2, M_3 的方程组形如式(20)

由自然边界条件，有$M_0 = M_3 = 0$

则得求解M_1, M_2的方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

为确定方程组的右端项d_1, d_2先作差商表

表 7:

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商
1	1		
		2	
2	3		$-1/2$
		$1/2$	
4	4		$-5/6$
		-2	
5	2		

得

$$d_1 = 6f[x_0, x_1, x_2] = 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

$$d_2 = 6f[x_1, x_2, x_3] = 6 \times \left(-\frac{5}{6}\right) = -5$$

再由$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 5$得

$h_1 = x_1 - x_0 = 1, h_2 = 2, h_3 = 1.$

所以,$\lambda_1 = \frac{h_2}{h_1+h_2} = \frac{2}{3}, \mu_2 = \frac{h_2}{h_2+h_3} = \frac{2}{3},$

代入方程组(20),得

$$\begin{cases} 2M_1 + \frac{2}{3}M_2 = -3 \\ \frac{2}{3}M_1 + 2M_2 = -5 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} M_1 = -\frac{3}{4} \\ M_2 = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

代入式$S(x)$,经整理得$s(x)$在区间$[1,5]$上的表达式为

$$s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{8}(x-1)^3+\frac{17}{8}(x-1)+1,(1\leqslant x\leqslant 2)\\ -\frac{1}{8}(x-2)^3-\frac{3}{8}(x-2)^2+\frac{7}{4}(x-2)+3,(2\leqslant x\leqslant 4)\\ \frac{3}{8}(x-4)^3-\frac{9}{8}(x-4)^2-\frac{5}{4}(x-4)+4,(4\leqslant x\leqslant 5)\end{cases} \quad (22)$$

用MatLab做此题，程序为：

```
x=[1 2 4 5];
y=[0 1 3 4 2 0];
pp=csape(x,y,‘second’)
[breaks,coefs,npolys,ncoefs,dim]=unmkpp(pp)
```

```
pp=
    form: ´pp´
    breaks:[1 2 4 5]
    coefs:[3x4 double]
    pieces:3
    order:4
    dim:1
```

```
breaks=
1   2   4   5
coefs=
    -0.1250         0   2.1250   1.0000
    -0.1250   -0.3750   1.7500   3.0000
    0.3750    -1.1250  -1.2500   4.0000
npolys=
       3
ncoefs=
       4
dim=
       1
```