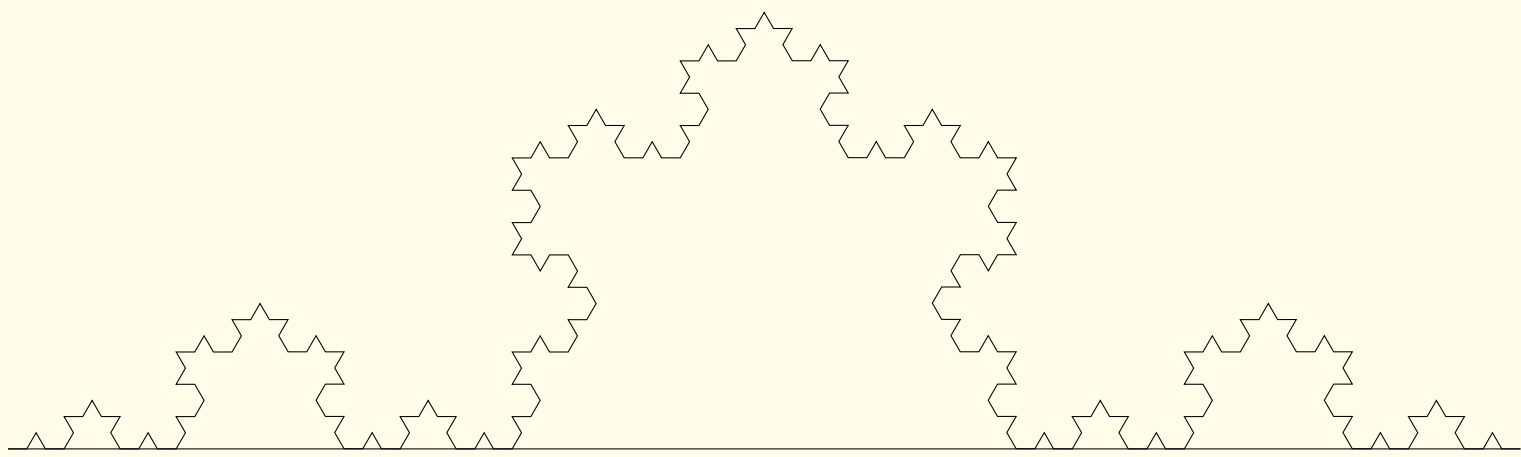


# 数学分析

答案

马乐

更新中, 项目已开源至[Github](#). 点击标题即可获取  $\text{\LaTeX}$  源码



---

## 感悟

今天是 2023 年 5 月 20 日，一个特别而又普通的日子：为什么说特别，因为我是单身，为什么普通？还是这个原因。这一天我读完了这套数学分析的第一遍，并将部分习题抄录至此，但大概有百分之七十的习题并没有弄懂，你可能觉得是时间仓促导致，但事实并非如此：笔者从 22 年 8 月开始阅读，至今已十月有余。我听闻难事可让人一夜白头，然这十月后我的头发依旧乌黑（只是掉了几根），这样比起来楼红卫十分温柔，或者还有一个原因：我还没努力到白头的程度。

我每天都乐此不疲的发现让我头疼的题目，并不是我喜欢头疼，若非迫不得已，我宁愿躺在床上睡觉。但我每天都很苦恼，这让我几乎无法入眠：大佬做题犹如作画，随便一笔我都必须揣摩良久，最后只能承认自己的愚蠢，这是十分值得伤心的事，我也有理由尽情悲伤。但我尽量幽默一点，因为学习与生活永远不可能让我一直保持笑脸，但幽默总能。

这本书极不适合初学者，当然你如果天赋异禀，那本书能让你飞黄腾达。笔者大一大二学过一点数学分析等之类的课程，看这套书就像牙齿掉光的老太太吃五仁月饼，不过值得一提的是，许多都是一股脑吞下的，以至于事后问我这什么味道：干巴巴，没什么味儿。

我几乎要放弃的时候非常感谢各位群友的帮助，是大家让我间歇性放弃找女朋友的念头而是改为买一只宠物蜈蚣，相信很快就会和大家见面的！另外，明天开始就要开始要第二遍了。届时会完善这些习题。

# 目录

第 0 章 闲谈	0
0.1 勘误	0
0.2 符号说明	0
第 1 章 实数	3
1.1 集合与映射	3
集合, 关系与映射, Descartes 乘积, 函数, 集合的势, 可数集, 不可数集, 代数数, 超越数, Bernstein 定理	
1.2 第一次数学危机	8
第一次数学危机, 可公度量, 比例论	
1.3 实数公理系统	10
自然数公理, 数学归纳法, 实数公理系统, 实数系, 有序域的性质, 三角不等式, Newton 二项展开式, 杨辉三角, 广义实数系, 区间, 单调函数, 复数域, 周期函数	
1.4 实数系的构造	11
实数系的构造, Dedekind 分割, 稠密性, 上确界存在定理, 有理数, 无理数, 实数的十进制表示, $n$ 次方根, 算术几何平均不等式, 指数函数的定义, 对数函数的定义	
1.5 附录	14
构造实数系的其他典型方法, 实数系的唯一性, 序同构, 实数系构造的 Cantor 方法	
第 2 章 序列极限	15
2.1 数列极限	15
数列极限, 无穷级数, 无穷乘积, 数列极限的性质, 夹逼准则	
2.2 无穷大量, 无穷小量, Stolz 公式	16
无穷大量, 无穷小量, 小 $o$ , 大 $O$ , 等价, 同阶, 不定型, Stolz – Cesàro 定理	
2.3 Euclid 空间中的基本概念	21
线性空间, 赋范线性空间, 度量空间, Euclid 距离, 平行四边形法则, 范数, 内点, 邻域, 外点, 边界点, 聚点, 开集, 闭集, 闭包, 稠密, 无处稠密/疏朗集, 内积空间	
2.4 Eucild 空间中的基本定理	23
确界存在定理, 单调收敛定理, 自然对数, 常数 $e$ , 闭区间套定理, 聚点原则, 致密性定理, 基本列, Cauchy 准则, 调和级数, 有限覆盖定理, Loewner 偏序, 对角线法, 闭集套定理, 局部, 紧集, 完备性, 列紧集, 相对紧集, 准紧集, Euler 常数, Lebesgue 数, Lebesgue 覆盖定理	
2.5 上、下极限	35
上极限, 下极限, Stolz 公式的推广	
2.6 正项级数	40
正项级数, 正项级数收敛的基本定理, 比较判别法, Cauchy 判别法, D'Alembert 判别法, Raabe 判别法, 收敛得更慢与发散得更慢得级数	
2.7 任意项级数	43

任意项级数, 绝对收敛, 条件收敛, Abel 变换, Abel 判别法, Dirichlet 判别法, 交错级数, Leibniz 判别法, 幂级数, 幂级数的收敛半径, Cauchy-Hadamard 公式, Cauchy 乘积, Mertens 定理, 级数的重排, 累级数, 无穷乘积的收敛性

<b>第 3 章 函数极限与连续</b>	<b>49</b>
3.1 函数极限	49
函数极限, 单侧极限, 函数极限的基本性质, Heine 定理, 基本定理的对应结果, 重要数列极限对应的结果, 关于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$	
3.2 连续函数	51
连续函数, 左连续, 右连续, 连续函数的四则运算, 复合函数的连续性, 基本初等函数的连续性, 反函数的连续性, 紧集上逆映射的连续性, 间断点, 一些重要的极限, $e^x$ 的无穷级数表示	
3.3 连续函数的基本性质	56
道路, 连通集, 区域, 拓扑学视角下的连续性, 相对开集, 相对闭集, 介值定理, 最值定理, 连续函数的有界性, 一致连续性, $\mathbb{R}^n$ 中范数的等价性, 代数基本定理, 不动点, 压缩映射原理, 摄动法, 利用极限定义指数函数和对数函数	
3.4 方向极限与累次极限	62
曲线, 方向极限, 沿曲线的极限, 累次极限, 多重极限	
<b>第 4 章 导数与微分</b>	<b>64</b>
4.1 导数与微分	64
导数的几何物理背景, 一元向量值函数的导数, 左导数, 右导数, 导数与单调性, 方向导数与偏导数, 全导数, 微分, 线性变换/线性算子, 微商, 梯度, 导数的四则运算	
4.2 反函数, 复合函数和隐函数的导数	67
一元实函数反函数的可导性及求导公式, 复合函数的导数, 链式法则, 一阶微分形式不变性, 隐函数求导, 基本初等函数的导数, 对数求导法	
4.3 高阶导数	70
高阶导数, Leibniz 公式, 微分算子 $D, C^k, C^{k,\alpha}$ 函数类, 光滑函数, Hölder 条件, Lipschitz 条件, 多重指标, 多重零点	
4.4 复指数函数, 正弦函数和余弦函数	76
用级数定义复指数函数, 用微分方程定义正弦和余弦函数, Euler 公式	
<b>第 5 章 不定积分</b>	<b>78</b>
5.1 不定积分	78
原函数, 不定积分, 恰当方程	
5.2 变量代换法	79
第一类变量代换, 第二类变量代换, 万能代换	
5.3 分部积分法	80
5.4 有理函数不定积分	82
有理函数, 最简分式	
5.5 求解简单的微分方程	84
常微分方程, 特解, 通解, 分离变量法, 初值问题, 解的最大存在区间, 一阶线性方程, 常数变易法, 积分因子法, 全微分方程, 齐次方程, Bernoulli 方程	
<b>第 6 章 微分中值定理和 Taylor 展开式</b>	<b>87</b>
6.1 微分中值定理	87

Fermat 引理, Rolle 中值定理, Lagrange 中值定理, Cauchy 中值定理, 微分 Darboux 定理, 凸集, 常微分方程初值问题解的唯一性

## 6.2 L'Hôpital 法则 . . . . . 91

L'Hôpital 法则及其推广, 极限计算的化简——“去核”和“去皮”

## 6.3 凸函数 . . . . . 96

凸 (凹) 函数, Jensen 不等式, 割线斜率与凸性, 凸性与连续性, 中点凸 (凹) 函数, 凸函数与一阶导数, 支撑线 (面), 凸性与二阶导数, Hesse 矩阵, 对偶数, Young 不等式, 离散 Hölder 不等式, 离散 Minkowski 不等式, 幂平均不等式, 调和平均

## 6.4 微分 Darboux 定理与比较定理 . . . . . 102

微分不等式, 常微分方程比较定理, 偏微分方程比较定理

## 6.5 Taylor 多项式与插值多项式 . . . . . 107

Taylor 多项式, 带 Peano 型余项的 Taylor 公式, Maclaurin 展开式, Taylor 展开式的唯一性, 带 Lagrange 型余项的 Taylor 公式, Lagrange 型插值多项式, 线性方程组解的线性可加性, Runge 现象, 插值多项式的误差估计, 插值多项式, 插值函数, 函数拟合, 广义中值定理

## 6.6 Taylor 展开式的计算及应用 . . . . . 110

Taylor 展开式计算的直接方法和间接方法, 利用 Taylor 展开式计算反函数的高阶导数, 利用 Taylor 展开式计算隐函数的高阶导数, Landau 不等式, Taylor 展开式在组合问题上的应用

## 第 7 章 微分问题 . . . . . 117

### 7.1 隐函数存在定理 . . . . . 117

隐函数存在定理, 曲面的切平面, 法向量

### 7.2 极值问题 . . . . . 118

强制条件, 极值问题, 无条件极值, 一阶必要条件, 二阶必要条件, 驻点, 二阶必要条件, 最小二乘法, 线性拟合, 条件极值, Lagrange 乘子法, 矩阵的诱导范数

### 7.3 常系数线性微分方程 . . . . . 121

一阶常系数线性微分方程, 矩阵指数函数, 高阶常系数线性微分方程, 特征方程, 算子法

### 7.4 导数的其他应用 . . . . . 123

Newton 切线法, 平方收敛, 平面曲线的曲率和曲率半径, 一元实函数的草图, 拐点

## 第 8 章 积分 . . . . . 126

### 8.1 Riemann 积分 . . . . . 126

划分, 轴平行矩形及其体积, Riemann 积分的定义, Riemann 和, Darboux 上和, Darboux 下和, 加细, 积分 Darboux 定理, 上积分与下积分, 一般有界集上的 Riemann 积分, Jordan 测度, 有界集的体积, Jordan 可测, Riemann 可积的充要条件

### 8.2 Lebesgue 测度与 Lebesgue 可测函数 . . . . . 127

Lebesgue 外测度, Lebesgue 测度, 可测集, Carathéodory 条件, 几乎处处,  $\sigma$  代数, 上限集, 下限集, 极限集, Borel 集, 二进方体, 不可测集, Lebesgue 可测函数, Borel 可测函数, 简单函数, Carathéodory 函数, 依测度收敛, Egorov 定理, Riesz 定理, Luzin 定理

### 8.3 Lebesgue 积分及其性质 . . . . . 130

Lebesgue 积分, 可积函数空间, 本性上界, 本性下界, 绝对可积性, 绝对连续性, 积分第一中值定理, 平行多面体的体积公式, 连续型 (积分型) Hölder 不等式, 权函数, 积分型 Minkowski 不等式, Lévy 单调收敛定理, Fatou 引理, Lebesgue 控

制收敛定理,  $L^p$  空间的完备性

8.4 Newton-Leibniz 公式	131
微积分基本定理—Newton-Leibniz 公式, 定积分的分布积分, 定积分的变量代换, 带积分余项的 Taylor 公式, Wallis 公式, Stirling 公式	
8.5 累次积分	139
累次积分, Fubini 定理, 积分型 Young 不等式及其推广	
8.6 重积分变量代换	144
重积分变量代换, Jacobi 矩阵 (行列式), (广义) 极坐标变换, (广义) 柱面坐标变换, 旋转体的体积, (广义) 球面坐标变换, (广义) 高维球面坐标变换	
8.7 函数的光滑逼近	147
函数的光滑逼近, 支集, 简单函数逼近可积函数, 连续函数逼近可积函数, $C^k$ 函数一致逼近连续函数, 一致收敛, 内闭一致收敛, 卷积, Young 不等式, 磨光算子, Weierstrass 逼近定理, 连续函数的延拓	
8.8 光滑逼近的应用	149
分部积分公式的推广, 带积分型余项 Taylor 公式的推广, 积分第二中值定理, 推广的 Riemann-Lebesgue 引理, 无理数之均匀分布	
8.9 附录	152
Lebesgue 判据, Lebesgue 基本定理, Vitali 型覆盖引理, 绝对连续函数, 对偶问题, 线性算子定义域的延拓, Marcinkiewicz 插值定理, 对数函数的积分定义, 曲线的弧长, 三角函数的积分定义	

## 第 9 章 函数列与函数项级数 154

9.1 函数列与函数项级数的一致收敛及其性质	154
函数列与函数项级数的一致收敛性及其性质, Cauchy 准则	
9.2 函数项级数一致收敛性的判别法	158
Weierstrass 判别法, Abel 判别法, Dirichlet 判别法	
9.3 幂级数与函数的幂级数展开	163
幂级数的收敛半径, Abel 第一定理, Cauchy-Hadamard 公式, 幂级数的性质, Abel 第二定理, 函数的幂级数展开, Taylor 级数, Maclaurin 级数, 直接法, 间接法, 幂级数在复数域内的性质, 非切向极限, 实解析函数, 复解析函数, 复区域上函数的复导数, Cauchy-Riemann 条件	
9.4 幂级数的应用	166
数项级数的计算, 幂级数与三角级数, Abel 和, Cesàro 和, Tauber 型定理, 母函数, Bernoulli 多项式, Bernoulli 数, 幂级数的抽象应用, Hardy-Littlewood 定理	
9.5 常微分方程初值问题的存在性	174
Picard 迭代, 等度连续, Arzelà-Ascoli 定理, 非 Lipschitz 条件下解的存在性, 积分方程的解, 解的延伸	

## 第 10 章 反常积分与含参变量积分 177

10.1 基于 Riemann 积分的反常积分	177
瑕积分, 无穷积分, 反常重积分, 非负函数反常积分的收敛性, Cauchy 准则, 绝对收敛与条件收敛, Abel 判别法, Dirichlet 判别法, 概率积分, Cauchy 主值积分, 数项级数收敛的 Cauchy 积分判别法	
10.2 含参变量反常积分的一致收敛性及判别法	184
含参变量反常积分的一致收敛性, Cauchy 准则, Weierstrass 判别法, Abel 判别法, Dirichlet 判别法	

10.3 含参变量积分的性质 . . . . .	185
含参变量积分的极限与连续性, 含参变量积分的可微性, 含参变量积分的积分, 积分的计算	
10.4 Euler 积分 . . . . .	196
$\Gamma$ 函数, $\Gamma$ 函数的递推公式, log- $\Gamma$ , Stirling 公式及其改进, Euler 公式, Gauss 叠乘定理, 倍元公式, Bohr-Mollerup 定理, 余元公式, B 函数, B 函数与 $\Gamma$ 函数的关系, 多重对数函数, 双 $\Gamma$ 函数, 利用 Euler 积分计算	
10.5 变分法初步 . . . . .	204
最优解的必要条件, Euler-Lagrange 方程, 特殊情形 Euler-Lagrange 方程的求解, 捷线问题, 最优解的充要条件, 存在性问题简介, Poincaré 不等式, 弱收敛, 强收敛, Clarkson 不等式, 凸集分离定理, Mazur 定理, Riesz 表示定理	
<b>第 11 章 曲线积分与曲面积分</b>	<b>205</b>
11.1 第一型曲线积分 . . . . .	205
曲线, Peano 曲线, 简单曲线, 简单闭曲线, 曲线的弧长, 弧长参数, 第一型曲线积分	
11.2 第一型曲面积分 . . . . .	205
曲面, 同胚, $k$ 维 $C^m$ 曲面, Schwarz 的例子, 集合的面积, 分片 $C^m$ 曲面, $\mathbb{R}^n$ 中子集的 $k$ 维体积 (面积), 第一型曲面积分, 余面积公式, 楔积	
11.3 第二型曲线积分 . . . . .	208
第二型曲线积分, 第一、二型曲线积分的关系, 曲线的方向, Jordan 闭曲线定理	
11.4 第二型曲面积分 . . . . .	209
第二型曲面积分, 第一、二型曲面积分的关系, 通量, 曲面的侧	
11.5 Green 公式, Gauss 公式, Stokes 公式 . . . . .	210
向量场, 单连通域, Ostrogradsky-Gauss 定理 (散度定理), Green 公式, Stokes 公式, 曲线积分和路径无关性, 原函数的存在性, 循环常数, 场论初步, 梯度场 (保守场), 散度场, 向量线, 环量, 旋度, 无源场, 无旋场, Hamilton 算子, Laplace 算子, 分部积分公式, Green 第一、第二公式	
11.6 调和函数与解析函数 . . . . .	214
调和函数, 平均值公式, 最值原理, Poisson 公式, 复可导与复解析的等价性, Cauchy 定理, 最大模原理, Liouville 定理, 共轭函数, 利用解析函数计算	
11.7 附录: $C^1$ 表面上的 Hausdorff 测度 . . . . .	216
Binet-Cauchy 公式, $C^1$ 曲面的 Hausdorff 公式	
<b>第 12 章 Fourier 级数</b>	<b>218</b>
12.1 三角级数, Fourier 级数 . . . . .	218
三角级数, Fourier 级数, 三角级数的复形式, 偶延拓, 奇延拓, 余弦级数, 正弦级数	
12.2 Fourier 级数的收敛性 . . . . .	222
Dirichlet 积分, Dirichlet 核, 局部性原理, Dini-Lipschitz 判别法, Dirichlet 引理, Dini-Jordan 判别法, 逐项可积性, 非 Fourier 级数而逐点收敛的三角级数, 一致收敛性, 奇异性, Fejér 积分, Fejér 核, 平方可积函数, Fourier 级数的性质, 标准正交系, 最佳均方逼近, Bessel 不等式, Parseval 不等式, $p$ 次可积函数, Fourier 级数的性质	
12.3 Fourier 变换 . . . . .	226
Fourier 变换, 速降函数 (Schwarz 函数), Fourier 变换的导数, 导数的 Fourier 变换, Fourier 逆变换, 卷积的 Fourier 变换, 乘积的 Fourier 变换, Plancherel 定理, Hausdorff-Young 不等式, 处处连续无处可微函数, 处处连续无处 Hölder 连续函数, 热传导方程求解, Heisenberg 不确定性原理, $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换, Borwein 积分	

---

12.4 Fourier 级数的唯一性 . . . . .	229
Cantor 引理, Riemann 第一定理, Riemann 第二定理, Cantor-Lebesgue 定理, Du Bois-Reymond-de la Vallée-Poussin 定理	



# 第 0 章 闲谈

## 0.1 勘误

1. **Page 21** 第 4 题 (3) 中对于  $R(x)$  的系数为有理数时结论才可被证明, 当  $R(x)$  中包含无理系数时结论不一定成立.
2. **Page 27** (F)(O)(C) 错印为 (F)(D)(C).
3. **Page 281** 最后一行  $g$  应为  $f$ .
4. **Page 196**  $f^{(n)}(x)$  后  $-1$  的幂次应为  $n$  而非  $n-1$ .
5. **Page 299** 第二个行列式第一行第六列的元素应为 24 而非 0.
6. **Page 315** 第七题.
7. **Page 23** 定理 8.2.7 中大括号.

## 0.2 符号说明

$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$	整数集, 正整数集
$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+$	有理数域, 正有理数集
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$	实数域, 正实数集
$\mathbb{R}^n$	$n$ 维欧氏空间
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{C}^n$	$n$ 维复空间
$S^{n-1}$	$\mathbb{R}^n$ 中的单位球面, 即 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid  \mathbf{x}  = 1\}$
$\mathbb{S}^n$	$n$ 阶实对称矩阵全体
$B_r(\mathbf{x})$	半径为 $r$ 中心在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 中的开球
$\mathring{B}_r(\mathbf{x})$	半径为 $r$ 中心在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 中的去心开球
$Q_\delta(\mathbf{x})$	边长为 $2\delta$ 中心在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , 且各边平行于坐标轴的开正方体
$\mathbf{A}^\top, \mathbf{x}^\top$	矩阵 $\mathbf{A}$ , 向量 $\mathbf{x}$ 的转置
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	$\mathbb{R}^n$ 中向量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的数量积, 也常常用 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ 表示
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	内积空间中两个元素 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 的内积
$\ \mathbf{x}\ _p$	$\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ 的 $p$ -范数 $\left(\sum_{k=1}^n  x_k ^p\right)^{1/p}$
$\ \mathbf{A}\ _p$	方阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的诱导范数 $\ \mathbf{A}\ _p = \max_{\ \mathbf{x}\ =1} \ \mathbf{A}\mathbf{x}\ _p$

$ x $	$\mathbb{R}^n$ 中向量 $x$ 通常的范数, 即 $\ x\ _2$
$\ A\ $	方阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 通常的诱导范数 $\ A\ _2$
$ E $	$\mathbb{R}^n$ 中集合 $E$ 的 Lebesgue 测度 (或 Jordan 测度)—长度, 面积, 体积
$ E ^*,  E _*$	$\mathbb{R}^n$ 中集合 $E$ 的 Jordan 外测度, 内测度
$m^*E, m_*E$	$\mathbb{R}^n$ 中集合 $E$ 的 Lebesgue 外测度, 内测度
$a^+, a_-$	实数 $a$ 的正部 $( a  + a)/2$ 与负部 $( a  - a)/2$
$a \vee b, a \wedge b$	实数 $a, b$ 的最大值和最小值
$\Re z, \Im z$	复数 $z = a + bi$ 的实部 $a$ 和虚部 $b$ , 其中 $a, b$ 为实数
$\chi_E$	集合 $E$ 的特征函数, 既在 $E$ 上取值为 1, 在其余点取值为 0
$\exists$	存在
$\forall$	对于任意
$\gg, \ll$	大大大于, 大大小于
a.e.	几乎处处
s.t.	满足或使得
$\emptyset$	空集
$\in, \ni, \notin$	$a \in E$ 与 $E \ni a$ 均表示 $a$ 是 $E$ 的元素, $a \notin E$ 表 $a$ 不是 $E$ 中的元素
$\subseteq, \supseteq$	$E \subseteq F$ 与 $F \supseteq E$ 均表示 $E$ 包含于集合 $F$ , 即 $F$ 包含 $E$
$E\{\varphi \in F\}$	表示集合 $\{x \in E \mid \varphi(x) \in F\}$ . 在 $E$ 明确的情况下, 简记为 $\{\varphi \in F\}$
$f(D)$	当 $f$ 是映射, $D$ 是集合时, 表示 $D$ 的像集 $\{f(x) \mid x \in D\}$
$\cap$	集合的交. $A \cap B$ 表示同时属于 $A$ 和 $B$ 的所有元素组成的集合
$\cup$	集合的并. $A \cup B$ 表示属于 $A$ 或属于 $B$ 的所有元素组成的集合
$\setminus$	集合的差. $A \setminus B$ 表示属于 $A$ 但不属于 $B$ 的所有元素组成的集合
$\mathcal{C}$	集合的补. $\mathcal{C}E$ 表示在全集 $X$ 明确的情况下, $E$ 的补集 $X \setminus E$
$E^\circ$	集合 $E$ 的内部, 即 $E$ 的全体内点
$E'$	集合 $E$ 的导集, 即 $E$ 的极限点 (聚点) 的全体
$\bar{E}$	集合 $E$ 的闭包
$\partial E$	集合 $E$ 的边界
$\subset\subset$	集合的紧包含关系, $E \subset\subset F$ 当且仅当 $\bar{E}$ 是 $F$ 的紧子集
$\alpha E + \beta F$	线性空间中, 集合的伸缩, 代数和与代数差等, 表示集合 $\{\alpha x + \beta y \mid x \in E, y \in F\}$
$\sum, \prod$	连加号, 连乘号
$[x], x$	实数 $x$ 的正数部分 (即不大于 $x$ 的最大整数) 与小数部分 (即 $x - [x]$ )
$\overline{\lim}, \underline{\lim}$	上极限, 下极限
$\int, \int$	上积分符号, 下积分符号
$C_n^k$	在 $n$ 个元素中选取 $k$ 个的组合数

$C^k(\Omega)$	在 $\Omega$ 上有 $k$ 阶连续 (偏) 导数的函数全体
$C_c^k(\Omega)$	在 $\Omega$ 上有紧支集且有 $k$ 阶连续 (偏) 导数的函数全体
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	在 $\Omega$ 上 $k$ 阶 (偏) 导数满足 $\alpha$ 次 Hölder 条件的函数全体
$\mathcal{S}$	速降函数全体
$\hat{f}, \check{f}$	函数 $f$ 的 Fourier 变换, Fourier 逆变换
$f * g$	函数 $f$ 与 $g$ 的卷积

# 第 1 章 实数

## 1.1 集合与映射

列入  $\mathcal{A}$  的习题相对基础, 列入  $\mathcal{B}$  的习题相对困难或属于扩展问题, 个别习题可能超前. 若习题中加 \* 号, 表示该习题与后续内容相关性大, 请教师布置习题时, 尽量勾选该题.

### Theorem 1.1.1: 关于 Diophantus 逼近的 Liouville 定理

设  $n \geq 2$ , 无理数  $x$  是某个  $n$  次整系数多项式的零点, 则存在常数  $A$  使得对于任何整数  $q$  和正整数  $p$ , 成立

$$\left| x - \frac{q}{p} \right| > \frac{A}{p^n}.$$

### 1.1 $\mathcal{A}$

1. 设  $a_0, a_1, \dots, a_n$  为复常数, 且对任何  $x \in \mathbb{R}$  成立

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

证明:  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ .

证明. 令  $x_0 = 0$  代入  $x$  可得  $a_0 = 0$ . 分别令  $x = x_i, (i = 1, 2, \dots, n)$  满足  $x_i \neq x_j, j = 0, 1, \dots, n$ . 可得如下关于  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的方程组.

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = 0 \\ a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_2^n = 0 \\ \dots \\ a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = 0 \end{cases}$$

其系数矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n x_i \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n x_i \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \neq 0.$$

故原方程仅有零解, 这便证明了结论. □

或者令  $x = 0$ , 立即得  $a_0 = 0$ , 于是得到

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x = 0.$$

上式两端除以  $x$ , 此时假定  $x \neq 0$ , 得到

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0,$$

令  $x = 0$  得到  $a_1 = 0$ . 循环该流程, 可得结论.  $\square$

2. 试构造区间  $(0, 1)$  到  $[0, 1]$  的一个双射。

解. 设集合

$$T = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots \right\},$$

构造如下映射

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \notin T, \\ 0, & x = \frac{1}{2}, \\ 4x, & x \in T, x \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

可以观察出, 这是一个符合题目要求的双射. 另外还可以分别拿出这两个集合的有理数, 对于集合  $[0, 1]$ , 其所有有理数组成集合为

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\},$$

这里规定  $a_0 = 0, a_1 = 1$ . 对于集合  $(0, 1)$ , 类似有

$$\{a_2, \cdots, a_n, \cdots\},$$

定义映射如下

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ a_{n-2} & x = a_n. \end{cases} \quad \blacksquare$$

3. 说明以下映射为有理数到整数集的单射。

$$T(q) = \begin{cases} (m+n)^2 + n, & q = \frac{n}{m}, m, n \text{ 为既约正整数}, \\ 0, & q = 0, \\ -(m+n)^2 - n, & q = -\frac{n}{m}, m, n \text{ 为既约正整数}. \end{cases}$$

证明. 不妨设  $q_1 = n_1/m_1, q_2 = n_2/m_2, m, n$  为既约正整数且  $q_1 \neq q_2$ . 若  $n_1 = n_2$  且  $m_1 \neq m_2$  或  $m_1 = m_2$  且  $n_1 \neq n_2$ , 显然有  $T(q_1) \neq T(q_2)$ .

下证  $n_1 \neq n_2, m_1 \neq m_2$  的情形. 不失一般性, 我们设  $n_1 > n_2$ . 此时, 若  $T(q_1) = T(q_2)$  即

$$(m_1 + n_1)^2 + n_1 = (m_2 + n_2)^2 + n_2$$

必有  $m_1 + n_1 < m_2 + n_2$ . 设  $t = m_1 + n_1$ , 得到

$$m_2 + n_2 = t + [(m_2 + n_2) - (m_1 + n_1)] := t + k.$$

显然  $k > 1, t > n_1$ , 于是

$$\begin{aligned}(m_2 + n_2)^2 - (m_1 + n_1)^2 - n_1 &= (t + k)^2 - t^2 - n_1 \\ &= k^2 + 2kt - n_1 > 0.\end{aligned}$$

即若  $(m_2 + n_2)^2 > (m_1 + n_1)^2$  必有

$$(m_2 + n_2)^2 > (m_1 + n_1)^2 + n_1$$

可见此时不可能有  $T(q_1) = T(q_2)$ .  $q < 0$  的情况可类似说明.  $\square$

#### 4. 证明代数数集是可列集.

证明. 设  $P_n(x)$  为  $n$  次整系数多项式构成的集合.  $U_n$  为所有  $n$  次整系数多项式的复零点, 由于对于一个确定的  $n$  次多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

它的零点为有限多个. 由于可列个可列集的并为可列集, 接下来我们证明  $P_n(x)$  为可列集. 记  $p(n)$  为第  $n+1$  个素数.

定义如下映射

$$f(x) \mapsto \prod_{j=0}^n (p(j))^{a_j}.$$

这便建立了一个  $P_n(x)$  到  $\mathbb{N}$  的一个双射, 从而  $P_n(x)$  为可列集, 故其元素的复零点的并集为  $U_n$  也为可列集, 从而代数数集  $\bigcup_n U_n$  为可列集.  $\square$

#### 5. 证明: 存在常数 $A > 0$ 使得对于任何整数 $q$ 和正整数 $p$ 成立

$$\left| \sqrt{3} - \frac{q}{p} \right| > \frac{A}{p^2}$$

证明.  $\sqrt{3}$  为  $x^2 - 3$  的一个零点, 根据定理 1.1.1 可知结论成立.  $\square$

### 1.1 B

1. 设  $P$  为首项系数不为零的  $n$  次系数多项式,  $x_1$  是它的一个零点, 则存在首项系数不为零的  $n-1$  次多项式  $Q$  使得

$$P(x) = (x - x_1)Q(x).$$

证明. 由于

$$x^k - x_1^k = (x - x_1)(x^{k-1} + x_1x^{k-2} + \cdots + x_1^{k-2}x + x_1^{k-1}).$$

则对  $P(x)$  中的每项应用上述事实便得到了结论.  $\square$

2. 设  $a_0, a_1, \cdots, a_n$  为复常数,  $a_n \neq 0$ . 证明: 多项式

$$p(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$$

至多有  $n$  个复零点 (含重数).

证明. 这正是代数基本定理, 这个定理的第一个严格证明是 1799 年由 Gauss 证明的, 后来他又给出了 4 个证明, Jordan, Weyl 等人也给过这个定理的证明. 它的一般表述是: 次数大于零的复数域上的多项式至少有一复数根. 简单起见, 我们使用复变函数中的 Liouville 定理进行证明, Liouville 定理是说: 有界整函数必是常数.

由于  $p(z)$  在  $z$  平面上解析, 若  $p(z)$  在  $z$  平面无零点, 则  $\frac{1}{p(z)}$  在  $z$  平面上也解析, 下面证明后者有界, 从而由 Liouville 定理推出矛盾. 事实上, 由于

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{p(z)} = 0,$$

故存在充分大的正数  $R$  使得  $|z| > R$  时,  $\left| \frac{1}{p(z)} \right| < 1$ . 因  $\frac{1}{p(z)}$  在闭圆  $|z| \leq R$  上连续, 故而有界, 从而  $\frac{1}{p(z)}$  在  $z$  平面上有界, 由 Liouville 定理知  $\frac{1}{p(z)}$  为常数, 这不可能.  $\square$

3. 证明 Viète (韦达) 定理: 设  $a_n \neq 0, x_1, x_2, \cdots, x_n$  为

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的  $n$  个复零点 (含重根), 则对于  $1 \leq k \leq n$ , 成立

$$\sum_{1 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_k \leq n} \prod_{j=1}^k x_{m_j} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

证明. 由前面的两个问题可以知道

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

即有

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n}$$

比较系数便得到了结果.  $\square$

4. 称关于  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  的  $m$  次  $n$  元多项式  $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  是可轮换的, 如果对任何  $1 \leq k < j \leq n$ , 将  $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  中的  $x_k, x_j$  分别替换成  $x_j, x_k$  后多项式的值保持不变. 证明:

(1) 若  $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  是可轮换的一次多项式, 则它是  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$  的常数倍.

(2) 若  $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  是可轮换的二次多项式, 则有常数  $C_1, C_2$  使得

$$R(x_1, x_2, \cdots, x_n) = C_1(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + C_2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

(3) 归纳证明, 若  $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  是系数为有理数的可轮换的  $k$  次多项式, 而  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  是某首项系数不为零的  $n$  次有理系数多项式的零点, 则  $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  为有理数.

证明. (1)(2) 是容易证明的, 下面我们证明 (3). 这证明这个结论之前, 我们先引入几个有用的记号 (称为  $n$  元初等对称多项式):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i, \\ \sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_ix_j, \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_n &= x_1x_2 \cdots x_n.\end{aligned}$$

事实上我们有如下定理, 称为对称多项式基本定理: 设  $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$  是数域  $\mathbb{K}$  上的对称多项式, 则必存在  $\mathbb{K}$  上唯一的一个多项式  $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ , 使

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n).$$

对称多项式的定义如同可轮换, 但不要求齐次性, 所以  $m$  次的可轮换多项式为对称多项式. 如果我们证明了定理中  $g$  的存在性, 那么根据 Viète 定理, 则本题即证. 下面用归纳法证明存在性, 唯一性参考相关书籍.

我们对  $n$  与多项式  $f$  的次数  $\deg f$  进行归纳. 当  $n = 1$  或  $\deg f = 0$  或  $1$ , 结论显然成立, 假设结论对于  $n - 1$  与小于给定次数  $\deg f$  的对称多项式成立. 考虑

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0),$$

我们以  $\sigma'_1, \sigma'_2, \cdots, \sigma'_{n-1}$  表示  $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$  的基本初等对称多项式, 由归纳假设知有  $h(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1})$  使得

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) = h(\sigma'_1, \sigma'_2, \cdots, \sigma'_{n-1}),$$

若  $h = 0$ , 则  $x_n | f$ , 又由于  $f$  为对称多项式, 则  $x_1x_2 \cdots x_n | f$ , 考虑对称多项式  $\frac{f}{x_1x_2 \cdots x_n}$ , 它的次数为  $\deg f - n$ .

若  $h \neq 0$ , 考虑

$$h' = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - h(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}),$$

易见  $x_n = 0$  时  $h' = 0$ , 类似  $h = 0$  的讨论考虑  $\frac{h'}{x_1x_2 \cdots x_n}$ , 它的次数也为  $\deg f - n$ . 依归纳假设便完成了证明.  $\square$

5. 设  $P, Q$  分别是  $m, n$  阶首项系数为 1 的有理系数多项式.

$$P(x) = \prod_{k=1}^m (x - x_k), \quad Q(x) = \prod_{k=1}^n (x - y_k).$$

证明:

$$(1) \text{ 多项式 } R(x) = \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^n (x - x_k - y_j) \text{ 是有理系数多项式.}$$



(2) 多项式  $S(x) = \prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^n (x - x_k y_j)$  是有理系数多项式.

6. 证明 Liouville 定理, 即定理 1.1.1.

证明. 设无理数  $x_0$  是整系数多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的零点, 令  $M = \max_{x_0-1 < x < x_0+1} \{|f'(x)|\}$ ,  $f(x)$  其他互异的零点为  $x_1, x_2, \cdots, x_m$ . 取  $A$  满足  $0 < A < \min \left\{ 1, \frac{1}{M}, |x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \cdots, |x_0 - x_m| \right\}$ . 假设存在使定理不成立的  $p, q$ , 就有

$$\left| x_0 - \frac{q}{p} \right| \leq \frac{A}{p^n} \leq A < \min \left\{ 1, \frac{1}{M}, |x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \cdots, |x_0 - x_m| \right\} \leq 1,$$

那么有

$$x_0 - 1 < \frac{q}{p} < x_0 + 1, \text{ 并且 } \frac{q}{p} \notin \{x_1, x_2, \cdots, x_m\},$$

$$\left| f\left(\frac{q}{p}\right) \right| = \frac{|a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} p + \cdots + a_1 q p^{n-1} + a_0 p^n|}{p^n} \geq \frac{1}{p^n}.$$

根据 Lagrange 中值定理, 存在  $\xi$  位于  $\frac{q}{p}$  与  $x_0$  之间, 使得  $\frac{f}{x_0} - f\left(\frac{q}{p}\right) = f'(\xi) \left(x_0 - \frac{q}{p}\right)$ , 又根据  $M, K$  的定义, 得到

$$\left| x_0 - \frac{q}{p} \right| = \frac{|f(x_0) - f(q/p)|}{|f'(\xi)|} \geq \frac{1}{M p^n} > \frac{K}{p^n} \geq \left| x_0 - \frac{q}{p} \right|,$$

矛盾, 从而结论得证. □

7. 证明一个复数是代数数当且仅当它的实部和虚部都是代数数.

证明. 设  $x = a + bi$ , 下证  $x$  是代数数当且仅当  $a$  和  $b$  都是代数数.

必要性.

充分性. □

## 1.2 第一次数学危机

### 1.2A

1. 在有关讲座中, 项武义教授给出了图 1.1. 从中可见, 当  $a, b$  依次是正五边形的边长和对角线长时,  $b - a$  和  $a$  是一个更小的正五边形的边长和对角线. 试以此说明正五边形的边长和对角线长不可公度.



图 1.1

若正五边形的边和对角线可公度, 则可以把  $a, b$  视为正整数, 此时  $a', b'$  也是正整数, 且  $a' < a, b' < b$ . 易见小于  $a$  的正整数只有有限个, 因此这一过程不可能无限持续, 这表明正五边形的边和的对角线不可公度.

2. 结合图 1.2 说明等腰直角三角形直角边和斜边长不可公度.



图 1.2

若  $c^2 = 2a^2$ , 依勾股定理,  $c$  是直角边为  $a$  的等腰直角三角形的斜边. 依图可令  $c' = 2a - c, a' = c - a$ , 若  $c, a$  可公度, 则可视为正整数, 此时  $a', c'$  也是正整数, 且  $c' < c$ , 但小于  $c$  的正整数有限, 这一流程不可能无限持续, 因而等腰直角三角形直角边和斜边不可公度.

### 1.2B

1. 对于正整数  $n, m$ , 考察  $\frac{m}{n}$  的十进制小数表示中循环节的长度有何特点.

只考虑  $n > m$  的情况, 当  $n = 9, 99, 999, \dots$  时, 分数的结果都是循环小数, 且循环节的长度与  $n$  的位数相同. 对于一个给定的循环小数  $a = 0.a_1a_2 \cdots a_na_1a_2 \cdots$ , ( $a_i$  表示当前位数上的数字), 有

$$10^n a - a = a_1a_2 \cdots a_n$$

$$a = \frac{a_1a_2 \cdots a_n}{10^n - 1}$$

## 1.3 实数公理系统

## 1.3A

1. 设  $(X, +, \cdot, \leq)$  是一个有序域, 并用  $0^*, 1^*$  表示  $X$  的零元和单位元. 一般的,  $n^* = n1^*$ . 我们可以证明  $X$  中成立加法消去律: 设  $\alpha, \beta, \gamma \in X$ , 满足条件  $P: \alpha + \gamma = \beta + \gamma$ , 则

$$\begin{aligned} \alpha &\stackrel{(A3)}{=} \alpha + 0^* \stackrel{(A4)}{=} \alpha + (\gamma + (-\gamma)) \stackrel{(A1)}{=} (\alpha + \gamma) + (-\gamma) \\ &\stackrel{P}{=} (\beta + \gamma) + (-\gamma) \stackrel{(A1)}{=} \beta + (\gamma + (-\gamma)) = \beta + 0^* = \beta. \end{aligned}$$

类似的证明:

- (1) 若  $\alpha \geq \beta$ , 则  $\alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$ , 且等号当且仅当  $\alpha = \beta$  时取到.
- (2)  $\alpha > 0^*$  当且仅当  $-\alpha < 0^*$ .
- (3) 若  $\alpha\gamma = \beta\gamma$ , 且  $\gamma \neq 0^*$ , 则  $\alpha = \beta$ .
- (4)  $\alpha^2 \geq 0^*$ , 且等号成立当且仅当  $\alpha = 0^*$  时成立. 特别的  $1^* > 0^*$ .
- (5)  $\alpha > 0^*$  当且仅当  $1/\alpha > 0^*$ .
- (6) 设  $\alpha > 0, \beta > \gamma$ , 则  $\alpha\beta > \alpha\gamma$ .

证明. (1) 若  $\alpha > \beta$  有  $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ , 依加法消去律可知有  $\alpha = \beta$ , 与假设矛盾. 反之若  $\alpha = \beta$ , 依上述也有  $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ .

- (2)  $\alpha > 0^* = \alpha + (-\alpha)$ , 依消去律得  $-\alpha < 0^*$ .
- (3)  $\alpha = \alpha 1^* = \alpha(\gamma\gamma^{-1}) = (\alpha\gamma)\gamma^{-1} = \beta\gamma\gamma^{-1} = \beta$ .
- (4) 先证  $(-1^*)(-1^*) = 1^*$ :

$$\begin{aligned} 1^* + (-1^*) &= 0^* \Rightarrow (-1^*) * (1^* + (-1^*)) = 0^* \Rightarrow -1^* + (-1^*)(-1^*) = 0^* \\ &\Rightarrow (-1^*)(-1^*) = 1^*. \end{aligned}$$

若  $\alpha \geq 0$ , 依乘法的保序性可知  $\alpha^2 \geq 0$ , 并且若  $\alpha > 0$  而  $\alpha^2 = 0^*$ , 则两侧乘以  $\alpha^{-1}$  得  $\alpha = 0^*$ , 可得矛盾. 从而若  $\alpha^2 = 0^*$  必有  $\alpha = 0^*$ . 若  $\alpha < 0^*$ , 则  $-\alpha > 0^*$ , 从而

$$\alpha\alpha = 1^* \cdot \alpha \cdot \alpha = (-1^*)(-1^*)\alpha\alpha = (-\alpha)(-\alpha) > 0^*.$$

- (5) 设  $\alpha > 0, \beta < 0$ , 则  $-\beta > 0$ , 从而  $\alpha(-\beta) > 0^*$ , 于是  $\alpha\beta < 0$ . 若  $\alpha > 0$  而  $1/\alpha < 0$ , 则

$$\alpha \cdot 1/\alpha = 1^* < 0^*$$

矛盾.

- (6) 由于  $\alpha > 0, \beta - \gamma > 0$ , 从而  $\alpha(\beta - \gamma) > 0$ . 可得  $\alpha\beta > \alpha\gamma$ . □

2. 设  $(X, +, \cdot, \leq)$  是一个全序域,  $\alpha \in X$  满足  $\alpha \geq 0$  以及  $\forall \varepsilon > 0$ , 成立  $\alpha < \varepsilon$ . 证明  $\alpha = 0$ .

证明. 假设  $\alpha > 0$ , 则令  $\varepsilon = \alpha$ , 则与  $\alpha < \varepsilon$  矛盾. 从而  $\alpha = 0$ . □

## 1.3B

1. 对于有序域  $(X, +, \cdot, \leq)$ , 是否一定具有 Archimedes 性?
2. 设  $(X, +, \cdot, \leq)$  是一个全序域,  $\alpha \in X$  满足  $\alpha \geq 0$  以及对  $X$  中任何的正有理数  $p$  成立  $\alpha < p$ . 问是否一定有  $\alpha = 0$ ?

这里正有理数即形如  $m1^*/n1^*$  的元, 其中  $1^*$  为乘法单位元,  $m, n$  为正整数.

3. 证明所有 (复) 代数数组成的集合是一个域.

证明. 我们证明一个更宽泛的命题: 设  $K/F$  是一个域扩张,  $\alpha, \beta \in K$ . 若  $\alpha, \beta$  是域  $F$  上的代数元, 则  $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha\beta^{-1} (\beta \neq 0)$  都是  $F$  上的代数元. 从而  $K$  中  $F$  上所有代数元组成的集合是  $K$  的一个子域, 称这个子域是  $F$  在  $K$  中的代数闭包, 记为  $\bar{F}$ .

由于  $\alpha$  是域  $F$  上的代数元, 因此  $F(\alpha)/F$  是单代数扩张. 由于  $\beta$  是域  $F$  上的代数元, 从而  $\beta$  也是域  $F(\alpha)$  上的代数元, 因此可以得出  $F(\alpha)(\beta)/F(\alpha)$  是单代数扩张, 从而  $F(\alpha)(\beta)/F(\alpha)$  是有限扩张.

于是  $F(\alpha, \beta)/F(\alpha)$  是有限扩张. 由  $F(\alpha, \beta) \supseteq F(\alpha) \supseteq F$ , 则  $F(\alpha, \beta)/F$  是有限扩张, 由于  $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha\beta^{-1}$  都属于  $F(\alpha, \beta)$ , 因此  $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha\beta^{-1}$  都是域  $F$  上的代数元.  $\square$

4. 设  $(X, +, \cdot)$  是一个以实数域  $\mathbb{R}$  为子域的域, 满足如下条件:

(i) 存在元  $A \in X \setminus \mathbb{R}$ .

(ii) 对于  $X$  中的任一元素  $V$ , 都存在  $a, b \in \mathbb{R}$ , 使得  $V = a + bA$ .

证明: 存在  $B \in X$  使得  $B^2 = -1$ . 进一步, 对  $X$  中的任一元素  $V$ , 都存在  $a, b \in \mathbb{R}$ , 使得  $V = a + bB$ .

本题的结论相当于说, 以实数域作为子域的“二元域”一定是复数域.

证明.  $\square$

5. 证明: 不存在以  $\mathbb{R}$  为子域的“三元数”域. 即不存在  $\mathbb{R}^3$  中满足

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

以及

$$(x_1, 0, 0) \cdot (x_2, 0, 0) = (x_1 x_2, 0, 0)$$

的加法  $+$  和乘法  $\cdot$ , 使得  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$  成为一个域.

## 1.4 实数系的构造

## 1.4A

1. Rudin 在其《数学分析原理》一书中使用了变换  $q = p + \frac{2-p^2}{p+2} = \frac{2+2p}{p+2}$ . 验证:

(i) 若  $p > 0$ , 且  $p^2 < 2$ , 则  $q > p$  且  $q^2 < 2$ .

(ii) 若  $p > 0$ , 且  $p^2 > 2$ , 则  $0 < q < p$  且  $q^2 > 2$ .

解. 由  $p > 0$  且  $p^2 < 2$  易知  $q = p + \frac{2-p^2}{p+2} > p$ , 并且

$$q^2 = \left(\frac{2+2p}{p+2}\right)^2 = 4 \left(1 - \frac{1}{p+2}\right)^2 < 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}+2}\right)^2 = 2.$$

后者情况类似. ■

2. 试求使变换  $q = p + \frac{2-p^2}{ap+b}$  具有习题 1 中性质 (i)—(ii) 的所有有理数对  $(a, b)$ .

解. ■

3. 证明无理数在实数集中的稠密性: 对于任何  $x \in \mathbb{R}$ , 以及  $\varepsilon > 0$ , 存在无理数  $y$  使得  $|y - x| < \varepsilon$ .

证明. 内容... □

4. 设  $a > 0$ , 而  $n$  为正整数. 证明:  $\min\{a, 1\} \leq a^{1/n} \leq \max\{a, 1\}$ .

证明. 易见  $a \in (0, 1)$  时, 有  $a \leq a^{1/n} \leq 1$ ; 若  $a \geq 1$ , 则  $1 \leq a^{1/n} < a$ . 总而言之有  $\min\{a, 1\} \leq a^{1/n} \leq \max\{a, 1\}$ . □

5. 设  $p, q > 1$  满足  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, a, b > 0$ . 利用

$$(1+x)^\alpha - 1 \leq \alpha x, \quad x \geq 0, 0 < \alpha \leq 1 \quad (\heartsuit)$$

证明 Young 不等式:  $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ .

证明. 不妨设  $a^p > b^q$ , 则令  $x = \frac{a^p}{b^q} - 1, \alpha = \frac{1}{p}$  带入式(♥)得到

$$\frac{a}{b^{q/p}} - 1 \leq \frac{1}{p} \left( \frac{a^p}{b^q} - 1 \right),$$

即  $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ . 另外的情况类似. □

6\*. 设  $I$  是一个非空指标集, 对  $I$  中每一个元  $\alpha$ , 都对应两个实数  $x_\alpha$  以及  $y_\alpha$ . 我们将  $\sup\{x_\alpha | \alpha \in I\}$  和  $\inf\{x_\alpha | \alpha \in I\}$  写成  $\sup_{\alpha \in I} x_\alpha$  和  $\inf_{\alpha \in I} x_\alpha$ . 证明: 在广义实数系中,

$$(1) \inf_{\alpha \in I} (-x_\alpha) = -\sup_{\alpha \in I} x_\alpha.$$

(2) 对以下所列的每一个不等式, 若其两端在广义实数系中都有意义, 则该不等式成立:

$$\begin{aligned}\inf_{\alpha \in I} x_{\alpha} + \inf_{\alpha \in I} y_{\alpha} &\leq \inf_{\alpha \in I} (x_{\alpha} + y_{\alpha}) \leq \sup_{\alpha \in I} x_{\alpha} + \inf_{\alpha \in I} y_{\alpha} \\ &\leq \sup_{\alpha \in I} (x_{\alpha} + y_{\alpha}) \leq \sup_{\alpha \in I} x_{\alpha} + \sup_{\alpha \in I} y_{\alpha}.\end{aligned}$$

(3) 若  $x_{\alpha} > 0 (\forall \alpha \in I)$ , 并在此种情形规定  $\frac{1}{0} = +\infty$ , 则有

$$\sup_{\alpha \in I} \frac{1}{x_{\alpha}} = \frac{1}{\inf_{\alpha \in I} x_{\alpha}}.$$

(4) 设  $x_{\alpha} > 0, y_{\alpha} > 0 (\forall \alpha \in I)$ . 对以下所列的每一个不等式, 若其两端在广义实数系中都有意义, 则该不等式成立:

$$\begin{aligned}\inf_{\alpha \in I} x_{\alpha} \inf_{\alpha \in I} y_{\alpha} &\leq \inf_{\alpha \in I} (x_{\alpha} y_{\alpha}) \leq \sup_{\alpha \in I} x_{\alpha} \inf_{\alpha \in I} y_{\alpha} \\ &\leq \sup_{\alpha \in I} (x_{\alpha} y_{\alpha}) \leq \sup_{\alpha \in I} x_{\alpha} \sup_{\alpha \in I} y_{\alpha}.\end{aligned}$$

证明. (1)

(2)

(3)

(4)

□

#### 1.4B

1. 对于  $a > 0$  以及有理数  $\frac{m}{n}$ , 其中  $m, n$  为既约整数,  $n > 0$ . 当  $m \neq 1$  时, 定义

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

自然, 当  $m = 1$  时, 上式也成立. 进一步, 当  $n = 2k + 1$  为奇数时, 定义

$$(-a)^{m/(2k+1)} = (-1)^m a^{m/(2k+1)}.$$

下设  $a, b > 0$ , 且  $p, q$  为有理数, 证明:

(1)  $(a^p)^q = a^{pq}$ .

(2)  $a^p a^q = a^{p+q}$ .

(3)  $a^p b^p = (ab)^p$ .

(4) 若  $a > 1, p > 0$ , 则  $a^p > 1$ .

(5) 当  $a > 1$  时,  $a^p$  关于  $p \in \mathbb{Q}$  严格单调递增.

(6) 设  $a > 1$ , 证明: 对于任何  $b \in \mathbb{R}$ , 成立  $\sup\{a^p | p < b\} = \inf\{a^p | p > b\}$ .

2. 设  $a \geq 1$ , 且  $b$  为无理数, 定义

$$a^b = \sup\{a^p | p \leq b \text{ 且 } p \text{ 为有理数}\}.$$

证明: 当  $p$  为有理数时上式也成立.

进一步, 当  $0 < a < 1$  时, 定义  $a^b = (a^{-1})^{-b}$ .

3. 设  $a, b > 0$ , 且  $x, y \in \mathbb{R}$ , 证明:

$$(1) (a^x)^y = a^{xy}.$$

$$(2) a^x a^y = a^{x+y}.$$

$$(3) a^x b^x = (ab)^x.$$

$$(4) \text{ 若 } a > 1, x > 0, \text{ 则 } a^x > 1.$$

$$(5) \text{ 若 } a > 1, \text{ 则 } a^x \text{ 关于 } x \in \mathbb{R} \text{ 严格单增.}$$

$$(6) \text{ 若 } 0 < a < 1, \text{ 则 } a^x \text{ 关于 } x \in \mathbb{R} \text{ 严格单减.}$$

4. 设  $a > 0, a \neq 1, b > 0$ , 证明有唯一实数  $x$  满足  $a^x = b$ .

该实数称为以  $a$  为底以  $b$  为真数的对数. 记作  $\log_a b$ , 在底  $a$  明确的情况下, 可以简写为  $\log b$ .  $\log_{10} b$  记作  $\lg b$ ,  $\log_e b$  记作  $\ln b$ , 称为自然对数.

5. 设  $a, b, x > 0, a \neq 1, b \neq 1$ . 证明:  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ .

6. 证明: 当  $a > 1$  时,  $\log_a b$  关于  $x > 0$  严格单增. 当  $0 < a < 1$  时,  $\log_a b$  关于  $x > 0$  严格单减.

7. 设  $a, x, y > 0, a \neq 1$ , 证明:  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ .

## 1.5 附录

### 1.5 A

1. 证明: 具有最小上界性的有序域一定具有 Archimedes 性.

证明. 令集合

$$P = \left\{ n \mid \frac{y}{n} \geq x \right\},$$

若  $P = \emptyset$ , 则对  $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ , 都有  $nx > y$ , 否则  $P$  有最小上界, 不妨记为  $n_0$ , 这时有

$$\frac{y}{n_0} \geq x > \frac{y}{n_0 + 1},$$

右侧的不等号等价于 Archimedes 性. □

### 1.5 B

1. 试在 Cantor 用 Cauchy 列构造实数的基础上, 建立上确界存在定理, Cauchy 准则等 (参见第二章内容).

## 第 2 章 序列极限

### 2.1 数列极限

#### 2.1 A

1. 用定义证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 + 4n^2 - 100}{2n^3 - 9n - 11} = \frac{3}{2}$ .

证明.  $\forall \varepsilon > 0$ , 要使得

$$\left| \frac{3n^3 + 4n^2 - 100}{2n^3 - 9n - 11} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon,$$

即

$$\left| \frac{4n^2 + 27n/2 - 167/2}{2n^3 - 9n - 11} \right| < \varepsilon.$$

当  $n > 100$  时

$$\left| \frac{4n^2 + 27n/2 - 167/2}{2n^3 - 9n - 11} \right| < \left| \frac{4n^2 + n^2}{2n^3 - n^3} \right| = \left| \frac{5}{n} \right| < \varepsilon,$$

于是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 + 4n^2 - 100}{2n^3 - 9n - 11} = \frac{3}{2}$ . □

2. 用定义证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lg \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 0$ .

证明. 注意到  $x > 0$  时  $\lg(1+x) < x$ , 于是由  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ , 则  $n > N$  时有

$$\left| \lg \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lg \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 0$ . □

#### 2.1 B

1. 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  的充要条件是存在单调下降且无正下确界的正数列  $\{w_n\}$  使得  $\forall n \geq 1$  成立  $|a_n| \leq w_n$ .

2. 设  $0 \leq p \leq k-1$ , 求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_{kn}^p + C_{kn}^{p+k} + \cdots + C_{kn}^{p+(n-1)k}}{2^{kn}}$ .

解. 假设有这样一套装置, 用  $kn$  个开关共同控制  $k$  个灯泡: 开关或开或闭, 灯泡按  $0, 1, \cdots, k-1$  的编号来编号. 对于编号为  $p(p = 0, 1, \cdots, k-1)$  的灯泡来说, 当且仅当闭合开关总数模  $k$  余  $p$

时亮起. 这编号  $p$  的灯泡亮起的概率即为  $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} C_{kn}^{p+ik}}{2^{kn}}$ .

很显然, 这  $k$  个灯泡中有且仅有一个灯泡亮起. 当  $n \rightarrow \infty$  时, 每个灯泡都有相同的机会亮起, 编号为  $p$  的灯泡亮起的概率也为  $1/k$ . 即得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_{kn}^p + C_{kn}^{p+k} + \cdots + C_{kn}^{p+(n-1)k}}{2^{kn}} = \frac{1}{k}.$$



这道题还有其他解法见技巧书. ■

## 2.2 无穷大量, 无穷小量, Stolz 公式

### Theorem 2.2.1: Stolz-Cesáro 定理

设  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  是两个实数列, 若

- (i)  $\{y_n\}$  严格单增,
  - (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ ,
  - (iii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \ell$ , 其中  $\ell$  可能为有限数,  $+\infty$  或  $-\infty$ ,
- 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell.$$

### Theorem 2.2.2

设  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$  是两个实数列, 若

- (i)  $\{y_n\}$  严格单调减少,
  - (ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ ,
  - (iii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = \ell$ , 其中  $\ell$  可能为有限数,  $+\infty$  或  $-\infty$ ,
- 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell.$$

### 2.2A

1. 证明:  $\{a_n\}$  的极限为  $L$  当且仅当  $\{a_{2n}\}$  与  $\{a_{2n+1}\}$  的极限  $L$ , 其中  $L$  为有限数,  $+\infty$ ,  $-\infty$  或  $\infty$ .

证明. 必要性. 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ . 若  $|L| < +\infty$ . 则对  $\forall \varepsilon > 0$ , 有  $N > 0$  使得  $n > N$  时有

$$|a_n - L| < \varepsilon,$$

特别地,  $2n > N$  时也有

$$|a_{2n} - L| < \varepsilon, \quad |a_{2n+1} - L| < \varepsilon.$$

若  $L = +\infty$ , 则对  $\forall A > 0$ , 有  $N > 0$  使得  $n > N$  时有  $a_n > A$ , 特别地, 当  $2n > N$  时也有  $a_n > A$ , 其余情况类似.

充分性. 先说明  $L$  有限的情况, 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = L$ , 则对  $\forall \varepsilon > 0$ , 有  $N_1 \in \mathbb{Z}_+$  使得  $n > N_1$  时有

$$|a_{2n} - L| < \varepsilon,$$

同理由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2k-1} = L$ , 有  $N_2 \in \mathbb{Z}_+$  使得  $n > N_2$  时有

$$|a_{2n+1} - L| < \varepsilon,$$

取  $N = (2N_1) \vee (2N_2 + 1)$ , 那么当  $n > N$  时, 都有  $|a_n - L| < \varepsilon$ .  $L$  无穷时情况类似.  $\square$

2. 设  $p$  为有理数, 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^p - n^p}{n^{p-1}} = p$ .

证明.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^p - n^p}{n^{p-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1 \right) = p$ .  $\square$

3. 证明定理 2.2.2.

证明. 当  $\ell \in \mathbb{R}$  时, 由条件知  $\forall \varepsilon > 0$ , 均存在  $N_1 \in \mathbb{N}_+$  使得  $n > N_1$  时有

$$\ell - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} < \ell + \varepsilon,$$

注意到  $\{y_n\}$  单调递减, 故有

$$(\ell - \varepsilon)(y_{n-1} - y_n) < x_{n-1} - x_n < (\ell + \varepsilon)(y_{n-1} - y_n),$$

取  $m > n > N_1$ , 并将上面的不等式中的  $n$  依次换成  $n+1, n+2, \dots, m$ , 然后把这些不等式相加得到

$$(\ell - \varepsilon)(y_n - y_m) < x_n - x_m < (\ell + \varepsilon)(y_n - y_m),$$

也即

$$\left| \frac{x_n - x_m}{y_n - y_m} - \ell \right| < \varepsilon, \quad \forall m > n > N_1,$$

现令  $m \rightarrow \infty$ , 则由  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = 0$  得到

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \ell \right| \leq \varepsilon, \quad \forall n > N_1,$$

这说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell$ .

若  $\ell = +\infty$ , 则当  $n$  充分大时有  $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 0$ , 故此时  $\{x_n\}$  严格单调递减趋于 0. 另外, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0,$$

从而由上一段讨论知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$ .

若  $\ell = -\infty$ , 我们记  $z_n = -x_n$ , 于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$  且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n - z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty,$$

由上一段的讨论知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{y_n} = +\infty$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$ .  $\square$

4. 设  $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n) (n = 1, 2, 3, \dots)$ . 试证明  $\{x_n\}$  收敛, 并求其极限.

解. 递推数列有特征方程

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}(\lambda + 1), \quad \text{即} \quad 2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

解得  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$ . 即设原数列有通项公式  $x_n = C_1 + C_2\lambda_2^n$ . 代入  $x_1 = a, x_2 = b$  解得  $C_1 = \frac{2b-a}{3}, C_2 = \frac{4b-4a}{3}$ . 即  $x_n = \frac{2b-a}{3} + \frac{4b-4a}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ . 易见  $\{x_n\}$  收敛, 极限为  $\frac{2b-a}{3}$ . ■

5. 设  $\{x_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3n}x_n = 1$ .

证明. 设  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k^2$ , 显然  $\{S_n\}$  单调递增. 并且  $\frac{1}{x_n} \sim S_n (n \rightarrow +\infty)$ , 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$  有限, 则有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1/S \neq 0$ , 这与  $S_n$  收敛矛盾, 从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.$$

结合 Stolz 定理, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(3n)x_n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3 - S_{n-1}^3}{3},$$

于是我们仅需证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^3 - S_{n-1}^3) = 3$ . 注意到

$$\begin{aligned} S_n^3 - S_{n-1}^3 &= (S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2) \\ &= x_n^2 (S_n^2 + S_n(S_n - x_n^2) + (S_n - x_n^2)^2) = 3(x_n S_n)^2 - 3x_n^4 S_n + x_n^6 \\ &= 3 \left( x_n \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^2 - 3x_n^2 \left( x_n \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) + x_n^6 \rightarrow 3 \quad (n \rightarrow +\infty). \end{aligned} \quad \square$$

6. 设  $a$  和  $d$  是给定的正数. 对于  $n = 1, 2, 3, \dots$ , 由等差数列  $a, a+d, \dots, a+(n-1)d$  形成的算数平均数  $A_n$  和几何平均数  $G_n$ , 试求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G_n}{A_n}$ .

解. 由题设  $G_n = \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} (a+kd)}$ ,  $A_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (a+kd)}{n} = a + \frac{n-1}{2}d$ , 记  $t = \frac{a}{d}$ . 于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G_n}{A_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} (a+kd)}}{(n-1)d/2} \cdot \frac{(n-1)d/2}{a + (n-1)d/2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} (t+k)} \cdot \frac{2}{n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)}} \cdot \frac{2}{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\Gamma(t)}} \sqrt[n]{\left(\frac{t+n}{e}\right)^n} \sqrt{2\pi(t+n)} \cdot \frac{2}{n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t+n}{e} \cdot \frac{2}{n+1} = \frac{2}{e}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

7. 令  $a_{n,k} = \frac{k}{n-k+1} (n \geq k \geq 1)$ . 证明:

(1) 对于固定的  $k \geq 1$ ,  $\{a_{n,k}\}$  是无穷小.

(2)  $A_n = \prod_{k=1}^n a_{n,k}$  不是无穷小.

证明. 易见

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n-k+1} = 0,$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n a_{n,k} = 1,$$

从而结论得证.  $\square$

8. 设  $E \subseteq \mathbb{R}$  为非空集. 证明: 存在  $E$  中点列  $\{x_k\}$  使得  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \sup E$ , 这里  $\sup E$  可以是  $+\infty$ .

注: 对于  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , 满足  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \sup_{x \in D} f(x) \left( \inf_{x \in D} f(x) \right)$  的  $D$  中的点列  $\{x_k\}$  称为  $f$  在  $D$  上的极大化序列 (极小化序列).

证明. 若  $\sup E = +\infty$ , 则对于任意给定的正数  $M$ , 都有  $x_1 \in E, x_1 \geq M$ ; 同理对于  $M+1$ , 也有  $x_2 \in E, x_2 \geq M+1$ , 依次类推, 此时有  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty = \sup E$ .

否则  $\sup E < +\infty$ , 任取  $E$  的一个上界  $M$  与  $x_0 \in E$ , 令  $E_1 = [x_0, M]$ ,  $T = (x_0 + M)/2$ , 这样区间  $E_1$  被  $T$  二分, 优先考察右侧的集合  $[T, M]$ , 若  $[T, M] \cap E \neq \emptyset$ , 则令  $E_2 = [T, M]$ , 否则令  $E_2 = [x_0, T]$ , 继续将  $E_2$  二分, 并仿上法选择  $E_3$ , 以此类推. 易见  $\{E_k\}$  形成一列闭区间套, 设  $x_k \in E_k$ , 则  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \sup E$ .  $\square$

## 2.2B

1. (Toeplitz(特普利茨) 定理) 设有无穷下三角矩阵  $(t_{mn})_{n \geq m}$ :

$$\begin{pmatrix} t_{11} & & & \\ t_{21} & t_{22} & & \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

满足下列条件

(i) 每一列元素趋于零, 即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{nm} = 0$ .

(ii) 各行元素的绝对值之和有界, 即  $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ ,

$$|t_{n1}| + |t_{n2}| + \cdots + |t_{nn}| \leq K < +\infty.$$

记  $y_n = t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{nn}x_n$ . 证明:

(1) 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ .

(2) 记  $T_n = t_{n1} + t_{n2} + \cdots + t_{nn}$ . 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 1$ , 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$  有限, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$ .

证明. (1) 由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$  知存在  $M > 0$  使得

$$|x_n| < M, \quad n = 1, 2, \dots,$$

并且对  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$ , 使得  $n > N$  时, 有

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

对于上述的  $\varepsilon$  与  $N$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nm} = 0$  可知  $\exists N_1 \in \mathbb{N}_+$ , 使得  $N_1 > N$ , 且当  $n > N_1$  时有

$$|t_{nm}| < \frac{\varepsilon}{2NM}, \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

从而当  $n > N_1$  时, 由  $y_n$  的定义得

$$\begin{aligned} |y_n| &= |t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \dots + t_{nn}x_n| \leq |t_{n1}x_1| + |t_{n2}x_2| + \dots + |t_{nn}x_n| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2NM} \cdot NM + (|t_{n(N+1)}| + |t_{n(N+2)}| + \dots + |t_{nn}|) \frac{\varepsilon}{2K} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ .

(2) 由题设知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$ , 而

$$z_n := t_{n1}(x_1 - a) + t_{n2}(x_2 - a) + \dots + t_{nn}(x_n - a) = y_n - aT_n,$$

由前面的结论知  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ , 于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + a \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = a$ . □

## 2. 试考察 Stolz 定理和 Toeplitz 定理的关系.

由 Toeplitz 定理可以推导出 Stolz 定理 2.2.1, 理由如下.

记号如同问题 1. 令上述的无穷下三角矩阵的元素为  $t_{nm} = \frac{y_{m+1} - y_m}{y_{m+1}}$ , 容易验证其满足定理条件, 又记  $a_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ , 于是

$$b_n := t_{n1}a_1 + t_{n2}a_2 + \dots + t_{nn}a_n = \frac{x_{n+1} - x_1}{y_{n+1}}.$$

由 Toeplitz 定理知  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$ , 易见  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell$ .

## 2.3 Euclid 空间中的基本概念

### Definition 2.3.1

设  $X$  为非空集, 映射  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  称为  $X$  上的度量, 又称距离, 如果对任何  $x, y, z \in X$  成立:

- (i) 非负性.  $d(x, y) \geq 0$ , 且等号当且仅当在  $x = y$  时成立.
- (ii) 对称性.  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- (iii) 三角不等式.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

此时, 称  $(X, d)$  (或简称  $X$ ) 为度量空间或距离空间, 称  $d(x, y)$  为  $x$  与  $y$  间的距离.

### 2.3A

1\*. 设  $E \subseteq \mathbb{R}$  为非空有界闭集. 证明  $E$  有最大值最小值, 即  $\sup E \in E, \inf E \in E$ .

证明. □

2. (距离的等价定义). 在定义 2.3.1 中, 由 (ii)—(iii) 可以得到: (iii') 对任何  $x, y \in X$ , 成立  $d(x, z) \leq d(y, x) + d(y, z)$ . 证明: (i)—(iii) 与 (i), (iii') 等价.

3. 设  $E$  为  $\mathbb{R}$  中的无理数全体. 证明  $\bar{E} = \mathbb{R}$ .

4. 称  $\mathbb{R}^n$  中各分量均为有理数的点为有理点. 证明  $\mathbb{R}^n$  中有理点的全体的闭包为  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.3B

1. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , 证明存在  $E$  的至多可列的子集  $F$ , 使得  $\bar{F} \supseteq E$ .

2. 设  $E$  为  $\mathbb{R}^n$  中的闭集, 证明存在集合  $F$  使得  $F$  的导集为  $E$ .

3. 下表穷举了集合的内部、导集、边界和闭包. 请证明每一格中的结果, 对于非等式的情形, 举出不成立的例子. 进一步, 思考能否得出其他的关系式.

集合	内部	导集	边界	闭包
$E^\circ$	$(E^\circ)^\circ = E^\circ$	$(E^\circ)' = \bar{E}^\circ$	$\partial(E^\circ) \subseteq \partial E \cap E'$	$\bar{E}^\circ \subseteq E'$
$E'$	$(E')^\circ = \bar{E}^\circ \supseteq E^\circ$	$(E')' \subseteq E'$	$\partial(E') \subseteq \partial E \cap E'$	$\bar{E}' = E'$
$\partial E$	$(\partial E)^\circ = (\bar{E} \cap \overline{\mathcal{C}E})^\circ$	$(\partial E)' \subseteq \partial E \cap E'$	$\partial(\partial E) \subseteq \partial E$	$\overline{\partial E} = \partial E$
$\bar{E}$	$(\bar{E})^\circ \supseteq E^\circ$	$(\bar{E})' = E'$	$\partial(\bar{E}) \subseteq \partial E$	$\overline{(\bar{E})} = \bar{E}$

4. 设  $X$  为线性空间, 称映射  $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  为  $X$  上的内积, 如果它满足: 对于任何  $x, y, z \in X$  以及  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

- (1) 非负性.  $\langle x, x \rangle \geq 0$ , 且等号成立当且仅当  $x = 0$  时成立.
- (2) 线性性.  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ .
- (3) 关于数乘线性.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ .
- (4) 对称性.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .

此时称  $X$  为 (实) 内积空间. 令  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . 证明  $\|\cdot\|$  为  $X$  上的范数—称为由该内积诱导的

范数, 且该范数满足平行四边形法则:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

证明. 容易验证按上述规则定义的范数满足非负性和齐次性, 下证其满足三角不等式, 在此之前, 我们先证明 Cauchy-Schwarz 不等式: 即  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , 等号成立当且仅当  $x, y$  线性相关.

首先, 当  $x = 0$  或  $y = kx$  时 (即  $x, y$  线性相关), 我们有

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle 0, y \rangle| = |0\langle 0, y \rangle| = 0 = \|0\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\|,$$

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle x, kx \rangle| = |k\langle x, x \rangle| = |k| \|x\|^2 = \|x\| \cdot \|kx\| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

当  $x, y$  线性无关时, 即对任何实数  $k$ , 都有  $y \neq kx$ , 也即  $kx - y \neq 0$ , 于是由内积的非负性有

$$0 < \langle kx - y, kx - y \rangle = \|x\|^2 k^2 - 2\langle x, y \rangle k + \|y\|^2,$$

这意味着关于  $k$  的一元二次方程  $\|x\|^2 k^2 - 2\langle x, y \rangle k + \|y\|^2 = 0$  无实根, 即  $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 < 0$ , 即  $|\langle x, y \rangle| < \|x\| \cdot \|y\|$ . 这个不等式也称为 Cauchy-Buniakowsky-Schwarz (柯西-布尼亚科夫斯基-施瓦茨) 不等式.

利用 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

即  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

易见

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

□

5. 设  $X, \|\cdot\|$  为赋范线性空间, 若范数  $\|\cdot\|$  满足平行四边形法则, 令  $\langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$ . 验证  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是  $X$  上的内积.

解. 即该范数满足  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ . 下面对上题所给内积性质进行注意验证:

(1) 非负性. 由

$$\langle x, x \rangle = \frac{\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2}{4} = \|x\|^2 \geq 0,$$

且等号成立当且仅当  $x = 0$ . 故而非负性成立.

(2) 线性性. 由

$$\langle x, y + z \rangle = \frac{\|x + (y + z)\|^2 - \|x - (y + z)\|^2}{4},$$

结合平行四边形法则有

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \cdot \frac{\|x + (y + z)\|^2 - \|x - (y + z)\|^2}{2} \\
 &= \frac{\|x + y + z\|^2 + \|x + y - z\|^2 - (\|x - y + z\|^2 + \|x - y - z\|^2)}{4 \times 2} \\
 &= \frac{\|x + y\|^2 + \|z\|^2 - \|x - z\|^2 - \|y\|^2}{4}, \\
 & \frac{1}{4} \cdot \frac{\|x + (y + z)\|^2 - \|x - (y + z)\|^2}{2} \\
 &= \frac{\|x + y + z\|^2 + \|x + z - y\|^2 - (\|x + z - y\|^2 + \|x - y - z\|^2)}{4 \times 2} \\
 &= \frac{\|x + z\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 - \|z\|^2}{4},
 \end{aligned}$$

上面两式相加, 便得

$$\langle x, y + z \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} + \frac{\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2}{4} = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle,$$

故而线性性成立.

(3) 关于数乘线性与对称性是显然成立的. ■

6. 试构造  $\mathbb{R}$  中一列非空集  $\{E_k\}$  使得  $E_{k+1} = E'_k \subset E_k (k \geq 1)$ .

## 2.4 Eucild 空间中的基本定理

### Theorem 2.4.1

设  $\{A_k\}$  是  $\mathbb{S}^n$  中的 Loewner 偏序下的单调有界列, 则  $\{A_k\}$  收敛.

记  $\mathbb{S}^n$  为  $n$  阶实对称矩阵全体, 在其中引入 Loewner(勒夫纳) 偏序: 对于  $A, B \in \mathbb{S}^n$ , 定义  $A \leq B$  为:  $B - A$  为半正定矩阵, 即对任何  $x \in \mathbb{R}$ , 成立

$$x^\top A x \leq x^\top B x.$$

### 2.4A

1. 设  $x_0 \in (0, 2)$ ,  $x_{n+1} = x_n(2 - x_n) (n \geq 0)$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

由此, 对于  $c > 0$ , 任取  $y_0 > 0$  满足  $cy_0 < 1$ , 令  $y_{n+1} = y_n(2 - cy_n) (n \geq 0)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{c}$ .  
这一事实让我们有可能利用乘法来计算倒数的近似值.

证明. 无论  $x_0$  为何值时, 有

$$x_{n+1} = x_n(2 - x_n) \leq \left( \frac{x_n + 2 - x_n}{2} \right)^2 = 1.$$

即  $\{x_n\}$  有界. 特别的,  $x_1 \leq 1$ , 等号成立当且仅当  $x_0 = 1$ , 此时结论是平凡的, 否则由  $x_n < 1$ , 则



有

$$x_{n+1} = x_n(2 - x_n) > x_n, \quad n \geq 1,$$

即  $\{x_n\} (n = 1, 2, \dots)$  单调递增, 于是  $\{x_n\}$  存在, 对条件两侧取极限即得结论.

后者令  $x_n = cy_n$  即得结论. □

2. 设  $x_0 \geq 0, x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} (n \geq 0)$ . 试分别用以下方法证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$ .

(1) 说明  $\{x_n\}$  单调有界.

(2) 证明存在常数  $C > 0$  使得  $|x_n - 2| \leq \frac{C}{2^n} (\forall n \geq 1)$ .

证明. (1) 是容易说明的 (数学归纳法). 对于 (2), 我们取  $f(x) = \sqrt{x + 2} (x \geq 0)$ . 这样有

$$f(2) = 2, \quad x_{n+1} = f(x_n),$$

并且

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} < \frac{1}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} |x_n - 2| &= |f(x_{n-1}) - f(2)| = |f'(\eta)| |x_{n-1} - 2| \\ &< \frac{1}{2} |x_{n-1} - 2| < \dots < \frac{1}{2^n} |x_0 - 2|. \end{aligned}$$

或者,

$$\begin{aligned} |x_n - 2| &= |\sqrt{x_{n-1} + 2} - 2| = \left| \frac{x_{n-1} - 2}{\sqrt{x_{n-1} + 2} + 2} \right| \leq \left| \frac{x_{n-1} - 2}{2} \right| \\ &< \dots < \frac{1}{2^n} |x_0 - 2|. \end{aligned}$$

总之无论如何, 都有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$ . □

3. 设  $a_0, b_0 > 0, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$ . 证明:  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  均收敛且极限相同.

证明. 对  $a, b > 0$ , 由算数几何平均不等式有  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ , 于是有

$$\sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b} \geq 0.$$

从而有  $\frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_nb_n} \geq \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$ , 即  $a_{n+1} \geq b_{n+1} (n = 0, 1, \dots)$ , 由于

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + b_n/a_n}{2} \leq 1,$$

从而  $\{a_{n+1}\}$  单调递减, 同理可证  $\{b_{n+1}\}$  单调递增, 有  $[b_{n+1}, a_{n+1}] \subset [b_n, a_n]$  又

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2(a_n + b_n)} \cdot (a_n - b_n) < \frac{1}{2}(a_n - b_n) < \dots < \frac{1}{2^{n-1}}(a_1 - b_1) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

依 Cauchy-Cantor 闭区间套定理原命题得证. □

4. 对于  $n \geq 1$ , 考虑

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1).$$

证明:  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  均收敛, 且收敛到同一极限, 该极限称为 **Euler**(欧拉) 常数.

证明. 利用不等式

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

由于

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0.$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0.$$

$$a_n - b_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n} > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

可见  $\forall n \geq 1$ , 有  $[b_{n+1}, a_{n+1}] \subseteq [b_n, a_n]$ . 依 Cauchy-Cantor 闭区间套定理得证结论.  $\square$

5. 设  $c \geq -3$ ,

$$x_1 = \frac{c}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{x_n^2}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

问  $\{x_n\}$  何时收敛, 并求极限.

解. 我们分情况对  $c$  的范围进行讨论.

(i)  $c > 1$ . 此时由基本不等式有

$$x_{n+1} = \frac{c + x_n^2}{2} \geq \sqrt{c}x_n \geq \cdots \geq (\sqrt{c})^n x_1,$$

故  $c > 1$  时  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

(ii)  $0 \leq c \leq 1$ . 此时有  $x_1 = \frac{c}{2} < 1$ , 假设  $x_n < 1$ , 那么  $x_{n+1} < 1$ . 即由数学归纳法得  $x_n$  有界. 另一方面

$$x_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{x_n^2}{2}, \quad x_n = \frac{c}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2},$$

两式相减得到  $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{2}$ , 注意到  $x_2 > x_1 = \frac{c}{2}$ , 则由上式递推便可得到  $x_{n+1} > x_n$ . 即  $\{x_n\}$  单增有界, 从而收敛. 并且, 若  $\{x_n\}$  收敛, 记  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = X$ , 则对递推公式两侧取极限得到

$$A = \frac{c}{2} + \frac{A^2}{2} \Rightarrow A = 1 \pm \sqrt{1-c},$$

结合  $x_n < 1$ , 故  $0 < c \leq 1$  时  $\{x_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 - \sqrt{1-c}$ .

(iii)  $-3 \leq c < 0$ . 易见此时对一切  $n$  有  $x_n \geq \frac{c}{2}$ . 并且  $x_1 = \frac{c}{2} < 0$ , 假设  $x_n < 0$ , 则有

$$|x_n| \leq \frac{c}{2}, \quad x_n^2 \leq \frac{|c|}{4} \cdot |c| < |c|, \quad x_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{x_n^2}{2} < \frac{c + |c|}{2} = 0.$$

即此时  $\frac{c}{2} \leq x_n < 0$ . 仿上法, 分别考虑  $n = 2k + 1, 2k - 1$  以及  $n = 2k + 2, 2k$  的情况, 有

$$x_{2k+1} - x_{2k-1} = \frac{x_{2k}^2 - x_{2k-2}^2}{2}, \quad (\diamond)$$

$$x_{2k+2} - x_{2k} = \frac{x_{2k+1}^2 - x_{2k-1}^2}{2}. \quad (\diamond)$$

事实上, 有  $x_3 > x_1 = \frac{c}{2}$ , 故  $|x_3| < |x_1|, x_3^2 < x_1^2$ , 在  $(\diamond)$  式中令  $k = 1$ , 得到  $x_4 < x_2$ , 即有  $|x_4| > |x_2|, x_4^2 > x_2^2$ , 在  $(\diamond)$  式中令  $k = 2$ , 又得到  $x_5 > x_3$  等等. 总之有

$$x_{2k+1} > x_{2k-1}, \quad x_{2k+2} < x_{2k}.$$

结合  $\{x_{2k}\}, \{x_{2k+1}\}$  均有界, 从而二者极限存在, 记  $X_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1}, X_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k}$ . 结合题设递推公式得到

$$X_1 = \frac{c}{2} + \frac{X_2^2}{2}, \quad X_2 = \frac{c}{2} + \frac{X_1^2}{2}, \quad (\spadesuit)$$

两式相减, 得到  $(X_1 - X_2)(X_1 + X_2 + 2) = 0$ . 若  $X_1 + X_2 + 2 = 0$ , 即  $X_1 = -2 - X_2$ , 代入  $(\spadesuit)$  中左式有

$$X_2^2 + 2X_2 + (c + 4) = 0,$$

此时  $\Delta = 4 - 4(4 + c) \leq 0$ , 即  $c < -3$  时, 上式在实数范围内无解, 因此只能有  $X_1 = X_2$ . 另外当  $c = -3$  时, 易见  $X_1 = X_2 = -1$ . 故  $-3 \leq c < 0$  时  $\{x_n\}$  收敛, 结合步骤 (ii) 的分析可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 - \sqrt{1 - c}. \quad \blacksquare$$

6. 证明: 对于任何  $n \geq 1$ , 存在  $\theta_n \in (0, 1)$  使得  $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}$ . 由此说明  $e$  是无理数.

证明. 由于

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

又因为

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^k} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} \right) = \frac{n+2}{(n+1) \cdot (n+1)!} \\ &= \frac{1}{n \cdot n!} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} < \frac{1}{n \cdot n!}. \end{aligned}$$

这几乎就完成了第一部分的证明.

下面说明  $e$  是无理数, 事实上, 若其为有理数, 则定能表示成既约分数的形式, 设其为  $p/q$ , 有上述可知

$$e = \frac{p}{q} = \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + \frac{\theta_n}{q \cdot q!}.$$

于是右侧  $\frac{\theta_n}{q \cdot q!}$  应是  $\frac{1}{q!}$  的倍数, 但这是不可能的.  $\square$

7. 设  $E, F$  为  $\mathbb{R}$  中的非空集, 定义  $d(E, F) = \inf_{x \in E, y \in F} |x - y|$ .

(1) 若  $E, F$  为非空闭集, 且  $E$  有界, 证明存在  $x_0 \in E, y_0 \in F$  使得  $|x_0 - y_0| = d(E, F)$ .

(2) 举例说明存在不相交的非空闭集  $E, F \in \mathbb{R}^n$  使得  $d(E, F) = 0$ .

证明. (1)

(2) 取  $E = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}, F = \{(x, e^x) | x \in \mathbb{R}\}$ , 则  $E, F$  都是闭集且  $d(E, F) = 0$ . □

8. 设  $\mathbb{R}^n$  中有界非空闭集  $\{E_k\}$  满足  $E_{k+1} \subseteq E_k (k \geq 1)$ . 证明:  $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$  为非空闭集.

证明. □

9\*. 梳理/证明以下结果, 并尝试对这些结论有一个直观的理解:

(1) 收敛数列的子列收敛到同一极限.

(2) 如果一个数列有两个子列收敛到不同极限, 则该数列发散.

(3) 如果有界数列的收敛子列均收敛到同一个极限, 则该数列收敛.

(4) 有界数列  $\{a_n\}$  不收敛到  $A$  当且仅当存在一个收敛到  $B \neq A$  的子列.

(5)  $\bar{x}$  为  $E$  的聚点当且仅当存在  $E$  中两两不同的点列  $x_n$  使得  $x_n \rightarrow \bar{x}$ .

(6)  $\bar{x}$  为  $E$  的聚点当且仅当存在  $x_n \in E \setminus \{\bar{x}\}$  使得  $x_n \rightarrow \bar{x}$

证明. (1) 设  $\{a_n\}$  收敛到  $a$ , 则  $\forall \varepsilon > 0$ , 有  $N_1$  使得  $n > N_1$  时  $|a_n - a| < \varepsilon$ , 若其有子列  $\{a_{n_k}\}$  收敛到  $b \neq a$ , 则同理存在  $N_2$  使得  $n_k > N_2$  时  $|a_{n_k} - b| < \varepsilon$ , 我们不妨取  $\varepsilon < \frac{|b - a|}{2}$ , 则  $n > N_1 + N_2$  时有

$$|b - a| - \varepsilon \leq |a - b| - |a_n - a| \leq |a_n - a + a - b| < |a_n - b| < \varepsilon,$$

矛盾. 直观的理解是收敛数列的子列收敛到同一极限, 否则将导致原数列发散.

(2)

(3)

(4)

(5)

(6) □

10. 设  $E \subseteq \mathbb{R}$ . 证明存在至多可列集  $F \subseteq E$  使得  $E$  在  $E$  中稠密.

11. 证明: 闭区间  $[a, b]$  不能表示为两个不相交的非空闭集的并.

证明. 反证法, 设  $[a, b] = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$  并且  $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] = \emptyset$ , 可设  $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$ , 若  $a \neq a_1$ , 则或者  $a > a_1$ , 此时  $a_1 \notin [a, b]$ , 或者  $a < a_1$ , 此时  $a \notin [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$  均矛盾, 从而必有  $a = a_1$ , 同理  $b = b_1$ , 但  $(b_1, a_2)$  非空, 易见

$$[a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] = [a, b] \setminus (b_1, a_2),$$

这与假设矛盾, 从而结论成立. □

12. 证明:  $\mathbb{R}$  中既开又闭的集只有空集和  $\mathbb{R}$ .

证明. 参考下一题. □

13. 证明:  $\mathbb{R}^n$  中既开又闭的集只有空集和  $\mathbb{R}^n$ .

证明. 设  $S$  为  $\mathbb{R}^n$  中既开又闭的集合. 因  $S$  是闭集, 故  $\mathbb{R}^n \setminus S$  为开集. 于是  $\mathbb{R}^n = S \cup (\mathbb{R}^n \setminus S)$  是两个不相交开集的并. 由  $\mathbb{R}^n$  的连通性可知  $S$  与  $\mathbb{R}^n \setminus S$  中至少有一为空集, 故  $S = \mathbb{R}^n$  或  $\emptyset$ . □

### 2.4B

1. 设  $x_0 \in (0, 1)$ ,  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$  ( $n \geq 0$ ). 不使用 Stolz 公式, 按以下过程证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0,$$

(2) 对任何  $n \geq 1$ , 成立  $(n+1)x_n < 1$ ,

(3) 从某一项开始,  $\{nx_n\}$  单调有界.

$$(4) \lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1.$$

证明. (1) 易见  $0 < x_n < 1$  且  $x_{n+1} < x_n$ , 从而  $\{x_n\}$  有极限, 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$ , 有  $A = A(1 - A)$ , 即得  $A = 0$ .

(2) 当  $n = 1$  时有  $x_1 = x_0(1 - x_0) \leq \left(\frac{x_0 + 1 - x_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ , 即成立  $(1+1)x_1 < 1$ . 假设对  $x_n$  成立  $(n+1)x_n < 1$ , 则由  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ , 注意到  $f(x) = x(1 - x)$  在  $\left(0, \frac{1}{n+1}\right)$  上单调递增, 则  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n) < \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n^2 + 2n + 1} < \frac{1}{n+2}$ , 由数学归纳法可知对任何  $n \geq 1$  成立  $(n+1)x_n < 1$ .

(3) 易见  $\{nx_n\}$  有界. 并且有

$$(n+1)x_{n+1} - nx_n = (n+1)x_n(1 - x_n) - nx_n = nx_n^2 + x_n - x_n^2 > 0,$$

即  $\{nx_n\}$  单调递增.

(4) 由上述知  $\{nx_n\}$  有极限, 不妨记  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = B$ , 另记  $c_n = nx_n$ . 由 (2) 知

$$c_n < 1 - \frac{c_n}{n}.$$

由于  $\{c_n\}$  有界, 则令  $n \rightarrow +\infty$  得到  $B \leq 1$ . 另一方面, 若  $B < 1$ , 则存在  $k$  使得  $B < k < 1$ , 注意到

$$-\frac{\ln\left(1 - \frac{c_n}{n}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \rightarrow B < k, \quad n \rightarrow +\infty,$$

故  $n$  充分大时, 有  $1 - \frac{c_n}{n} \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-k}$ , 并且由  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$  知  $c_{n+1} = \frac{n+1}{n}c_n\left(1 - \frac{c_n}{n}\right)$ , 有

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{c_n}{n}\right) \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-k},$$

故有  $C_0 > 0$  使得对充分大的  $n$  有  $c_n \geq C_0 n^{1-k}$ , 这与  $\{c_n\}$  有界矛盾. 故  $B = 1$ . □

2. 在习题 2.4 A 的第 5 题中,  $c < -3$  会如何?

解. 我们继续习题 2.4 A 中第 5 题的讨论. 在下面的叙述中, 我们需要使用之前的结论.

(iv)  $-4 \leq c < -3$ . 这种情况下, 与 (iii) 十分类似. 同理, 我们可以得到  $\frac{c}{2} \leq x_n \leq 0$ , 并且也有  $\{x_{2k}\}$  与  $\{x_{2k+1}\}$  收敛. 沿用之前的记号, 得到

$$X_1 = \frac{c}{2} + \frac{X_2^2}{2}, \quad X_2 = \frac{c}{2} + \frac{X_1^2}{2},$$

$$(X_1 - X_2)(X_1 + X_2 + 2) = 0,$$

下面我们证明, 这种情况下,  $X_1 \neq X_2$ . 否则  $\{x_n\}$  收敛到  $X = X_1 = X_2 = 1 - \sqrt{1-c}$ , 由于  $|X| > 1$ , 于是  $n$  充分大时有

$$\left| \frac{x_n + X}{2} \right| > 1,$$

同时考虑到

$$x_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{x_n^2}{2}, \quad X = \frac{c}{2} + \frac{X^2}{2},$$

两式相减得到

$$|x_{n+1} - X| = \left| \frac{x_n + X}{2} \right| \cdot |x_n - X| \geq |x_n - X|,$$

这表明若  $\{x_n\}$  收敛到  $X$ , 必有  $N \in \mathbb{Z}$  使得  $n > N$  时  $x_n = X$ . 由于  $X = \frac{c}{2} + \frac{X^2}{2} > \frac{c}{2} = x_1$ , 故  $N > 1$ . 选取满足  $n = N - 1$  时成立  $x_n \neq X$  的  $N$ , 于是

$$|x_N - X| = \left| \frac{x_{N-1} + X}{2} \right| \cdot |x_{N-1} - X|,$$

这表明  $x_{N-1} = -X$ . 故  $\{x_n\}$  收敛当且仅当  $\exists n$  使得  $x_n = -X$ . 由于  $X = 1 - \sqrt{1-c}$ ,  $-X = \sqrt{1-c} - 1 > 1$ , 而  $x_n < 0$ . 故此时  $\{x_n\}$  不收敛. 即此时有  $X_1 + X_2 + 2 = 0$ .  $\{x_n\}$  有两极限点. 易见其为方程  $x^2 + 2x + (4+c) = 0$  的两个根. 特别的,  $c = -4$  时,  $X_1 = 0, X_2 = -2$ .

(v)  $-8 \leq c < -4$ . 首先  $c = -8$  时. 易见此时收敛并且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 4$ . 当  $-8 < c < -4$  时, 归纳易得  $|x_n| \leq -\frac{c}{2} < 1 + \sqrt{1-c}$ , 即若  $\{x_n\}$  收敛必有  $X = 1 - \sqrt{1-c}$ . 由上面的分析知, 这等价于  $\exists k \geq 2$  使得  $x_k = -X = \sqrt{1-c} - 1$ . 易见  $x_n$  可表成  $c$  得多项式, 即有  $x_k := f_k(c)$ , 由于

$$f_k(-4) \leq 0 < \sqrt{1-(-4)} - 1, \quad f_k(-8) = 4 > \sqrt{1-(-8)} - 1,$$

故对每个  $k \geq 2$  都存在有限个  $c \in (-8, -4)$  使得  $x_k = f_k(c) = \sqrt{1-c} - 1$ . 故此时使  $\{x_n\}$  收敛的值为  $(-8, -4)$  中的可数多个值.

(vi)  $c < -8$ . 此时  $x_1 = \frac{c}{2}, x_2 = \frac{c}{2} + \frac{x_1^2}{2} = \frac{c}{2} + \frac{c^2}{8}$ , 并且此时

$$\frac{c}{2} + \frac{c^2}{8} > 4, \quad \left| \frac{c^2}{8} \right| = \left| \frac{c}{8} \right| \cdot |c| > |c| \Rightarrow \left| \frac{c}{2} + \frac{c^2}{8} \right| > \left| \frac{c}{2} \right|,$$

即此时  $0 < |x_1| < x_2$ , 结合

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{2},$$

可知此时  $\{x_n\}$  单增, 即有  $x_3 > x_2 > 4$ , 于是当  $n > 3$  时,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} (x_n - x_{n-1}) > 4(x_n - x_{n-1}),$$

这意味着  $\{x_n - x_{n-1}\}$  无界, 进而  $\{x_n\}$  无界. 故  $c < -8$  时  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . ■

3. 设  $[a, b]$  上函数  $\{f_n\}$  一致有界, 即存在常数  $M > 0$  使得

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \forall n \geq 1, x \in [a, b],$$

证明存在子函数列  $\{f_{n_k}\}$  在  $[a, b]$  的所有有理数点收敛.

证明. 设  $[a, b]$  上的有理数集为

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

由于  $\{f_n\}$  一致有界, 则对  $\forall x_0 \in [a, b]$ ,  $\{f_n(x_0)\}$  都是  $\mathbb{R}$  中的有界列, 由 Bolzano-Weierstrass 定理可知, 其有收敛子列. 设对于  $a_1$ , 子列  $\{f_{1_k}\}$  收敛, 则对于  $a_2$ , 抽取  $\{f_{1_k}\}$  的子列  $\{f_{2_k}\}$ , 则  $\{f_{2_k}\}$  对于  $a_1, a_0$  都收敛, 在  $f_{2_k}$  中选取子列  $f_{3_k}$  使得  $\{f_{3_k}(a_3)\}$  收敛, 并以此类推. 这就完成了证明. □

4. 设整数  $m \geq 1$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{m + \sqrt{m+1 + \sqrt{m+2 + \cdots + \sqrt{m+n}}}}$  存在, 并记该极限为  $a_m$ . 进一步, 计算  $\lim_{m \rightarrow +\infty} (a_m - \sqrt{m})$ .

解. 记原连根式为  $A_n^{(m)}$ , 关于  $n$  单增, 只需证其存在上界, 反复利用

$$\sqrt{m+x} \leq \sqrt{m} \left(1 + \frac{x}{2m}\right), \quad \forall x \geq 0,$$

令  $\alpha_m = \frac{1}{2\sqrt{m}}$ , 可得

$$A_n^{(m)} \leq \sqrt{m} \sum_{k=0}^n \alpha_m^k + \sum_{k=1}^n k \alpha_m^{k+1} \leq \sqrt{m} + \frac{\sqrt{m} \alpha_m}{1 - \alpha_m} + \left(\frac{\alpha_m}{1 - \alpha_m}\right)^2,$$

故  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^{(m)} = a_m$  存在, 且

$$\sqrt{m + \sqrt{m}} \leq a_m \leq \sqrt{m} + \frac{\sqrt{m} \alpha_m}{1 - \alpha_m} + \left(\frac{\alpha_m}{1 - \alpha_m}\right)^2,$$

可得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_m - \sqrt{m}) = \frac{1}{2}$ . ■

5. 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \cdots + n\sqrt{1 + (n+1)}}}}} = 3$ .

证明. 令

$$f(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + (x+2)\sqrt{1 + \cdots}}} \quad (x \geq 1),$$

那么  $f(x)$  满足函数方程

$$f^2(x) = 1 + xf(x+1).$$

因为  $(x+1)^2 = 1 + x(x+2)$ , 所以函数  $x+1$  是它的一个解. 我们来证明这是唯一解.

显然, 当  $x \geq 2$  时有

$$f(x) \geq \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \cdots}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/2+1/2^2+\cdots+1/2^n} = x > \frac{1}{2}(x+1).$$

并且

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \sqrt{(x+1) \sqrt{(x+2) \sqrt{(x+3) \sqrt{(x+4) \cdots}}} \\ &< \sqrt{(x+1) \sqrt{2(x+1) \sqrt{4(x+1) \sqrt{8(x+1) \cdots}}} \\ &= \sqrt{(x+1) \sqrt{(x+1) \sqrt{(x+1) \sqrt{(x+1) \cdots}}} \sqrt{1 \sqrt{2 \sqrt{4 \sqrt{8 \cdots}}}, \end{aligned}$$

上式右边第一个因子等于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x+1)^{1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n} = x+1,$$

依据  $\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)2^{-k} = 1$ , 第二个因子等于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1^{1/2} 2^{1/4} 4^{1/8} \cdots (2^{n-1})^{1/2^n} = 2,$$

所以

$$f(x) < 2(x+1).$$

合起来就是

$$\frac{1}{2}(x+1) < f(x) < 2(x+1).$$

在上面的不等式中易  $x$  为  $x+1$  得

$$\frac{1}{2}(x+2) < f(x+1) < 2(x+2),$$

而由函数方程  $f^2(x) = 1 + xf(x+1)$  可知

$$\frac{1}{2} + xf(x+1) < f^2(x) < 2 + xf(x+1).$$

由上述两式推出

$$\frac{1}{2}(1 + x(x+2)) < f^2(x) < 2(1 + x(x+2)),$$

亦即

$$\frac{1}{2}(x+1)^2 < f^2(x) < 2(x+1)^2,$$

因此得到

$$\sqrt{\frac{1}{2}}(x+1) < f(x) < \sqrt{2}(x+1).$$



重复上述过程, 也就是说, 首先在上式中易  $x$  为  $x+1$  得

$$\sqrt{\frac{1}{2}}(x+2) < f(x+1) < \sqrt{2}(x+2),$$

并且由函数方程可知

$$\sqrt{\frac{1}{2}} + xf(x+1) < f^2(x) < \sqrt{2} + xf(x+1).$$

于是从两式推出

$$\sqrt{\frac{1}{2}}(1+x(x+2)) < f^2(x) < \sqrt{2}(1+x(x+2)),$$

因而得到

$$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}(x+1) < f(x) < \sqrt[4]{2}(x+1).$$

一般地, 应用数学归纳法可证

$$\sqrt[2^k]{\frac{1}{2}}(x+1) < f(x) < \sqrt[2^k]{2}(x+1).$$

在其中令  $k \rightarrow \infty$  即得  $x+1 \leq f(x) \leq x+1$ . 这样, 我们最终得到  $f(x) = x+1$ . 对应于原极限知其为 3. □

#### 6. 推广第 5 题.

解. 结合第 5 题的证明可以得到如下结果:

$$\sqrt{1+a\sqrt{1+(a+1)\sqrt{1+(a+2)\sqrt{1+\cdots}}}} = a+1, \quad a \geq 1. \quad \blacksquare$$

7. 证明命题 2.4.1: 设  $\{A_k\}$  是  $\mathbb{S}^n$  中 Loewner 偏序意义下的单调有界列, 则  $\{A_k\}$  收敛.

证明. □

8. 在 Loewner 偏序意义下, 设  $E$  是  $\mathbb{S}^n$  中的非空上有界集, 证明或否定:  $E$  一定有最小上界.

9. 设  $x_0 > 0$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$  ( $n \geq 0$ ). 问:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n(2-x_n)$  是否存在? 该极限存在时, 能否得到极限的值?

解. 当  $0 < x_0 < 2$  时, 令  $x_0 = 2 \cos \alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ), 则有  $x_1 = \sqrt{2+2 \cos \alpha} = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$ , 归纳可得

$$x_n = 2 \cos \frac{\alpha}{2^n},$$

此时  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n(2-x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n \left(2 - 2 \cos \frac{\alpha}{2^n}\right) = \alpha^2$ .

当  $x_0 \geq 2$  时, 令  $x_0 = \frac{1}{\alpha} + \alpha$  ( $\alpha > 0$ ), 则有  $x_1 = \sqrt{2+\alpha+\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}$ , 归纳可得

$$x_n = \alpha^{-1/2^n} + \alpha^{1/2^n},$$

此时  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n(2-x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n (2 - \alpha^{-1/2^n} - \alpha^{1/2^n}) = \ln^2 \alpha$ . □

10. 一般地, 对于所求过的极限, 可考虑进一步的结果, 例如, 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$ , 试试能否找到一个无穷大  $y_n$  使得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(x_n - A)$  为一个非零常数.

这是可能的.

11. 固定  $r \in (0, 4)$ , 任取  $x_0 \in (0, 1)$ , 令  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) (n \geq 0)$ . 问  $r$  取什么值时, 可以证明对于任何  $x_0 \in (0, 1)$ , 按上述方式定义的  $\{x_n\}$  一定收敛?

试编写一计算机程序, 感受对于不同的  $r$ , 当  $n$  足够大时  $x_n$  的收敛情况.

解. 由  $0 < x_0 < 1$ , 如果  $x_n \in (0, 1)$ , 则

$$0 < x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \leq r \left( \frac{x_n + 1 - x_n}{2} \right)^2 = \frac{r}{4} < 1,$$

由归纳法可知  $x_n \in (0, 1)$ . 下面我们分情况对  $r$  的范围进行讨论.

(i)  $0 < r \leq 1$ . 易见  $\{x_n\}$  单调有界, 设其收敛于  $A$ , 则有  $A = rA(1 - A)$ , 则或者  $A = 0$ , 或者  $A = 1 - \frac{1}{r}$ , 但此时  $1 - \frac{1}{r} < 0 (r \neq 1)$ , 这是不可能的, 故  $A = 0$ .

(ii)  $r > 1$

■

12. 设  $\mathcal{U}$  和  $\mathcal{V}$  都是  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  的覆盖. 称  $\mathcal{V}$  是  $\mathcal{U}$  的加细, 如果对于任何  $V \in \mathcal{V}$  存在  $U \in \mathcal{U}$  使得  $V \subseteq U$ .

对于  $\lambda > 0$ , 若  $\{B_\lambda(x) | x \in E\}$  是  $\mathcal{U}$  的加细, 则称  $\lambda$  为覆盖  $\mathcal{U}$  的 Lebesgue 数. 易见, 若  $E$  的一个子集  $F$  的直径小于 Lebesgue 数  $\lambda$ , 则可在  $\mathcal{U}$  中找到元素  $V$  包含  $F$ .

试证明 Lebesgue 覆盖定理: 设  $\mathcal{U}$  为紧集  $E \subset \mathbb{R}$  的开覆盖, 则它存在 Lebesgue 数.

证明.

□

13. 考虑线性空间

$$X = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty \mid \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < +\infty \right\},$$

在其上定义

$$\|\{x_n\}\| = \left( \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 \right)^{1/2}, \quad d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \|\{x_n - y_n\}\|.$$

证明  $\|\cdot\|$  是  $X$  上的范数, 并以此范数定义收敛性, 开闭集等. 证明:

(1) 在  $X$  上, Cauchy 准则成立.

(2) 在  $X$  上, 致密性定理不成立, 即有界点列不一定有收敛子列.

(3) 设  $\{x_k\}$  是  $X$  中的点列, 它的每一个分量都有界, 即记  $x_k = \{x_{k,n}\}_{n=1}^\infty$  时, 对任何  $n \geq 1$ ,  $\{x_{k,n}\}_{k=1}^\infty$  是有界集. 证明: 存在  $\{x_k\}$  的子列使得其每一个分量都收敛.

(4) 在  $X$  上, 有限覆盖定理不成立.

(5) 在  $X$  上, 闭区间套定理成立. 即若  $\{F_k\}$  是  $X$  中的一列单调下降且直径趋于零的闭集列, 则  $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$  为单点集.

(6)  $X$  中存在一列有界非空闭集  $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$  使得  $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$  为空集.

证明. □

14. 回答下列问题.

(1) 在  $[-\infty, +\infty]$  中<sup>a</sup>, 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  或  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ , 我们就称  $\{a_n\}$  收敛到  $+\infty$  或  $-\infty$ . 试重新考察习题 A 中的第 9 题.

(2) 对于  $E \subseteq [-\infty, +\infty]$ , 若存在  $a \in \mathbb{R}$  使得  $(a, +\infty] \subseteq E$  ( $[-\infty, a) \subseteq E$ ), 则称  $+\infty$  ( $-\infty$ ) 为  $E$  的内点. 若  $U \subseteq [-\infty, +\infty]$  的所有点都是其内点, 则称  $U$  为  $[-\infty, +\infty]$  的开集. 考虑在  $[-\infty, +\infty]$  中, 哪些集合是紧集, 即  $[-\infty, +\infty]$  中满足任何开覆盖都有有限子覆盖的集合.

15. 设  $E \in \mathbb{R}$ , 则  $E$  满足什么条件时, 成立: 对于  $E$  的任何闭覆盖, 均有有限子覆盖.

解. ■

16\*. 设  $U$  为  $\mathbb{R}$  中的非空开集, 证明:

(1) 若  $x_0 \in U$ , 则存在唯一的开区间  $(\alpha, \beta)$ —这样的区间称为  $U$  的构成区间, 满足:

(i)  $x_0 \in (\alpha, \beta) \subseteq U$ ; (ii) 若  $x_0 \in (a, b) \subseteq U$ , 则  $(a, b) \subseteq (\alpha, \beta)$ .

(2)  $U$  可以表示为至多可列个两两不交的构成区间的并.

证明. (1) 由于  $x_0 \in U$  是  $U$  的内点, 所以集合

$$A := \{y \in U \mid y < x_0 \text{ 且 } (y, x_0) \subseteq U\}$$

非空, 定义  $\alpha = \inf A$ . 那么  $-\infty \leq \alpha < x_0$ , 并且  $(\alpha, x_0) \subseteq U$ . 如果  $\alpha$  是实数, 那么根据  $\alpha$  的定义, 必有  $\alpha \notin U$ .

同理, 定义集合

$$B := \{y \in U \mid x_0 < y \text{ 且 } (x_0, y) \subseteq U\},$$

取  $\beta = \sup B$ , 则由  $\alpha, \beta$  的定义可见

$$x_0 \in (\alpha, \beta) \subseteq U,$$

并且若  $x_0 \in (a, b) \subseteq U$ , 则  $(a, b) \subseteq (\alpha, \beta)$ .

(2) 把全体具有这样性质的开区间所构成的集合记为  $\mathcal{G}$ , 那么  $\mathcal{G}$  中任意两个元素作为开区间都不交. 从它的每一个元素中选取一个有理数与之对应, 全体这样的有理数集合记为  $S$ , 那么  $\mathcal{G}$  与  $S$  一一对应, 而  $S$  是  $\mathbb{Q}$  的子集, 从而是可数集, 从而结论得证. □

17. 设  $\{x_n\}$  是在  $[0, 1]$  中稠密的点列, 任取  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ,  $E = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(x_n - \frac{\alpha}{2^n}, x_n + \frac{\alpha}{2^n}\right)$ . 证明  $E$  为非空的疏朗集.

证明. ?

□

18. 证明: 闭区间  $[a, b]$  不能表示为至多两个但至多可列个两两不交的非空闭集的并.

证明.

□

19. 证明:  $\mathbb{R}^n$  不能表示成一系列无处稠密集<sup>a</sup>的并.

证明.

□

20. 设  $\{V_k\}$  是一列在  $\mathbb{R}^n$  中稠密的开集, 证明:  $\bigcap_k V_k$  在  $\mathbb{R}$  中稠密.

证明.

□

<sup>a</sup>以下说法在  $\mathbb{R}$  中不适用

## 2.5 上、下极限

### 2.5 A

1. 若  $x_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ , 且  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = 1$ . 证明序列  $\{x_n\}$  收敛.

证明. 由于

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n}{\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n} = 1,$$

从而有  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} x_n$ , 故  $\{x_n\}$  收敛.

□

2. 设  $\{x_n\}$  满足  $0 \leq x_{m+n} \leq x_m \cdot x_n (\forall m, n \geq 1)$ . 证明  $\{\sqrt[n]{x_n}\}$  收敛.

证明. 易见

$$0 \leq x_n \leq x_{n-1} \cdot x_1 \leq \dots \leq x_1^n.$$

从而  $\sqrt[n]{x_n} \leq x_1$ , 故  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n}$  有限. 给定正整数  $p$ , 使得  $n = kp + r$ , 其中  $k \geq 0, 0 \leq r < p$ , 于是

$$x_n = x_{pk+r} \leq x_{pk} \cdot x_r \leq x_p^k \cdot x_r,$$

即有

$$\sqrt[n]{x_n} \leq \sqrt[p]{x_p^k \sqrt[r]{x_r}} \leq \sqrt[p]{x_p} \sqrt[r]{x_r},$$

注意到  $x_r \in \{x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$  有界, 令  $n \rightarrow +\infty$  得到

$$\sqrt[n]{x_n} \leq \sqrt[p]{x_p}$$

对任意  $p$  都成立, 于是有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{x_n} \leq \underline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{x_p}.$$

依上、下极限的性质, 反向不等式也成立, 从而目标序列收敛.  $\square$

3. 举例说明, 在第2题中,  $\{\sqrt[p]{x_n}\}$  可以没有单调性.

解.  $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 1, x_5 = 2, \dots$   $\blacksquare$

4. 设  $\{a_n\}$  满足  $a_m + a_n - 1 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n + 1 (\forall m, n \geq 1)$ . 求证:

(1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$  存在.

(2) 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = q$ , 则  $nq - 1 \leq a_n \leq nq + 1$ .

证明.  $\square$

5. 设  $r \in (0, 1), x_0 = 0, x_{n+1} = r(1 - x_n^2) (n = 0, 1, 2, \dots)$ . 试探究  $\{x_n\}$  的敛散性.

解. 易见  $0 < x_n < 1 (n \geq 1)$  有界. 我们先证明这样一件事: 对于正整数  $m$ , 只要  $k > 2m + 1$ , 则  $x_k < x_{2m+1}$ . 当  $m = 0$  时,  $2m + 1 = 1$ , 易见  $k > 1$  有  $x_k = r(1 - x_{k-1}^2) < r = x_1$  成立, 假设对  $m \in \mathbb{N}_+$  成立, 考虑  $m + 1$  时

$$k > 2(m + 1) + 1 \Rightarrow k - 2 > 2m + 1,$$

又由

$$x_{k-1} = r(1 - x_{k-2}^2) > r(1 - x_{2m+1}^2) = x_{2m+2} \Rightarrow x_k = r(1 - x_{k-1}^2) < r(1 - x_{2m+2}^2) = x_{2(m+1)+1},$$

从而由数学归纳法可知结论成立. 特别的,  $\{x_{2k+1}\}$  严格单调递减. 同理可证对于  $m \in \mathbb{N}$ , 若  $k > 2m$ , 则  $x_k > x_{2m}$ , 即得  $\{x_{2k}\}$  严格单调递增. 从而可设  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} = A, \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k+1} = B$ .

对于  $x_{n+1} = r(1 - x_n^2)$ , 分别令  $n = 2k - 1, 2k$  再令  $k \rightarrow +\infty$  可得

$$A = r(1 - B^2), \quad B = r(1 - A^2),$$

两式相减得到  $(A - B)(1 - r(A + B)) = 0$ . 即或者  $A = B$ , 或者  $1 - r(A + B) = 0$ , 注意到

$$x_{2n+1} + x_{2n} = r(1 - x_{2n}^2) + x_{2n} \Rightarrow A + B = r(1 - A^2) + A,$$

代入  $1 - r(A + B) = 0$  有

$$r^2 A^2 - rA - r^2 + 1 = 0 \Rightarrow \left(rA - \frac{1}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{3}{4},$$

这意味着  $r^2 < \frac{3}{4}$  时, 即  $0 < r < \frac{\sqrt{3}}{2}$  时  $1 - r(A + B) = 0$  无解, 此时只能有  $A = B$ , 结合式递推公式可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\sqrt{4r^2 + 1} - 1}{2r}$ . 考虑  $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$  时, 有

$$x_{2k+1} = r(1 - x_{2k}^2) = r(1 - r^2(1 - x_{2k-1}^2)^2) \Rightarrow r^3 B^4 - 2r^3 B^2 + B + r^3 - r = 0,$$

得  $\frac{3\sqrt{3}}{8}B^4 - \frac{3\sqrt{3}}{4}B^2 + B - \frac{\sqrt{3}}{8} = 0$ , 即

$$\frac{3\sqrt{3}}{8} \left( B - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^3 (B + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow B = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

同理可得  $A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

下证  $\frac{\sqrt{3}}{2} < r < 1$  时  $\{x_n\}$  发散. 只需要证明  $A \neq B$ . 由上述的分析注意到

$$r^3 B^4 - 2r^3 B^2 + B + r^3 - r = 0 \Rightarrow (B^2 r - r + B)(B^2 r^2 - Br - r^2 + 1) = 0,$$

考虑  $B^2 r^2 - Br - r^2 + 1 = 0$  的解, 记

$$C = \frac{1 - \sqrt{4r^2 - 3}}{2r}, \quad D = \frac{1 + \sqrt{4r^2 - 3}}{2r},$$

我们证明, 对于任何  $m \in \mathbb{N}_+$ , 有  $x_{2m} < C, x_{2m+1} > D$ . 但当  $\frac{\sqrt{3}}{2} < r < 1$  时有  $0 < C < \frac{\sqrt{3}}{3} < D < 1$ , 进而  $0 \leq A \leq C < \frac{\sqrt{3}}{3} < D \leq B \leq 1$ , 即得  $A \neq B$ , 从而  $\{x_n\}$  发散. 事实上, 注意到

$$C^2 = \frac{4r^2 - (2 + 2\sqrt{4r^2 - 3})}{4r^2} = 1 - \frac{D}{r}, \quad D^2 = \frac{4r^2 - (2 - 2\sqrt{4r^2 - 3})}{4r^2} = 1 - \frac{C}{r},$$

当  $m = 0$  时,  $x_0 = 0 < C, x_1 = r > D$ . 假设对  $m \in \mathbb{N}_+$  成立, 考虑  $m + 1$  时

$$x_{2(m+1)} = r(1 - x_{2m+1}^2) < r(1 - D^2) = C, \quad x_{2(m+1)+1} = r(1 - x_{2(m+1)}^2) > r(1 - C^2) = D,$$

由数学归纳法可知结论成立. 综上,  $r \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], \{x_n\}$  收敛,  $r \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$  时  $\{x_n\}$  发散. ■

6. 设  $0 < q < 1, a_n, b_n$  满足:  $a_n = b_n - qa_{n+1} (n = 1, 2, \cdots)$ , 且  $a_n, b_n$  有界. 求证:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$  存在的充要条件是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  存在.

证明. □

7. 在第6题中当  $q \notin (0, 1)$  时, 结论会怎样?

解. ■

8. 设  $a_n \geq 0$  满足  $a_{n+1} \leq a_n + \frac{1}{n^2}$ , 证明:  $\{a_n\}$  收敛.

证明. 由题意知

$$a_{n+1} \leq a_n + \frac{1}{n^2} \leq a_n + \frac{1}{n(n-1)} = a_n + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Rightarrow a_{n+1} + \frac{1}{n} \leq a_n + \frac{1}{n-1},$$

于是  $\left\{a_n + \frac{1}{n-1}\right\}$  递减且有下界. 故  $\left\{a_n + \frac{1}{n-1}\right\}$  收敛. 而  $a_n = a_n + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1}$  也收敛. □

9. 利用上下极限证明  $\mathbb{R}$  中的 Cauchy 准则.

证明. □

## 2.5 B

1. 推广习题 2.5 A 中的第 2 题和第 4 题.

解. ■

2. 设  $x \in \mathbb{R}$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ .

证明. 我们先证明这样一个事实: 设  $h: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  满足  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ , 也就是说, 不论实数  $A$  多么大, 都能找到实数  $B$  使得当  $x > B$  时,  $h(x) > A$  成立, 那么

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{h(x)}\right)^{h(x)} = e.$$

记  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{h(x)}\right)^{h(x)}$ , 考虑充分大的  $x$  使得  $h(x) > 1$ . 记

$$[h(x)] = m, h(x) - m = \alpha \in [0, 1),$$

其中  $[x]$  指不超过  $x$  的最大整数, 那么

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+\alpha} &< f(x) \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+\alpha}, \\ \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{\alpha-1} e_{m+1} &< f(x) \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\alpha} e_m. \end{aligned}$$

其中  $e_m := \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ . 令  $x \rightarrow +\infty$ , 这暗含着  $m \rightarrow +\infty$ , 即得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$ .

回到题目的证明:  $x = 0$  时的情形不需考虑. 设  $x \neq 0$ . 记  $h_n = h_n(x) = \frac{x}{n}$ , 则由上述结果有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + h_n)^{1/h_n} = e.$$

两边取  $x$  次幂, 有

$$e^x = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + h_n)^{1/h_n} \right)^x,$$

下面我们仅需说明

$$\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + h_n)^{1/h_n} \right)^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + h_n)^{x/h_n},$$

就完成了证明.

为此, 我们证明下面的定理: 设  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) := x^\alpha$ ,  $x > 0$ , 则  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x+y) = f(x)$ . 这正是对幂函数连续性的刻画. 即证明  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ , 只要  $|y| < \delta$ , 就有

$$|f(x+y) - f(x)| < \varepsilon.$$

设  $|y| < x$ . 这保证  $x+y > 0$ , 有

$$f(x+y) - f(x) = f(x) \left( \left(1 + \frac{y}{x}\right)^\alpha - 1 \right),$$

记  $h = \frac{y}{x}$ , 并记  $m = [\alpha] + 1$ , 分两种情形讨论:

(1)  $0 \leq h < 1$ . 此时

$$0 \leq (1+h)^\alpha - 1 \leq (1+h)^m - 1 = h \sum_{k=1}^m (1+h)^{m-k} \leq h(m \cdot 2^m).$$

(2)  $-1 \leq h < 0$ . 此时

$$0 \leq 1 - (1+h)^\alpha \leq 1 - (1+h)^m = -h \sum_{k=1}^m (1+h)^{m-k} \leq -h(m \cdot 2^m).$$

总之,

$$|f(x+y) - f(x)| = f(x) |(1+h)^\alpha - 1| \leq |h| (m \cdot 2^m).$$

由此可见,  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ , 取  $\delta = \frac{\varepsilon x}{m \cdot 2^m}$ , 就对于满足  $|y| < \delta$  的  $y$  成立  $|f(x+y) - f(x)| < \varepsilon$ . 这就完成了证明.  $\square$

3. 证明: 对任何  $x \in \mathbb{R}$  成立  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

证明. 我们定义  $T_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ , 由上一题的结论可知对于任何  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\{T_n(x)\}$  都是 Cauchy 列. 再设  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ . 则对于  $m > n > 2N$ , 其中  $N = [|x|] + 1$ , 有

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{N^k}{k!} < \sum_{k=n+1}^m \frac{N^k}{(2N)^{k-2N}} = (2N)^{2N} \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^k < \frac{(2N)^{2N}}{2^n},$$

所以对于一切实数  $x$ ,  $\{S_n(x)\}$  是 Cauchy 列.

另一方面, 当  $n > 2$  时,

$$S_n(x) - T_n(x) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right) x^k,$$

注意到当  $k \geq 2$  时,

$$0 < 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{1 + \cdots + (k-1)}{n} = \frac{k(k-1)}{2n},$$

得到

$$|S_n(x) - T_n(x)| \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^n \frac{|x|^k}{(k-2)!} = \frac{x^2}{2n} S_{n-2}(|x|),$$

从而对于一切实数  $x$ , 数列  $\{S_n(x)\}$  与  $\{T_n(x)\}$  等价. 因此有  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .  $\square$

4. 设  $\{x_n\}$  是正数列, 证明  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1 \right) \geq 1$ .

证明. 设  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n \left( \frac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1 \right) < 1$ , 则  $\exists N > 0$ , 当  $n \geq N$  时,

$$n \left( \frac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1 \right) < 1,$$



此即  $\frac{1}{n+1} < \frac{x_n}{n} - \frac{x_{n+1}}{n+1} (n = N, N+1, \dots, N+k-1, \dots)$ . 这是无穷多个不等式, 将前  $k$  个不等式相加得

$$\frac{1}{N+1} + \dots + \frac{1}{N+k} < \frac{x_N}{N} - \frac{x_{N+k}}{N+k} < \frac{x_N}{N}.$$

此式应对一切  $k > 1$  成立, 但实际上, 左端当  $k \rightarrow +\infty$  时, 极限为  $+\infty$ , 矛盾.

事实上, 本题有如下推广: 设  $\{a_n\}$  为任意正数列,  $p$  是任意给定的正整数, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_1 + a_{n+p}}{a_n} \right) > e^p, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} n \left( \frac{1 + a_{n+p}}{a_n} - 1 \right) > p,$$

上述不等式中的  $p$  不可用更大的数代替, 并且上述两个不等式等价. □

5. 设  $f$  是  $\mathbb{R}$  上周期为 1 的实函数. 满足:  $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ , 成立  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ . 任取  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 定义  $x_{n+1} = f(x_n) (n \geq 0)$ . 证明:  $\{x_n\}$  收敛, 且极限不依赖于  $x_0$  的选择.

证明. □

## 2.6 正项级数

### 2.6 A

1\*. 设  $\{a_n\}$  为一正数列. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

证明. 设  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < \infty$ , 证明  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq a$  □

2. 讨论以下级数的收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 5}{n^4 + 4n + 7}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 100n + 1} \cos \frac{1}{n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right); \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^{\alpha}.$$

解. (1) 由于  $\frac{n^3 + 2n + 5}{n^4 + 4n + 7} \sim \frac{1}{n}$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 5}{n^4 + 4n + 7}$  发散.

(2) 由于  $\frac{1}{n^2 - 100n + 1} \cos \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2 - 100n + 1} \sim \frac{1}{n^2}$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 100n + 1} \cos \frac{1}{n}$  收敛;

(3) 由于  $\ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \leq \frac{1}{n^2}$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$  收敛;

(4) 注意到

$$3 = \frac{2+4}{2} > \sqrt{2 \times 4},$$

$$5 = \frac{4+6}{2} > \sqrt{4 \times 6},$$

$\vdots$

$$2n-1 = \frac{(2n-2) + 2n}{2} > \sqrt{(2n-2) \cdot 2n},$$

$$2 = \frac{1+3}{2} > \sqrt{1 \times 3},$$

$$4 = \frac{3+5}{2} > \sqrt{3 \times 5},$$

$\vdots$

$$2n = \frac{(2n-1) + (2n+1)}{2} > \sqrt{(2n-1)(2n+1)},$$

于是有

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^\alpha < \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^\alpha < \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)^\alpha,$$

于是当  $\alpha > 2$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^\alpha$  收敛, 其余情况发散. ■

3. 举例说明, 当  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$  时, 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  既可能收敛也可能发散.

解. 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  均有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ , 但前者发散而后者收敛. ■

4. 设  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$ . 证明: 若  $\sum_{n=0}^n a_n$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ .

证明. 对于任何  $m$  与  $n > m$ , 我们有

$$(n-m)a_n < a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n < \alpha_m,$$

其中  $\alpha_m$  为该收敛级数的余式, 由此得  $na_n < \frac{n}{n-m}\alpha_m$ . 由于级数  $\sum_{n=0}^n a_n$  收敛, 故对于任给得  $\varepsilon > 0$ , 则存在  $M$  使得  $\alpha_M < \varepsilon$ . 其次, 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-M} = 1$ , 故存在  $N (N > M)$ , 使得  $n \geq N$  时有  $\frac{n}{n-M} < 2$ . 于是, 当  $n \geq N$  时, 有  $0 < na_n < 2\varepsilon$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ . □

5. 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a$ . 证明  $a = 0$ .

证明. 反证法. 若  $a \neq 0$ , 则由  $a_n > 0$  知  $a > 0$ , 结合  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a$  可知对于  $\forall 0 < \varepsilon < a$ , 存在  $N$ , 使得  $n > N$  时有

$$na_n > a - \varepsilon, \quad \text{即} \quad a_n > \frac{a - \varepsilon}{n},$$

由于  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 由此推知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  收敛, 矛盾. □

6. 讨论级数  $\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^p + \cdots$  的收敛性.

解. 该题与 2.6 A 第 2 题的第 (4) 题是完全相同的. 这里给出另一种方法. 由于  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p$ , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{p}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{p}{2},$$

由 Rabba 判别法, 知当  $p > 2$  时, 级数收敛. ■

7. 研究数列  $\left\{ \frac{1}{1+\alpha} \frac{2}{2+\alpha} \cdots \frac{n}{n+\alpha} \right\}$  当  $n$  趋于无穷时候的阶, 其中  $\alpha$  是一个非负常数.

解. 当  $n$  趋于无穷时, 由 String 公式可得

$$\prod_{k=1}^n \left( \frac{k}{k+\alpha} \right) = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}{\sqrt{2\pi(n+\alpha)}((n+\alpha)/e)^{n+\alpha}} \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^\alpha}. \quad \blacksquare$$

8. 研究级数  $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^p(\ln n)^q(\ln \ln n)^r}$  的敛散性, 其中  $p, q, r$  为实数.

解. 当  $p > 1$  时, 令  $p = 1 + 2\varepsilon, \varepsilon > 0$ , 则

$$\frac{n^{1+\varepsilon}}{n^p(\ln n)^q(\ln \ln n)^r} = \frac{n^{1+\varepsilon}}{n^{1+2\varepsilon}(\ln n)^q(\ln \ln n)^r} = \frac{1}{n^\varepsilon(\ln n)^q(\ln \ln n)^r} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

由  $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$  收敛可知  $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^p(\ln n)^q(\ln \ln n)^r}$  收敛.

当  $p < 1$  时, 令  $p = 1 - 2\varepsilon, \varepsilon > 0$ , 则

$$\frac{n^{1-\varepsilon}}{n^p(\ln n)^q(\ln \ln n)^r} = \frac{n^{1-\varepsilon}}{n^{1-2\varepsilon}(\ln n)^q(\ln \ln n)^r} = \frac{n^\varepsilon}{(\ln n)^q(\ln \ln n)^r} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty,$$

由  $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$  发散可知  $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^p(\ln n)^q(\ln \ln n)^r}$  发散.

当  $p = 1$  时. ■

### 2.6 B

1. 给定  $0 \leq l \leq 1 \leq L \leq +\infty$ , 是否存在收敛或发散的级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  使得  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ , 且  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ ?

解. 存在, 可设  $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n = 2k, \\ \frac{1}{4^n}, & n = 2k+1 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ , 于是  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ , 且  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ . ■

2. 利用与级数  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$  比较, 仿 Raabe 判别法给出一个判别定理.

解. 根据例 2.6.4, 我们已经知道, 级数  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$  当且仅当  $p > 1$  时收敛. 于是我们有

$$\begin{aligned} & \text{正项级数 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ 收敛.} \\ & \iff \exists p > 1, M > 0, N \geq 3, \text{ s.t. } \forall n \geq N, \quad a_n \leq \frac{M}{n \ln^p n} \\ & \iff \exists p > 1, M > 0, N \geq 3, \text{ s.t. } \forall n \geq N, \quad p \leq \frac{\ln M - \ln n - \ln a_n}{\ln(\ln n)} \\ & \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln n - \ln a_n}{\ln(\ln n)} > 1 \\ & \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n + \ln a_n - \ln(n+1) - \ln a_{n+1}}{\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n)} > 1 \\ & \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{n}{n+1} + \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}}{\ln \left( \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \right)} > 1 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n} + \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1}{\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - 1} > 1 \\ & \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right)}{n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} > 1 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) > 1. \end{aligned}$$

同理可证  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) < 1$  时  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  发散. ■

3. 试考察不可数个正数的和.

## 2.7 任意项级数

### Theorem 2.7.1: Mertens 定理

设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛到  $A$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛到  $B$ , 则他们的 Cauchy 乘积  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  收敛到  $AB$ .

### 2.7A

1. 讨论以下级数的收敛性 (包括绝对收敛性):

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right); & (2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}; \\ (3) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \left( n + \frac{1}{n} \right); & (4) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n + (-1)^n)}{n}. \end{aligned}$$

解. (1) 由于

$$\frac{1}{n} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} - \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

故该级数收敛且绝对收敛.

(2) 记  $a_n = \frac{n^n}{n!}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ . 从而  $x \in \left( -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right)$  时收敛, 并且绝对

收敛. 当  $x = \frac{1}{e}$  时, 有

$$\frac{n^n}{n!e^n} = \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n e^n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

从而发散. 当  $x = -\frac{1}{e}$ , 易见其为 Leibniz 级数, 即得条件收敛.

(3) 注意到  $\sin\left(n + \frac{1}{n}\right) \sim \sin n$ , 而

$$\sum_{k=1}^n \sin k = \frac{\sum_{k=1}^n 2 \sin k \sin(1/2)}{2 \sin(1/2)} = \frac{\sum_{k=1}^n \left( \cos \frac{2k-1}{2} - \cos \frac{2k+1}{2} \right)}{2 \sin(1/2)} = \frac{\cos \frac{1}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}}{2 \sin(1/2)},$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$  部分和有界,  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$  单调递减趋于零, 故由 Dirichlet 判别法知该级数收敛. 但

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(n + \frac{1}{n}\right) \right| \sim \left| \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \right| > \left| \frac{\sin n}{n} \right|,$$

后者发散, 故为条件收敛.

(4) 条件收敛. ■

2. 证明对于任何  $x$ , 级数  $\sin x - \sin \sin x + \sin \sin \sin x - \sin \sin \sin \sin x + \cdots$  收敛.

证明. 不妨设  $a_0 = x \in (0, \pi)$ ,  $a_{n+1} = \sin a_n$  ( $n \geq 1$ ), 于是原级数即为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ , 易见  $\{a_n\}$  单调递减趋于零, 由 Leibniz 判别法可知该级数收敛. 若  $a_0 = x \in (-\pi, 0)$ , 则  $-x \in (0, \pi)$ , 原级数即为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ , 同理可获结论. 结合  $\sin x$  的周期性易见对于任何  $x$ , 结论成立. □

3. 设有级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$  由级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  加括号得到, 即  $A_n = \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k$ , 其中  $\{p_n\}$  是严格单增的正整数列,  $p_1 = 1$ . 证明:

(1) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$  收敛.

(2) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $\{p_{n+1} - p_n\}$  有界,  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

4. 级数  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots$  是否收敛?

解. 易见

$$1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, \cdots,$$

部分和有界, 而  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$  单调递减趋于 0, 依 Dirichlet 判别法知其收敛. ■

5. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  通过重排可以发散到  $+\infty$  以及  $-\infty$ .

证明. 由  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 可知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  都发散到正无穷, 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^- = 0$ . 我们这样排列: 先按原来的顺序选取若干正项, 使其和大于 1, 然后添加第一个负项, 然后在余下的正项中继续选取, 使得整个和大于 2, 然后添加第二个负项, 依此类推. 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^- = 0$ , 故  $n$  充分大时  $a_n^-$  可以任意小, 从而可知由上法得到的级数将发散到  $+\infty$ , 相似的操作方式可使其发散到  $-\infty$ .  $\square$

6. 试利用 Dirichlet 判别法证明 Abel 判别法.

证明. 若数列  $\{b_n\}$  单调有界且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则由单调收敛定理可知  $\{b_n\}$  收敛, 不妨记  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$ , 从而  $\{b_n - b\}$  单调趋于零. 根据 Dirichlet 判别法知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$  收敛, 于是由

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b) + b \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

可知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.  $\square$

7. 证明 Mertens 定理, 即定理 2.7.1.

证明. 记  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ,  $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ ,  $C_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$ . 我们要证  $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = AB$ , 易见

$$\begin{aligned} C_n &= a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \cdots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) \\ &= a_1(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_n b_1 \\ &= a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_n B_1. \end{aligned}$$

如果令  $\beta_n = B_n - B$ , 则  $\beta_n \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$ , 于是

$$C_n = A_n B - \gamma_n,$$

其中  $\gamma_n = \sum_{\ell=1}^n a_1 \beta_{n+1-\ell} = a_1 \beta_n + a_2 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_1$ , 这样的问题就归结于证  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = 0$ .

由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 0$ , 故对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n > N$  时有  $|\beta_n| < \varepsilon$ . 于是由  $\gamma_n$  的定义可得

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq |a_1 \beta_n + \cdots + a_{n-N} \beta_{N+1}| + |a_{n-N+1} \beta_N + \cdots + a_n \beta_1| \\ &< \varepsilon M + |a_{n-N+1} \beta_N + \cdots + a_n \beta_1|, \end{aligned}$$

其中  $M = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ . 在上式中固定  $N$ , 令  $n \rightarrow +\infty$ , 即得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon M,$$

由此可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = 0$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = AB$ .  $\square$

8. 设  $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj}$  绝对收敛, 证明:  $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kj}$  绝对收敛, 且  $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj}$ .

证明. □

9. 举例说明两个条件收敛的级数的 Cauchy 乘积有可能收敛, 也有可能发散.

解. 取  $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  条件收敛,

取  $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  条件收敛, 但这对于其 Cauchy 乘积  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  有

$$|c_n| = \sum_{i+j=n+1} \frac{1}{\sqrt{ij}} \geq \sum_{i+j=n+1} \frac{2}{i+j} = \frac{2n}{n+1} \geq 1,$$

从而  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  发散. ■

10. 按绝对收敛, 条件收敛, 发散分类, 穷举两个级数的 Cauchy 乘积收敛性的各种可能性. 并给出必要的证明和反例.

11. 确定实数  $p$  的取值区间, 使在该区间内的二重级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^p}$  收敛.

解. ■

12. 考察  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}$  的敛散性.

解. 我们有

$$\sin n \sin n^2 = \frac{1}{2} (\cos(n^2 - n) - \cos(n^2 + n)),$$

而

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\cos(k^2 - k) - \cos(k^2 + k)) \right| = \frac{1}{2} |\cos 0 - \cos(N^2 + N)| \leq 1,$$

又  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$  单调递减趋于 0. 依 Dirichlet 判别法, 知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}$  收敛. ■

### 2.7 B

1. 利用 Abel 变换证明钟开莱不等式: 设  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$ ,

$$\sum_{k=1}^m b_k \geq \sum_{k=1}^m a_k, \quad \forall m = 1, 2, \cdots, n.$$

则  $\sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \sum_{k=1}^n b_k^2$ .

证明. 记  $A_m = \sum_{k=1}^m a_k, B_m = \sum_{k=1}^m b_k$ , 则由 Abel 变换

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = a_n A_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (a_k - a_{k+1}) \leq a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^n a_k b_k,$$

即

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \sum_{k=1}^n b_k^2,$$

从而结论成立.  $\square$

2. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$  收敛. 试证明存在  $\{a_n\}, \{b_n\}$  使得  $A_n = a_n b_n (n \geq 1)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  部分和有界, 而  $\{b_n\}$  单调下降趋于零.

解.  $\blacksquare$

3. 证明:  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} = \frac{1}{2}.$

证明. 令  $a_n(\alpha) = \frac{1}{n^\alpha}, B_0 = 0, \Delta B_{n-1} = B_n - B_{n-1} = (-1)^{n-1}$ , 则

$$\Delta a_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha},$$

且

$$B_n = \sum_{k=1}^n (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} = \frac{1 - (-1)^n}{2},$$

于是对  $\forall m \in \mathbb{Z}^+$ , 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} &= \sum_{n=1}^m a_n(\alpha) \Delta B_{n-1} = a_m(\alpha) B_m - \sum_{n=1}^{m-1} B_n \Delta a_n(\alpha) \\ &= \frac{1}{m^\alpha} \frac{1 - (-1)^m}{2} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1 - (-1)^n}{2} \left( \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right). \end{aligned}$$

由于对于  $\forall \alpha \in (0, +\infty)$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$  都收敛, 所以令  $m \rightarrow +\infty$ , 由上面的等式可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{2} \left( \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right). \end{aligned}$$

下面证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛. 令  $b_n(\alpha) = -\Delta a_n(\alpha) (n \in \mathbb{Z}^+)$ , 则由

$$b_n(\alpha) = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \left( 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha} \right)$$

可知, 对于任何  $\alpha \in [0, +\infty)$ ,  $\{b_n(\alpha)\}$  关于  $n$  单调减少, 并且当  $x \in [0, 1]$  时, 有

$$|b_n(\alpha)| \leq 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x} \leq 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1},$$



当  $\alpha > 1$  时, 有

$$|b_n(\alpha)| \leq \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n},$$

于是数列  $\{b_n(\alpha)\}$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛于零. 故由 Dirichlet 判别法知该级数一致收敛, 于是

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

4. 对于  $s > 1$ , **Riemann**(黎曼)  $\zeta$  函数定义为:  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ . 设  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  为所有素数, 证明

**Euler** 乘积公式:  $\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 1/p_n^s}$ .

证明.  $\square$

5. Euler 最早根据  $\sin \pi x$  的零点为  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  而猜测如下的 **Euler** 公式:

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right).$$

试按如下步骤证明 Euler 公式:

(1) 对于  $n \geq 0$  以及  $t \in (-1, 1)$ , 证明:

$$\sin((2n+1) \arcsin t) = (2n+1)t \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{t^2}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \right).$$

(2) 证明:  $|x| \leq n + \frac{1}{2}$  时,

$$\sin \pi x = (2n+1) \sin \frac{\pi x}{2n+1} \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \right).$$

(3) 固定  $x \in \mathbb{R}$ , 对于  $m > K > |\pi x|$ , 成立

$$\begin{aligned} \prod_{k=K}^m \left( 1 - \frac{x^2}{k^2} \right) \cdot \prod_{k=m+1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2} \right) &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=K}^n \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \right) \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=K}^n \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \right) \\ &\leq \prod_{k=K}^m \left( 1 - \frac{x^2}{k^2} \right). \end{aligned}$$

(4) 证明对任何  $x \in \mathbb{R}$ , 成立

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{k^2} \right).$$

证明.  $\square$

6. 证明:  $\cos \pi x = \prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{(n+1/2)^2} \right)$ .

证明.  $\square$

## 第 3 章 函数极限与连续

### 3.1 函数极限

#### Proposition 3.1.1

设实函数  $f, g$  在  $(a, +\infty)$  内局部有界, 且

(i) 对于任何  $x > a$ ,  $g(x+1) > g(x)$ ;

(ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ,

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)}$$

#### Theorem 3.1.1: Heine 定理

设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$  为  $E$  上的映射,  $x_0 \in E'$ , 则  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = A$  当且仅当对  $E \setminus \{x_0\}$  中任何趋于  $x_0$  的点列  $\{x_k\}$ , 成立  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = A$ .

#### 3.1 A

1\*. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x_0 \in E'$ , 证明:  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x)$  存在当且仅当对  $E \setminus \{x_0\}$  中任何趋于  $x_0$  的点列  $\{x_k\}$ , 极限  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k)$  存在.

证明. 由 Heine 定理可知必要性成立, 下证充分性. 易见只需证明若对于  $E \setminus \{x_0\}$  中任何趋于  $x_0$  的点列  $\{x_k\}$ , 极限  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k)$  存在且相等即可. 假设序列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  均趋于  $x_0$ , 但

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n),$$

构造序列  $c_n := \{a_1, b_1, a_2, \dots, a_{(n+1)/2}, b_{n/2}, \dots\}$ , 易见  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(c_k)$  不存在, 矛盾. 这说明对于任何趋于  $x_0$  的点列  $\{x_n\}$ , 若极限  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k)$  存在, 则必相等, 依 Heine 定理可知充分性成立. □

2. 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \left| \sin \frac{k}{n^3} - \frac{k}{n^3} \right| = 0$  并由此计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^3}$ .

证明. □

3. 证明命题 3.1.1.

证明. □

4. 设数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$  满足

$$\begin{cases} x_n^2 + y_n^2 + 2y_n = 1 + \sin \frac{1}{n} \\ x_n + \left(1 + \frac{1}{3n}\right)y_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \end{cases}$$

证明  $\{x_n\}, \{y_n\}$  收敛并求其极限.

证明. 取  $z'_n = (x_n, y_n + 1)$  则

$$|z'_n|^2 = x_n^2 + y_n^2 + 2y_n + 1 = 2 + \sin \frac{1}{n} \leq 3.$$

从而  $\{z'_n\}$  是有界列, 于是  $z_n = (x_n, y_n)$  也有界, 取  $\{z_n\}$  的一收敛子列  $\{z_{n_k}\}$ , 其收敛于  $z = (x, y)$  且满足

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

解得  $x = 1, y = 0$ . □

5. 设  $\psi, \varphi$  为定义在  $(0, +\infty)$  上的周期函数, 满足  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\psi(x) - \varphi(x)) = 0$ . 证明  $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ .

证明. 若  $\exists x_0 \in (0, +\infty)$  使得  $\varphi(x_0) \neq \psi(x_0)$ , 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\psi(x) - \varphi(x)) \neq 0$  矛盾, 从而  $\varphi \equiv \psi$ . □

### 3.1 B

1. 证明对于  $x \neq 0$ , 成立  $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$ . 特别地, 有 Viète 公式:  $\prod_{n=2}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^n} = \frac{2}{\pi}$ .

证明. 令  $J_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k}$ , 有

$$\sin \frac{x}{2^n} \cdot J_n = \frac{\sin x}{2^n}, \quad \text{即} \quad J_n = \frac{\sin x}{2^n \cdot \sin \frac{x}{2^n}}$$

令  $n \rightarrow +\infty$  即得结果. 后者过程类似. □

2. 仿照习题 3.1 A 第 2 题编写一个习题.

3. 抽取下列几个极限类型, 写出相关定义 (其中  $a, A$  为实数), Cauchy 准则和 Heine 定理.

自变量变换	极限值	自变量变化	极限值	自变量变化	极限值
$x \rightarrow a$	$A$	$x \rightarrow a^+$	$A$	$x \rightarrow a^-$	$A$
$x \rightarrow a$	$+\infty$	$x \rightarrow a^+$	$+\infty$	$x \rightarrow a^-$	$+\infty$
$x \rightarrow a$	$-\infty$	$x \rightarrow a^+$	$-\infty$	$x \rightarrow a^-$	$-\infty$
$x \rightarrow a$	$\infty$	$x \rightarrow a^+$	$\infty$	$x \rightarrow a^-$	$\infty$
$x \rightarrow \infty$	$A$	$x \rightarrow +\infty$	$A$	$x \rightarrow -\infty$	$A$
$x \rightarrow \infty$	$+\infty$	$x \rightarrow +\infty$	$+\infty$	$x \rightarrow -\infty$	$+\infty$
$x \rightarrow \infty$	$-\infty$	$x \rightarrow +\infty$	$-\infty$	$x \rightarrow -\infty$	$-\infty$
$x \rightarrow \infty$	$\infty$	$x \rightarrow +\infty$	$\infty$	$x \rightarrow -\infty$	$\infty$

4. 设  $a_0, a_1, \ell, \alpha$  为正数,  $a_1 \neq a_0$ ,  $a_{n+1} = \frac{(\ell + n^\alpha)a_n^2}{\ell a_n + n^\alpha a_{n-1}} (n \geq 1)$ . 证明:

- (1) 若  $\alpha < 1$ , 则  $\{a_n\}$  有正的极限.
- (2) 若  $\alpha = 1, \ell > 1$ , 则  $\{a_n\}$  有正的极限.
- (3) 若  $\alpha > 1$ , 则  $\{a_n\}$  发散或极限为零.
- (4) 若  $\alpha = \ell = 1$ , 则  $\{a_n\}$  发散或极限为零.

## 3.2 连续函数

### 3.2A

1. 证明 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为有理数,} \\ 1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在  $\mathbb{R}$  上处处不连续.

证明. □

2. 考虑  $[0, 1]$  上的 Riemann 函数

$$R(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ (其中 } p, q \text{ 为既约整数),} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

证明  $R$  在有理点不连续, 在无理点连续.

证明. 对于任意的  $x_0 \in [0, 1]$  来说, 若任取  $\varepsilon > 0$ , 则满足不等式  $q < \frac{1}{\varepsilon}$  的正整数  $n$  至多只有有限个, 即在  $[0, 1]$  中至多只有有限个有理数  $\frac{p}{q}$ , 使得  $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} > \varepsilon$ . 因而我们可以取  $\delta > 0$ , 使得  $\dot{B}_\delta(x_0)$  内不含这样的有理数. 于是, 只要  $0 < |x - x_0| < \delta$ , 不论  $x$  是否为有理数, 都成立

$|f(x)| < \varepsilon$ . 即证明了对于  $[0, 1]$  中的任意点  $x_0$ , 都成立

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = 0.$$

若  $x_0$  为无理数, 则  $f(x_0) = 0$ , 可见  $f(x)$  在  $x_0$  处连续; 若  $x_0$  是有理数, 则  $f(x_0) \neq 0$ , 点  $x_0$  即成为函数  $f(x)$  的可去间断点.  $\square$

3. 求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$ .

解. 我们先计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{1/n}$ , 取对数整理得到

$$\ln \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n \ln n - (\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n)}{n} =: \frac{b_n}{n},$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_{n+1} - b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

故  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n} = e$ .  $\blacksquare$

4. 设  $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \ln C_n^k$ , 求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

解. 注意到

$$\frac{C_{n+1}^1 C_{n+1}^2 \cdots C_{n+1}^n}{C_n^1 C_n^2 \cdots C_n^n} = \frac{1}{n!} (n+1)^n,$$

于是依 Stolz 定理

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \ln(n+1) - \ln(n!)}{((n+1)^2 - n^2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

5. 当  $\alpha \in \mathbb{R}$  为何值时, 极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$  存在?

解.  $\blacksquare$

6. 设  $a > 0, b > 0$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}$ .

证明.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left( n \ln \left( \frac{\sqrt[n]{a} - 1 + \sqrt[n]{b} - 1}{2} + 1 \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left( n \left( \frac{\ln a}{2n} + \frac{\ln b}{2n} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left( \ln \sqrt{ab} \right) = \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

$\square$

7. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$ . 证明  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

证明. 依题设, 对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x| < \delta$  时,

$$\left| \frac{f(x) - f(x/2)}{x} \right| < \varepsilon.$$

于是 (用  $x/2^{k-1}$  代  $x$ )

$$\left| \frac{f(x/2^{k-1}) - f(x/2^k)}{x/2^{k-1}} \right| < \varepsilon \quad (k = 1, \dots, n+1).$$

因为

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \left( f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right).$$

所以

$$\left| \frac{f(x) - f(x/2^{n+1})}{x} \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} \left| \frac{f(x/2^{k-1}) - f(x/2^k)}{x} \right| = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} \left| \frac{f(x/2^{k-1}) - f(x/2^k)}{x/2^k} \right|.$$

应用最初结果, 得到

$$\left| \frac{f(x) - f(x/2^{n+1})}{x} \right| < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} \cdot 2\varepsilon = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot 2\varepsilon < 2\varepsilon.$$

在此式中令  $n \rightarrow +\infty$ , 注意  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 即得

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq 2\varepsilon.$$

于是  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ . □

8. 设实数列  $\{x_n\}$  满足

$$x_n^3 + \left(n^{1/n} + 2 + \frac{1}{n}\right)x_n^2 + \left(\frac{1}{n} + 2n^{1/n} + n^{(1-n)/n} + 1\right)x_n + n^{1/n} + n^{(1-n)/n} + \frac{1}{n^2} = 0.$$

证明:  $\{x_n\}$  极限存在, 并求其极限.

证明. 注意到

$$\begin{aligned} & x_n^3 + \left(n^{1/n} + 2 + \frac{1}{n}\right)x_n^2 + \left(\frac{1}{n} + 2n^{1/n} + n^{(1-n)/n} + 1\right)x_n + n^{1/n} + n^{(1-n)/n} \\ &= (x_n + 1)(x_n + n^{1/n})(x_n + 1 + \frac{1}{n}), \end{aligned}$$

当  $n \geq 3$  时有  $1 < 1 + \frac{1}{n} + n^{1/n}$ , 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 1)(x_n + n^{1/n})(x_n + 1 + \frac{1}{n}) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

考虑到函数的单调性以及三个零点的极限均为  $-1$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$ . □

9. 称  $\mathbb{R}$  上函数  $f$  满足局部 Lipschitz 条件, 如果对于任何  $x \in \mathbb{R}$ , 存在  $\delta > 0$  以及  $M > 0$  使得

$$|f(y) - f(z)| \leq M|y - z|, \quad \forall y, z \in (x - \delta, x + \delta).$$

证明:  $f$  在  $\mathbb{R}$  上满足局部 Lipschitz 条件等价于对任何  $A > 0$ , 存在  $M_A > 0$  使得

$$|f(x) - f(y)| \leq M_A |x - y|, \quad \forall x, y \in [-A, A].$$

10. 设  $f$  为  $\mathbb{R}$  上函数. 对任何  $x \in \mathbb{R}$ , 存在  $\delta > 0$  以及  $M > 0$  使得

$$|f(y) - f(x)| \leq M |y - x|, \quad \forall y \in (x - \delta, x + \delta).$$

问:  $f$  是否一定满足局部 Lipschitz 条件?

11. 设  $f$  是  $[a, b]$  上的单调连续函数,  $\{a_n\}$  是  $[a, b]$  中的点列.

(1) 若  $f$  单增, 则  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n\right)$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n\right)$ .

(2) 若  $f$  单减, 则  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n\right)$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n\right)$ .

证明. (1)

(2)

□

### 3.2B

1. 将习题 3.2 A 第 11 题推广到广义实数系情形.

解.

2. 证明区间  $I$  上的单调函数的间断点均为跳跃间断点, 且间断点的全体至多可列.

证明. 不妨设  $f$  是定义在区间  $I$  上的单调增加函数, 设  $x_0 \in (a, b) \subset I$  是  $f$  的间断点, 任取  $x_0$  两侧的点  $x, x' (x < x_0 < x')$ , 则成立

$$f(x) \leq f(x_0) \leq f(x'),$$

令  $x \rightarrow x_0^-, x' \rightarrow x_0^+$ , 应用单调函数的单侧极限存在定理, 得到

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+),$$

并且其中的两个单侧极限都是有限数. 因此  $x_0$  是第一类间断点, 进一步,  $x_0$  是间断点故上式不可能同时取等号即  $f(x_0^-) < f(x_0^+)$ , 从而  $x_0$  是一跳跃间断点.

我们称  $(f(x_0^-), f(x_0^+))$  为与间断点  $x_0$  对应的一个跳跃区间. 对  $f$  的每一个间断点都可以得到一个跳跃区间. 下面我们证明, 任何两个不同简短点所对应的跳跃区间不交. 设  $x_1$  为另一间断点且  $x_0 < x_1$ , 即证明

$$(f(x_0^-), f(x_0^+)) \cap (f(x_1^-), f(x_1^+)) = \emptyset.$$

为此在  $x_0$  与  $x_1$  之间插入  $x, x'$  满足  $x_0 < x < x' < x_1$ , 则有不等式

$$f(x) \leq f(x'),$$

固定  $x'$ , 令  $x \rightarrow x_0^+$ , 由单调函数的单侧极限存在定理和函数极限的比较定理, 得到

$$f(x_0^+) \leq f(x'),$$

在令  $x' \rightarrow x_1^-$ , 又得到

$$f(x_0^+) \leq f(x_1^-),$$

于是有

$$f(x_0^-) < f(x_0^+) \leq f(x_1^-) \leq f(x_1^+),$$

即  $(f(x_0^-), f(x_0^+)) \cap (f(x_1^-), f(x_1^+)) = \emptyset$ .

这样就得到了与无限多个间断点一一对应的跳跃区间, 且两两不交, 又在每个跳跃区间中取一个有理数, 从而得到一个有理数集, 它与全体跳跃区间一一对应. 由于有理数集  $\mathbb{Q}$  是可数集, 它的无限子集也是可数集, 因此跳跃区间集合为可数集, 这就证明了单调函数的间断点至多可列.  $\square$

3. 设  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  为  $\mathbb{R}$  中的点列, 定义  $f(x) = \sum_{x_k < x} \frac{1}{2^k}$ . 证明:  $f$  的间断点全体为  $\{x_k | k \geq 1\}$ . 进一步, 若  $\{x_k\}$  在  $\mathbb{R}$  中稠密, 则  $f$  在  $\mathbb{R}$  上严格单增.

证明.  $\square$

4. 将区间  $(0, 1)$  内的实数用十进制小数  $(0.a_1a_2a_3 \cdots a_n \cdots)$  表示, 约定不将 9 作为循环节. 定义

$$f(0.a_1a_2a_3 \cdots a_n \cdots) = 0.a_10a_20a_30 \cdots a_n0 \cdots,$$

试问  $f$  在  $(0, 1)$  内的哪些点连续, 哪些点不连续?

解.  $\blacksquare$

5. 设正数列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$  及  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} = 1$ . 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 1.$$

证明. 首先, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} = 1.$$

另一方面, 有假设,  $\{a_n\}$  有上界  $M > 0$ . 任取  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $N > 0$ , 使得当  $n \geq N$  时, 成立

$$a_n \geq 1 - \varepsilon \text{ 且 } \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \leq 1 + \varepsilon.$$

任取  $\delta > \varepsilon$ , 我们来估计  $a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots, a_n$  中大于  $1 + \delta$  的数的个数  $m_{n,\delta}$ :

$$\ln(1 + \varepsilon) \geq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln a_k + \frac{n - N - m_{n,\delta}}{n} \ln(1 - \varepsilon) + \frac{m_{n,\delta}}{n} \ln(1 + \delta),$$



由此可得

$$\frac{m_{n,\delta}}{n} \leq \frac{\ln(1+\varepsilon) - \ln(1-\varepsilon) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln a_k + \frac{N}{n} \ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\delta) - \ln(1-\varepsilon)}.$$

因为

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N a_k + (1+\delta) + \frac{m_{n,\delta}}{n} M,$$

所以

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \leq 1 + \delta + \frac{\ln(1+\varepsilon) - \ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\delta) - \ln(1-\varepsilon)} M,$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  得  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \leq 1 + \delta$ . 在令  $\delta \rightarrow 0^+$  得  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \leq 1$ . 由此结论得证.  $\square$

6. 证明:  $\mathbb{R}$  上实连续函数全体的势是  $\aleph$ .

证明. 我们先来证明这件事情: 若  $f, g$  是定义在  $R$  上的连续函数, 并且对  $x \in \mathbb{Q}$  有  $f(x) = g(x)$ , 则有  $f \equiv g$ .

只要对  $\mathbb{R}$  中每个无理数  $x$  证明  $f(x) = g(x)$  成立即可. 取有理数序列  $\{r_n\}$ , 使  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x$ .

例如, 取无理数  $x$  的不足近似值  $r_n = \frac{[10^n x]}{10^n}$ , 则有

$$r_n = \frac{[10^n x]}{10^n} = \frac{10^n x - \theta_{x,n}}{10^n},$$

其中  $0 \leq \theta_{x,n} < 1$ . 因此  $r_n \rightarrow x (n \rightarrow +\infty)$ .

由于  $f(r_n) = g(r_n), n \in \mathbb{N}_+, f, g$  在点  $x$  连续, 由此知

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(r_n) = g(x).$$

由此便得结论. 记所有连续函数构成的集合为  $T$ . 易见所有常值函数  $f(x) \equiv c$  与  $\mathbb{R}$  等势, 由伯恩斯坦定理, 若能

$\square$

### 3.3 连续函数的基本性质

#### Proposition 3.3.1

$\mathbb{R}$  中的道路连通集必是空集, 单点集或区间.

#### 3.3A

1. 设  $f$  为有界区间  $(a, b)$  上的连续函数,  $f(a^+), f(b^-)$  都存在且  $f(a^+) < 0, f(b^-) > 0$ . 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f(\xi) = 0$ .

证明. 由函数连续性以及  $f(a^+) < 0, f(b^-) > 0$ , 必存在  $\eta > a$  与  $\mu < b$  使得  $f(\eta) < 0$  且

$f(\mu) > 0$ , 由函数的介值定理即得结论. 另外, 可以闭区间套. □

2. 设  $f$  在  $(0, +\infty)$  内连续, 且满足  $f(x^2) = f(x) (\forall x > 0)$ . 证明:  $f$  在  $(0, +\infty)$  内为常数.

证明. 对任意  $x \in (0, +\infty)$ , 有

$$f(x) = f(\sqrt{x}) = f(x^{1/4}) = \cdots = f(x^{1/(2^n)}),$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 即有  $f(x) = f(1)$ , 从而  $f(x)$  是常数. □

3. 设  $f$  为区间  $(a, +\infty)$  上的连续函数,  $f(a^+)$  存在且为负数,  $f(+\infty) = +\infty$ . 证明: 存在  $\xi \in (a, +\infty)$  使得  $f(\xi) = 0$ .

证明. 由  $f(+\infty) = +\infty$  知, 对于任意大得正数  $A$ , 存在  $X$  使  $x \geq X$  时  $f(x) \geq A$ , 即  $f(X)$  为正, 于是  $f(a^+)f(X) < 0$ , 由零点存在定理可知有  $\xi \in (a, X)$  使得  $f(\xi) = 0$ . □

4. 设  $f$  是  $\mathbb{R}$  上的连续周期函数. 若  $f$  不为常数, 证明它一定有最小正周期.

证明. □

5\*. 设  $E \subset \mathbb{R}^n$  为非空有界集. 证明: 连续函数  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$  一致连续的充要条件是对任何  $x_0 \in E'$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x)$  存在. 这等价于  $f$  是  $\bar{E}$  上的一个连续函数在  $E$  上的限制.

证明. □

6. 证明命题 3.3.1.

证明. □

7. 试用闭区间套定理证明介值定理.

证明. 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数,  $f(a) < f(b)$ , 介值定理表明给定  $\mu$  并且  $f(a) < \mu < f(b)$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f(\xi) = \mu$ . 设  $F(x) = f(x) - \mu$ , 则  $F(a) < 0, F(b) > 0$ . 记  $I_1 = [a, b]$ . 于是若  $F\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ , 则定理证毕. 否则若  $F\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$ , 则令  $I_2 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ , 否则令  $I_2 = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ . 记  $a' = \frac{a+b}{2}$ , 不妨设  $I_1$  为前者, 继续考察  $F\left(\frac{a+a'}{2}\right)$  的符号, 重复上述步骤得到  $I_3, I_4, \cdots, I_n, \cdots$ . 设  $I_n$  区间的端点为  $a_n, b_n$ , 则或者在有限步得到  $F\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$ , 则定理证毕. 否则由  $I_n$  的构造可以发现  $F(a_n)F(b_n) < 0$ . 并且

$$I_{n+1} \subset I_n, \quad a_n - b_n \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty),$$

即  $\{I_n\}$  形成闭区间套. 存在有  $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ , 并且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(a_n) \leq 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F(b_n) \geq 0,$$

从而  $F(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = \mu$ . □

## 8. 证明道路连通集一定是连通集.

证明. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  是一个道路连通集, 且  $E = A \cup B$ , 其中  $A, B$  是两个互不相交的非空集. 在  $A$  中任取一点  $p$ , 在  $B$  中任取一点  $q$ , 则有一条连续曲线  $\Gamma \subset E$  把  $p, q$  两点连接. 令

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)), \quad (a \leq t \leq b)$$

为  $\Gamma$  的参数方程, 并令

$$F = \{t \in [a, b] \mid \Phi(t) \in A\}, \quad G = \{t \in [a, b] \mid \Phi(t) \in B\}.$$

易见  $F$  与  $G$  是互不相交的非空集合, 且  $F \cup G = [a, b]$ . 由于区间  $[a, b]$  是连通集,  $F' \cap G$  与  $F \cap G'$  这两个集合至少有一个非空. 不妨设  $c \in F \cap G'$ , 从  $c \in G'$  可知, 有数列  $\{t_n\} \subset G$  使得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = c$ . 由于  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  连续, 所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(t_n) = \Phi(c).$$

一方面, 由  $\Phi(t) \in B (i = 1, 2, \dots)$ , 可知  $\Phi(c) \in B'$ ; 另一方面, 利用  $c \in F$  又知  $\Phi(c) \in A$ . 由此得  $\Phi(c) \in A \cap B'$ , 它不是空集, 所以  $E$  是连通的.  $\square$

9. 证明在  $\mathbb{R}$  中的连通集必为空集, 单点集或区间, 即必为道路连通集.

证明.  $\square$

## 10. 参考开集和闭集的性质, 建立相对开集和相对闭集的性质.

11. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  为连通集,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  连续. 若  $x_1, x_2 \in E, f(x_1) < \eta < f(x_2)$ . 证明: 存在  $\xi \in E$  使得  $f(\xi) = \eta$ .

12. 设  $a_n > -1 (n \geq 1)$ . 下表罗列了级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛的各种情形. 试确定这些情形是否可能发生, 在可能发生的情况下, 讨论此时无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  的收敛性. 若无穷乘积在绝对收敛, 条件收敛和发散三种情形中, 有两种以上的情形可能发生, 请举出相应的例子; 同时, 若至少有一种情形不会发生, 给出证明.

情形	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 的收敛性	$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 的收敛性
1	绝对收敛	绝对收敛	
2	绝对收敛	条件收敛	
3	绝对收敛	发散	
4	条件收敛	绝对收敛	
5	条件收敛	条件收敛	
6	条件收敛	发散	
7	发散	绝对收敛	
8	发散	条件收敛	
9	发散	发散	

解. 情形 1. 此时  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  收敛.

情形 2.

情形 3.

情形 4.

情形 5.

情形 6.

情形 7.

情形 8.

情形 9.

■

13. 设  $f$  在  $[0, +\infty)$  上连续,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\sqrt{n}) = 0$ . 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在的充要条件是  $f$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续.

证明.

□

### 3.3B

1. 证明区域是道路连通集.

证明. 设  $D$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一个非空连通开集. 取点  $x \in D$ , 设  $U(x)$  为  $D$  中所有与  $x$  有  $D$  中连续曲线相联结的点的集合. 容易看到  $U(x)$  是一个道路连通集. 我们证明  $U(x) = D$ .

设  $y \in U(x)$ , 并取  $\delta > 0$  使  $O_\delta(y) \subset D$ .  $\forall z \in O_\delta(y)$  存在  $O_\delta(y)$  中的直线段连结  $z$  到  $y$ , 从而存在  $D$  中的连续曲线连结  $z$  到  $x$ , 所以  $O_\delta(y) \subset U(x)$ . 因而  $U(x)$  是包含  $x$  的开集. 如  $D \setminus U(x) \neq \emptyset$ , 则  $D \setminus U(x) = \bigcup U(y')$ , 其中  $y'$  取遍  $D \setminus U(x)$  的所有点. 按前面的证明, 每个  $U(y')$  都是开集, 因而  $D \setminus U(x)$  也是开集.  $D$  有开集分解式  $D = U(x) \cup (D - U(x))$ , 与  $D$  是

连通开集矛盾. 这就证明了  $D - U(x) = \emptyset$ , 所以  $D = U(x)$  是道路连通集.  $\square$

2. 设  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  为开集. 证明它可以表示为至多可列个两两不交的区域之并. 在一维情形, 这些两两不交的区域为两两不交的开区间, 即为  $V$  的构成区间.

证明.  $\square$

3. 设  $f$  在  $(0, +\infty)$  上连续, 且对任何  $a \in (0, +\infty)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(na) = 0$ . 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

证明. 对于任意  $\varepsilon > 0$  与  $a \in (0, +\infty)$  存在  $N(a) \in \mathbb{Z}_+$  使得  $n > N$  时有  $|f(na)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 结合  $f(x)$  的连续性, 可知有  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  有  $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , 由  $a$  的任意性可以取到  $a$  与  $n > N(a)$  使得  $0 < |x - na| < \delta$  此时

$$|f(x) - f(na)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon,$$

由此即得结论.  $\square$

4. 设  $a > 0$ ,  $a^2 + 4b < 0$ , 求证: 不存在  $\mathbb{R}$  上具有介值性的函数  $f(f(x)) = af(x) + bx$ .

证明. 若这样的函数存在, 注意到  $x = \frac{f(f(x)) - af(x)}{b}$ . 所以  $x$  由  $f(x)$  唯一确定, 即  $f$  是单射. 由介值性,  $f$  必严格单调, 结合介值性和单调性, 可得  $f$  连续.

由上可得  $x \mapsto f(f(x))$  严格增加, 即  $x \mapsto af(x) + bx$  严格增加. 由于  $a > 0$ , 因此  $b < -\frac{a^4}{4} \leq 0$ . 而  $f(x) = \frac{af(x) + bx}{a} - \frac{bx}{a}$ , 可知  $f$  是严格单增函数. 特别地,

$$af(x) + bx > af(0), \quad \forall x > 0.$$

因此  $f(+\infty) = +\infty$ . 进而当  $x \gg 1$  时,  $f(x) > 0$ , 所以

$$\frac{f(f(x))}{f(x)} = a + b \frac{a}{f(x)}, \quad \forall x \gg 1.$$

记  $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ , 则  $L \in [0, +\infty]$ . 注意到  $b < 0$ , 我们有

$$L = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{f(x)} = a + b \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} = a + \frac{b}{L},$$

其中对应于  $L$  取 0 和  $+\infty$ , 规定  $\frac{b}{L}$  分别为  $-\infty$  和 0. 则由上式可知  $L$  有限, 且  $L^2 - aL - b = 0$ . 但  $a^2 + 4b < 0$ , 上述方程无解, 矛盾. 因此满足题设条件的函数  $f$  不存在.  $\square$

5. 设  $\mathbb{R}$  上连续函数列  $\{f_n(x)\}$  对于每一个  $x \in \mathbb{R}$  都是有界的 (称为“逐点有界”), 证明: 存在区间  $(a, b)$  使得  $\{f_n(x)\}$  在  $(a, b)$  上一致有界, 即存在与  $n$  无关的常数  $M > 0$  使得

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \forall n \geq 1, x \in (a, b).$$

证明.  $\square$

6. 设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵, 且  $A + B$  非奇异, 证明:  $A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A$ .

证明. 当  $A, B$  都可逆时,  $A(A + B)^{-1}B$  与  $B(A + B)^{-1}A$  也都可逆, 注意到

$$\begin{aligned}(A(A + B)^{-1}B)^{-1} &= B^{-1}(A + B)A^{-1} = A^{-1} + B^{-1}, \\(B(A + B)^{-1}A)^{-1} &= A^{-1}(A + B)B^{-1} = A^{-1} + B^{-1},\end{aligned}$$

从而  $A, B$  都可逆时等式成立, 否则  $A(t) = A + tE$  与  $B(t) = B + tE$  可逆, 令  $t \rightarrow 0$  即得结论.  $\square$

7. 设  $A, B$  为半正定矩阵, 证明: 存在正定矩阵  $S$  使得  $ASB = BSA$ .

提示: 存在正交矩阵  $P$  和  $0 \leq m \leq n$  使得  $P(A + B)P^T = \begin{pmatrix} O & O \\ O & \Lambda \end{pmatrix}$ , 其中  $\Lambda$  是  $m$  阶正交矩阵.

此时必有  $PAP^T = \begin{pmatrix} O & O \\ O & \tilde{A} \end{pmatrix}$ ,  $PBP^T = \begin{pmatrix} O & O \\ O & \tilde{B} \end{pmatrix}$ , 其中  $\tilde{A}, \tilde{B}$  都是  $m$  阶半正定矩阵.

8. 设  $A, B$  是两个  $n$  阶方阵, 满足  $AB = BA$ , 证明  $\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A^2 + B^2)$ .

证明. 将分块矩阵的第二行乘以  $i$  加到第一行上, 再将第一列乘以  $-i$  加到第二列上, 可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A + iB & iA - B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A + iB & O \\ B & A - iB \end{pmatrix},$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A + iB & O \\ B & A - iB \end{pmatrix} = \det(A + iB) \det(A - iB), \\&= \det((A + iB)(A - iB)) = \det(A^2 + B^2 - i(AB - BA)) = \det(A^2 + B^2). \quad \square\end{aligned}$$

9. 设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵, 证明  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + B) \det(A - B)$ .

证明. 将分块矩阵的第二行加到第一行上, 再将第二列减去第一列, 可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A + B & A + B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A + B & O \\ B & A - B \end{pmatrix},$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A + B & O \\ B & A - B \end{pmatrix} = \det(A + B) \det(A - B). \quad \square$$

10. 设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵,  $AB = BA$ . 证明:

(1) 若  $A, B$  都是正定矩阵, 则  $AB$  也是正定矩阵.

(2) 若  $A, B$  都是半正定矩阵, 则  $AB$  也是半正定矩阵.

证明. (1) 由于  $A$  正定, 则有非异阵  $C$  满足  $A = C^T C$ , 这是因为  $A$  正定当且仅当  $A$  合同于  $I_n$ , 由于  $AB = BA$  且  $A, B$  都是正定矩阵, 于是  $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$ , 从而  $AB$  是对称的. 另一方面

$$AB = BA = BC^T C = C^{-1} C B C^T C,$$

从而  $AB$  与  $CBC^T$  相似, 后者显然是正定的, 从而  $AB$  正定.

(2) 我们先证明,  $n$  阶实对称矩阵  $A$  是半正定矩阵的充分必要条件是对于任意正实数  $t$ ,  $A + tI_n$  都是正定阵. □

11. 设  $A, B, C$  均为  $n$  阶方阵,  $ABC = CBA$ . 证明:

- (1) 若  $A, B, C$  都是正定矩阵, 则  $ABC$  也是正定矩阵.
- (2) 若  $A, C$  都是半正定矩阵,  $B$  是正定矩阵, 则  $ABC$  是半正定矩阵.
- (3) 若  $A, B, C$  都是半正定矩阵, 则  $ABC$  是半正定矩阵.

证明. (1)

(2)

(3) □

12. 编写若干与本节内容相关的习题.

### 3.4 方向极限与累次极限

#### 3.4A

1. 考虑函数在一点的二重极限和二次极限. 分别以二重极限存在和不存在为前提, 讨论以下各条. 对必然成立或必然不成立的, 给出证明. 对于有时候成立, 有时候不成立的, 给出例子.

- (1) 两个二次极限存在且相等.
- (2) 两个二次极限都存在但不相等.
- (3) 一个二次极限存在, 另一个不存在.
- (4) 两个二次极限都不存在.

解. 首先考虑二重极限存在的情况.

(1) 不一定成立. 如考虑  $f(x, y) = y \sin \frac{1}{x}$  在  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时的形态, 其二重极限存在, 但二次极限  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  不存在. ■

(2)

2. 试就函数在一点的二重极限和方向极限, 仿第 1 题讨论相关问题.

3. 试就函数在一点的二次极限和方向极限, 仿第 1 题讨论相关问题.

4. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 且  $E$  包含  $x_0$  的一个去心邻域. 证明:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{\tau \in S^{n-1}} |f(x_0 + t\tau) - A| = 0.$$

### 3.4B

1. 设有  $[a, b] \times [c, d]$  上的函数  $f$ , 对固定的  $y \in [c, d]$ ,  $f(x, y)$  作为  $x$  的函数在  $[a, b]$  上连续, 而  $f(x, y)$  对  $y$  的连续性关于  $x \in [a, b]$  是一致的, 即  $\forall y_0 \in [c, d]$ ,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \sup_{x \in [a, b]} |f(x, y) - f(x, y_0)| = 0.$$

证明:  $f$  是  $D = [a, b] \times [c, d]$  上的二元连续函数.

证明.

□



## 第 4 章 导数与微分

## 4.1 导数与微分

## 4.1 A

1. 设  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  在点  $x_0$  连续.

(1) 证明:  $f$  在点  $x_0$  可导当且仅当  $\lim_{\substack{t, s \rightarrow 0 \\ ts < 0}} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + s)}{t - s}$  存在.

证明.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t, s \rightarrow 0 \\ ts < 0}} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + s)}{t - s} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + s)}{t - s} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = f'_+(x_0). \end{aligned}$$

同理可证

$$\lim_{\substack{t, s \rightarrow 0 \\ ts < 0}} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + s)}{t - s} = f'_-(x_0).$$

□

(2) 试讨论  $f$  在点  $x_0$  的可导性与极限  $\lim_{\substack{t, s \rightarrow 0 \\ ts > 0, t \neq s}} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + s)}{t - s}$  的存在性之间的关系.

若  $f$  在点  $x_0$  可导, 则其左右导数都存在且相等, 可以推出题设二次极限存在. 仿照上述过程,  $f$  在点  $x_0$  可导可以推出  $\lim_{\substack{t, s \rightarrow 0 \\ ts > 0, t \neq s}} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + s)}{t - s}$  存在, 反之不然.

2. 设  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . 试讨论  $f'_+(x_0)$  与  $f'_-(x_0)$  之间的关系 (包括他们的存在性).

根据导数定义

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0^+} \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}.$$

这样如果导数存在且连续, 则  $f'_+(x_0)$  与  $f'_-(x_0)$  存在且相等. 如果导数在  $x_0$  处不存在, 则二者可能不等, 如取  $f(x) = |x|, x = 0$ , 则前者为 1 而后者不存在.

3. 设  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  为常向量,  $f(x) = x \cdot \lambda (x \in \mathbb{R}^n)$ . 试计算  $f_x, \nabla f$ .

解.  $f_x = (\nabla f)^T = \lambda$ . ■

4. 设  $A$  为  $m \times n$  常数矩阵,  $f(x) = Ax (x \in \mathbb{R}^n)$ . 试计算  $f_x$ .

解.  $f_x = A$ . ■

5. 设  $A$  为  $n$  阶常数方阵,  $f(x) = x^T Ax (x \in \mathbb{R}^n)$ . 试计算  $f_x, \nabla f$ .

解.  $\nabla f = (f_x)^T = (A + A^T)x$ . ■

6. 设  $A$  为  $m \times k$  常数矩阵,  $n = k + m$ ,  $f(x) = (x_1, x_2, \dots, x_m)A(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)^T$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ). 试计算  $f_x, \nabla f$ .

解.  $\nabla f = (f_x)^T = [A(x_{m+1}, \dots, x_n); A^T(x_1, \dots, x_m)]$ . ■

7. 利用  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  求

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{3}{n^2} + \dots + \sin \frac{2n-1}{n^2} \right).$$

解. 注意到

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right) - f(0)}{\frac{k}{n^2}} = f'(0),$$

其中  $f(x) = \sin x$ , 于是  $\sin \frac{k}{n^2} = \frac{k}{n^2} + o\left(\frac{k}{n^2}\right)$ , 于是原极限为 1. ■

8. 设  $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx$ , 且  $|f(x)| \leq |\sin x|$ , 其中  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为常数. 求证:  $|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1$ .

证明. 由于

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 \cos 2x + \dots + na_n \cos nx,$$

而  $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{\sin x} \right| = |f'(0)| \leq 1$ . 从而得证. □

#### 4.1 B

1. 试构造  $\mathbb{R}$  上的实函数  $f$  使得它仅在点 0 连续, 且在点 0 的导数为 1.

解. 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 是有理数,} \\ x^2 + x, & x \text{ 是无理数.} \end{cases}$$

容易验证  $f$  仅在  $x = 0$  处连续且可导, 并且  $f'(0) = 1$ . ■

2. 设  $f$  在区间  $(a, b)$  处处可导, 证明: 存在区间  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$  使得  $f'$  在  $[\alpha, \beta]$  上有界.

证明. 取  $\delta = \frac{b-a}{6}$ , 令  $a_1 = a + \delta, b_1 = b - \delta$ , 若能证得存在区间  $[\alpha, \beta] \subset [a_1, b_1]$ , 则题设结论得证. 下面我们证明这个结论.

令  $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ , 若  $f'$  在  $[a_1, a_2]$  或  $[a_2, b_1]$  任何一个区间内有界, 则结论得证, 否则令  $b_2 = \frac{a_2 + b_1}{2}$ , 若  $f'$  在  $[a_2, b_2]$  或  $[b_2, b_1]$  任何一个区间有界, 则结论得证, 否则令  $a_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ , 若  $f'$  在  $[a_2, a_3]$  或  $[a_3, b_2]$  任何一个区间有界, 则结论得证, 否则重复这个操作, 即令  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2}$ . 我们断言: 在有限步内一定能找到区间使得  $f'$  在该区间内有界. 否

则, 这一系列操作中产生的任何区间都使  $f'$  无界, 特别地,  $f$  在闭区间列  $\{[a_n, b_n]\}$  上始终无界, 易见  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  并且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$ , 从而  $\{[a_n, b_n]\}$  形成闭区间套, 依闭区间套定理,  $\exists \xi \in [a_n, b_n]$ , 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \xi$ . 并且  $f'(\xi) = \infty$  与  $f$  处处可导矛盾.  $\square$

3. 设  $n$  元实函数  $f$  在点  $0$  的一个邻域内有定义, 满足  $f(0) = 0$ . 进一步, 对任何  $e \in S^{n-1}$ , 成立  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{f(re)}{r} = 0$  以及  $\lim_{\substack{(r, \sigma) \rightarrow (0, e) \\ r > 0, \sigma \in S^{n-1}}} \frac{f(r\sigma) - f(re)}{r} = 0$ . 证明:  $f$  在点  $0$  可微.

证明.  $\square$

4. 设  $A$  为  $n$  阶实方阵, 则存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |s| < \delta$  时, 矩阵

$$A(s) = A + \begin{pmatrix} s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^n \end{pmatrix}$$

的特征值互不相同.

提示: 先证明对充分大的  $s$ ,  $A(s)$  的特征值互不相同.

证明. 先证当  $s$  充分大时,  $A(s)$  有  $n$  个不同的特征值. 不妨记  $A = (a_{ij})$ , 由 Gerschgorin 圆盘第一定理, 可知  $A(s)$  的特征值落在下列圆盘中:

$$D_i = |z - a_{ii} - s^i| \leq R_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad 1 \leq i \leq n.$$

取  $s$  充分大, 使得  $s^n \gg s^{n-1} \gg \cdots \gg s$ . 注意到  $R_i$  的值固定, 故  $D_i$  的圆心之间的距离大于半径  $R_i$ , 从而  $D_i$  互不相交, 各自构成了一个连通分支. 再由第二圆盘定理, 每个连通分支  $D_i$  中有且仅有一个特征值, 于是  $A(s)$  有  $n$  个不同的特征值.

设  $f_s(\lambda) = |\lambda I_n - A(s)|$  是  $A(s)$  的特征多项式, 则其判别式  $\Delta(f_s(\lambda))$  是关于  $s$  的多项式. 由前面的讨论可知, 当  $s$  充分大时,  $f_s(\lambda)$  无重根, 从而  $\Delta(f_s(\lambda)) \neq 0$ , 即  $\Delta(f_s(\lambda))$  是关于  $s$  的非零多项式.

若  $\Delta(f_s(\lambda))$  的所有复根都是零, 则任取一个正数  $\delta$ ; 若  $\Delta(f_s(\lambda))$  的复根不全为零, 则可取  $\delta$  为  $\Delta(f_s(\lambda))$  的非零复根的模长的最小值. 于是对任意的  $s \in (0, \delta)$ ,  $s$  都不是  $\Delta(f_s(\lambda))$  的根, 即  $\Delta(f_s(\lambda)) \neq 0$ , 从而  $f_s(\lambda)$  都无重根, 即  $A(s)$  都有  $n$  个不同的特征值.  $\square$

5. 设  $D \subseteq \mathbb{C}$  为开集,  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  可表示为  $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ , 其中  $P, Q$  均为实值函数. 设  $x_0 + iy_0 \in D$ , 试讨论  $P, Q$  满足什么充要条件时, 极限

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x + iy) - f(x_0 + iy_0)}{(x + iy) - (x_0 + iy_0)}$$

存在.

解. 参考一般的复变函数教材.  $\blacksquare$

6. 设  $f$  为  $[0, 1]$  上处处可导的实函数, 0 和 1 均为  $f$  的不动点, 且  $f'(0) > 1, f'(1) > 1$ , 证明:

(1)  $f$  在  $(0, 1)$  中也有不动点.

(2) 存在  $f$  的不动点  $\xi \in (0, 1)$  使得  $f'(\xi) \leq 1$ .

证明. (1) 设  $F(x) = f(x) - x$ , 则  $F(0) = F(1) = 0$ . 由于  $F'(0) = f'(0) - 1 > 0$ , 则有  $\varepsilon_1 > 0$  使得  $F(\varepsilon_1) > F(0) = 0$ ; 同理由  $F'(1) > 0$ , 有  $\varepsilon_2 > 0$  使得  $F(1 - \varepsilon_2) < F(1) = 0$ , 由连续函数的介值定理可知有  $\xi \in (\varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2)$  使得  $F(\xi) = 0$ , 即为  $f(x)$  在  $(0, 1)$  中的不动点.

(2) 由 (1) 知  $f$  在  $(0, 1)$  上有不动点, 记  $\xi$  为这些不动点中最大的那一个. 若  $f'(\xi) > 1$ , 即  $F'(\xi) > 0$ , 则仿 (1) 可证有  $\xi' \in (\xi, 1)$  使得  $F(\xi') = 0$ , 即  $\xi'$  为比  $\xi$  更大的不动点, 矛盾.  $\square$

7. 试仿照习题 4A 第 7 题和第 8 题编写一些习题.

## 4.2 反函数, 复合函数和隐函数的导数

### 4.2A

1. 证明对任何实数  $x$  成立  $e^x \geq 1 + x$  以及  $e^x \geq ex$ .

证明. 记  $f(x) = e^x - 1 - x$ , 由

$$f'(x) = e^x - 1 \geq f'(0) = 0,$$

易见  $x = 0$  是  $f(x)$  的最小值, 即  $f(x) \geq f(0) = 0$ , 从而得证. 后者只需置  $x$  为  $x - 1$  代入即得  $e^{x-1} \geq 1 + (x - 1)$  即  $e^x \geq ex$ .  $\square$

2. 试改进不等式  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x (x > 0)$ .

(1) 证明对于  $x > 0$ , 成立  $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x/2}$ .

进一步, 试求最小的  $\alpha$ , 使得对于任何  $x > 0$  成立  $\ln(1+x) > \frac{x}{1+\alpha x}$ .

(2) 证明对于  $x > 0$ , 成立  $\ln(1+x) < \frac{x}{2} + \frac{x}{2(1+x)}$ .

进一步, 试求最小的  $a$ , 使得对于任何  $x > 0$ , 成立  $\ln(1+x) < ax + (1-a)\frac{x}{1+x}$ .

证明. (1) 记  $F(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ , 则

$$F'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x(\alpha^2 x - (1-2a))}{(1+x)(1+\alpha x)^2},$$

由于  $F(0) = 0$ , 而当  $\alpha = \frac{1}{2}$  时  $F'(x) > 0$ , 从而题设不等式成立. 进一步,  $\alpha$  的最小值便是  $\frac{1}{2}$ , 否则  $F(x)$  在  $\left(0, \frac{1-2\alpha}{\alpha^2}\right)$  单调递减.

(2) 记  $G(x) = \ln(1+x) - ax - (1-a)\frac{x}{1+x}$ , 则

$$G'(x) = \frac{1}{1+x} - a - \frac{1-a}{(1+x)^2} = \frac{x - a(1+x^2+2a) + a}{(1+x)^2} = \frac{-x(ax - (1-2a))}{(1+x)^2},$$

当  $a = \frac{1}{2}$  时,  $G'(x) < 0$  而  $G(0) = 0$ , 从而不等式成立. 进一步,  $a$  的最小值是  $\frac{1}{2}$ , 否则  $G(x)$  在  $\left(0, \frac{1-2a}{a}\right)$  上单调递增.  $\square$

3. 试证明对于  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 成立  $x < \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ .

进一步, 试求最小的  $\alpha$ , 使得对于任何  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 成立  $x < \frac{\sin x}{\cos^\alpha x}$ .

证明. 设  $F(x) = x - \frac{\sin x}{\cos^\alpha x}$ , 那么

$$F'(x) = 1 - \frac{\cos^{\alpha+1} x + \alpha \cos^{\alpha-1} x \sin^2 x}{\cos^{2\alpha} x} = \frac{\cos^{\alpha+1} x - (1-\alpha) \cos^2 x - \alpha}{\cos^{\alpha+1} x},$$

考虑  $f(t) = \cos^{\alpha+1} x - (1-\alpha) \cos^2 x - \alpha = (1-t)^{\alpha+1} - (1-\alpha)(1-t)^2 - \alpha$ , 其中  $t = 1 - \cos x$ , 注意到  $F(0) = 0$ , 由于  $F(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上连续, 并且  $f(0) = 0$ , 考虑

$$f'(t) = 2(1-\alpha)(1-t) - (\alpha+1)(1-t)^\alpha,$$

$f'(0) = 1 - 3\alpha$ , 若  $f'(0) > 0$ , 则存在  $\delta > 0$  使得  $F(x)$  在  $(0, \delta)$  上单调递增, 不符题设, 从而  $\alpha \geq \frac{1}{3}$ .  $\square$

4. 试求以下双曲函数的导数与反函数, 并以此求得这些反函数的导数. 将结果与相应的三角函数比较:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

其中  $\cosh x$  的反函数在  $x > 0$  的范围内考虑.

解. 对于  $\sinh x$ , 其导数  $(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$ , 反函数记  $\sinh y = x$ , 即  $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$ , 解得  $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ , 即  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ . 又有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\sinh y)'} = \frac{2}{e^y + e^{-y}} = \frac{2}{x + \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

对于  $\cosh x$ , 其导数  $(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$ , 反函数记  $\cosh y = x$ , 即  $e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$ , 解得  $e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ , 即  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ . 又有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\cosh y)'} = \frac{2}{e^y - e^{-y}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

对于  $\tanh x$ , 其导数  $(\tanh x)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$ , 反函数即  $\tanh y = x$ , 同理可以得到  $e^y = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ , 即  $y = \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ . 又有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\tanh y)'} = \cosh^2 y = \frac{1}{1-x^2}.$$

跟三角函数差不多.  $\blacksquare$

5. 设某区间上的连续可微函数  $y = y(x), z = z(x)$  由方程组

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 1, \\ x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 0 \end{cases}$$

确定. 试求  $y'(x), z'(x)$ .

解. 对  $x$  求导可得

$$\begin{cases} 2x + 6yy' + 6zz' = 0, \\ 3x^2 + 6y^2y' + 27z^2z' = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } y'(x) = \frac{x^2z - 3xz^2}{9yz^2 - 2y^2z}, \quad z'(x) = \frac{2xy^2 - 3x^2y}{27yz^2 - 6y^2z}.$$

6. 设某区域内的连续可微函数  $u = u(x, w), v = v(x, w)$  由方程组

$$\begin{cases} x^2 + 2u^2 + 3v^2 + w^4 = 1, \\ x + u + v + w = 0 \end{cases}$$

确定. 试求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial w}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial w}$ .

解. 分别对  $x, w$  求偏导得到

$$\begin{cases} 2x + 4u \frac{\partial u}{\partial x} + 6v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4u \frac{\partial u}{\partial w} + 6v \frac{\partial v}{\partial w} + 4w^3 = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial v}{\partial w} + 1 = 0, \end{cases}$$

解得  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x-3v}{3v-2u}, \frac{\partial u}{\partial w} = \frac{3v-2w^3}{2u-3v}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u-x}{3v-2u}, \frac{\partial v}{\partial w} = \frac{2w^3-2u}{2u-3v}$ . 于是

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\partial u / \partial w} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2u-3v}{3v-2w^3} \cdot \frac{x-3v}{3v-2u} = \frac{3v-x}{3v-2w^3}.$$

7. 设某区域内的连续可微函数  $v = v(x, u), w = w(x, u)$  由方程组

$$\begin{cases} x^2 + 2u^2 + 3v^2 + w^4 = 1, \\ x + u + v + w = 0 \end{cases}$$

确定. 试求  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}$ .

解. 分别对  $x, u$  求偏导得到

$$\begin{cases} 2x + 6v \frac{\partial v}{\partial x} + 4w^3 \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ 1 + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4u + 6v \frac{\partial v}{\partial u} + 4w^3 \frac{\partial w}{\partial u} = 0, \\ 1 + \frac{\partial v}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial u} = 0, \end{cases}$$

解得  $\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{2w^3-2u}{3v-2w^3}, \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{2u-3v}{3v-2w^3}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2w^3-x}{3v-2w^3}, \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x-3v}{3v-2w^3}$ . 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\partial w / \partial u} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{x-3v}{2u-3v}.$$

8. 设某区间上的连续可微函数  $y = y(x)$  由参数方程组

$$\begin{cases} x = 2e^t - \cos t, \\ y = t - \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

确定. 试求  $y'(x)$ .

解. 我们有  $\frac{dy}{dt} = 1 - \cos t$ ,  $\frac{dx}{dt} = 2e^t + \sin t$ , 于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{dx/dt} = \frac{1 - \cos t}{2e^t + \sin t}. \quad \blacksquare$$

#### 4.2 B

1. 若  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^n$  中的区域,  $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  以及  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  可微,  $f(x) = A(x)g(x)$ . 试计算  $f_x$ .

解. ■

2. 试构造一个在  $[0, 1]$  上处处可导的函数, 使得其导函数在  $[0, 1]$  上无界.

解. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ . 可得  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0$ , 而  $x \neq 0$  时

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x^2}$$

无界. ■

3. 试仿照习题 A 第 2 题编写一些习题.

### 4.3 高阶导数

#### 4.3 A

1. 计算以下函数在  $x = 0$  处的各阶导数, 或给出递推公式:

(1)  $y = \tan^2 x$ ;

(2)  $y = \arctan x$ ;

(3)  $y = \arcsin x$ ;

(4)  $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 - 3x + 2}$ .

(5)  $y = \cos^3 x$ ;

(6)  $y = \frac{x}{x^2 + x + 1}$ .

(7)  $y = (1+x)^{2+x}$ ;

(8)  $y = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

解. (1) 我们有  $y'(x) = 2 \tan x \sec^2 x$ ,  $y''(x) = 2 \sec^4 x + 4 \tan^2 x \sec^2 x = 6y^2 + 8y + 2$ , 于是

$$y^{(n+2)} = 6 \sum_{k=0}^n C_n^k y^{(k)} y^{(n-k)} + 8y^{(n)}.$$

(2) 此问使用 6.6 节相关内容解法十分容易, 因为有  $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ , 所以

$$y^{(2n+1)}(0) = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2n+1} = (-1)^n (2n)!, \quad y^{(2n)} = 0.$$

然而, 我们也可以利用 12 题的结论, 因为注意到

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right),$$

于是

$$y^{(n+1)}(0) = \frac{1}{2i} \left( \frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}} \right) \Big|_{x=0} = \frac{(-1)^n n!}{2} \left( \frac{i^{n+1} - (-i)^{n+1}}{i} \right).$$

(3) 我们有  $\sin y = x$ , 得  $y' \cos y = 1$ , 进一步有

$$y'' \cos y - y' \sin y = 0 \Rightarrow y'' = y' \tan y,$$

于是有  $y^{(n+2)} = \sum_{k=0}^n C_n^k y^{(k+1)} (\tan y)^{(n-k)}$ .

(4) 我们有

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 - 3x + 2} = 1 + \frac{13}{x-2} - \frac{7}{x-1},$$

因此  $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot \left( \frac{13}{(x-2)^{n+1}} - \frac{7}{(x-1)^{n+1}} \right)$ , 于是  $f^{(n)}(0) = (7 - \frac{13}{2^{n+1}})n!$ .

(5)

(6)

(7)

(8)

■

2. 设  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b \cos x, & x < 0, \\ e^x + \ln(1+x) + cx, & x \geq 0. \end{cases}$  问当  $a, b, c$  取何值时,  $f$  是  $\mathbb{R}$  上的二阶连续可导函数.

解. 由于  $f$  连续, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow b = 1,$$

由于  $f$  一阶导函数存在且连续, 即对于  $f'(x) = \begin{cases} 2ax - b \sin x, & x < 0 \\ e^x + \frac{1}{1+x} + c, & x \geq 0 \end{cases}$ , 有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \Rightarrow c = -2,$$

并且  $f'(0) = 0$ . 最后,  $f$  二阶导函数连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax - b \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( e^x + \frac{1}{1+x} + c \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( (e^x - 1) + \left( \frac{1}{1+x} - 1 \right) \right) = 0,$$



即  $2a - b = 0$ , 于是  $a = \frac{1}{2}$ . ■

3. 设某区间内的连续可微函数  $u = u(x, w), v = v(x, w)$  由方程组

$$\begin{cases} x^2 + 2u^2 + 3v^2 + w^4 = 1, \\ x + u + v + w = 0. \end{cases}$$

确定, 试求  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial w}$ .

解. 结合 4.2 节 A 第 6 题, 我们得到

$$\begin{cases} 2 + 4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 4u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 6v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{3v - 2u} \left( 1 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 3\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right) = \frac{16u^2 - 12uv - 12ux + 27v^2 - 12vx + 5x^2}{(3v - 2u)^3}.$$

又有

$$\begin{cases} 4\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial u}{\partial x} + 4u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial w} + 6\frac{\partial v}{\partial w}\frac{\partial v}{\partial x} + 6v\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial w} = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial w} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial w} = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial w} = \frac{1}{3v - 2u} \left( 2\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial w}\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{6(u - w^3)(2u - x) + 2(3v - 2w^3)(3v - x)}{(3v - 2u)^3}. \quad \blacksquare$$

4. 设某区间  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  内,  $n$  阶方阵值函数  $A(\cdot) = (a_{ij}(\cdot))$  连续可微, 实函数  $f$  连续, 实函数  $u$  在  $\Omega$  内二阶连续可微且满足方程

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) = f(\mathbf{x}).$$

作变量代换  $\mathbf{x} = P\mathbf{s}$ , 其中  $P$  为可逆常数矩阵, 试将上述方程化为关于  $v(\mathbf{s}) = u(P\mathbf{s})$  的方程.

解. ■

5. 设  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ((x, y) \neq (0, 0))$ . 试计算  $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$ .

解. 容易算得

$$f_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad f_{xx}(x, y) = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

考虑对称性易得  $f_{yy}(x, y) = \frac{x^2 + z^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ , 从而  $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = \frac{2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ . ■

6. 设  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ((x, y, z) \neq (0, 0, 0))$ . 试计算  $f_{xx}(x, y, z) + f_{yy}(x, y, z) + f_{zz}(x, y, z)$ .

解. 容易算得

$$f_x(x, y, z) = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad f_{xx}(x, y, z) = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

结合  $x, y, z$  的对称性可得

$$f_{xx}(x, y, z) + f_{yy}(x, y, z) + f_{zz}(x, y, z) = 0. \quad \blacksquare$$

7. 设二元实函数  $f$  在不包含原点的一个区域内有两阶的连续偏导数. 作变量代换  $\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$

其中  $r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$ . 试用  $f$  关于  $r, \theta$  的二阶偏导数表示  $f_{xx} + f_{yy}$ .

解. 注意到

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x},$$

先对  $x$  微分有

$$\begin{aligned} 2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x &\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r - x(\partial r / \partial x)}{r^2} = \frac{y^2}{r^3}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{1 - (y/x)^2} \left( -\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{2y}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2xy}{r^4}, \end{aligned}$$

按照类似的过程, 对  $y$  微分可以得到

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{r^4},$$

从以上结果, 可以推出

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0.$$

利用复合函数求导链式法则有

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

再次对  $x$  微商得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

对于  $y$  有同样的结果

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}.$$

将以上两式相加, 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \left( \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \left( \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial f}{\partial \theta} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \left( \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial f}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right), \end{aligned}$$

进一步得到

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \left( \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} \right) + \frac{\partial f}{\partial r} \left( \frac{x^2}{r^3} + \frac{y^2}{r^3} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \left( \frac{x^2}{r^4} + \frac{y^2}{r^4} \right),$$

利用  $r^2 = x^2 + y^2$ , 我们便得

$$f_{xx} + f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}. \quad \blacksquare$$

8. 设三元实函数  $f$  在不包含原点的一个区域内有两阶的连续偏导数. 作变量代换

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \varphi, \end{cases}$$

其中  $r > 0, \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, 2\pi]$ . 试用  $f$  关于  $r, \theta, \varphi$  的二阶偏导数表示  $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ .

解. ■

9. 设  $m \geq 1$ , 证明: 复数  $z_0$  为非零多项式  $P$  的  $m$  重根当且仅当  $P(z_0) = P'(z_0) = \cdots = P^{(m-1)}(z_0) = 0$ , 但  $P^{(m)}(z_0) \neq 0$ .

证明. □

10. 当  $a$  为何值时,  $x^4 - 9x^2 + ax + 12 = 0$  有重根?

解. 记  $f(x) = x^4 - 9x^2 + ax + 12$ , 由于

$$f'(x) = 4x^3 - 18x + a, \quad f''(x) = 12x^2 - 18, \quad f^{(3)}(x) = 24x,$$

现在来做这样一件事: 令  $f^{(3)} = 0$  得  $x = 0$ , 但  $f(0) \neq 0$ , 从而  $f(x)$  没有四重根; 令  $f''(x) = 0$  得  $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ , 在令  $f' \left( \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \right) = 0$  得  $a = \pm 6\sqrt{6}$ , 将这  $x$  与对应的  $a$  代入  $f$ , 得到  $f(x) \neq 0$ , 从而  $f(x)$  没有三重根. 即若  $f(x)$  有重根, 必为二重根.

易见  $x = 0$  不是  $f(x)$  的根. 设  $g(x) = \frac{9x^2 - x^4 - 12}{x}$ , 则  $a = g(x)$  的根即为  $f(x) = 0$  的解, 特别地, 当  $a$  等于  $g(x)$  的极值时,  $f(x)$  有重根, 重根即为  $g(x)$  的极值点.

由  $g'(x) = 9 - 3x^2 + \frac{12}{x^2}$  可知  $x = \pm 2$  为  $g(x)$  的极值点, 代入  $a = g(x)$ , 可知  $a = \pm 4$ . 于是  $a = 4$  时,  $x = 2$  为  $f(x) = 0$  的重根,  $a = -4$  时,  $x = -2$  为  $f(x) = 0$  的重根. ■

11. 设  $\alpha > 1, M > 0, [a, b]$  上的实函数  $f$  满足

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

证明:  $f$  在  $[a, b]$  上恒为常数.

解. 易见  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 给定  $x$ , 取  $y = x + \Delta x$ , 则有

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right| \leq M |\Delta x|^{\alpha-1} \rightarrow 0, \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

从而  $f$  在  $[a, b]$  上任一点得导数值为 0, 故而  $f$  为常数. ■

12. 设  $\alpha \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$ , 证明:

$$\frac{d}{dx}(x + \alpha)^n = n(x + \alpha)^{n-1}, \quad x \neq -\alpha.$$

证明. 先证  $(\ln(x + \alpha))' = \frac{1}{x + \alpha}$ , 设  $y = \ln(x + \alpha)$ , 则  $e^y = x + \alpha$ , 那么

$$(\ln(x + \alpha))' = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x + \alpha},$$

那么  $\frac{d}{dx}(x + \alpha)^n = \frac{d}{dx} \exp(n \ln(x + \alpha)) = \exp(n \ln(x + \alpha)) \cdot \frac{n}{x + \alpha} = n(x + \alpha)^{n-1}$ . □

### 4.3 B

1. 设  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  均为非零多项式, 满足  $\frac{1}{P(t)} = \frac{Q_1(t)}{P_1(t)} + \frac{Q_2(t)}{P_2(t)}$ , 其中  $P(t) = P_1(t)P_2(t)$ . 若  $f, f_1, f_2$  为  $I$  上的光滑函数, 满足  $P_1(D)f_1(x) = P_2(D)f_2(x) = f(x)$ , 证明:  $F(x) = Q_1(D)f_1(x) + Q_2(D)f_2(x)$  满足  $P(D)F(x) = f(x)$ .

证明. 由题设知  $Q_1(t)P_2(t) + Q_2(t)P_1(t) = 1$ , 于是

$$\begin{aligned} P(D)F(x) &= P_1(D)P_2(D)(Q_1(D)f_1(x) + Q_2(D)f_2(x)) \\ &= Q_1(D)P_2(D)P_1(D)f_1(x) + Q_2(D)P_1(D)P_2(D)f_2(x) \\ &= Q_1(D)P_2(D)f(x) + Q_2(D)P_1(D)f(x) \\ &= (Q_1(D)P_2(D) + Q_2(D)P_1(D))f(x) = f(x). \end{aligned} \quad \square$$

2. 设实函数  $y$  在  $(0, +\infty)$  上二阶可导, 满足  $(1 + x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 0$ . 令  $z(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x}y(x)$ . 试导出  $z$  的微分方程 (比较两种方法: 对等式  $y(x) = \frac{1 + x}{1 + x^2}z(x)$  求导和对等式  $(1 + x)z(x) = (1 + x^2)y(x)$  求导).

解. 记  $w(x) = \frac{1 + x}{1 + x^2}$ , 则  $y(x) = w(x) \cdot z(x)$ , 并且

$$y'(x) = w'(x)z(x) + w(x)z'(x), \quad y''(x) = w''(x)z(x) + 2w'(x)z'(x) + w(x)z''(x),$$

代入微分方程得到

$$(1 + x^2)w(x)z''(x) + [2(1 + x^2)w'(x) + 4xw(x)]z'(x) + [(1 + x^2)w''(x) + 4xw'(x) + 2w(x)]z(x) = 0,$$

结合  $w'(x) = \frac{1 - 2x - x^2}{(1 + x^2)^2}$ ,  $w''(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 6x - 2}{(1 + x^2)^3}$ , 带入方程即得

$$(1 + x)z''(x) + 2z'(x) = 0.$$

另外, 由于  $(1+x)z(x) = (1+x^2)y(x)$ , 于是有

$$\begin{aligned} z(x) + (1+x)z'(x) &= 2xy(x) + (1+x^2)y'(x), \\ (1+x)z''(x) + 2z'(x) &= (1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 0, \end{aligned}$$

显然后者计算量更小. ■

## 4.4 复指数函数, 正弦函数和余弦函数

### 4.4 A

1. 计算  $\sin x, \cos x$  在  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$  等点的值.

解. ■

2. 证明  $\pi > 2\sqrt{2}$ .

证明. □

3. 证明:  $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 成立  $\sin x < x < 4 \sin \frac{x}{2} - \sin x$ .

证明. □

4. 计算  $(x^3 e^x \sin x)^{(100)}$ .

解. 记  $f(x) = e^x \sin x$ , 由 Leibniz 公式有

$$(x^3 f(x))^{(100)} = C_{100}^0 x^3 f^{(100)}(x) + C_{100}^1 3x^2 f^{(99)}(x) + C_{100}^2 6x f^{(98)}(x) + C_{100}^3 6 f^{(97)}(x),$$

我们依次计算

$$(e^x \sin x)^{(100)} = (\operatorname{Re} e^{x+ix})^{(100)}$$

■

5. 证明: 不恒为零的  $n$  阶三角多项式  $a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  内至多只有  $2n$  个零点 (含重数).

证明. □

6. 利用上一题中的结论证明习题 2.7.B 第 5 题中的等式:

$$\sin \pi x = (2n+1) \sin \frac{\pi x}{2n+1} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right).$$

## 4.4 B

1. 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$ .

解.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = \operatorname{Im} (e^{e^{ix}} - 1) = \operatorname{Im} e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x} \sin(\sin x).$  ■

2. 设  $z \in \mathbb{C}$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ .

证明. □

3. 不借助复指数函数证明下列等式.

$$(\sin t)' = \cos t, \quad (\cos t)' = -\sin t, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\sin(-t) = -\sin t, \quad \cos(-t) = \cos t, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

4. 考虑 Euler 公式  $\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$ . 两端展开后, 形式上我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} &= x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \frac{x^3}{\pi^2} + \cdots + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=k_1+1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2 k_2^2} \frac{x^5}{\pi^5} \\ &\quad + (-1)^n \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 \cdots k_n^2} \frac{x^{2n+1}}{\pi^{2n}} + \cdots \end{aligned}$$

比较系数得到

$$\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 \cdots k_n^2} = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}, \quad n \geq 1.$$

特别地,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{1 \leq k_1 < k_2} \frac{1}{k_1^2 k_2^2} = \frac{\pi^4}{120}.$$

试严格证明上述关系式. 利用前述 Euler 公式, 形式上我有

$$x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n^2 \pi^2}\right) = \frac{\sin ix}{i} = \frac{e^{i \cdot ix} - e^{-i \cdot ix}}{i \cdot 2i} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

试严格证明

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. 证明

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

6. 仿习题 A 第 6 题给出一些新的形式

## 第 5 章 不定积分

### 5.1 不定积分

#### Theorem 5.1.1

设  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^n$  中的区域,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  在  $\Omega$  中可微且微分恒为  $\mathbf{0}$ , 则  $f$  在  $\Omega$  中恒为常量.

#### 5.1 A

1. 计算  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos 2x + 1} dx$ .

解.  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos 2x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} (\tan x - x) + C.$  ■

2. 对于复数  $\lambda$  以及实数  $x$ , 定义  $x^\lambda = e^{\lambda \ln x}$ . 验证:  $\frac{d}{dx} x^\lambda = \lambda x^{\lambda-1}$ .

解.  $\frac{d}{dx} x^\lambda = \frac{d}{dx} e^{\lambda \ln x} = e^{\lambda \ln x} \cdot \frac{\lambda}{x} = \lambda x^{\lambda-1}.$  ■

3. 设  $a < c < b$ ,  $f$  在  $(a, b)$  内连续,  $F$  在  $(a, c)$  与  $(c, b)$  内均为  $f$  的原函数, 且  $F$  在  $(a, b)$  内连续. 证明:  $F$  是  $f$  在  $(a, b)$  上的原函数.

证明. □

4. 试用有限覆盖定理证明定理 5.1.1.

#### 5.1 B

1. 考虑去心圆盘  $D = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1\}$  以及函数

$$P(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

证明在  $D$  内成立  $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ , 但不存在在  $D$  内可微的二元函数  $f(x, y)$  使得

$$df(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (x, y) \in D.$$

2. 在例子中, 在确定原函数  $F$  在  $\pm 1$  处的相关常数时, 我们只考虑了  $F$  的连续性, 而没有去考虑  $F$  在  $\pm 1$  上的可微性. 是说明这样做是合理的, 并把这种合理性抽象成一个习题.

## 5.2 变量代换法

## 5.2A

1. 分别用以下变量代换计算  $\int \sqrt{4-x^2} dx$ :

$$(1) x = 2 \sin t \left( t \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right).$$

$$(2) x = 2 \cos t \ (t \in [0, \pi]).$$

解. 内容...

2. 计算  $\int \frac{1-2\ln x}{x^3-x\ln x} dx$ .

解. 置  $x = 1/t$ , 则

$$\int \frac{1-2\ln x}{x^3-x\ln x} dx = - \int \frac{t+2t\ln t}{1+t^2\ln t} dt = - \int \frac{d(1+t^2\ln t)}{1+t^2\ln t} = -\ln(1+t^2\ln t) + C.$$

$$\text{即 } \int \frac{1-2\ln x}{x^3-x\ln x} dx = -\ln\left(1-\frac{\ln x}{x^2}\right) + C.$$

3. 计算  $\int \frac{1}{x(x^2+4)^{3/2}} dx$ .

解. 置  $x = 2 \tan t$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x^2+4)^{3/2}} dx &= \int \frac{\sec^2 t}{\tan x (4 \tan^2 x + 4)^{3/2}} dt = \frac{1}{8} \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t} dt = \frac{1}{8} \int \frac{1}{\sin t} dt + \frac{1}{8} \cos t + C \\ &= -\frac{1}{8} \int \frac{d(\cos t)}{1-\cos^2 t} + \frac{1}{8} \cos t + C \\ &= -\frac{1}{16} \ln \left| \frac{1+\cos t}{1-\cos t} \right| + \frac{1}{8} \cos t + C. \end{aligned}$$

$$\text{即 } \int \frac{1}{x(x^2+4)^{3/2}} dx = -\frac{1}{16} \ln \left| \frac{\sqrt{4+x^2}+2}{\sqrt{4+x^2}-2} \right| + \frac{1}{4\sqrt{4+x^2}} + C.$$

4. 计算  $\int \frac{e^x-1}{xe^x+1} dx$ .

$$\text{解. } \int \frac{e^x(x+1)-(xe^x+1)}{xe^x+1} dx = \int \frac{d(xe^x+1)}{xe^x+1} - x + C = \ln(xe^x+1) - x + C.$$

5. 设  $f$  是区间  $[a, b]$  上的实连续函数,  $\varphi$  在区间  $[\alpha, \beta]$  上连续, 在  $(\alpha, \beta)$  内可导且导数恒正,  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ . 记  $\psi$  为  $\varphi$  的反函数. 证明, 若在  $(\alpha, \beta)$  上成立

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = G(t) + C,$$

则  $G(\alpha^+)$  与  $G(\beta^-)$  存在. 进一步, 令  $G(\alpha) = G(\alpha^+), G(\beta) = G(\beta^-)$ , 则在  $[a, b]$  上有

$$\int f(x) dx = G(\psi(x)) + C.$$



## 5.2 B

1. 试给出  $\frac{1}{2 + \cos x + \sin x}$  的一个原函数.

解. 置  $t = \tan \frac{x}{2}$ , 则  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ , 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{2 + \cos x + \sin x} dx &= \int \frac{2}{t^2 + 2t + 3} dt = \sqrt{2} \arctan \left( \frac{t+1}{\sqrt{2}} \right) + C \\ &= \sqrt{2} \arctan \left( \frac{1 + \tan(x/2)}{\sqrt{2}} \right) + C. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

## 5.3 分部积分法

## 5.3 A

1. 计算以下不定积分:

$$(1) \int x^3 \ln^2 x \, dx;$$

$$(2) \int x^4 e^x \, dx;$$

$$(3) \int x \arctan x \, dx;$$

$$(4) \int x^2 \arcsin x \, dx;$$

$$(5) \int x^2 \arcsin^2 x \, dx;$$

$$(6) \int x^3 \arcsin^2 x \, dx;$$

$$(7) \int x^2 (2 \sec^2 x - 3 \sec^4 x) \, dx;$$

$$(8) \int x^2 e^{3x} \cos 4x \, dx.$$

解. 前四个的计算量较小,

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln^2 x \, dx &= \int \ln^2 x \, d\left(\frac{1}{4}x^4\right) = \frac{x^4 \ln^2 x}{4} - \frac{1}{2} \int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4 \ln^2 x}{4} - \frac{1}{2} \int \ln x \, d\left(\frac{1}{4}x^4\right) \\ &= \frac{x^4 \ln^2 x}{4} - \frac{x^4 \ln x}{8} + \int \frac{x^3}{8} \, dx = \frac{x^4 \ln^2 x}{4} - \frac{x^4 \ln x}{8} + \frac{x^4}{32} + C.\end{aligned}$$

容易验证这样一个事实

$$\begin{aligned}\int u \, d(v^{(n)}) &= uv^{(n)} - \int u' \, d(v^{(n-1)}) = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \int u'' \, d(v^{(n-2)}) \\ &= \cdots = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} + \cdots + (-1)^k u^{(k)}v^{(n-k)} + \cdots,\end{aligned}$$

对于 (2), 由于

$$(x^4)' = 4x^3, \quad (x^4)'' = 12x^2, \quad (x^4)^{(3)} = 24x, \quad (x^4)^{(4)} = 24, \quad (x^4)^{(5)} = 0,$$

易见

$$\int x^4 e^x \, dx = (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)e^x + C.$$

容易得到

$$\begin{aligned}\int x \arctan x \, dx &= \frac{x^2 \arctan x}{2} - \frac{x - \arctan x}{2} + C, \\ \int x^2 \arcsin x \, dx &= \frac{x^2 \arcsin x}{3} - \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{9} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + C.\end{aligned}$$

后四个的计算量稍大, 但是细心是不会出错的.

$$\int x^2 \arcsin^2 x \, dx = \int \arcsin^2 x \, d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3 \arcsin^2 x}{3} - \frac{2}{3} \int \arcsin x \cdot \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx,$$

一个可行的方法是寻找一阶微分形式  $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$  的原函数, 于是置  $x = \sin t$ , 从而

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int \sin^3 t \, dt = \int (\cos^2 - 1) \, d(\cos t) = \frac{\cos^3 t}{3} - \cos t + C.$$

即有

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \cdot \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= \int \arcsin x \, d\left(\frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} - \sqrt{1-x^2}\right) \\ &= \left(\frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} - \sqrt{1-x^2}\right) \arcsin x - \int \left(\frac{1-x^2}{3} - 1\right) \, dx \\ &= \left(\frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} - \sqrt{1-x^2}\right) \arcsin x + \frac{2x}{3} + \frac{x^3}{9} + C. \end{aligned}$$

代回即得

$$\int x^2 \arcsin^2 x \, dx = \frac{x^3 \arcsin^2 x}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} - \sqrt{1-x^2}\right) \arcsin x - \frac{4x}{9} - \frac{2x^3}{27} + C.$$

(6) 与此十分相似:

$$\begin{aligned} \int x^3 \arcsin^2 x \, dx &= \frac{x^4 \arcsin^2 x}{4} - \frac{3 \arcsin^2 x}{16} + \frac{3x\sqrt{1-x^2} \arcsin x}{16} + \\ &\quad \frac{x^3 \sqrt{1-x^2} \arcsin x}{2} + \frac{3x}{16} - \frac{3x^2}{32} - \frac{x^4}{8} + C. \end{aligned}$$

2. 试用不同的方法推到 (5.3.3)–(5.3.6) 式子.

3. 给出积分  $\int (1+x^2)^{3/2} \, dx$ ,  $\int (1+x^2)^{-3/2} \, dx$  与积分  $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$  的联系.

4. 给出积分  $\int (x^2-1)^{3/2} \, dx$ ,  $\int (x^2-1)^{-3/2} \, dx$  与积分  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx$  的联系.

5. 计算  $\int \left( e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right) + \ln x + 1 \right) \, dx$ .

解.  $\int \left( e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right) + \ln x + 1 \right) \, dx = e^x \ln x + x \ln x + C.$

6. 设连续可微函数  $y = y(x)$  由方程  $e^y + y + x = 1$  确定.

(1) 计算  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

(2) 计算  $\int y(x) \, dx$ .

(3) 任取  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 定义  $x_{n+1} = y(x_n) (n \geq 0)$ . 证明:  $\{x_n\}$  收敛并求其极限.

解. (1) 原式左右两侧对  $x$  求导得

$$e^y y' + y' + 1 = 0,$$

即得  $y' = -\frac{1}{1+e^y}$ , 继续对上式求导得到

$$e^y(y')^2 + e^y y'' + y'' = 0,$$

带入  $y'$  得到  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-e^y}{(1+e^y)^3}$ .

(2) 由  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+e^y}$  得到  $dx = -(e^y + 1) dy$  代入  $\int y(x) dx$  得到

$$\int y(x) dx = -\int y(e^y + 1) dy = e^y - ye^y - \frac{1}{2}y^2 + C.$$

(3) 由  $e^y + y + x = 1$  知  $e^y + y = 1 - x$ , 易见若  $x > 0$ , 则  $y(x) < 0$ ; 若  $x < 0$ , 则  $y(x) > 0$ . 并且易见  $y(0) = 0$ . 若  $x_n > 0 (n \geq 0)$ , 则  $x_{n+1} = y(x_n) < 0$ , 于是

$$|x_{n+1}| - |x_n| = -y(x_n) - x_n = -y(x_n) - 1 + y(x_n) + e^{y(x_n)} = e^{y(x_n)} - 1 < 0,$$

反之若  $x_n < 0$  同理可得  $|x_{n+1}| < |x_n|$ . 这意味着如果  $x_0$  取定, 那么无论如何,  $x_n$  都将落在  $[-|x_0|, |x_0|]$  内, 注意到这时

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| = \frac{1}{1+e^y} \leq \frac{1}{1+e^{-|x_0|}} < 1,$$

于是由 Lagrange 中值定理与压缩映射原理即得结论, 即  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ . ■

### 5.3 B

1. 考虑熟知的那些函数的两两组合, 试计算其乘积的不定积分.
2. 设  $m, n$  为整数, 讨论不同情形下, 什么方法是计算不定积分  $\int \sin^m x \cos^n x dx$  是最简单的.

## 5.4 有理函数不定积分

### 5.4 A

1. 计算  $\int \frac{1}{3 + \cos x} dx$ .

解. 设  $t = \tan \frac{x}{2}$ , 则有

$$\int \frac{1}{3 + \cos x} dx = \int \frac{1}{2 + t^2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C. \quad \blacksquare$$

2. 设  $Q(x, y)$  为  $x, y$  的有理函数,  $ad - bc \neq 0, m \geq 2$ , 试验证变量代换  $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$  将积分  $\int Q(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$  转化为有理积分. 试利用这一变量代换计算以下积分.

(1)  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} dx;$

(2)  $\int \frac{1}{x+1} \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} dx;$

$$(3) \int \sqrt{x^2 - 3x + 2} dx; \quad \left( \int \sqrt{x^2 - 3x + 2} dx = \int \sqrt{(x-1)(x-2)} dx = \int (x-2) \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} dx. \right)$$

$$(4) \int \sqrt{4 - 3x - x^2} dx.$$

解. 由题设

$$\int Q(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx \xrightarrow{t = \sqrt[m]{(ax+b)/(cx+d)}} \int Q\left(\frac{b-dt^m}{ct^m-a}, t\right) \cdot \frac{(ad-cb)mt^{m-1}}{(ct^m-a)^2} dt.$$

(1) 利用上述变换, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} dx &= \int \frac{6t^2}{(1-t^2)(2+t^2)} dt = \int \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} - \frac{4}{2+t^2} \right) dt \\ &= \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + 2\sqrt{2} \arctan \left( \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + C. \\ &= \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}}{1 - \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}} \right| + 2\sqrt{2} \arctan \sqrt{\frac{x+2}{2x-2}} + C. \end{aligned}$$

■

3. 设  $Q(x, y)$  为  $x, y$  的有理函数,  $a > 0$ , 试讨论变量代换  $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{ax}$  与  $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax}$  在将积分  $\int Q(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  转化为有理函数积分时的适用性. 进一步, 试利用上述变换计算第 2 题的 (1), (3).

解.

■

4. 设  $(Q(x, y))$  为  $x, y$  的有理函数,  $c > 0, b^2 - 4ac \neq 0$ . 试讨论变量代换  $t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{c}}{x}$  与  $t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x}$  再将积分  $\int Q(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  转化为有理函数积分时的适用性. 进一步, 试利用上述变换计算第 2 题的 (3), (4).

解.

■

5. 求  $A, B$  使得

$$3 \cos x + 4 \sin x = A(2 \cos x + \sin x) + B(2 \cos x + \sin x)'.$$

由此计算积分  $\int \frac{3 \cos x + 4 \sin x}{2 \cos x + \sin x} dx$ .

解. 易见  $A = 2, B = -1$ . 由

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int \frac{2 \cos x + \sin x}{2 \cos x + \sin x} dx = x + C, \\ I_2 &:= \int \frac{(2 \cos x + \sin x)'}{2 \cos x + \sin x} dx = \int \frac{d(2 \cos x + \sin x)}{2 \cos x + \sin x} = \ln |2 \cos x + \sin x| + C \end{aligned}$$

由线性性有

$$\int \frac{3 \cos x + 4 \sin x}{2 \cos x + \sin x} dx = AI_1 + BI_2 = 2x - \ln |2 \cos x + \sin x| + C.$$

■

## 5.4 B

1. 设  $Q, Q_1, Q_2$  为有理函数, 对于使得  $Q(x), Q_1(x), Q_2(x)$  都有意义的实数  $x$ , 成立  $Q_1(x) + Q_2(x) = Q(x)$ . 证明: 对于使得  $Q(z), Q_1(z), Q_2(z)$  都有意义的复数  $z$ , 成立  $Q_1(z) + Q_2(z) = Q(z)$ .

证明. □

2. 设  $Q, Q_1, Q_2$  为有理函数, 对于使得  $Q(x), Q_1(x), Q_2(x)$  都有意义的实数  $x$ , 成立  $Q_1(x)Q_2(x) = Q(x)$ . 证明: 对于使得  $Q(z), Q_1(z), Q_2(z)$  都有意义的复数  $z$ , 成立  $Q_1(z)Q_2(z) = Q(z)$ .

证明. □

3. 讨论在复平面  $\mathbb{C}$  的什么子区域内, 可以连续地定义  $w = \ln z$  使得  $e^w = z$ , 进一步,

(1) 考察对于复数  $z_0$ , 等式  $\frac{dx}{x+z_0} = \ln(x+z_0) + C$  的合理性.

(2) 考察在不同区域内, 一阶微分形式  $\frac{dx+idy}{x+iy}$  的原函数的存在性.

(3) 设  $n \geq 2$ , 考察在不同区域内, 一阶微分形式  $\frac{dx+idy}{(x+iy)^n}$  的原函数的存在性.

## 5.5 求解简单的微分方程

## 5.5 A

1. 求解下列方程:

(1)  $x(1+x^2)y' = (1-x^2)y$ .

解. 分离变量有  $\frac{dy}{y} = \frac{(1-x^2)}{x(1+x^2)} dx$ , 得  $y = \frac{Cx}{1+x^2}$ . ■

(2)  $y(x^2-1)y' = x(1-y^2)$ .

解. 即  $\frac{y}{1-y^2} dy = \frac{x}{x^2-1} dx$ , 得  $y^2 = 1 - C(x^2-1)$ . ■

(3)  $y' - \frac{y}{x+2} = \frac{1}{(x+2)^2}$ .

解. 对应得齐次方程为  $y' = \frac{y}{x+2}$ , 即得  $y = c(x+2)$ , 使用常数变易法, 令  $c = c(x)$ , 代入原方程, 得

$$c'(x) \cdot (x+2) = \frac{1}{(x+2)^2},$$

得到  $c = -\frac{1}{2(x+2)^2} + C$ , 代入  $y$  得到  $y = C(x+2) - \frac{1}{2(x+2)}$ . ■

(4)  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^3}$ .

解. 原方程即为  $\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^3}{y}$ , 对应齐次方程  $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$ , 得到  $x = cy$ , 使用常数变易法, 令  $c = c(y)$  代入前述方程得到  $c(y) = \frac{1}{2}y^2 + C$ , 从而  $x = \frac{1}{2}y^3 + Cy$ . ■

$$(5) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} - y^2 \ln x = 0.$$

解. 这正是 Bernoulli 方程, 令  $z = -y^{-1}$ , 原方程变为

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} - \ln x = 0,$$

对于  $\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = 0$ , 有  $z = cx$ , 使用常数变易法, 令  $c = c(x)$  代入前述方程得到  $c'(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 即  $c = \frac{\ln^2 x}{2} + C$ , 代回得到原方程得解为

$$\frac{1}{y} = Cx - \frac{1}{2}x \ln^2 x. \quad \blacksquare$$

2. 试给出方程  $y' = y^{2/3}$  在  $\mathbb{R}$  上的所有解.

解. 当  $y \neq 0$  时, 分离变量得到  $y^{-2/3}y' = 1$ , 两边积分得到  $3y^{1/3} = x + C$ , 因此  $y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3$ . 易见此为该方程在  $\mathbb{R}$  上的通解. 特解有  $y \equiv 0$  不在这之中. ■

### 5.5 B

1. 若  $P, Q$  是满足

$$P(tx, ty) = t^\alpha P(x, y), \quad Q(tx, ty) = t^\alpha Q(x, y). \quad \forall t > 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

的可微函数, 证明  $\frac{1}{xP(x, y) + yQ(x, y)}$  是方程  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  的一个积分因子.

证明. 设  $y = ux$ , 则  $dy = xdu + udx$ , 于是

$$P(x, y) = P(x, ux) = x^\alpha P(1, u),$$

$$Q(x, y) = Q(x, ux) = x^\alpha Q(1, u),$$

方程  $Pdx + Qdy = 0$  两边乘  $\mu := \frac{1}{xP + yQ}$  得到

$$\frac{P}{xP + yQ} dx + \frac{Q}{xP + yQ} dy = 0,$$

即  $\frac{P(x, ux) + uQ(x, ux)}{xP(x, ux) + yQ(x, ux)} dx + \frac{xQ(x, ux)}{xP(x, ux) + yQ(x, ux)} du = 0$ , 即

$$\frac{1}{x} dx + \frac{Q(1, u)}{P(1, u) + uQ(1, u)} du = 0,$$

这是一个恰当方程, 这就证明了  $\mu$  是题设方程的一个积分因子. □

2. 求解方程  $(x^3y - y^5)dx + (-x^4 + x^2y^3)dy = 0$ .

解. 令  $y = tx$ , 则  $dy = t dx + x dt$ , 原方程化为

$$(t^4 - t^5) dx + (t^3 x - 1) dt = 0, \quad (\clubsuit)$$

记上述方程的积分因子为  $\mu(t)$ , 则有

$$\frac{\partial(\mu(t)(t^4 - t^5))}{\partial t} = \mu'(t)(t^4 - t^5) + \mu(t)(4t^3 - 5t^4) = \frac{\partial(\mu(t)(t^3 x - 1))}{\partial x} = \mu(t)t^3,$$

即

$$\mu'(t)(t - t^2) + \mu(t)(3 - 5t) = 0,$$

容易解得  $\mu(t) = \frac{1}{t^3(1-t)^2}$ . 方程  $(\clubsuit)$  两侧乘以  $\mu$ , 得到恰当方程:

$$\frac{t}{1-t} dx + \frac{t^3 x - 1}{t^3(1-t)^2} dt =: P dx + Q dt = 0.$$

则存在  $u(x, t)$  使得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{t}{1-t}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{t^3 x - 1}{t^3(1-t)^2},$$

对左侧公式积分得到  $u = \frac{tx}{1-t} + \varphi(t)$ , 带入右式得到

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{t^3(1-t)^2},$$

设

$$\frac{1}{t^3(1-t)^2} = \frac{t}{t^4(1-t)^2} = \left( \frac{At^2 + Bt + C}{t^2(1-t)} \right)' + \frac{Dt^2 + Et + F}{t^2(1-t)},$$

求得<sup>a</sup>  $A = 0, B = \frac{3}{2}, C = -\frac{1}{2}, D = E = 0, F = 3$ , 即

$$\int \frac{1}{t^3(1-t)^2} dt = \frac{3t-1}{2t^2(1-t)} + 3 \int \frac{1}{t^2(1-t)} dt,$$

容易得到

$$\int \frac{1}{t^2(1-t)} dt = \int \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \ln|t| - \frac{1}{t} - \ln|1-t| + C,$$

即  $\varphi(t) = \frac{1-3t}{2t^2(1-t)} + \frac{3}{t} - 3 \ln \left| \frac{t}{1-t} \right| + C$ , 带回  $y = tx$  与  $u(x, t)$ , 得到原方程的解为

$$\frac{xy}{x-y} + \frac{(x-3y)x^2}{2y^2(x-y)} + \frac{3x}{y} - 3 \ln \left| \frac{x}{x-y} \right| = C. \quad \blacksquare$$

<sup>a</sup>这里方程个数将少于未知数个数.

## 第 6 章 微分中值定理和 Taylor 展开式

### 6.1 微分中值定理

#### 6.1 A

1. 设一元实函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导,  $f(a) = f(b) = 0$ . 证明:

(1) 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $\xi^2 f(\xi) + f'(\xi) = 0$ .

证明. 令  $F(x) = f(x) \cdot \exp\left(\frac{1}{3}x^3\right)$ , 则  $F(0) = F(1) = 0$ , 由 Rolle 定理知  $\exists \xi \in (a, b)$  使得  $F'(\xi) = \exp\left(\frac{1}{3}\xi^3\right) (\xi^2 f(\xi) + f'(\xi)) = 0$ , 结论得证.  $\square$

(2) 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f^2(\xi) \sin \xi + f'(\xi) = 0$ .

证明. 令  $F(x) = f(x) \cdot \exp\left(\int_a^x f(t) \sin t \, dt\right)$ . 仿 (1) 即可.  $\square$

2. 设实函数  $f$  在  $[a, b]$  上可导,  $f(a) = f(b) = 0$ . 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$f^3(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

证明. 令  $F(x) = f(x) \cdot \exp\left(\int_a^x f^2(t) \, dt\right)$ , 则  $F(a) = F(b) = 0$ , 由 Rolle 定理知  $\exists \xi \in (a, b)$  使得

$$F'(\xi) = \exp\left(\int_a^\xi f^2(t) \, dt\right) (f^3(\xi) + f'(\xi)) = 0,$$

从而得证.  $\square$

3. 设实函数  $f$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内二阶可导. 已知  $f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ . 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f''(\xi) = -2$ .

证明. 令  $F(x) = f(x) + x^2$ , 则  $F(0) = 0, F(1) = 1, F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ , 则由 Lagrange 中值定理知  $\exists \xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  使得

$$F'(\xi_1) = \frac{F(1/2) - F(0)}{1/2 - 0} = 1, \quad F'(\xi_2) = \frac{F(1) - F(1/2)}{1 - 1/2} = 1,$$

由 Rolle 定理知  $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$  使得  $F''(\xi) = f''(\xi) + 2 = 0$ . 得证.  $\square$

4. 设实函数  $f$  在  $[0, 1]$  上有二阶导数, 且

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 3e, \quad f'(1) = 5e.$$

证明或证伪: 存在  $\xi \in (0, 1)$  使得

$$f''(\xi) - 2f'(\xi) + f(\xi) = 0.$$



证明. 令  $F(x) = e^{-x}f(x)$ . 则  $F(0) = 1, F(1) = 3$ , 由 Lagrange 中值定理知  $\exists \xi_1$  使得

$$F'(\xi_1) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 2,$$

而易见  $F'(1) = 2$ , 从而由 Rolle 定理  $\exists \xi \in (\xi_1, 1)$  使得  $F''(\xi) = e^{-\xi}(f''(\xi) - 2f'(\xi) + f(\xi)) = 0$ .  $\square$

5. 设一元实函数  $f$  在  $[1, 2]$  上有二阶导数, 且  $f(2) = 0$ . 令  $F(x) = (x-1)^2 f(x)$ , 证明: 存在  $\xi \in (1, 2)$  使得  $F''(\xi) = 0$ .

证明. 易见  $F(1) = F(2) = 0$ , 由 Rolle 定理知  $\exists \xi_1 \in (a, b)$  使得  $F'(\xi_1) = 0$ , 易见  $F'(1) = 0$ , 再次使用 Rolle 定理知  $\xi \in (\xi_1, 1)$  使得  $F''(\xi) = 0$ .  $\square$

6. 设  $\delta > 0$ . 在  $(-\delta, \delta)$  内, 一元实函数  $f$  可微, 且满足

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}, \quad \forall x, y, x+y \in (-\delta, \delta).$$

试求  $f$ .

解. 易见  $f(0) = 0$ , 方程两侧对  $y$  求导得到

$$f'(x+y) = \frac{f'(y)(1 - f(x)f(y)) + f(x)f'(y)(f(x) + f(y))}{(1 - f(x)f(y))^2},$$

记  $a = f'(0)$ , 同时令  $y = 0$  得到

$$f'(x) = a + af^2(x),$$

容易解得  $f(x) = \tan ax$ .  $\blacksquare$

7. 设  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{\ln a_n} (n \geq 1)$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n \ln a_n}{n}$  存在并求其值.

解. 易见  $\{a_n\}$  单增且无界. 设可微函数  $f(x)$  满足  $f(n) = a_n$ , 且  $f(x)$  单调递增. 同时设  $F(x) = f(x) \ln f(x)$ . 对于原极限, 由 Stolz 定理与 Lagrange 中值定理可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n \ln a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} \ln a_{n+1} - a_n \ln a_n}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n+1) - F(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F'(\xi_n),$$

其中  $\xi_n \in (n, n+1)$ , 而  $F'(x) = f'(x)(\ln f(x) + 1)$ , 结合  $f(x)$  单调性, 有

$$f'(\xi_n)(\ln a_n + 1) \leq f'(\xi_n)(\ln \xi_n + 1) \leq f'(\xi_n)(\ln a_{n+1} + 1).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n \ln a_n}{n} = 1. \quad \blacksquare$$

8. 设  $\psi$  是  $(0, +\infty)$  上局部有界的实值函数, 满足

$$\psi(xy) = \psi(x) + \psi(y), \quad \forall x, y \in (0, +\infty).$$

试证明:

(1)  $\psi$  在  $(0, +\infty)$  上某一点连续, 进而在  $(0, +\infty)$  每一点连续.

(2) 对任何  $x > 0$  以及有理数  $q$ ,  $\psi(x^q) = q\psi(x)$ .

(3) 对任何  $x > 0$  以及实数  $y$ ,  $\psi(x^y) = y\psi(x)$ .

特别的, 对任何  $x > 0$  成立  $\psi(x) = \psi(e) \ln x$ .

9. 若对任何  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  上不恒为零的一元实函数  $f$  满足  $f(x+y) = f(x)f(y)$ . 进一步,  $f$  在  $\mathbb{R}$  上局部有界, 证明: 存在常数  $a$  使得

$$f(x) = a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

10. 举例说明中值定理对于复值函数不成立.

11. 设  $f, g \in C[a, b]$ ,  $g$  严格单调. 证明: 存在  $[a_1, b_1] \subset [a, b]$  使得  $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$ , 且

$$\frac{f(b_1) - f(a_1)}{g(b_1) - g(a_1)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

证明. 记  $m = \frac{a+b}{2}$ ,  $c = \frac{b-a}{2}$ , 设

$$F(x) = \frac{f(x+c) - f(x)}{g(x+c) - g(x)} - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}, \quad x \in [a, m],$$

注意到

$$\frac{f(m) - f(a)}{g(m) - g(a)} \cdot \frac{g(m) - g(a)}{g(b) - g(a)} + \frac{f(b) - f(m)}{g(b) - g(m)} \cdot \frac{g(b) - g(m)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

并且  $\frac{g(m) - g(a)}{g(b) - g(a)} + \frac{g(b) - g(m)}{g(b) - g(a)} = 1$ , 结合题设可知  $F(a)$  与  $F(c)$  异号, 从而有结论得证.  $\square$

### 6.1 B

1. 若对任何  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  上的一元复值函数  $f$  满足  $f(x+y) = f(x)f(y)$ . 进一步,  $f$  在  $\mathbb{R}$  上局部有界. 试问,  $f$  的解具有什么形式?

2. 在上一题中, 假设  $f$  的取值为  $n$  阶方阵, 结论又如何?

3. 设  $f$  在  $(a, b)$  内连续且右导数为  $f'_+(x) = x \arctan x$ . 证明:  $f$  在  $(a, b)$  内可导.

4. 设实函数  $f$  在  $[0, +\infty)$  上有二阶的连续导数, 满足  $f(0) = f'(0) = 0$  以及  $f''(x) + 3f'(x) + 2f(x) \geq 0$ . 证明:  $f(x) \geq 0 (\forall x \in [0, +\infty))$ .

5. 设实函数  $f$  在区间  $[-1, 1]$  上连续, 在  $(-1, 1)$  内三阶可导. 证明:  $\xi \in (-1, 1)$  使得  $f'''(\xi) = 3(f(1) - f(-1) - 2f'(0))$ .

证明. 令

$$F(x) = f(x) - \left( \frac{f(1) - f(-1) - 2f'(0)}{2} \right) x^3 + \left( f(0) - \frac{f(-1) + f(1)}{2} \right) x^2 - f'(0)x$$

于是有

$$F(-1) = F(0) = F(1) = f(0),$$

由 Rolle 定理可知  $\exists \xi_1 \in (-1, 0), \exists \xi_2 \in (0, 1)$  使得  $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$ , 又有  $F'(0) = 0$ , 再次使用 Rolle 定理, 即  $\exists \xi_3 \in (\xi_1, 0)$  与  $\xi_4 \in (0, \xi_2)$  使得  $F''(\xi_3) = F''(\xi_4) = 0$ , 依 Rolle 定理  $\exists \xi \in (\xi_3, \xi_4)$  使得  $F'''(\xi) = 0$ . 结论得证.  $\square$

6. 设实函数  $f$  为  $\mathbb{R}$  上的有界可微函数, 且对任何  $x$  均有  $|f'(x)| < 1$ . 证明: 存在  $M < 1$  使得对任何  $x \in \mathbb{R}$  成立  $|f(x) - f(0)| \leq M|x|$ .

进一步, 是否存在常数  $K < 1$ , 使得对任何  $x, y \in \mathbb{R}$ , 均有  $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$ ?

证明. 由 Lagrange 中值定理, 有

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = |f'(\xi)| < M < 1, \quad \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间},$$

由此知  $|f(x) - f(0)| < M|x|$ . 同理可知后者部分结论也成立.  $\square$

7. 设实函数  $f$  是  $\mathbb{R}$  上的连续可导函数, 且  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > f(f(x))$ . 证明:  $\forall x \geq 0, f(f(f(x))) \leq 0$ .

证明. 我们先证明 (A)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty$ . 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , 则  $\exists X_1, \forall x > X_1$  有  $f(x) > 2$ , 也有  $X_2$  使得  $\forall x > X_2$  有  $f(x) > X_1$ , 这样就有

$$f'(x) > f(f(x)) > f(X_1) > 2, \quad \forall x > X_2,$$

因此有  $X_3$  使  $x > X_3 - 1$  时有  $f(x) > x$  成立, 也即  $f'(x) > f(f(x)) > f(x)$ , 有  $\frac{f'(x)}{f(x)} > 1$ , 即有

$$\int_{X_3}^x \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) - \ln f(X_3) > x - X_3 \Rightarrow f(x) > f(X_3)e^{x-X_3} > X_3e^{x-X_3},$$

于是有

$$f'(x) > f(f(x)) > X_3e^{f(x)-X_3} \Rightarrow f'(x)e^{-f(x)} > X_3e^{-X_3},$$

由此得出

$$\int_{X_3}^x f'(x)e^{-f(x)} dx > \int_{X_3}^x X_3e^{-X_3} dx \Rightarrow e^{-f(x)} - e^{-f(X_3)} > (x - X_3)X_3e^{-X_3},$$

矛盾 (左侧有界而右侧可以无界), 从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty$ .

由此可得存在一些  $x > 0$  使得  $f(x) < x$ , 下面我们证明, 不可能有  $x_0 > 0$  使得  $f(x_0) = x_0$ , 从而 (B)  $\forall x > 0$  都有  $f(x) < x$ . 如若这样的  $x_0$  存在, 我们先证明  $\forall x \geq x_0$ , 有  $f(x) \geq x_0$ , 事实上这也是不可能的, 因为此时有

$$f'(x) > f(f(x)) \geq f(x_0) = x_0 > 0, \quad \forall x \geq x_0,$$

这与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty$  矛盾. 下面我们证明前述结论, 事实上如果存在  $x \geq x_0$  而  $f(x) < x_0$ , 我们考虑  $T = \inf\{x \geq x_0 | f(x) < x_0\}$ , 则由  $f$  的连续性可知  $f(T) = x_0$ , 于是

$$f'(T) > f(f(T)) = f(x_0) = x_0 > 0,$$

这意味着如果  $T > x_0$  则存在  $\delta_0$  使得  $x \in (T - \delta_0, T)$  时有  $f(x) < f(T) = x_0$ , 这与  $T$  的定义矛盾. 如果  $T = x_0$ , 则有  $\delta_2 > 0$  使得  $x \in (T, T + \delta_0)$  时有  $f(x) > f(T) = x_0$ , 亦矛盾.

下面我们证明:(C) 若  $f(x_1) > 0$  且  $f(x_2) \geq x_1$ , 那么  $\forall x > x_2$  都有  $f(x) > x_1$ . 特别的, 如果  $x_1 \leq 0$  且  $f(x_1) > 0$ , 那么  $\forall x > x_1$  有  $f(x) > x_1$ .

若存在  $x > x_2$  但  $f(x) \leq x_1$ , 我们考虑  $S = \inf\{x > x_2 | f(x) \leq x_1\}$ , 由  $f$  的连续性可知  $f(S) = x_1$ , 类似于前面的证明, 我们有

$$f'(S) > f(f(S)) = f(x_1) > 0,$$

如果  $S > x_2$ , 则有  $\delta_1 > 0$  使得  $x \in (S - \delta_1, S)$  时有  $f(x) < f(S) = x_1$  与  $S$  的定义矛盾, 如果  $S = x_2$ , 则有  $\delta_2 > 0$  使得  $x \in (S, S + \delta_2)$  有  $f(x) > x_1$ , 仍矛盾. 而后者只需考虑  $x_1 = x_2$ .

现在我们回到问题本身, 假设有  $x_0 > 0$  使得  $f(f(f(x_0))) > 0$ . 记

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2) > 0.$$

下面我们证明  $0 < x_3 < x_2 < x_1 < x_0$ . 由 (B) 可见  $x_0 > x_1$ , 如果  $x_1 < 0$ , 则  $f(x_1) \leq 0$ , 否则  $f(x_1) > 0$ , 则由 (C) 可得  $\forall x > x_1$  有  $f(x) > x_1$  有  $f(x_0) > x_1$ , 矛盾. 若  $x_1 = 0$  则由 (B) 与  $f$  的连续性可得  $f(x_1) \leq 0$ . 即从  $x_1 \leq 0$  出发一定能推得  $x_2 \leq 0$ . 若  $x_2 = 0$ , 同理可得  $f(x_2) \leq 0$ , 但  $f(x_2) = x_3 > 0$ , 矛盾. 若  $x_2 < 0$ , 结合  $f(x_2) > 0$  与  $x_0 > 0 > x_2$  则由 (C) 知  $f(x_0) > x_2$ , 即  $x_1 > x_2$ , 进一步, 由于  $f(x_2) > 0 > x_2$ , 由 (C) 知  $\forall x > x_2$  有  $f(x) > x_2$ , 得到  $f(x_1) > x_2$  矛盾. 从而有  $0 < x_3 < x_2 < x_1 < x_0$ .

由  $f(x_1) > 0, f(x_0) \geq x_1$ , 我们得到  $\forall x > x_0$  有  $f(x) > x_1$ , 同理得到  $\forall x > x_1$  有  $f(x) > x_2$ . 由此对于  $x > x_0$  有

$$f'(x) > f(f(x)) > x_2 > 0,$$

这意味着  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty$ . 这与 (A) 矛盾. 于是不可能存在  $x_0 > 0$  使得  $f(f(f(x_0))) > 0$ , 即  $\forall x \geq 0, f(f(f(x))) \leq 0$ . □

## 6.2 L'Hôpital 法则

### 6.2A

1. 设  $x_0 \in (0, \pi), x_{n+1} = \sin x_n (n \geq 0)$ . 计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \sin x_n$ .

解. 易见  $\{x_n\}$  大于零单调递减有下界, 取极限得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , 而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sin^2 x_n} &\stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x_n - \sin^2 x_{n+1}}{\sin^2 x_n \sin^2 x_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}^2 - \sin^2 x_{n+1}}{x_{n+1}^2 \sin^2 x_{n+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)(x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/6 \cdot x^3 \cdot 2x}{x^4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \sin x_n = \sqrt{3}$ . ■

2. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2}$ .

解. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

从而  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2} = \exp \left( \frac{1}{6} \right)$ . ■

3. 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left( x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{1/x} - \sqrt{x^6 + x} \right)$ .

解. 令  $t = \frac{1}{x}$ , 则原极限变为

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t \left( 1 - t + \frac{1}{2}t^2 \right) - \sqrt{1 + t^5}}{t^3} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}t^2 e^t - \frac{5t^4}{2\sqrt{1+t^5}}}{3t^2} = \frac{1}{6}.$$
 ■

4. 计算:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin x) - \arctan(\ln(1+x))}{x^2}.$$

解. 注意到  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x^2} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{1}{2}$ , 于是有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin x) - \arctan(\ln(1+x))}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin x) - \arctan(\ln(1+x))}{\sin x - \ln(1+x)} \cdot \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (\arctan x)' = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
 ■

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \tan x)^{3/2} - (1+x)^{3/2}}{x^3}.$$

解. 注意到  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{1}{3}$ , 于是有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \tan x)^{3/2} - (1+x)^{3/2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \tan x)^{3/2} - (1+x)^{3/2}}{\tan x - x} \cdot \frac{\tan x - x}{x^3} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} ((1+x)^{3/2})' = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
 ■

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right).$$

解. 记  $F(x) = \ln(1+x)$ ,  $\varphi(x) = x$ ,  $\psi(x) = x + \sqrt{1+x^2} - 1$ , 注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

以及

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x^2} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)\psi(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi(x)}{x} = 1. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{x+1}\right)^{(1+x)/x} - (1 + \tan x)^{1/\tan x}}{x^2}.$$

解. 设  $F(x) = (1+x)^{1/x}$ , 注意到

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x+1} - \tan x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x+1)\tan x}{x^2} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} -1,$$

以及

$$\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} -\frac{e}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{x+1}\right)^{(1+x)/x} - (1 + \tan x)^{1/\tan x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{x+1}\right)^{(1+x)/x} - (1 + \tan x)^{1/\tan x}}{\frac{x}{x+1} - \tan x} \cdot \frac{\frac{x}{x+1} - \tan x}{x^2} = \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

5. 设  $f$  在  $[a, b]$  上两阶可导, 且满足  $|f''(x)| \leq M|f(x)|$ ,  $f(a) = f'(a) = 0$ , 其中  $M$  是一个常数, 证明  $f(x) \equiv 0$ .

证明. 97 页

反证法. 若  $\exists x_0 \in (a, b]$  使得  $f(x_0) \neq 0$ , 不妨设  $f(x_0) > 0$ , 记

$$c = \sup\{x \in [a, x_0] \mid f(x) \leq 0\},$$

则  $c$  适定, 且  $c \in [a, x_0)$ ,  $f(c) = 0$ ,

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in (c, x_0).$$

在  $(c, x_0)$  内, 有

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \leq M,$$

即

$$(\ln f(x))' \leq M, \quad \forall x \in (c, x_0),$$

所以由中值定理可得

$$\frac{\ln f(x_0) - \ln f(x)}{x_0 - c} \leq M, \quad \forall x \in (c, x_0).$$

在上式中令  $x \rightarrow c^+$ , 并注意到  $f(c) = 0$  得到  $+\infty \leq M$ . 矛盾, 所以  $f(x) \equiv 0$ .

6. 设  $f$  在  $[0, +\infty)$  可导, 且  $f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上一致连续,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在. 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .  
证明. □

7. 设  $f$  在  $\mathbb{R}$  上连续可微, 且  $f(x+1) - f(x) = f'(x) (\forall x \in \mathbb{R})$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = c$ . 证明  $f'(x) \equiv c$ .  
证明. 反证法. 设有  $\xi_0$  使得  $f'(\xi_0) \neq c$ , 则

$$f(\xi_0 + 1) - f(\xi_0) = f'(\xi_0),$$

由 Lagrange 中值定理可知  $\exists \xi_1 \in (\xi_0, \xi_0 + 1)$  使得

$$f'(\xi_0) = f(\xi_0 + 1) - f(\xi_0) = f'(\xi_1),$$

则  $f(\xi_1 + 1) - f(\xi_1) = f'(\xi_1)$  又由 Lagrange 中值定理知  $\exists \xi_2 \in (\xi_1, \xi_1 + 1)$  使得

$$f'(\xi_0) = f(\xi_1 + 1) - f(\xi_1) = f'(\xi_2),$$

重复这个操作得到  $\{\xi_n\}$  使得  $f'(\xi_n) = f'(\xi_0) (n = 0, 1, 2, \dots)$ , 设集合  $E$  为全体导数值等于  $f'(\xi_0)$  的坐标全体, 即

$$E = \{\xi \mid f'(\xi) = f'(\xi_0)\},$$

由上面的信息可见  $E$  为无限集.

若  $E$  无界, 则与题设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = c$  矛盾. 下证  $E$  必无界.

事实上, 若  $E$  有界, 则必有上确界, 记  $\sup_{\xi \in E} \xi = M$ , 从  $E$  中选取一子列  $\{\xi'_n\}$  使其收敛于  $M$ , 结合  $f(x)$  的连续性有

$$f'(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(\xi'_n + 1) - f(\xi'_n)] = f(M + 1) - f(M),$$

由 Lagrange 中值定理可知  $\exists \xi' \in (M, M + 1)$  使得  $f'(\xi') = f'(\xi_0)$ , 即  $\xi' \in E$  并且  $\xi' > M$ , 矛盾. 进而  $E$  无界. □

## 6.2 B

1. 设  $x \in (0, 1), p > 0$ , 试考察级数

$$(\sin x)^p - (\sin(\sin x))^p + (\sin(\sin(\sin x)))^p - (\sin(\sin(\sin(\sin x))))^p + \dots$$

的收敛性 (含绝对收敛性).

解. 记  $a_0 = x, a_{n+1} = \sin a_n (n \geq 1)$ , 于是原级数即为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ , 参考 6.2 A 可知  $\{a_n^p\}$  单调递减趋于零, 由 Leibniz 判别法可知原级数收敛.

并且由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \sin a_n = \sqrt{3}$  可知  $a_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ , 即  $a_n^p \sim \left(\frac{3}{n}\right)^{p/2}$ , 从而  $p > 2$  时原级数绝对收敛. ■

2. 设  $n \geq 1$ ,  $P$  为  $n$  阶实系数多项式, 则对于  $\mathbb{R}$  上任何  $n$  次可导的实函数  $f$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(D)f(x) = 0$  均蕴涵  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  的充要条件是  $P$  的所有零点都有负实部.

证明. 必要性.

充分性. □

3. 设  $f$  在  $[1, +\infty)$  上连续, 在  $(1, +\infty)$  上可导, 且  $e^{x^2}f'(x)$  在  $(1, +\infty)$  上有界, 则在什么条件下可得  $xe^{x^2}f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上有界?

解. ■

4. 设实函数  $f$  在  $\mathbb{R}$  上有界, 可导且  $|f'(x)| < 1 (\forall x \in \mathbb{R})$ , 又设  $x_0 \in \mathbb{R}, x_{n+1} = f(x_n) (n \geq 0)$ , 证明  $\{x_n\}$  收敛.

证明. 设  $\max\{|f(x)|, |x_0|\} \leq M$ . 考虑  $F(x) = x - f(x)$ , 由于  $F(-M) = -M - f(-M) \leq 0$ , 而  $F(M) = M - f(M) \geq 0$ , 从而有  $x^* \in [-M, M]$  使得  $F(x^*) = 0$ . 下面说明, 这样的  $x^*$  是唯一的, 事实上由于  $|f'(x)| < 1$ , 由 Lagrange 中值定理, 对任意  $x < y$ , 存在  $\xi \in (x, y)$  使得

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| < |x - y|,$$

若还有  $x' \neq x^*$  使得  $F(x') = 0$ , 则有  $|f(x^*) - f(x')| = |x^* - x'|$  矛盾.

再证  $\{x_n\}$  收敛到  $x^*$ , 由于

$$|x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - f(x^*)| < |x_n - x^*|,$$

从而  $\{|x_n - x^*|\}$  单调递减, 设其极限为  $A$ , 则  $\{x_n\}$  必存在子列收敛到  $x^* \pm A$ . 不妨设  $\{x_n\}$  本身收敛到  $x^* + A$ , 则  $x_{n+1} = f(x_n)$  收敛到  $f(x^* + A)$ , 也即  $x^* + A = f(x^* + A)$ , 则  $F(x^* + A) = 0$ , 由上述知  $A$  只能为 0. 从而  $\{x_n\}$  收敛. □

5. 设实函数  $f$  在  $\mathbb{R}$  上可导且  $|f'(x)| < 1 (\forall x \in \mathbb{R})$ , 又设  $x_0 \in \mathbb{R}, x_{n+1} = f(x_n) (n \geq 0)$ , 证明  $\{x_n\}$  收敛或举例说明  $\{x_n\}$  可能发散.

解.  $\{x_n\}$  可能发散. 设

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x \geq 1, \\ 2, & -1 < x < 1, \\ -x - \frac{1}{x}, & x \leq -1 \end{cases}$$

取  $x_0 = 1$  易见  $\{x_n\}$  发散. ■

6. 设  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  是可微的有界函数,  $\|F_x(x)\| < 1 (\forall x \in \mathbb{R}^n)$ , 又设  $x_0 \in \mathbb{R}^n, x_{k+1} = F(x_k) (k \geq 0)$ , 证明  $\{x_k\}$  收敛.



证明. 设  $\max\{\|F(x)\|, \|x\|\} \leq M$ . 考虑  $G(x) = x - F(x)$  在  $[-M, M]^n$  上的结果. 对于  $x \in \mathbb{R}^n$ , 我们称  $x \leq 0$  为  $x$  的所有分量小于等于 0;  $x \geq 0$  为  $x$  的所有分量大于等于 0. 记  $M$  为所有分量均为  $M$  的向量, 则  $G(-M) \leq 0$  而  $G(M) \geq 0$ , 由于  $[-M, M]^n$  道路连通并且  $G$  连续, 从而有  $x^* \in [-M, M]^n$  使得  $G(x^*) = 0$ .

下面说明这样的  $x^*$  是唯一的, 事实上由于  $\|F_x(x)\| < 1$ , 由中值定理, 对任意  $x, y$ , 存在  $\xi$  使得

$$\|F(x) - F(y)\| = \|F_x(\xi)\| \|x - y\| < \|x - y\|,$$

若还有  $x' \neq x^*$  使得  $G(x') = 0$ , 则有  $\|F(x^*) - F(x')\| = \|x^* - x'\|$  矛盾. 其余部分参考第 4 题. □

## 6.3 凸函数

### Definition 6.3.1

设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  为凸集, 称  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  为  $E$  上的凸函数, 如果对于任何  $\alpha \in (0, 1)$  以及  $x, y \in E$ , 成立

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

若当  $x \neq y$  时上式中的严格不等式成立, 则称  $f$  为严格凸函数. 称  $f$  为 (严格) 凹函数如果  $-f$  是 (严格) 凸函数.

### Definition 6.3.2

设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  为凸集, 称  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  为  $E$  上的凸函数, 如果对于任何  $m \geq 2, x_1, x_2, \dots, x_m \in E$  以及满足  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$  的  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \geq 0$  成立

$$f\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^m \alpha_k f(x_k).$$

### Theorem 6.3.1

设  $f$  为区间  $(a, b)$  内的实连续函数. 则有

- (i)  $f$  (严格) 凸当且仅当  $f'_+$  在  $(a, b)$  内存在且 (严格) 单增.
- (ii)  $f$  凸当且仅当  $f'_+$  在  $(a, b)$  内存在, 且对任何  $x_0 \in (a, b)$ , 成立

$$f(x) \geq f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in (a, b).$$

而  $f$  严格凸当且仅当  $f'_+$  在  $(a, b)$  内存在, 且对任何  $x_0 \in (a, b)$  以及  $x \neq x_0$ , 上式中严格不等式成立.

- (iii)  $f$  (严格) 凸当且仅当  $f'_-$  在  $(a, b)$  内存在, 且  $f'_-$  (严格) 单增.

(iv)  $f$  凸当且仅当  $f'_-$  在  $(a, b)$  内存在, 且对任何  $x_0 \in (a, b)$ , 成立

$$f(x) \geq f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in (a, b).$$

而  $f$  严格凸当且仅当  $f'_-$  在  $(a, b)$  内存在, 且对任何  $x_0 \in (a, b)$  以及  $x \neq x_0$ , 上式中严格不等式成立.

(v) 若  $f$  可导, 则  $f$  (严格) 凸当且仅当  $f'$  (严格) 单增.

(vi) 若  $f$  可导, 则  $f$  凸当且仅当曲线在切线之上, 即对任何  $x_0 \in (a, b)$ , 成立

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in (a, b).$$

而  $f$  严格凸当且仅当对任何  $x_0 \in (a, b)$  以及  $x \neq x_0$ , 上式中严格不等式成立.

### Theorem 6.3.2

设  $f$  为区间  $(a, b)$  内二阶可导函数, 则  $f$  为凸函数当且仅当  $f''$  非负, 进一步, 若  $f''$  恒正, 则  $f$  严格凸.

### 6.3 A

1. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  为凸集. 证明  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  为凸函数当且仅当集合  $\{(x, y) | y \geq f(x), x \in E\}$  为凸集.

证明. □

2. 证明: 凸函数的定义 6.3.1 与定义 6.3.2 等价.

证明. content... □

3. 设区间  $I$  上的实函数  $f$  在某一点  $x_0 \in I$  的附近有界, 且  $f$  为  $I$  上的中点凸函数. 尝试按以下步骤证明  $f$  为  $I$  上的凸函数:

(1) 证明  $f$  在  $I$  上的任何有界闭子区间上有界.

(2) 证明  $f$  在  $I$  的内点连续.

(3) 证明  $f$  为  $I$  上的凸函数.

证明. □

4. 直接利用中值定理, 证明定理 6.3.1 的 (v)—(vi) 以及定理 6.4.1.

5. 设  $0 < a < b$ ,  $f$  在  $[0, b]$  上连续可导, 在  $[0, a]$  上为凸函数, 在  $[a, b]$  上为凸函数,  $f'(0) > f'(b)$ . 证明: 存在正整数  $n_0$ , 使得对任何  $n \geq n_0$ , 以及满足  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b$  的非负数列  $a_1, a_2, \cdots, a_n$ , 成立  $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \leq nf\left(\frac{b}{n}\right)$ .

6. 设  $a, b, c$  为满足  $a + b + c = 1$  的非负实数, 求证:

$$(1) \frac{a}{1+a^3} + \frac{b}{1+b^3} + \frac{c}{1+c^3} \leq \frac{27}{28}.$$

证明. 设  $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$  ( $x \in [0, 1]$ ), 由  $f''(x) < 0$  克制  $f(x)$  在给定定义域内是凹函数, 从而  $\frac{1}{3}(f(a) + f(b) + f(c)) \leq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$ , 即为题设不等式.  $\square$

$$(2) \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{9}{10}.$$

证明. 设  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ , 同 (1) 可证.  $\square$

$$(3) \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{27}{10}.$$

证明. 设  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 同 (2) 可证.  $\square$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{9}{\sqrt{10}}.$$

证明. 设  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , 同 (3) 可证.  $\square$

7. 设  $a < b < c < d$ ,  $f$  在  $[a, c]$  和  $[b, d]$  上为凸函数, 证明  $f$  在  $[a, d]$  上为凸函数.

证明. 由于去除凸函数在端点处的值不会影响函数的凸性, 我们下证  $f$  在  $(a, c)$  和  $(b, d)$  上为凸函数, 则  $f$  在  $(a, d)$  上也为凸函数.

首先,  $f$  在  $(a, c)$  与  $(b, d)$  上的凸性蕴含其连续性, 因此  $f$  在  $(a, b)$  内连续.

我们只需证明对任何  $\varepsilon \in \left(0, \frac{b-c}{4}\right)$ ,  $f$  在  $(a+\varepsilon, d-\varepsilon)$  内为凸函数. 任取  $\alpha \in \left(0, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ , 定义

$$f_\alpha = \frac{1}{\alpha^2} \int_x^{x+\alpha} dt \int_t^{t+\alpha} f(s) ds, \quad x \in (a+\varepsilon, d-\varepsilon).$$

则  $f_\alpha$  有连续的二阶导数, 且  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = f(x)$ .

进一步,  $f_\alpha$  在  $(a+\varepsilon, c-\varepsilon)$  和  $(b+\varepsilon, d-\varepsilon)$  内分别为凸函数. 因此, 注意到  $c-\varepsilon > b+\varepsilon$ ,

$$f_\alpha''(x) \geq 0, \forall x \in (a+\varepsilon, d-\varepsilon).$$

所以  $f_\alpha(x)$  是  $(a+\varepsilon, d-\varepsilon)$  内的凸函数. 从而

$$f_\alpha(x)(sx + (1-s)y) \leq sf_\alpha(x) + (1-s)f_\alpha(y), \quad \forall s \in (0, 1), x, y \in (a+\varepsilon, d-\varepsilon).$$

令  $\alpha \rightarrow 0^+$  即得

$$f(x)(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y), \quad \forall s \in (0, 1), x, y \in (a+\varepsilon, d-\varepsilon).$$

所以  $f$  是  $(a+\varepsilon, d-\varepsilon)$  内的凸函数, 即是  $(a, d)$  上的凸函数, 进一步,  $f$  是  $[a, d]$  上的凸函数.  $\square$

8. 设  $f$  为区间  $I$  上的凸函数. 若  $x, y, s, t \in I$  满足  $x < s$  且  $y < t$ , 进一步,  $x \leq y$  且  $s \leq t$ , 证明:  $\frac{f(s) - f(x)}{s - x} \leq \frac{f(t) - f(y)}{t - y}$  (如图 6.1).

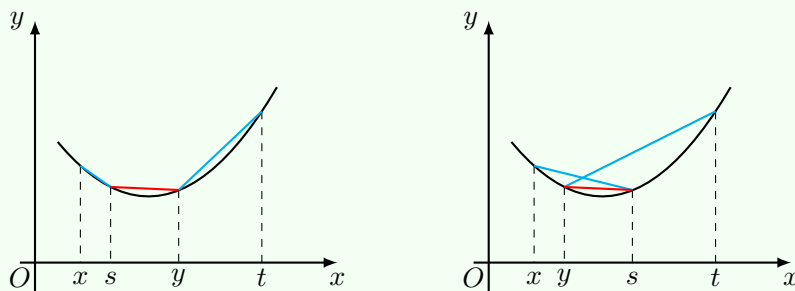


图 6.1

证明.

□

### 6.3 B

1. 设  $\alpha < 1$ , 且正项级数  $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明  $\sum_{i=1}^{\infty} M_{\alpha}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  收敛.

证明.

□

2. 设凸区域  $\Omega$  内的凸函数  $f$  在点  $x_0$  的偏导数都存在, 证明  $f$  在点  $x_0$  可微.

证明.

□

3. 设  $E \in \mathbb{R}^n$  为非空凸闭集,  $x_0 \notin E$ . 证明存在唯一的  $x \in E$  使得  $|x - x_0| = \inf_{y \in E} |y - x_0|$  (如图). 进一步, 对任何  $y \in E$ ,  $[0, 1]$  上的函数  $F(\alpha) = |x + \alpha(y - x) - x_0|^2$  在点 0 取得最小值, 以此证明  $x$  是如下不等式的唯一解:

$$\langle x_0 - x, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall y \in E.$$

证明.

□

4. 设  $E \subset \mathbb{R}^n$  为非空凸闭集,  $x_0 \in \partial E$ . 证明存在一列  $E$  外的点列  $\{x_k\}$  收敛于  $x_0$ .

证明.

□

5. 设  $E \subset \mathbb{R}^n$  为非空凸闭集,  $x_0 \in \partial E$ . 证明存在非零向量  $\mu$  使得

$$\langle \mu, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in E,$$

平面  $\langle \mu, x - x_0 \rangle = 0$  称为  $E$  在点  $x_0$  的支撑面.

6. 设  $f$  是区域  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  中的凸函数. 证明  $f$  的上镜集  $E = \{(x, y) | y \geq f(x), x \in \Omega\}$  为凸集. 进一步, 证明  $\bar{E}$  也是凸集.

任取  $x_0 \in \Omega$ , 设  $\langle \mu, x - x_0 \rangle + \langle \gamma, y - f(x_0) \rangle = 0$  为  $\bar{E}$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处的支撑面. 证明  $\gamma < 0$  且

$$f(x) \geq f(x_0) - \frac{1}{\gamma} \mu \cdot (x - x_0), \quad \forall x \in \Omega.$$

7. 试构造严格凸函数  $f \in C^2(\mathbb{R})$  使得  $|f(x)| < |x| + 1$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ).

8. 设  $\varphi$  为区间  $I$  上值域为  $I$  的严格单调函数,  $n \geq 2$ . 对于  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 定义

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \varphi^{-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(a_k) \right).$$

试对一些具体的  $\varphi$  考察  $F$  的性质.

9. 设  $f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ , 证明:

(1) 当  $n$  为偶数时,  $f_n(x)$  在实轴上有正的最小值.

(2) 当  $n$  为奇数时,  $f_n(x)$  有且仅有一个实根.

证明. 由  $e^x$  的 Taylor 展开知

$$e^x = f_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

(1) 当  $n$  为偶数时,  $n+1$  为奇数. 由  $e^x > 0$  知,  $f_n(x) > -R_n(x)$ . 当  $x \geq 0$  时,  $P_n(x) \geq 1 > 0$ , 当  $x < 0$  时, 则

$$f_n(x) > -R_n(x) = -\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} (-x)^{n+1} > 0,$$

因此,  $n$  为偶数时, 对任何  $x$ ,  $f_n(x) > 0$ , 即  $f_n(x)$  有下界, 则必有下确界, 即为最小值.

(2) 当  $n$  为奇数时,  $n-1$  为偶数, 由 (1) 知  $f'_n(x) = f_{n-1}(x) > 0$ .  $f_n(x)$  在  $\mathbb{R}$  上严格单调递增, 由于  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$ ,  $f_n(0) = 1 > 0$ , 知  $f_n(x)$  由唯一的实零点.  $\square$

10. 设  $f$  为  $\mathbb{R}$  上实函数,  $E$  为  $f$  的左连续但不连续点的全体. 证明  $E$  至多可列.

11. 设  $f$  为区间  $(a, b)$  上的实函数, 满足  $\forall x \in (a, b), \lim_{y \rightarrow x} f(y)$  存在. 设  $E$  为  $f$  的不连续点全体. 证明  $E$  至多可列.

12. 设  $a_m > 0, a_0, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

定义  $G(x) = (g(x))^2 - g'(x)$ . 证明: 若  $g$  有  $m$  个不相同的实零点, 则

(1) 当  $m$  为正奇数时,  $G$  有且仅有  $m+1$  个实零点.

(2) 当  $m$  为正偶数时,  $G$  有且仅有  $m$  个实零点.

证明. 设  $g$  的  $m$  个实零点分别为  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , 并且  $x_i < x_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ). 于是

$$g = a_m(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m),$$

易得  $g'(x) = a_m \sum_{k=1}^m \prod_{i=1, i \neq k}^m (x - x_i)$ . 于是

$$G(x) = a_m^2 \prod_{k=1}^m (x - x_k)^2 - a_m \sum_{k=1}^m \prod_{i=1, i \neq k}^m (x - x_i) = a_m^2 x^{2m} + P(x),$$

其中  $P(x)$  是一次数低于  $2m$  的实系数多项式.

(1) 若  $m$  为正奇数, 易见

$$G(x_1) < 0, G(x_2) > 0, G(x_3) < 0, \cdots, G(x_m) < 0,$$

即  $(-1)^k G(x_k) > 0$ .  $G(x)$  连续, 由介值定理知存在  $\xi_k \in (x_k, x_{k+1}) (k = 1, 2, \cdots, m-1)$  使得  $G(\xi_k) = 0$ . 注意到

$$G(x) \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow \infty,$$

故存在充分大的正数  $A$  满足  $A > x_m$  且  $-A < x_1$  使得  $|x| > A - 1$  时  $G(x) > 0$ . 于是  $G(A) > 0, G(-A) > 0$ . 从而有  $\xi_0 \in (-A, x_1), \xi_m \in (x_m, A)$  使得  $G(\xi_0) = G(\xi_m) = 0$ . 这便得到了  $G(x)$  的  $m+1$  个实零点. 若除诸  $\xi_k (k = 0, 1, \cdots, m)$  之外,  $G(x)$  还有其他实零点.

(2) 若  $m$  为正偶数, 同理可得

$$G(x_1) > 0, G(x_2) > 0, \cdots, G(x_m) > 0,$$

即  $(-1)^k G(x_k) < 0$ . 同理有  $\xi_k \in (x_k, x_{k+1}) (k = 1, 2, \cdots, m-1)$  使得  $G(\xi_k) = 0$ , 也存在  $A > x_m$  使得  $G(A) > 0$ , 从而有  $\xi_m \in (x_m, A)$  使得  $G(\xi_m) = 0$ , 这便得到了  $G(x)$  的  $m$  个实零点. 若除诸  $\xi_k (k = 1, 2, \cdots, m)$  之外,  $G(x)$  还有其他实零点.  $\square$

13. 对于区间  $(a, b)$  内的实函数  $f$ , 定义

$$F(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

这里  $F(x)$  的取值可以是  $\pm\infty$ . 依次证明:

(1) 若  $F(x) > 0 (\forall x \in (a, b))$ , 则  $f$  在  $(a, b)$  内严格单调增加.

(2) 若  $F(x) \geq 0 (\forall x \in (a, b))$ , 则  $f$  在  $(a, b)$  内单调增加.

14. 计算  $\inf_{x \in (0, \pi/2)} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ .

提示: 求使得以下不等式成立的  $\alpha$ :

$$\tan x + \alpha \sin x \geq (1 + \alpha)x, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

解.  $\alpha = 2$ . ■

15. 设  $f$  在  $(a, b)$  内连续, 且对任何  $x \in (a, b)$ ,

$$F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

存在. 证明:  $f$  在  $(a, b)$  内凸当且仅当  $F \geq 0$ .

16. 设  $f$  在  $(a, b)$  内连续. 定义

$$F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

证明或证伪:  $f$  在  $(a, b)$  内凸当且仅当  $F \geq 0$ , 这里  $F$  取值也有可能为  $+\infty$ .

17. 试在上述练习基础上, 进一步考察各种“广义”导数, “广义”两阶导数 (包括左导数右导数等) 与函数单调性, 凹凸性之间的关系.

## 6.4 微分 Darboux 定理与比较定理

### Theorem 6.4.1

设  $y$  在  $[a, b]$  上二阶可导,  $g$  为  $[a, b]$  上的非负函数,  $f$  为  $\mathbb{R}$  上的连续函数, 满足  $y(a) \leq 0, y(b) \leq 0$ ,

$$y''(x) = f(y(x)) + g(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

$$yf(y) \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

则  $y(x) \leq 0, (\forall x \in [a, b])$ .

### 6.4A

1. 设  $f$  是  $(a, +\infty)$  中的实函数,  $f(a^+)$  与  $f(+\infty)$  存在且相等. 证明: 若  $f$  有三阶导数, 则存在  $\xi \in (a, +\infty)$  使得  $f'''(\xi) = 0$ .

证明. □

2. 设实函数  $f$  是  $[a, +\infty)$  上有界的可微函数,  $|f'|$  单调. 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) = 0$ .

证明. 由 Darboux 定理可知  $|f'|$  的单调性蕴涵  $f'$  的保号性. 不妨设  $f'$  非负, 此时  $f'$  必然单调减少. 否则  $f'$  单调增加, 且有  $x_2 > x_1 \geq a$  使得  $f'(x_2) > f'(x_1) \geq 0$ . 由中值定理, 当  $x > x_2$  时,

$$f(x) - f(x_2) = f'(x_2 + \theta(x - x_2))(x - x_2) \geq f'(x_2)(x - x_2),$$

其中  $\theta \in (0, 1)$  与  $x$  有关. 从而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . 这与题设矛盾. 于是  $f'$  非负且单调减少. 由中值定理,

$$2\left(f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right) = f'\left(\frac{x}{2} + \alpha\frac{x}{2}\right)x \geq f'(x)x \geq 0,$$

其中  $\alpha \in (0, 1)$  为与  $x$  有关的一个数. 由于  $f$  有界, 而由  $f'$  非负知  $f$  单调增加, 所以  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在. 于是由夹逼准则得  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) = 0$ . □

3. 设一元实函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导,  $ab > 0$ . 证明  $\xi \in (a, b)$  使得  $\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$ .

4. 设一元实函数  $f$  在  $[a, b]$  可微,  $f'(a) = f'(b)$ . 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$ .

证明. 不妨设  $a = 0, f(a) = 0$ , 若结论不真, 则成立

$$f'(x) > \frac{f(x)}{x}, \quad x \in (0, b)$$

或

$$f'(x) < \frac{f(x)}{x}, \quad x \in (0, b).$$

不妨设前者成立, 于是

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0,$$

取  $0 < \alpha < \beta < b$ , 则对任意  $x \in (0, b), y \in (\beta, b)$  有

$$\frac{f(x)}{x} < \frac{f(\alpha)}{\alpha} < \frac{f(\beta)}{\beta} < \frac{f(y)}{y} < f'(y),$$

于是令  $x \rightarrow 0^+, y \rightarrow b^-$  有  $f'(a) \neq f'(b)$  矛盾.  $\square$

5. 设一元实函数  $f$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导,  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . 证明存在两两不同的  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$  使得

$$\frac{1}{f'(\alpha)} + \frac{1}{f'(\beta)} + \frac{1}{f'(\gamma)} = 3.$$

证明. 由中值定理,  $\exists \alpha \in (0, 1)$  使得  $f'(\alpha) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$ .

情形 I  $f(\alpha) = \alpha$ , 则由中值定理, 存在  $\beta \in (0, \alpha), \gamma \in (\alpha, 1)$  使得

$$f'(\beta) = \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0} = 1, \quad f'(\gamma) = \frac{f(1) - f(\alpha)}{1 - \alpha} = 1.$$

此时结论成立.

情形 II  $f(\alpha) < \alpha$ , 则存在  $\eta \in (0, \alpha), \zeta \in (\alpha, 1)$  使得

$$f'(\eta) = \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0} < 1, \quad f'(\zeta) = \frac{f(1) - f(\alpha)}{1 - \alpha} > 1.$$

于是有  $\varepsilon > 0$  使得

$$f'(\eta) < \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1 < \frac{1}{1 - \varepsilon} < f'(\zeta).$$

由 Darboux 定理,  $\exists \beta \in (\eta, \alpha)$  以及  $\gamma \in (\alpha, \zeta)$  使得

$$f'(\beta) = \frac{1}{1 + \varepsilon}, \quad f'(\gamma) = \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

立即得到此时结论也成立.

情形 III  $f(\alpha) > \alpha$ . 类似情形 II 可证.  $\square$

6. 设  $\mu > 0$ , 一元实函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导,  $c \in (a, b)$  且  $f'(c) = 0$ . 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f'(\xi) = \mu(f(\xi) - f(a))$ .



证明. 由于

$$\left( f(x) - \int_a^x \mu(f(t) - f(a)) \, dt \right)' = f'(x) - \mu(f(x) - f(a)),$$

因此由 Darboux 定理,  $f' - \mu(f - f(a))$  在  $(a, b)$  内满足介值性.

于是若结论不成立, 则  $f' - \mu(f - f(a))$  在  $(a, b)$  内恒正或恒负. 不妨设

$$f'(x) - \mu(f(x) - f(a)) > 0, \quad x \in (a, b), \quad (\otimes)$$

则

$$(e^{-\mu x} (f(x) - f(a)))' = e^{-\mu x} (f'(x) - \mu(f(x) - f(a))) > 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

所以

$$e^{-\mu x} (f(x) - f(a)) > e^{-\mu a} (f(a) - f(a)) = 0, \quad \forall x \in (a, b],$$

即

$$f(x) - f(a) > 0, \quad \forall x \in (a, b].$$

于是, 由式 $(\otimes)$ 有

$$f'(c) > \mu(f(c) - f(a)) > 0,$$

与  $f'(c) = 0$  矛盾, 证毕.  $\square$

7. 设实函数  $f$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内二阶可导,  $f(0) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, f(1) = \frac{\pi}{2}$ . 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $f''(\xi) = \frac{\xi}{1-\xi^2} f'(\xi)$ .

证明. 令  $F(x) = \sqrt{1-x^2}f(x), G(x) = f(x) - \arcsin x$ , 于是  $G(0) = G\left(\frac{1}{2}\right) = G(1) = 0$ , 由 Rolle 定理知  $\exists \xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  使得

$$G'(\xi_1) = G'(\xi_2) = 0,$$

此时  $f'(\xi_1) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi_1^2}}, f'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi_2^2}}$  有

$$F(\xi_1) = f'(\xi_1)\sqrt{1-\xi_1^2} = 1 = f'(\xi_2)\sqrt{1-\xi_2^2} = F'(\xi_2),$$

故  $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$  使得  $F'(\xi) = 0$ , 即得结论.  $\square$

8. 设  $f, g$  均为有界闭区间上的单调增加函数,  $F = f - g$  在  $[a, b]$  上有介值性. 证明  $F \in C[a, b]$ .

9. 设  $f$  在  $\mathbb{R}^n$  的单位开球  $B_1(\mathbf{0})$  内二阶连续可微, 在  $\overline{B_1(\mathbf{0})}$  上连续, 满足  $\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k^2} = 1 - 2|\mathbf{x}|^2$ . 且对任何  $\mathbf{x} \in \partial B_1(\mathbf{0}), f(\mathbf{x}) = 0$ . 试求  $f$  并说明理由.

## 6.4B

1. 试根据定理 6.4.1 的证明写出比定理 6.4.1 更一般的结果.
2. 给定区间  $I$ , 试选取其上的一元实函数 (记为  $g$ ), 求其一阶, 二阶导数, 找出其满足某个二阶微分方程 (记为 (E)), 选取该函数或导函数在某三点的值, 构造三组数据. 考察一个二阶可导的函数  $f$ , 若  $f$  对应的三组数据与  $g$  对应的一样, 是否存在某个  $\xi \in I$  使得  $f$  在  $\xi$  满足方程 (E)?

例如, 选取  $I = [0, 1], g(x) = x^3$ , 则  $g'(x) = 3x^2, g''(x) = 6x$ . 我们有  $3g(x)g''(x) = 2(g'(x))^2, g''(x)g'(x) = 18g(x), g(0) = 0, g(1) = 1, g'(1) = 3$ . 我们可以提出以下问题:

设  $f$  在  $[0, 1]$  可导, 在  $(0, 1)$  上两阶可导,  $f(0) = 0, f(1) = 1, f'(1) = 3$ . 问是否一定存在  $\xi, \eta \in (0, 1)$  使得  $2f(\xi)f''(\xi) = 2(f'(\xi))^2, f''(\eta)f'(\eta) = 18f(\eta)$ ?

3. 设实函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内有二阶导数, 满足  $f(a) = f(b) = 0$ . 证明: 若在  $(a, b)$  内成立以下条件之一, 则在  $[a, b]$  上恒有  $f(x) \leq 0$ :

- (1)  $f''(x) - f(x) \geq 0$ ;
- (2)  $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) \geq 0$ ;
- (3)  $f''(x) + 4f'(x) + f(x) \geq 0$ .

证明. 我们证明这样一个结果: 设  $f$  为题设函数, 若  $f$  满足条件  $f'' + \alpha f' + \beta f \geq 0$ , 其中实数  $\alpha, \beta$  满足  $\alpha^2 - 4\beta \geq 0$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上恒有  $f \leq 0$ .

我们有

$$f''(x) + \alpha f'(x) + \beta f(x) = ((D - \delta)^2 - \gamma) f(x) = e^{-\delta x} (D^2 - \gamma) (e^{\delta x} f(x)),$$

其中  $\delta = \frac{\alpha}{2}, \gamma = \frac{\alpha^2 - 4\beta}{4} \geq 0$ .

置  $F(x) = e^{\delta x} f(x)$ , 设  $F$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内有二阶导数, 且

$$F''(x) - \gamma F(x) = e^{\delta x} (f''(x) + \alpha f'(x) + \beta f(x)) \geq 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

- (i) 若  $\gamma = 0$ , 则  $F$  为凸函数, 立即得到  $F(x) \leq 0 (\forall x \in [a, b])$ , 即  $f(x) \leq 0 (\forall x \in [a, b])$ .
- (ii) 若  $\gamma > 0$ . 此时, 若结论不真, 则有  $\xi \in (a, b)$  使得  $F(\xi) = \max_{x \in [a, b]} F(x) > 0$ . 我们有  $F''(x) < 0$ . 另一方面, 由假设条件,  $F''(\xi) \geq \gamma F(\xi) > 0$ . 矛盾, 因此必有  $f(x) \leq 0 (\forall x \in [a, b])$ .

利用上述结论即证.  $\square$

4. 设  $f$  为  $\mathbb{R}$  上的非负连续可微函数, 满足:  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 成立  $f'(x) \geq 6 + f(x) - f^2(x)$ . 证明:  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 成立  $f(x) \geq 3$ .

证明. 考虑函数  $g(x) = \frac{f(x) - 3}{f(x) + 2} e^{5x}$ , 则

$$g'(x) = \frac{5e^{5x} (f'(x) - 6 - f(x) + f^2(x))}{(f(x) + 2)^2} \geq 0,$$

从而  $g(x)$  单调增, 如果存在  $x_0$  使得  $f(x_0) < 3$ , 则  $g(x_0) < 0$  并且  $\forall x < x_0$  都有  $g(x) \leq g(x_0) < 0$ , 从而  $0 \leq f(x) < 3$ , 于是有

$$-\frac{3}{2} \leq \frac{f(x) - 3}{f(x) + 2} < 0, \quad x < x_0,$$

这表示  $-\frac{3}{2}e^{5x} < g(x) < 0$ , 令  $x \rightarrow -\infty$  得  $g(x) \rightarrow 0$ , 这与任何  $x < x_0$ ,  $g(x) \leq g(x_0) < 0$  矛盾.  $\square$

5. 设  $f$  为  $\mathbb{R}$  上的非负连续可微函数, 满足:  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 成立  $f'(x) \leq 6 + f(x) - f^2(x)$ . 证明:  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 成立  $f(x) \leq 3$ .

证明. 考虑函数  $g(x) = \frac{3-f(x)}{f(x)+2}e^{5x}$ , 则

$$g'(x) = \frac{5e^{5x}(6+f(x)-f^2(x)-f'(x))}{(f(x)+2)^2} \geq 0,$$

从而  $g(x)$  单调增, 如果存在  $x_0$  使得  $f(x_0) > 3$ , 则  $g(x_0) < 0$  并且  $\forall x < x_0$  都有  $g(x) \leq g(x_0) < 0$ , 从而  $f(x) > 3$ , 于是有

$$-1 \leq \frac{3-f(x)}{f(x)+2} < 0, \quad x < x_0,$$

这表示  $-e^{5x} < g(x) < 0$ , 令  $x \rightarrow -\infty$  得  $g(x) \rightarrow 0$ , 这与任何  $x < x_0$ ,  $g(x) < g(x_0) < 0$  矛盾.  $\square$

6. 设  $f$  在  $[a, b]$  上可导,  $g$  在  $[a, b]$  上连续. 证明  $F = f'g$  在  $[a, b]$  上有介值性质.

证明. 不失一般性, 只要证明  $F[a, b]$  为区间或单点集. 进一步, 不妨设  $F(a) < \eta < F(b)$ , 我们只需要证明存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $F(\xi) = \eta$ .

情形 I  $\eta = 0$ . 此时  $f'(a)f'(b)g(a)g(b) < 0$ . 从而

$$f'(a)f'(b) < 0 \quad \text{或} \quad g(a)g(b) < 0.$$

若前者成立, 则由微分 Darboux 定理, 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f'(\xi) = 0$ . 若后者成立, 则由连续函数的介值定理, 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $g(\xi) = 0$ . 无论哪种情形, 都有  $f'(\xi)g(\xi) = \eta$ .

情形 II  $\eta > 0$ . 此时不妨设  $g(b) > 0$ .

(i)  $g$  在  $[a, b]$  上恒正. 则

$$f'(a) - \frac{\eta}{g(a)} < 0 < f'(b) - \frac{\eta}{g(b)},$$

而由于函数  $f' - \frac{\eta}{g}$  具有介值性, 因此存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f'(\xi) - \frac{\eta}{g(\xi)} = 0$ , 即  $f'(\xi)g(\xi) = \eta$ .

(ii)  $g$  在  $[a, b]$  上不恒正. 则  $g$  在  $[a, b]$  上有最大零点  $s \in [a, b]$ . 由微分 Darboux 定理, 有  $(s, b)$

中趋于  $s$  的点列  $\{x_n\}$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n) = f'(s)$ . 从而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n)g(x_n) = 0$ . 于是有  $k \geq 1$  使得  $f'(x_k)g(x_k) < \eta$ . 由于  $g$  在  $[x_k, b]$  上恒正, 由 (i) 可得结论.

情形 III  $\eta < 0$ . 与情形 II 同理可证.  $\square$

## 6.5 Taylor 多项式与插值多项式

## 6.5 A

1. 设  $n \geq 2, \delta > 0$ , 实函数  $f$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内有定义, 且满足

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0.$$

(1) 函数  $f$  在点  $x_0$  是否连续?

(2) 若  $f$  在点  $x_0$  连续,  $f$  在点  $x_0$  是否可导?

(3) 若  $f$  在点  $x_0$  可导,  $f$  在点  $x_0$  是否二阶可导?

解.

2. 对于例 6.5.4, 记  $k = \frac{6(f'(a) + f'(b))}{(b-a)^2} - \frac{12(f(b) - f(a))}{(b-a)^3}$ . 尝试通过微分不等式  $f''' > k$  推出矛盾.

3. 对于例 6.5.6, 记  $k = \frac{480(f'(a) + 4'(\frac{a+b}{2}) + f'(b))}{(b-a)^4} - \frac{2880(f(b) - f(a))}{(b-a)^5}$ . 尝试通过微分不等式  $f^{(5)} > k$  推出矛盾.

4. 设  $f$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 证明存在  $\xi \in (0, 1)$  使得

$$f'(\xi) = \frac{f(1) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 3f(0)}{2}.$$

证明. 注意到

$$\frac{f(1) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 3f(0)}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{f(1) - f(0)}{1-0} + \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)}{1/2-0} \right) = \frac{f'(\xi_1) + f'(\xi_2)}{2},$$

其中  $\xi_1 \in (0, 1), \xi_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , 并且有

$$f'(\xi_1) \wedge f'(\xi_2) \leq \frac{f'(\xi_1) + f'(\xi_2)}{2} \leq f'(\xi_1) \vee f'(\xi_2),$$

由微分 Darboux 定理可知有  $\xi$  介于  $\xi_1$  与  $\xi_2$  之间满足  $f'(\xi) = \frac{f'(\xi_1) + f'(\xi_2)}{2}$ . 从而结论成立.  $\square$

5. 设  $f$  在  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$  上连续, 在  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  上五阶可导. 证明存在  $\xi \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  使得

$$f^{(5)} = 5\sqrt{3} \left( f(\sqrt{3}) - f(\sqrt{-3}) \right) - 15(f'(-1) + f'(1)).$$

证明. 我们建立更一般的结果. 设  $\alpha > 1, f$  在  $[-\alpha, \alpha]$  上连续, 在  $(-\alpha, \alpha)$  内五阶可导, 考虑满足下列条件的五次多项式  $P$ :

$$\begin{cases} P(-\alpha) = f(-\alpha), P(-1) = f(-1), P'(-1) = f'(-1), \\ P(1) = f(1), P'(1) = f'(1), P(\alpha) = f(\alpha). \end{cases}$$

则  $P$  由下式唯一确定:

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ f(-\alpha) & 1 & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 & \alpha^4 & -\alpha^5 \\ f(-1) & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ f(1) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f(\alpha) & 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 \\ f'(-1) & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ f'(1) & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

求得

$$P^{(5)} = \frac{60(f(\alpha) - f(-\alpha))}{\alpha(\alpha^2 - 1)^2} + \frac{(\alpha^2 - 3)(f(1) - f(-1))}{(\alpha^2 - 1)^2} - \frac{30(f'(1) + f'(-1))}{\alpha^2 - 1}.$$

考虑  $F = f - P$ , 则  $F$  在  $[-\alpha, \alpha]$  上连续, 在  $(-\alpha, \alpha)$  内五阶可导, 且

$$F(-\alpha) = F(\alpha) = F(-1) = F(1) = F'(-1) = F'(1) = 0.$$

从而存在  $\xi \in (-\alpha, \alpha)$  使得  $F^{(5)}(\xi) = 0$ , 即

$$f^{(5)}(\xi) = \frac{60(f(\alpha) - f(-\alpha))}{\alpha(\alpha^2 - 1)^2} + \frac{(\alpha^2 - 3)(f(1) - f(-1))}{(\alpha^2 - 1)^2} - \frac{30(f'(1) + f'(-1))}{\alpha^2 - 1}.$$

令  $\alpha = \sqrt{3}$ , 即得待证明之式. □

6. 设实函数  $f$  在点  $x_0$  有直到  $n+1$  阶的导数,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0 + \theta_h h),$$

其中  $\theta_h \in (0, 1)$  与  $h$  的选取有关.  $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ . 证明:  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_h = \frac{1}{n+1}$ .

进一步, 若  $f^{(n+2)}(x_0)$  存在, 试计算  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta_h - \frac{1}{n+1}}{h}$ .

证明. 由带 Peano 余项的 Taylor 公式:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + o(h^{n+1}),$$

于是有

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0 + \theta_h h) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + o(h^{n+1}),$$

即有

$$\theta_h \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_h h) - f^{(n)}(x_0)}{\theta_h h} = \frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x_0) + o(h),$$

由此易见  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_h = \frac{1}{n+1}$ .

进一步, 由所给条件

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + \frac{h^{n+2}}{(n+2)!}f^{(n+2)}(x_0) + o(h^{n+2}),$$

于是有

$$\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta_h h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{h^{n+2}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(x_0) + o(h^{n+2}),$$

即

$$f^{(n)}(x_0 + \theta_h h) = f^{(n)}(x_0) + \frac{h}{(n+1)} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{h^2}{(n+1)(n+2)} f^{(n+2)}(x_0) + o(h^2),$$

上式两侧减去  $\theta_h h f^{(n+1)}(x_0)$ , 得到

$$\theta_h^2 \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta_h h) - f^{(n)}(x_0) - \theta_h h f^{(n+1)}(x_0)}{\theta_h^2 h^2} = \frac{\frac{1}{n+1} - \theta_h}{h} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} f^{(n+2)}(x_0).$$

值得一提的是对于  $f$  有这样的现象

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x_0 + t) - f^{(n)}(x_0) - t f^{(n+1)}(x_0)}{h^2} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{1}{2} f^{(n+2)}(x_0).$$

结合上方两式得到

$$\frac{\theta_h - \frac{1}{n+1}}{h} \rightarrow \left( \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)^2} \right) \frac{f^{(n+2)}(x_0)}{f^{(n+1)}(x_0)}, \quad h \rightarrow 0. \quad \square$$

7. 设  $a < c < b$ . 试确定常数  $\alpha, \beta, \gamma$ , 使得对任何在  $[a, b]$  内连续, 在  $(a, b)$  内二阶可导的实函数  $f$ , 总有  $\xi \in (a, b)$  使得  $f''(\xi) = \alpha f(a) + \beta f(c) + \gamma f(b)$ .

解. ■

8. 设  $a < c < b$ . 试确定常数  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , 使得对任何在  $[a, b]$  内连续, 在点  $a$  两阶可导, 在  $(a, b)$  内三阶可导的实函数  $f$ , 总有  $\xi \in (a, b)$  使得  $f'''(\xi) = \alpha f(a) + \beta f(c) + \gamma f(b) + \delta f''(a)$ .

### 6.5 B

1. 对于  $\alpha \in (1, 2)$ , 尝试构造在  $[-\alpha, \alpha]$  上的三阶连续可微的函数  $F$  使得  $F(-\alpha) = F(\alpha) = F'(-1) = F'(1) = 0$ , 且在  $[-\alpha, \alpha]$  上成立  $F''' > 0$ .

解. ■

2. 设  $a_n \neq -1 (n \geq 1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , 试在级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  (绝对) 收敛与否的各种情形下, 讨论无穷乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  的收敛性 (含绝对收敛性).

解. ■

3. 证明方程  $x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \cdots - 2nx + (2n+1) = 0$  无实根.

证明. 设  $S(x) = x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \cdots - 2nx + (2n+1)$ , 显然  $S(-1) \neq 0$ , 注意到

$$xS(x) = x^{2n+1} - 2x^{2n} + 3x^{2n-1} - \cdots - 2nx^2 + (2n+1)x,$$

于是

$$S(x) + xS(x) = x - x^2 + x^3 - \cdots - x^{2n} + x^{2n+1} + (2n+1) = \frac{x(1+x^{2n+1})}{1+x} + (2n+1),$$

于是  $S(x) = \frac{x(1+x^{2n+1}) + (1+x)(2n+1)}{(1+x)^2}$ , 即证  $f(x) := x(1+x^{2n+1}) + (1+x)(2n+1)$  无除  $x = -1$  外的实根. 由  $f'(x) = 0$  可知  $x = -1$  是  $f(x)$  的唯一极小值点, 并且  $f(-1) = 0$ , 从而结论得证.  $\square$

4. 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上无限次可微,  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2+1} (\forall n \geq 1)$ , 问以上条件可否确定  $f^{(k)}(0) (\forall k \geq 0)$ ?

解.  $\blacksquare$

5. 设  $-\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < +\infty (n \geq 2)$ ,  $P_k (k = 1, 2, \cdots, n)$  为满足  $P_k(x_j) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k \end{cases}$  的  $n-1$  次插值多项式. 证明:  $\forall x \in [x_k, x_{k+1}]$ , 成立  $P_k(x) + P_{k+1}(x) \geq 1 (1 \leq k \leq n-1)$ .

证明.  $\square$

## 6.6 Taylor 展开式的计算及应用

### 6.6 A

1. 计算函数  $f(x) = \left(\frac{1}{7+\cos x}\right)^{1/3}$  的带 Peano 型余项的三阶 Maclaurin 展开式.

解.  $\blacksquare$

2. 将  $\sqrt[3]{1+\sin^3 x}$  在点 0 附近展开到  $x^9$ .

解.  $\blacksquare$

3. 设函数  $f$  在  $x=1$  处有三阶导数, 并满足  $f'(x) = f(f(x))$  以及  $f(1) = 1$ . 试求  $f$  在  $x=1$  处的带 Peano 余项的三阶 Taylor 公式.

解.  $\left(f(x) = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^4)\right) \blacksquare$

4. 设定义在点 0 附近的光滑函数  $y = y(x)$  满足  $y(0) = 0$  以及  $x = \tan y - 2y$ . 计算  $y(x)$  在  $x=0$  处的带 Peano 型余项的五阶 Taylor 公式.

解.  $\left(y = -x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{27}x^5 + o(x^5)\right) \blacksquare$

5. 设光滑函数  $y = y(x)$  满足  $x = \sqrt{y - \ln(1+y)} \operatorname{sgn}(y)$ . 试求  $y(x)$  的带 Peano 型余项的二阶 Maclaurin 展开式.

解.  $\blacksquare$

6. 设函数  $y = y(x)$  在  $x = 1$  处有五阶导数,  $y(0) = 0$ , 其反函数  $x = x(y)$  满足:  $x = 1 + y + 3y^2 - 4y^3 + o(y^5)(y \rightarrow 0)$ . 试求  $y(x)$  的带 Peano 型余项的五阶 Maclaurin 展开式.

解. ■

7. 设函数  $y = y(x)$  在  $x = 1$  处有三阶导数,  $y(1) = 0$ , 其反函数  $x = x(y)$  满足:  $x = 1 + y + 3y^2 - 4y^3 + o(y^3)(y \rightarrow 0)$ . 试求  $y(x)$  在  $x = 1$  处的带 Peano 型余项的三阶 Taylor 展开式.

解. ■

8. 设实数  $a, A, B$  满足  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ A \left( \cos \frac{1}{x} + a \sin \frac{1}{x^2} + 2 \cos \frac{1}{x^3} + \sin \frac{1}{x^4} \right) \right]^{x^4} = B$ . 试求  $a, A, B$ .

解. 置  $t = \frac{1}{x}$ , 那么原极限即为

$$\lim_{t \rightarrow 0} [A (\cos t + a \sin t^2 + 2 \cos t^3 + \sin t^4)]^{1/t^4},$$

该极限存在, 必有  $\lim_{t \rightarrow 0} A (\cos t + a \sin t^2 + 2 \cos t^3 + \sin t^4) = 3A = 1$ , 于是  $A = \frac{1}{3}$ . 另一方面, 我们有

$$\cos t + a \sin t^2 + 2 \cos t^3 + \sin t^4 = 3 + \left(a - \frac{1}{2}\right)t^2 + \frac{25}{24}t^4 + o(t^4),$$

于是

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} [A (\cos t + a \sin t^2 + 2 \cos t^3 + \sin t^4)]^{1/t^4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left( \frac{\ln [A (\cos t + a \sin t^2 + 2 \cos t^3 + \sin t^4)]}{t^4} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \exp \left( \frac{\frac{1}{3} \left(a - \frac{1}{2}\right)t^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{24}t^4 + o(t^4)}{t^4} \right) = \exp \left( \frac{25}{72} \right). \end{aligned}$$

由此推得  $a = \frac{1}{2}, B = e^{25/72}$ . ■

9. 设  $f$  在原点有二阶导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right) = 0$ . 试求:

(1)  $f(0), f'(0), f''(0)$ ;

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{x^2}$ .

解. 由假设,

$$\frac{\sin 3x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} = o(1), \quad x \rightarrow 0.$$

所以

$$f(x) = -\frac{\sin 3x}{x} + o(x^2) = -3 + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

另外由  $f(x)$  的 Taylor 展开式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0$$



的唯一性得到

$$f(0) = -3, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 9.$$

于是又有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2/2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{9}{2}. \quad \blacksquare$$

10. 设  $n \geq 1$ , 一元实函数  $f$  在  $\mathbb{R}$  上有  $n+1$  阶导数, 且  $M_0, M_{n+1} < +\infty$ , 其中  $M_m = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(m)}(x)|$  ( $m = 0, 1, \dots, n+1$ ). 证明: 对于  $1 \leq m \leq n$ , 存在与  $f$  无关的常数  $C_m > 0$  使得  $M_m < C_m M_0^{1-m/(n+1)} M_{n+1}^{m/(n+1)}$ .

证明.  $\forall x \in \mathbb{R}, h > 0$ , 存在  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  使得

$$f(x + mh) = f(x) + \sum_{k=1}^n \frac{m^k h^k f^{(k)}(x)}{k!} + \frac{m^{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi_m)}{(n+1)!}, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

把上式看成  $hf'(x), h^2 f''(x), \dots, h^n f^{(n)}(x)$  的线性方程组, 且方程组的系数矩阵与  $h, f$  无关, 则易见存在与  $f$  和  $h$  无关的常数  $C_1, C_2, \dots, C_n$  使得

$$M_m h^m \leq \frac{1}{2} C_m (M_0 + M_{n+1} h^{n+1}), \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

由此利用  $h > 0$  的任意性, 取  $h = (M_0/M_{n+1})^{1/(n+1)}$ , 得到  $M_m < C_m M_0^{1-m/(n+1)} M_{n+1}^{m/(n+1)}$ .  $\square$

11. 设  $f$  是  $[0, +\infty)$  上的有界函数, 有三阶导数, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'''(x) = \alpha$ , 其中  $\alpha \in \mathbb{R}$ . 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$ .

证明. 由题设,  $\forall \varepsilon > 0, \exists X$  使得  $x_1, x_2 > X$  时有

$$|f'''(x_1) - f'''(x_2)| < \frac{6\varepsilon}{h^3},$$

其中  $h$  是给定的正数. 设  $x > X + h$  由 Taylor 公式

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3, \quad \xi_1 \in (x, x+h), \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3, \quad \xi_2 \in (x-h, x), \end{aligned}$$

设  $M$  是  $|f(x)|$  的一个上界, 即有

$$\begin{aligned} |f''(x)| &= \left| \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) - h^3(f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2))}{h^2} \right| \\ &\leq \frac{4M + \varepsilon}{h^2} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad \square$$

12. 设有界数列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n) = 0$ , 问是否有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ ?

解. 结论是成立的. 由题设  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N' \in \mathbb{N}$  使得  $n > N'$  时有

$$|a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n| < \frac{\varepsilon}{2N},$$

其中  $N \in \mathbb{N}_+$ , 设

$$a_{n+k+1} - 2a_{n+k} + a_{n+k-1} = \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

其中  $|\varepsilon_k| < \frac{\varepsilon}{2N}$ , 我们记上述方程组为  $\mathbf{A}\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon}$ , 也即

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}_{N \times N} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+N-1} \\ a_{n+N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - a_n \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{N-1} \\ \varepsilon_N - a_{n+N+1} \end{pmatrix},$$

立即可以得到  $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$ , 可以算的

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{N}{N+1} & -\frac{N-1}{N+1} & \cdots & -\frac{1}{N+1} \\ -\frac{N-1}{N+1} & -\frac{2(N-1)}{N+1} & \cdots & -\frac{2}{N+1} \\ -\frac{N-2}{N+1} & -\frac{2(N-2)}{N+1} & \cdots & -\frac{3}{N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{2}{N+1} & -\frac{4}{N+1} & \cdots & -\frac{N-1}{N+1} \\ -\frac{1}{N+1} & -\frac{2}{N+1} & \cdots & -\frac{N}{N+1} \end{pmatrix}_{N \times N},$$

实际上我们只关心  $\mathbf{A}^{-1}$  的前两行, 这样得到

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -\left( \frac{N}{N+1} (\varepsilon_1 - a_n) + \frac{N-1}{N+1} \varepsilon_2 + \frac{N-2}{N+1} \varepsilon_3 + \cdots + \frac{\varepsilon_N - a_{n+N+1}}{N+1} \right), \\ a_{n+2} &= -\left( \frac{N-1}{N+1} (\varepsilon_1 - a_n) + \frac{2(N-1)}{N+1} \varepsilon_2 + \frac{2(N-2)}{N+1} \varepsilon_3 + \cdots + \frac{2(\varepsilon_N - a_{n+N+1})}{N+1} \right), \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} |a_{n+2} - a_{n+1}| &= \left| \frac{\varepsilon_1 - a_n}{N+1} - \frac{N-1}{N+1} \varepsilon_2 - \frac{N-2}{N+1} \varepsilon_3 - \cdots - \frac{\varepsilon_N - a_{n+N+1}}{N+1} \right| \\ &\leq \left| \frac{\varepsilon_1}{N+1} \right| + \left| \frac{N-1}{N+1} \varepsilon_1 \right| + \left| \frac{N-2}{N+1} \varepsilon_3 \right| + \cdots + \left| \frac{\varepsilon_N}{N+1} \right| + \frac{|a_n| + |a_{n+N-1}|}{N+1} \\ &\leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \cdots + |\varepsilon_N| + \frac{|a_n| + |a_{n+N-1}|}{N+1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{N+1}, \end{aligned}$$

其中  $M$  为  $\{|a_n|\}$  的一个上界. 对于  $\varepsilon$ , 有充分大得  $N$  使得  $\frac{2M}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}$ , 即有  $|a_{n+2} - a_{n+1}| < \varepsilon$ , 从而结论成立.  $\blacksquare$

### 6.6 B

1. 考察如何求  $\sec x$  的 Maclaurin 展开式.

解. 1  $\blacksquare$

2. 考察含参变量的 Taylor 展开式. 具体的, 设  $m \geq 1$ , 在区域  $\Omega \times D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  内,  $n+m$  元

实函数  $f(x, y)$  作为  $x$  的函数, 所有不高于  $m$  阶的偏导数均存在. 记

$$r(x, y) = f(x, y) - \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha}(x_0, y)(x - x_0)^\alpha.$$

问什么条件下成立  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sup_{y \in D} \frac{r(x, y)}{|x - x_0|^m} = 0$ ?

解. ■

3. 对于数列  $\{a_n\}$ , 定义该数列的各阶差分如下:

$$\begin{aligned} \Delta a_n &= a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 1, \\ \Delta^{j+1} a_n &= \Delta^j a_{n+1} - \Delta^j a_n, \quad n \geq 1, j \geq 1. \end{aligned}$$

(1) 证明: 存在常数  $C$  使得对任何数列  $\{a_n\}$ , 整数  $k \geq 2$ , 成立

$$k \sup_{n \geq 1} |\Delta a_n| \leq C \left( \sup_{n \geq 1} |a_n| + k^2 \sup_{n \geq 1} |\Delta^2 a_n| \right).$$

(2) 证明: 存在常数  $C_1, C_2$  使得对任何数列  $\{a_n\}$ , 整数  $k \geq 3$ , 成立

$$k \sup_{n \geq 1} |\Delta a_n| \leq C_1 \left( \sup_{n \geq 1} |a_n| + k^3 \sup_{n \geq 1} |\Delta^3 a_n| \right)$$

以及

$$k^2 \sup_{n \geq 1} |\Delta^2 a_n| \leq C_2 \left( \sup_{n \geq 1} |a_n| + k^3 \sup_{n \geq 1} |\Delta^3 a_n| \right).$$

(3) 试考察更高阶差分的结果.

证明. (1) 对于任何  $k \geq 2$ , 我们有

$$a_{n+k} - a_n = \sum_{\ell=0}^{k-1} \Delta a_{n+\ell} = k \Delta a_n + \sum_{\ell=1}^{k-1} (\Delta a_{n+\ell} - \Delta a_n) = k \Delta a_n + \sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{m=0}^{\ell-1} \Delta^2 a_{n+m},$$

因此,

$$k \sup_{n \geq 1} |\Delta a_n| \leq 2 \sup_{n \geq 1} |a_n| + \frac{k^2}{2} \sup_{n \geq 1} |\Delta^2 a_n|,$$

取  $C \geq 2$  即得结论.

(2) 对于任何  $k \geq 3$ , 我们有

$$\begin{aligned} a_{n+k} - a_n &= k \Delta a_n + \frac{k(k-1)}{2} \Delta^2 a_n + \sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{m=1}^{\ell-1} \sum_{p=0}^{m-1} \Delta^3 a_{n+p}, \\ a_{n+2k} - a_n &= 2k \Delta a_n + k(2k-1) \Delta^2 a_n + \sum_{\ell=2}^{2k-1} \sum_{m=1}^{\ell-1} \sum_{p=0}^{m-1} \Delta^3 a_{n+p}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} k\Delta a_n \\ k^2\Delta^2 a_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{k-1}{2k} \\ 2 & 2-\frac{1}{k} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{n+k} - a_n - \sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{m=1}^{\ell-1} \sum_{p=0}^{m-1} \Delta^3 a_{n+p} \\ a_{n+2k} - a_n - \sum_{\ell=2}^{2k-1} \sum_{m=1}^{\ell-1} \sum_{p=0}^{m-1} \Delta^3 a_{n+p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-\frac{1}{k} & \frac{1-k}{2k} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+k} - a_n - \sum_{\ell=2}^{k-1} \sum_{m=1}^{\ell-1} \sum_{p=0}^{m-1} \Delta^3 a_{n+p} \\ a_{n+2k} - a_n - \sum_{\ell=2}^{2k-1} \sum_{m=1}^{\ell-1} \sum_{p=0}^{m-1} \Delta^3 a_{n+p} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由此立即得到

$$k \sup_{n \geq 1} |\Delta a_n| \leq \frac{5}{2} \left( 2 \sup_{n \geq 1} |a_n| + \frac{k^3}{6} \sup_{n \geq 1} |\Delta^3 a_n| \right)$$

以及

$$k^2 \sup_{n \geq 1} |\Delta^2 a_n| \leq 3 \left( 2 \sup_{n \geq 1} |a_n| + \frac{k^3}{6} \sup_{n \geq 1} |\Delta^3 a_n| \right),$$

结论得证.

(3) 我们猜测对于  $p, q \in \mathbb{N}$  且  $p < q$  有常数  $C$  使得

$$k^p \sup_{n \geq 1} |\Delta^p a_n| \leq C \left( \sup_{n \geq 1} |a_n| + k^q \sup_{n \geq 1} |\Delta^q a_n| \right),$$

我们以后再来验证结论的正确性. □

4. 在习题 A 第 10 题中, 若函数的定义域是有界区间, 是否有类似的结果?

解. ■

5. 试构造实数列  $\{a_n\}$  使得  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛而  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan a_n$  发散.

解. 取  $a_n = \frac{\cos(2\pi n/3)}{n^{1/3}}$ , 由 Dirichlet 判别法可知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛. 但

$$a_n^3 = \frac{\cos^3(2\pi n/3)}{n} = \frac{1}{n} + \frac{3 \cos(2\pi n/3)}{n},$$

从而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$  发散, 又  $\arctan a_n \sim a_n - \frac{a_n^3}{3}$  ( $a_n \rightarrow 0$ ), 并且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$  ( $k > 3$ ) 收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan a_n$  发散. ■

6. 设实函数  $f$  在点 0 附近有定义,  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ . 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛蕴含  $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$  收敛, 证明或证伪: 存在  $\delta > 0$  使得对任何  $x \in (-\delta, \delta)$ , 有  $f(x) = x$ .

证明. □

7. 设  $x_0 > 1, x_1 > 0, x_{n+2} = x_{n+1} + \frac{x_n}{\ln x_n}$  ( $n \geq 0$ ).

(1) 计算  $c \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x_n}{n}$  以及  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x_n - cn}{\sqrt{n}}$ .

(2) 尝试给出比上述结果更精细的结果.

解. (1)

(2)

■

8. 仿第 7 题编写一些习题.

# 第 7 章 微分问题

## 7.1 隐函数存在定理

### 7.1 A

1. 证明方程  $e^z + \sin z + e^y + y - \sin x + x = 2$  在点  $(0, 0, 0)$  附近确定一个隐函数  $z = z(x, y)$ , 并计算  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

解. 记  $F(x, y, z) = e^z + \sin z + e^y + y - \sin x + x - 2$ , 由隐函数定理可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{\cos x - 1}{e^z + \cos z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{e^y + 1}{e^z + \cos z}$$

进一步得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{(1 - \cos x)(e^z + \cos z)}{(e^z + \cos z)^2} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(\cos x - 1)(e^z + \cos z)(1 + e^y)}{(e^z + \cos z)^3}. \quad \blacksquare$$

2. 证明方程组

$$\begin{cases} x + y + u + v = 0, \\ x^2 + y^2 + u^4 + v^4 = 2 \end{cases}$$

在  $(-1, 0, 1, 0)$  附近确定一个隐函数  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ . 进一步, 计算  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

证明. □

3. 证明方程组

$$\begin{cases} x + y + u + v = 0, \\ x^2 + y^2 + u^4 + v^4 = 2 \end{cases}$$

在  $(-1, 0, 1, 0)$  附近确定一个隐函数  $\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x, u) \\ u(x, v) \end{pmatrix}$ . 进一步, 计算  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

证明. □

### 7.1 B

1. 设  $n \geq 2$ ,  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^n$  中的区域,  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  连续可微, 且  $F_x(x) \neq 0 (\forall x \in \Omega)$ . 又设  $x_0 \in \Omega$  使得  $F(x_0) = 0$ . 证明存在  $\delta > 0$ , 使得对于任何满足  $F(x_1) = 0$  的  $x_1 \in B_\delta(x_0)$ , 均存在曲面  $F(x) = 0$  上连接  $x_0, x_1$  的  $C^1$  曲线  $\tau$ . 即存在  $\tau \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}^n)$  满足  $F(\tau(t)) = 0 (\forall t \in [0, 1])$  以及  $\tau(0) = x_0, \tau(1) = x_1$ .

证明. □

## 7.2 极值问题

## 7.2 A

1. 设  $n \geq 2$ ,  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ . 试计算  $\max_{x \in S^{n-1}} \{\langle \xi, x \rangle, \langle \eta, x \rangle\}$ .

解. ■

2. 设  $1 \leq p, q \leq +\infty$ , 对  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 定义  $\|A\|_{p,q} = \max_{\|x\|_q=1} \|Ax\|_p$ . 证明:  $\|\cdot\|_{p,q}$  定义了一个范数.

证明. 我们只需验证由此法的定义满足非负性, 齐次性与三角不等式. 显然满足前两者, 下面证明 □

3. 设  $A$  为  $n$  阶正定矩阵, 证明  $\langle x, y \rangle_A = y^T Ax$  定义了  $\mathbb{R}^n$  中的一个内积.

证明. 由于

$$\langle x, y \rangle_A = y^T Ax = (y^T Ax)^T = x^T Ay = \langle y, x \rangle_A,$$

也有  $\langle x + y, z \rangle_A = \langle x, z \rangle_A + \langle y, z \rangle_A$ ,  $\langle cx, y \rangle_A = c \langle x, y \rangle_A$ , 其中  $c$  为一常数. 结合  $A$  正定可知对于任意  $x \neq 0$ , 有  $\langle x, x \rangle_A = x^T Ax > 0$ , 从而上述的运算定义了一个内积. □

4. 设  $n \geq 2$ ,  $A$  为  $n$  阶实对称矩阵,  $\xi_1 \in S^{n-1}$  满足  $\lambda_1 \equiv \xi_1^T A \xi_1 = \max_{x \in S^{n-1}} x^T Ax$ . 考虑在  $x \in S^{n-1}$  以及  $x \cdot \xi_1 = 0$  的约束条件下最大化  $x^T Ax$  的最大值问题, 证明存在  $\lambda_2 \leq \lambda_1$  以及  $\xi_2 \in S^{n-1}$ , 使得  $A\xi_2 = \lambda_2 \xi_2, \xi_2 \cdot \xi_1 = 0$ . 一般地, 证明存在  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$  以及两两正交的  $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in S^{n-1}$  使得  $A\xi_k = \lambda_k \xi_k (1 \leq k \leq n)$ .

证明. 由于  $A$  实对称, 故存在正交矩阵  $P$  使得

$$P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & & \\ & \lambda'_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda'_n \end{pmatrix},$$

其中  $\lambda'_i (1 \leq i \leq n)$  是  $A$  的特征值. □

5. 设  $A$  为  $m \times n$  实矩阵, 证明  $\|A\| = \max_{\substack{|z|=1 \\ z \in \mathbb{C}^n}} |Az|$ .

证明. □

6. 设  $A$  为  $n$  阶实方阵,  $\lambda$  是它的 (复) 特征值. 证明:  $|\lambda| \leq \|A\|$ .

证明. □

7. 设  $x \in \mathbb{R}^n$ , 证明  $|x| = \max_{\substack{\|A\|=1 \\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}}} |Ax|$ .

证明. □

## 8. 是推导两空间直线

$$\frac{x - x_i}{l_i} = \frac{y - y_i}{m_i} = \frac{z - z_i}{n_i}, \quad i = 1, 2$$

间的距离公式, 其中

$$(l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2 > 0.$$

解. 记题设直线分别为  $L_1, L_2$ , 取  $\mathbf{x}_1 \in L_1, \mathbf{x}_2 \in L_2$ , 则  $L_1$  于  $L_2$  之间的距离  $d = \min |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ , 不妨设

$$\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i)^\top, \quad \mathbf{d}_i = (l_i, m_i, n_i)^\top, \quad i = 1, 2,$$

于是  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}_1 + t_1 \mathbf{d}_1, \mathbf{x}_2 = \mathbf{a}_2 + t_2 \mathbf{d}_2$ , 从而设

$$\begin{aligned} D(t_1, t_2) &= |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2 = |\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + t_1 \mathbf{d}_1 - t_2 \mathbf{d}_2|^2 = \langle \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + t_1 \mathbf{d}_1 - t_2 \mathbf{d}_2, \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + t_1 \mathbf{d}_1 - t_2 \mathbf{d}_2 \rangle \\ &= |\mathbf{d}_1|^2 t_1^2 - 2\langle \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \rangle t_1 t_2 + |\mathbf{d}_2|^2 t_2^2 + 2\langle \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{d}_1 \rangle t_1 - 2\langle \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{d}_2 \rangle t_2 + |\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|^2, \end{aligned}$$

分别记  $A_i = |\mathbf{d}_i|^2, B = \langle \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \rangle, C_i = \langle \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{d}_i \rangle (i = 1, 2)$ , 这样就有

$$D(t_1, t_2) = A_1 t_1^2 - 2B t_1 t_2 + A_2 t_2^2 + 2C_1 t_1 - 2C_2 t_2 + |\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|^2,$$

分别对  $t_1, t_2$  求偏导有

$$\frac{\partial D}{\partial t_1} = 2A_1 t_1 - 2B t_2 + 2C_1, \quad \frac{\partial D}{\partial t_2} = 2A_2 t_2 - 2B t_1 - 2C_2,$$

令  $\frac{\partial D}{\partial t_1} = \frac{\partial D}{\partial t_2} = 0$ , 并且注意到

$$A_1 A_2 - B^2 = (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2 > 0,$$

由 Cramer 法则可得

$$t'_1 = \frac{BC_2 - A_2 C_1}{A_1 A_2 - B^2}, \quad t'_2 = \frac{A_1 C_2 - BC_1}{A_1 A_2 - B^2},$$

代入  $D(t_1, t_2)$  开方即得结果. ■

9. 计算两空间直线  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{3}, \frac{x-7}{4} = \frac{y-9}{5} = \frac{z-11}{6}$  的公垂线.

解. ■

10. 试推导点  $(x_0, y_0, z_0)$  与平面  $Ax + By + Cz + D = 0 (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$  的距离公式.

解. 我们先用条件极值的方法. 设

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha - x_0)^2 + (\beta - y_0)^2 + (\gamma - z_0)^2,$$

即求  $f$  在约束条件  $A\alpha + B\beta + C\gamma + D = 0$  下的极值. 设

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = (\alpha - x_0)^2 + (\beta - y_0)^2 + (\gamma - z_0)^2 + \lambda (A\alpha + B\beta + C\gamma + D),$$



则令

$$\begin{cases} F_{\alpha} = 2(\alpha - x_0) + A\lambda = 0, \\ F_{\beta} = 2(\beta - y_0) + B\lambda = 0, \\ F_{\gamma} = 2(\gamma - z_0) + C\lambda = 0, \\ F_{\lambda} = A\alpha + B\beta + C\gamma + D = 0, \end{cases}$$

可以解得

$$\lambda = \frac{2(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}, \alpha = x_0 - \frac{A\lambda}{2}, \beta = y_0 - \frac{B\lambda}{2}, \gamma = z_0 - \frac{C\lambda}{2},$$

此时得到

$$f_{\min} = \frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

即得点  $(x_0, y_0, z_0)$  到平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  的距离为  $\sqrt{f_{\min}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

令一种简单的方法是考虑几何关系, 记  $(x_0, y_0, z_0)$  为  $P_1$ , 取平面上一点  $P_2(a, b, c)$ , 则考虑向量  $\overrightarrow{P_1P_2} = (a - x_0, b - y_0, c - z_0)$  与平面法向量  $(A, B, C)$  夹角的余弦值 (记较小的那个角为  $\theta$ ) 可得点到平面距离

$$d = |\overrightarrow{P_1P_2}| \cos \theta = |\overrightarrow{P_1P_2}| \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (A, B, C)|}{|\overrightarrow{P_1P_2}| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad \blacksquare$$

11. 设  $f(x, y) = xy - x \ln x + x - e^y (x > 0, y \in \mathbb{R})$ . 证明:  $f(x, y) \leq 0 (\forall x > 0, y \in \mathbb{R})$ .

证明. □

### 7.2 B

1. 试构造  $\mathbb{R}^2$  上的二元实函数  $f$  使得点  $\mathbf{0}$  不是它的极小值点, 但对任何  $\alpha \in [0, 2\pi], g(t) = f(t \cos \alpha, t \sin \alpha)$  在  $t = 0$  取得严格极小值. 进一步, 能否取到这样的  $f$  使得它在  $\mathbb{R}^2$  上连续? 请证明你的结论.

解. ■

2. 举例说明存在  $n$  阶方阵, 使得其所有特征值的绝对值都严格小于  $\|A\|$ .

解. ■

3. 若  $A$  是  $n$  阶方阵,  $\|A\| < 1$ . 证明:  $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ .

证明. □

4. 若  $A$  是  $n$  阶可逆矩阵, 取  $\alpha > 0$  足够小使得  $I - \alpha A A^T$  正定. 令

$$B_0 = \alpha A^T, B_{k+1} = B_k (2I - A B_k) (k \geq 0).$$

证明:  $\{AB_k\}$  是单调增加的的正定矩阵, 其极限为  $I$ . 特别地,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} B_k = A^{-1}$ .

证明. □

5. 试对于  $A$  为复矩阵的情形, 定义诱导范数并建立相关性质.

6. 试改编以往遇到过的一个习题, 将一维情形的结果推广到矩阵情形.

## 7.3 常系数线性微分方程

### 7.3 A

1. 求以下方程的通解:

$$(1) y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0;$$

$$(2) y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x;$$

$$(3) y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = xe^{3x};$$

$$(4) y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = xe^{2x};$$

$$(5) y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x^2 e^x \cos x;$$

$$(6) y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x^2 e^x \sin 2x.$$

解. 由特征方程  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$  得  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ , 从而齐次方程 (1) 的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x},$$

根据线性方程得通解结构, 为得到后续方程得通解, 只需要得到这些方程得特解. 使用算子法, 即得各个特解如下:

$$(2) y^* = \frac{1}{(D-1)(D-2)} x = \left( \frac{1}{D-2} - \frac{1}{D-1} \right) x = \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4}D \right) x = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}.$$

$$(3) y^* = \frac{1}{(D-1)(D-2)} x e^{3x} = e^{3x} \frac{1}{(D+2)(D+1)} x = e^{3x} \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4}D \right) x = e^{3x} \left( \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \right).$$

$$(4) y^* = \frac{1}{(D-1)(D-2)} x e^{2x} = e^{2x} \frac{1}{D(D+1)} x = e^{2x} \frac{1}{D} (1-D)x = e^{2x} \left( \frac{1}{2}x^2 - x \right). \quad \blacksquare$$

2. 求以下方程的通解:

$$(1) y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0;$$

$$(2) y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x;$$

$$(3) y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{3x};$$

$$(4) y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{2x};$$

$$(5) y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x^2 e^{2x} \cos x;$$

$$(6) y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x^2 e^x \sin x.$$

解. 由特征方程  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$  得  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ , 从而齐次方程 (1) 的通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x},$$

根据线性方程得通解结构, 为得到后续方程得通解, 只需要得到这些方程得特解. 使用算子法, 即得各个特解如下:

$$(2) y^* = \left( \frac{1}{D-2} \right)^2 x = \frac{1}{4}(1+D)x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}.$$

$$(3) y^* = \left( \frac{1}{D-2} \right)^2 x e^{3x} = e^{3x} \left( \frac{1}{D+1} \right)^2 x = e^{3x} (1-2D)x = (x-2)e^{3x}.$$

$$(4) y^* = \left( \frac{1}{D-2} \right)^2 x e^{2x} = e^{2x} \frac{1}{D^2} x = \frac{1}{6} x^3 e^{2x}. \quad \blacksquare$$

3. 求以下方程的通解:

$$(1) y''(x) + y'(x) + 2y(x) = 0;$$

$$(2) y''(x) + y'(x) + 2y(x) = x^3 + 1;$$

$$(3) y''(x) + y'(x) + 2y(x) = x e^{3x};$$

$$(4) y''(x) + y'(x) + 2y(x) = x \sin 2x;$$

$$(5) y''(x) + y'(x) + 2y(x) = x^2 e^{2x} \cos x;$$

$$(6) y''(x) + y'(x) + 2y(x) = x^2 e^x \sin 2x.$$

解. 由特征方程  $\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$  得  $\lambda_1 =$  ■

4. 求以下方程的通解:

$$(1) y^{(5)}(x) + 2y'''(x) + y'(x) = 0;$$

$$(2) y^{(5)}(x) + 2y'''(x) + y'(x) = (x+1)^2;$$

$$(3) y^{(5)}(x) + 2y'''(x) + y'(x) = x \sin 2x;$$

$$(4) y^{(5)}(x) + 2y'''(x) + y'(x) = x \sin x;$$

$$(5) y^{(5)}(x) + 2y'''(x) + y'(x) = x^2 e^{2x} \cos x;$$

$$(6) y^{(5)}(x) + 2y'''(x) + y'(x) = x^2 e^x \sin x.$$

解. 由特征方程  $\lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = 0$  得  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i, \lambda_2, \lambda_3$  均为二重根. 于是齐次方程 (1) 的通解为

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 x \cos x + C_4 \sin x + C_5 x \sin x, \quad \blacksquare$$

5. 求方程  $y''(x) - y(x) = 1$  满足  $y(0) = 1, y'(0) = 2$  的特解.

6. 试研究当  $b$  为何值时, 对所有  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ , 方程  $y''(x) + y(x) = 0$  满足  $y(0) = y_0, y(b) = y_1$  的特解总是存在.

7. 若  $n$  阶方阵  $A, B$  可交换, 证明:  $e^{A+B} = e^A e^B$ .

8. 设  $n \geq 2, \lambda \in \mathbb{C}, n$  阶方阵  $A$  为

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

试计算  $e^{xA}$ .

## 7.3 B

1. 设  $P_1, P_2$  是次数依次为  $m, n \geq 1$  的多项式,  $Q_1, Q_2$  是次数小于  $m, n$  的非零多项式, 满足  $\frac{1}{P(t)} = \frac{Q_1(t)}{P_1(t)} + \frac{Q_2(t)}{P_2(t)}$ , 其中  $P(t) = P_1(t)P_2(t)$ . 若  $f$  为  $I$  上的连续函数,  $f_1, f_2$  依次为区间  $I$  上的  $m, n$  次连续可微函数, 满足  $P_1(D)f_1(x) = P_2(D)f_2(x) = f(x)$ . 令  $F(x) = P_1(D)f_1(x) + P_2(D)f_2(x)$ . 证明:  $F$  是  $m+n$  阶连续可导函数, 进而  $P(D)F(x) = f(x)$ .
2. 举例说明上题中,  $P_1(D)f_1$  可以不是  $m+n$  阶连续可导的.

## 7.4 导数的其他应用

## 7.4 A

1. 设  $a > 0$ , 用 Newton 法通过求解  $f(x) = e^x - a$  的零点计算  $\ln a$ . 若取初值为 1, 试讨论 Newton 迭代法的收敛性, 并讨论误差估计.

解.

2. 对于  $n \geq 2$  以及  $a > 0$ , 讨论通过 Newton 法计算  $f(x) = x^{10} - a$  的零点的可行性与误差估计.

解.

3. 计算椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  上各点的曲率.

解. 我们先推到由参数方程确定的平面曲线的曲率计算公式. 对于  $y_0 = f(x_0)$ , 当  $f''(x_0) \neq 0$  时

曲率为  $K = \frac{|f''(x_0)|}{(1 + |f''(x_0)|^2)^{3/2}}$ . 先设平面曲线有如下的参数方程  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t) \end{cases}$ , 则有

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)},$$

进一步有

$$y''(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{1}{dx/dt} = \frac{\phi''(t)\varphi'(t) - \phi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3},$$

将其代入  $K$  得到

$$K = \frac{|\phi''(t)\varphi'(t) - \phi'(t)\varphi''(t)|}{((\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2)^{3/2}}.$$

一般地, 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的参数方程可设为  $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ , 代入上述公式即得

$$K = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^3}}.$$

4. 设  $y = \sqrt[3]{\frac{x^4}{x+1}}$ , 试讨论函数的单调性, 极值, 凸性, 拐点, 求出它的渐近线, 并画出它的简图.

解. 首先在  $x = -1$  处  $y(x)$  无定义, 易见其为铅直渐近线. 直接计算得到

$$y'(x) = \frac{x^3(3x+4)}{3(1+x)^2} \cdot \left(\frac{x^4}{x+1}\right)^{-2/3}, \quad x \neq -1,$$

于是  $y(x)$  有驻点  $-\frac{4}{3}, 0$ . 关于函数的单调性与极值等信息如下表:

	$(-\infty, -\frac{4}{3})$	$-\frac{4}{3}$	$(-\frac{4}{3}, -1)$	$-1$	$(-1, 0)$	$0$	$(0, +\infty)$
$f'$	+	0	-	不存在	-	0	+
$f$	严格单增	极大值点	严格单减	渐近线	严格单减	极小值点	严格单增

又有

$$y''(x) = \frac{4x^2}{9(1+x)^3} \cdot \left(\frac{x^4}{x+1}\right)^{-2/3}, \quad x \neq -1,$$

可见  $y(x)$  在  $(-\infty, -1)$  上凹而在  $(-1, +\infty)$  上凸. 并且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - x) = \frac{1}{3},$$

即  $y$  有渐近线  $f(x) = x - \frac{1}{3}$  其简图如下: ■

5. 设  $y = \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ , 试讨论函数的单调性, 极值, 凸性, 拐点, 求出它的渐近线, 并画出它的简图.

解. 先设  $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ , 有  $g(0) = 1 > 0$ , 当  $x \neq 0$  时,

$$g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = 1 + \frac{2x}{x^2 - x + 1} = 1 + \frac{2}{x + 1/x - 1},$$

$x > 0$  时  $x + \frac{1}{x} > 2$ , 从而  $g(x) > 0$ ;  $x < 0$  时  $x + \frac{1}{x} \leq -2$ ,  $\frac{2}{x + 1/x - 1} < -1$ , 也有  $g(x) > 0$ . 从而  $y(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ . 直接计算得到

$$y'(x) = \frac{-2x^2 + 2}{x^4 + x^2 + 1},$$

于是  $y(x)$  有驻点  $\pm 1$ . 关于函数的单调性与极值等信息如下表:

	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$f'$	-	0	+	0	-
$f$	严格单减	极小值点	严格单增	极大值点	严格单减

又有

$$y''(x) = \frac{4x(x^4 - 2x^2 - 2)}{(x^4 + x^2 + 1)^2},$$

令  $y''(x) = 0$ , 得到三个实根分别为  $0, \pm\sqrt{1+\sqrt{3}}$ . 关于函数凹凸性有下表:

	$\left(-\infty, -\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)$	$\left(-\sqrt{1+\sqrt{3}}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{1+\sqrt{3}}\right)$	$\left(\sqrt{1+\sqrt{3}}, +\infty\right)$
$f''$	-	+	-	+
$f$	严格凹	严格凸	严格凹	严格凸

又有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = 0,$$

从而  $y(x)$  有水平渐近线  $y = 0$ , 其简图如下.

?

■

#### 7.4 B

1. 试给出由参数方程确定的平面曲线曲率的计算公式.

解. 参见本节 A 中的第 3 小题.

■

2. 设  $\varphi$  为  $(0, +\infty)$  内的凹函数, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi(2x) - 2\varphi(x)) = -\infty$$

当且仅当  $y = \varphi(x)$  当  $x \rightarrow +\infty$  时没有渐近线.

# 第 8 章 积分

## 8.1 Riemann 积分

### Theorem 8.1.1

设  $f$  是 Jordan 可测的有界集  $E$  上的有界函数, 则  $f$  在  $E$  上 Riemann 可积当且仅当对于任何  $\varepsilon > 0$ , 存在  $E$  的划分  $P$ , 使得  $U(f; P) - L(f; P) < \varepsilon$ .

### 8.1 A

1. 说明 Dirichlet 函数  $D(\cdot) = \chi_{\mathbb{Q}}(\cdot)$  在  $[0, 1]$  上不 Riemann 可积.

证明. 任取划分  $P: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ , 总能在区间  $(x_i, x_{i+1})$  找到一无理数或有理数, 这意味着

$$\int_0^1 D(x) dx = 0, \quad \int_0^1 D(x) dx = 1,$$

从而不 Riemann 可积. □

2. 在  $\mathbb{R}$  上定义 Riemann 函数:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & x = \frac{q}{p}, p \in \mathbb{Z}_+, q \in \mathbb{Z} - \{0\}, p, q \text{ 既约}, \\ 1, & x = 0, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

证明 Riemann 函数在  $[0, 1]$  上 Riemann 可积.

证明. 由 Riemann 函数的性质, 对任意给定的  $0 < \varepsilon < 2$ , 在  $[0, 1]$  上使得  $R(x) > \frac{\varepsilon}{2}$  的点至多只有有限个, 不妨设是  $k$  个, 记为  $0 = p'_1 < p'_2 < \cdots < p'_k = 1$ . 作  $[0, 1]$  的划分

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k-1} = 1,$$

使得满足

$$p'_1 \in [x_0, x_1), x_1 - x_0 < \frac{\varepsilon}{2k},$$

$$p'_i \in (x_{2i-2}, x_{2i-1}), x_{2i-1} - x_{2i-2} < \frac{\varepsilon}{2k}, i = 2, 3, \cdots, k-1,$$

$$p'_k \in (x_{2k-2}, x_{2k-1}), x_{2k-1} - x_{2k-2} < \frac{\varepsilon}{2k},$$

设  $\omega_i$  为区间  $(x_{i-1}, x_i)$  上的振幅,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  由于

$$\sum_{i=1}^{2k-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{2j+1} \Delta x_{2j+1} + \sum_{j=1}^{k-1} \omega_{2j} \Delta x_{2j},$$

上式右侧第一个和式中, 有  $\Delta x_{2j+1} < \frac{\varepsilon}{2k}$  且  $\omega_{2j+1} \leq 1$ , 在第二个和式中, 有  $\omega_{2j} \leq \frac{\varepsilon}{2}$  且  $\sum_{j=1}^{k-1} \Delta x_{2j} < 1$ , 因此得到  $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < k \frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . 从而 Riemann 可积.  $\square$

3. 设  $E \in \mathbb{R}^n$  为 Jordan 可测的有界闭集,  $f$  为  $E$  上的有界函数, 则  $f$  在  $E$  上 Riemann 可积当且仅当  $f$  在  $E^\circ$  上 Riemann 可积. 进一步, 当  $f$  在  $E$  上 Riemann 可积时,

$$\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{E^\circ} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

证明.  $\square$

4. 设  $E \in \mathbb{R}^n$  为 Jordan 可测的有界闭集,  $f$  为  $E$  上的连续函数. 试用定理 8.1.1 证明  $f$  在  $E$  上 Riemann 可积.

证明.  $\square$

5. 设  $E \in \mathbb{R}^n$  为 Jordan 可测的有界闭集,  $f, g$  在  $E$  上 Riemann 可积, 且  $\int_E f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \neq 0$ . 证明: 存在矩形  $R_0 \subset E$  使得  $|f|$  在  $R_0$  上有正下界.

证明.  $\square$

6. 设  $E$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一个轴平行矩形, 试构造  $E$  上的一个有界恒正函数  $f$ , 使得  $\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ .

解.  $\blacksquare$

### 8.1 B

1. 设  $f$  是  $[a, b]$  上的有界实函数, 对于  $[a, b]$  的划分  $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$ , 定义  $W(f; P) = \sum_{k=1}^m f(x_k)(x_k - x_{k-1})$ . 证明:  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积当且仅当  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} W(f; P)$  存在.

证明.  $\square$

## 8.2 Lebesgue 测度与 Lebesgue 可测函数

### Theorem 8.2.1

设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  可测, 则

- (1) 对于任何  $\varepsilon > 0$ , 存在开集  $G \supseteq E$ , 使得  $m(G \setminus E) < \varepsilon$ .
- (2) 对于任何  $\varepsilon > 0$ , 存在闭集  $F \subseteq E$ , 使得  $m(E \setminus F) < \varepsilon$ .
- (3) 存在一系列开集  $\{G_k\}$  使得  $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \supseteq E$  且  $G \setminus E$  为零测集.



(4) 存在一列闭集  $\{F_k\}$  使得  $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subseteq E$  且  $E \setminus F$  为零测度集.

## 8.2A

1. 设  $\mathcal{M}$  为非空集  $X$  上的代数, 即  $\mathcal{M}$  满足以下条件:

(i)  $\emptyset, X \in \mathcal{M}$ .

(ii) 若  $E \in \mathcal{M}$ , 则  $X \setminus E \in \mathcal{M}$ .

(iii) 对任何  $K \geq 1$ , 若  $E_k \in \mathcal{M} (1 \leq k \leq K)$ , 则  $\bigcup_{k=1}^K E_k \in \mathcal{M}$ .

证明:  $E_k \in \mathcal{M} (1 \leq k \leq K)$  蕴涵  $E_1 \setminus E_2, \bigcap_{k=1}^K E_k \in \mathcal{M}$ .

证明. 需要使用 De Morgan(德摩根) 定律: 设有集合  $X$ , 以及集族  $\{A_\alpha | \alpha \in I\}$ , 则成立

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha), \quad X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha).$$

由于  $E_1 \in \mathcal{M}$ , 则  $X \setminus E_1 \in \mathcal{M}$ , 于是  $(X \setminus E_1) \cup E_2 \in \mathcal{M}$ , 注意到

$$E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap (X \setminus E_2) \subseteq X \setminus ((X \setminus E_1) \cup E_2) \in \mathcal{M}.$$

诸  $E_k \in \mathcal{M}$ , 有  $X \setminus E_k \in \mathcal{M} (1 \leq k \leq K)$ , 有  $\bigcup_{k=1}^K (X \setminus E_k) \in \mathcal{M}$ , 于是  $X \setminus \left( \bigcup_{k=1}^K (X \setminus E_k) \right) \in \mathcal{M}$ , 也即  $\bigcap_{k=1}^K E_k \in \mathcal{M}$ . □

2. 设  $\mathcal{M}$  为非空集  $X$  上的  $\sigma$  代数. 证明:  $E_k \in \mathcal{M} (k \geq 1)$  蕴涵  $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$ .

证明. 参考上一题. □

3. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . 把定理 8.2.1 的结果一般化为如下结果:

(1) 对于任何  $\varepsilon > 0$ , 存在开集  $G \supseteq E$ , 使得  $mG \leq m^*E + \varepsilon$ .

(2) 对于任何  $\varepsilon > 0$ , 存在闭集  $F \subseteq E$ , 使得  $mF \geq m_*E - \varepsilon$ .

(3) 存在一列开集  $\{G_k\}$  使得  $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \supseteq E$  且  $mG = m^*E$ .

(4) 存在一列闭集  $\{F_k\}$  使得  $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subseteq E$  且  $mF = m_*E$ .

4. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  为 Lebesgue 可测集,  $f: E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  Lebesgue 可测. 证明:  $\{f = +\infty\}$  可测.

证明. □

5. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  有界, 则对任何开集  $G \supseteq E$ , 有  $m_*E = mG - m^*(G \setminus E)$ .

证明. □

6. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , 则  $E$  可测等价于以下任一条件.

- (1) 对于任何  $\varepsilon > 0$ , 存在开集  $G \supseteq E$ , 使得  $m^*(G \setminus E) < \varepsilon$ .
- (2) 对于任何  $\varepsilon > 0$ , 存在可测集  $G \supseteq E$ , 使得  $m^*(G \setminus E) < \varepsilon$ .
- (3) 对于任何  $\varepsilon > 0$ , 存在闭集  $F \subseteq E$ , 使得  $m^*(E \setminus F) < \varepsilon$ .
- (4) 对于任何  $\varepsilon > 0$ , 存在可测集  $F \subseteq E$ , 使得  $m^*(E \setminus F) < \varepsilon$ .

证明.

□

7. 证明: 对于任意  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 存在  $[0, 1]$  的测度不小于  $1 - \varepsilon$  的子集为疏朗集.

证明.

□

8. 证明: 存在  $f \in C[0, 1]$ , 使得  $\{f = 0\}$  为正测度的疏朗集.

证明.

□

9. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  可测,  $|E| = +\infty$ . 举例说明, 有  $E$  上的可测函数列  $\{f_k\}$  在  $E$  上几乎处处收敛于  $f$ , 但  $\{f_k\}$  并非依测度收敛于  $f$ .

证明.

□

10. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  和  $F \subseteq \mathbb{R}^m$  可测, 证明:  $E \times F \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  可测.

证明.

□

11. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  和  $F \subseteq \mathbb{R}^m$  Borel 可测, 证明:  $E \times F \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  Borel 可测.

证明.

□

12. 证明:

- (1)  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  是由全体以有理点为心, 正有理数为半径的开球生成的  $\sigma$  代数.

证明.

□

- (2)  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  是由

$$2^k \left( (j_1, j_2, \dots, j_n)^T + [0, 1)^n \right), \quad j_1, j_2, \dots, j_n, k \in \mathbb{Z},$$

定义的全体半开半闭的二进方体  $\mathcal{G}_{DQ}$  生成的  $\sigma$  代数.

证明.

□

13. 证明:  $\mathbb{R}^n$  中所有开集组成的集族的势是  $\aleph$ .

证明.

□

## 8.2 B

1. 设  $B$  为  $\mathbb{R}^{n+m}$  中的 Borel 集. 证明对任何  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ , 截集  $E_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x} | (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B\}$  为  $\mathbb{R}^n$  中得 Borel 集.
2. 阅读文献 [20], 并按照文献提供的方法证明  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  的势是  $\aleph$ .
3. 考察已经得到的结果中, 相关集合的测度由有限改为无限, 以及函数的取值由实数变为广义实数时, 相应的结果十分仍然成立.

## 8.3 Lebesgue 积分及其性质

## 8.3 A

1. 对于可测集  $E$  上的函数列  $\{f_k\}$ , 说明以下两者等价:
  - (i)  $f_k(\mathbf{x}) \geq 0$ , a.e.  $\mathbf{x} \in E$ ,  $\forall k \geq 1$ .
  - (ii)  $f_k(\mathbf{x}) \geq 0$ ,  $\forall k \geq 1$  a.e.  $\mathbf{x} \in E$ .
2. 设  $f: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}$ , 说明以下两者不等价:
  - (i)  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ , a.e.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ .
  - (ii)  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ,  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ , a.e.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .
3. 设  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  可积. 证明: 存在可积的简单函数列  $\{f_j\}$  使得  $\{f_j\}$  逐点收敛于  $f$ , 且  $|f_k| \leq |f|$ .
4. 设  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow [0, +\infty]$  可测. 证明: 存在可积得简单函数列  $\{f_j\}$  使得  $\{f_j\}$  单调增加, 且逐点收敛于  $f$ .
5. 试用离散型 Hölder 不等式证明连续型 Hölder 不等式.
6. 试用连续型 Hölder 不等式证明离散型 Hölder 不等式.
7. 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \sin^n x \, dx = 0$ .

证明. 对任给  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $0 < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < 1$ , 故有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = 0.$$

于是存在  $n_0$ , 当  $n > n_0$  时, 有  $\sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) < \varepsilon$ . 因而当  $n > n_0$  时,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^n x \, dx + \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} \sin^n x \, dx \leq \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) + \int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} dx \\ &\leq \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \varepsilon \, dx + \varepsilon \leq \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \varepsilon, \end{aligned}$$

所以  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \sin^n x \, dx = 0$ . □

8. 设  $E$  为  $\mathbb{R}^n$  上的可测集,  $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}^k$  可测. 证明:  $\{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) | \mathbf{x} \in E\}$  是  $\mathbb{R}^{n+k}$  中的零测度集.
9. 试构造非 Jordan 可测得有界区域.

## 8.3B

1. 在例 8.3.2 中, 当  $|E| = +\infty$  或 (及)  $\|f\|_\infty = +\infty$  时, 结论会如何?

2. 设  $1 \leq p < +\infty$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  为测度非零的可测集. 举例说明在  $L^p(E)$  中

(1) 致密性定理不成立.

(2) 聚点原则不成立.

(3) 有限覆盖定理不成立.

3. 试构造区间  $[0, 1]$  上的连续实函数  $f$ , 使得  $\{f > 0\}$  为可列个两两不交的开区间  $\{\alpha_k, \beta_k\}$  的并, 且若  $f$  在两个不同区间  $(\alpha_k, \beta_k)$  和  $(\alpha_j, \beta_j)$  上恒为正,  $\beta_k < \alpha_j$ , 总存在  $\xi \in (\beta_k, \alpha_j)$  满足  $f(\xi) < 0$ .

4. 试构造区间  $[a, b]$  上的连续函数  $f$ , 以及  $[c, d]$  上的 Riemann 可积函数  $g$ , 使得  $g \circ f$  在  $[a, b]$  上不 Riemann 可积, 其中  $f$  的值域包含于  $[c, d]$ .

5. 试构造区间  $[a, b]$  上的连续函数  $f$ , 使得  $g$  在  $[a, b]$  上不 Riemann 可积, 其中

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 1, \\ 0, & f(x) < 1. \end{cases}$$

6. 试构造非 Jordan 可测的有界闭区域.

7. 设  $E \subset \mathbb{R}^n$  为 Jordan 可测的有界集, 非负函数  $f$  在  $E$  上 Riemann 可积, 且  $\int_E f(x) dx = 0$ . 证明:  $\{f \neq 0\}$  是零测度集. 举例说明  $\{f \neq 0\}$  可以不是 Jordan 可测集.

## 8.4 Newton-Lebabiniz 公式

## 8.4A

1. 计算下列积分:

(1)  $\int_0^1 x e^x dx;$

(2)  $\int_0^{2\pi} e^x \sin x dx;$

(3)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{1+x^2} dx;$

(4)  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx;$

(5)  $\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin^2 x} dx.$

前两个题较简单, 结果分别 1 与  $\frac{1}{2} - \frac{e^{2\pi}}{2}$ , 这里略去过程.

对于  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{1+x^2} dx$ , 易见  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ , 我们仅需计算  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ , 置  $\sqrt{x} = t$ , 于是

有  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^4} dt$ , 因为

$$1+t^4 = (t^2+1)^2 - (\sqrt{2}t)^2 = (t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1),$$

所以

$$\frac{2t^2}{1+t^4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1},$$

从而

$$\int \frac{2t^2}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}x-1) + C.$$

于是

$$\int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^4} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4} \pi.$$

$$\text{于是 } \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{1+x^2} dx = \frac{1}{4} \left( \pi + \sqrt{2} \left( \pi + \ln(3-2\sqrt{2}) \right) \right).$$

对于  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx$ , 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2-x}{x^2-x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

对于  $\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin^2 x} dx$ , 易见

$$\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{\pi-x}{1+\sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2 x} dx,$$

对于右侧的积分, 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2 x} dx &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{2\tan^2 x + 1} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2t^2 + 1} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{从而 } \int_0^\pi \frac{x}{1+\sin^2 x} dx = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}.$$

2. 采用恰当的方法计算下列积分:

$$(1) \int_0^1 (1-x)^6 x^2 dx;$$

$$(2) \int_0^\pi \sin^4 x \cos^2 x dx;$$

$$(3) \int_{-1}^1 x e^{x^4} dx;$$

$$(4) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx;$$

$$(5) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

解. (1)  $\int_0^1 (1-x)^6 x^2 dx = \int_0^1 x^6 (1-x)^2 dx = \int_0^1 (x^6 - 2x^7 + x^8) dx = \frac{1}{252}.$

(2) 我们有必要计算  $I_n := \int_0^\pi \sin^n x dx$ . 它有如下递推公式

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^n x dx &= \int_0^\pi \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx = \int_0^\pi \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\ &= \int_0^\pi (\sin^{n-1} x)' \cos x dx = (n-1) \int_0^1 \sin^{n-2} x (1-\sin^2 x) dx \\ &= (n-1) \int_0^\pi \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^1 \sin^n x dx \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

于是  $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ , 又  $I_2 = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \frac{\pi}{2}$ , 有

$$\int_0^\pi \sin^4 x \cos^2 x dx = \int_0^\pi (\sin^4 x - \sin^6 x) dx = I_4 - I_6 = \frac{\pi}{16}.$$

(3) 易见  $\int_{-1}^1 x e^{x^4} dx = 0$ .

(4) 易见

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4}.$$

(5) 我们有  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2(\sin x + \cos x)} dx$ , 于是

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2(\sin x + \cos x)} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx \\ &= 1 - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \csc \left( x + \frac{\pi}{4} \right) dx = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc x dx = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left( \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3. 对于  $[a, b]$  上连续可微函数  $f$ , 若  $f(a) = f(b) = 0$ , 证明:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

证明. 令  $t = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{4}$ , 于是

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b f(x) d(x-t) \right| = \left| f(x)(x-t) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)(x-t) dt \right| \\ &= \left| \int_a^b f'(x) dt \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \int_a^b (x-t) dx = \frac{(b-a)^2}{4} \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|. \quad \square \end{aligned}$$

4. 证明对任何  $x > 0$  成立  $\int_0^x e^{-x^2} \sin x dx > 0$ .

证明. 只需证明对于任何自然数  $n$ , 有

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-x^2} \sin x dx + \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} e^{-x^2} \sin x dx > 0,$$

注意上述不等式加号左侧的积分大于零而右侧积分小于零. 只有有上述结果, 那么  $\forall x > 0$ , 都存在  $k \in \mathbb{N}$  使得  $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$  或  $(2k+1)\pi \leq x \leq (2k+2)\pi$ , 对于前者, 我们有

$$\int_0^x e^{-t^2} \sin t \, dt = \sum_{j=0}^{k-1} \left( \int_{2j\pi}^{(2j+1)\pi} e^{-t^2} \sin t \, dt + \int_{(2j+1)\pi}^{2(j+1)\pi} e^{-t^2} \sin t \, dt \right) + \int_{2k\pi}^x e^{-t^2} \sin t \, dt > 0,$$

对于后者有

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t^2} \sin t \, dt &= \sum_{j=0}^{k-1} \left( \int_{2j\pi}^{(2j+1)\pi} e^{-t^2} \sin t \, dt + \int_{(2j+1)\pi}^{2(j+1)\pi} e^{-t^2} \sin t \, dt \right) \\ &\quad + \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-t^2} \sin t \, dt + \int_{(2k+1)\pi}^x e^{-t^2} \sin t \, dt > 0. \end{aligned}$$

事实上,

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-x^2} \sin x \, dx + \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} e^{-x^2} \sin x \, dx = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t \left( e^{-x^2} - e^{-(x+\pi)^2} \right) > 0.$$

结论即证.  $\square$

5. 设  $f$  在  $[a, b]$  上有二阶导数,  $f(a) = f(b) = 0$ . 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $\int_a^b f(x) \, dx = \frac{f''(\xi)}{12}(a-b)^3$ .

证明. 一方面, 我们有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= \int_a^b f(x) \, d(x-a) = - \int_a^b f'(x)(x-a) \, d(x-b) \\ &= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b) \, dx = \frac{f''(\xi_1)}{6}(a-b)^3. \end{aligned} \quad (\diamond)$$

其中  $\xi_1 \in (a, b)$ . 另一方面

$$\begin{aligned} \int_a^{(a+b)/2} f(x) \, dx &= \int_a^{(a+b)/2} f(x) \, d\left(x - \frac{a+b}{2}\right) = - \int_a^{(a+b)/2} f'(x) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \, d(x-a) \\ &= \int_a^{(a+b)/2} f''(x) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) (x-a) \, dx = \frac{f''(\xi_2)}{48}(a-b)^3. \end{aligned}$$

其中  $\xi_2 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ , 同理不难得到

$$\int_{(a+b)/2}^b f(x) \, dx = \frac{f''(\xi_3)}{48}(a-b)^3.$$

其中  $\xi_3 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ . 值得一提的是

$$\min\{f''(\xi_2), f''(\xi_3)\} \leq \frac{f''(\xi_2) + f''(\xi_3)}{2} \leq \max\{f''(\xi_2), f''(\xi_3)\},$$

于是依微分 Darboux 定理有  $f''(\xi_4) = \frac{f''(\xi_2) + f''(\xi_3)}{2}$ , 于是有

$$\int_a^b f(x) \, dx = \frac{f''(\xi_4)}{24}(a-b)^3,$$

于是有  $\frac{f''(\xi_1)}{6} = \frac{f''(\xi_4)}{24}$ , 易见  $f''(\xi_1), f''(\xi_4)$  同号, 不妨设均非负, 于是有

$$f''(\xi_1) \leq 2f''(\xi_1) \leq 4f''(\xi_1) = f''(\xi_4),$$

依微分 Darboux 定理有  $\xi$  使得  $f(\xi) = 2f''(\xi_1)$ , 代入即式(◆)即得结论.  $\square$

6. 设  $f$  是  $[0, 1]$  上的连续函数. 证明  $f(0) = 0$  时,  $f(y) = \int_0^1 \frac{y^3 f(x)}{x^4 + y^4} dx$  在  $y = 0$  处连续.

证明. 若  $f(0) = 0$ , 则记

$$M = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|, \quad \omega(r) = \sup_{0 \leq x \leq r} |f(x)|, \quad r \geq 0.$$

$\forall y \neq 0$ , 我们有

$$\begin{aligned} |F(y) - F(0)| &= |F(y)| = \left| \int_0^1 \frac{y^3 f(x)}{x^4 + y^4} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{|y^3| |f(x)|}{x^4 + y^4} dx \\ &\leq \omega(r) \int_0^r \frac{|y^3|}{x^4 + y^4} dx + M \int_r^1 \frac{|y^3|}{x^4 + y^4} dx \\ &= \omega(r) \int_0^{r/|y|} \frac{1}{1 + x^4} dx + M \int_{r/|y|}^1 \frac{1}{1 + x^4} dx, \end{aligned}$$

上式令  $y \rightarrow 0$  得到

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow 0} |F(y) - F(0)| \leq \omega(r) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4}, \quad \forall r \in (0, 1),$$

令  $r \rightarrow 0^+$ , 则有

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow 0} |F(y) - F(0)| \leq 0,$$

即  $\lim_{y \rightarrow 0} F(y) = F(0)$ .

事实上, 在上述我们证明了

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left| \int_0^1 \frac{y^3 f(x)}{x^4 + y^4} dx - \int_0^1 \frac{y^3 f(0)}{x^4 + y^4} dx \right| = 0,$$

即

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{y^3 f(x)}{x^4 + y^4} dx = \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{y^3 f(0)}{x^4 + y^4} dx = \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^{1/y} \frac{f(0)}{1 + x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1 + x^4} dx,$$

这样就有  $\lim_{y \rightarrow 0^-} \int_0^1 \frac{y^3 f(x)}{x^4 + y^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} f(0)$ . 由  $F(0) = 0$ , 我们得到  $F$  在 0 处连续当且仅当  $f(0) = 0$ .  $\square$

7. 已知  $f \in C^1[0, +\infty)$ , 且存在  $c > 0$  使得  $|f'(x)| \leq \frac{c}{x} (\forall x > 0)$ ,  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R |f(x)| dx = 0$ . 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

证明. 由题设易见  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ , 于是对于  $\forall A > 0$ , 对于充分大的  $x$ , 有

$$f(x + A) - f(x) = f'(\xi)A, \quad \xi \in (x, x + A),$$



于是  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)|$  存在, 记为  $a$ . 于是对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $R'$  使得  $x \geq R'$  使得

$$||f(x)| - a| < \varepsilon, \quad \text{即} \quad a - \varepsilon \leq |f(x)| \leq a + \varepsilon,$$

由于  $\frac{1}{R} \int_0^R |f(x)| dx = \frac{1}{R} \int_0^{R'} |f(x)| dx + \frac{1}{R} \int_{R'}^R |f(x)| dx$ , 于是

$$\frac{1}{R} \int_0^{R'} |f(x)| dx + \frac{1}{R} \int_{R'}^R (a - \varepsilon) dx \leq \frac{1}{R} \int_0^R |f(x)| dx \leq \frac{1}{R} \int_0^{R'} |f(x)| dx + \frac{1}{R} \int_{R'}^R (a + \varepsilon) dx,$$

令  $R \rightarrow +\infty$  得到  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \int_0^R |f(x)| dx = a$ , 结合题设得  $a = 0$ .  $\square$

8. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . 证明:  $f: E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  为下半连续函数当且仅当对任何  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\{f > \alpha\}$  是  $E$  中的相对开集.

9. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ .

(1) 若  $\varphi, \psi: E \rightarrow (-\infty, +\infty]$  均为下半连续函数, 证明:  $\varphi + \psi$  也是下半连续函数.

(2) 若  $\varphi, \psi: E \rightarrow [-\infty, +\infty)$  均为上半连续函数, 证明:  $\varphi + \psi$  也是上半连续函数.

10. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ .

(1) 若  $\varphi_k: E \rightarrow [-\infty, +\infty] (k \geq 1)$  为一列下半连续函数, 证明:  $\varphi = \sup_{k \geq 1} \varphi_k$  也是下半连续函数.

(2) 若  $\varphi_k: E \rightarrow [-\infty, +\infty] (k \geq 1)$  为一列上半连续函数, 证明:  $\varphi = \inf_{k \geq 1} \varphi_k$  也是上半连续函数.

11. 设  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . 证明:  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  连续当且仅当它既是下半连续的, 又是上半连续的.

12. 证明: 紧集上有下界的下半连续函数有最小值.

### 8.4B

1. 试构造区间  $[a, b]$  上处处可导且导函数有界的实函数  $f$ , 使得  $f'$  在  $[a, b]$  上不是 Riemann 可积的.

解. ■

2. 试构造  $[0, 1]$  上的可积函数  $f$ , 使得对任何有理数  $q \in [0, 1]$ , 都有  $\lim_{x \rightarrow q} f(x) = +\infty$ .

解. ■

3. 试构造  $\mathbb{R}$  上严格单调的连续可微函数  $f$ , 使得  $\{f' = 0\}$  具有正测度.

4. 设  $n \geq 1, f \in C[0, 1]$  且满足  $\int_0^1 x^k f(x) dx = 0, k = 0, 1, \dots, n-1, \int_0^1 f(x) x^n dx = 1$ . 证明:  
 $\max_{x \in [0, 1]} |f(x)| > 2^n(n+1)$ .

证明. 由题意知对任意  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 有

$$\int_0^1 (x - \alpha)^n f(x) dx = 1,$$

若对于  $f(x)$  恒有  $|f(x)| < 2^n(n+1)$ , 则

$$\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^n f(x) dx \leq \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^n |f(x)| dx < 2^n(n+1) \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right|^n = 1,$$

与题设矛盾, 即必有使得  $|f(x)| \geq 2^n(n+1)$  的点, 即  $\max_{x \in [0,1]} |f(x)| \geq 2^n(n+1)$ . 若  $\max_{x \in [0,1]} f(x) = 2^n(n+1)$ , 则依上式取等的条件必有  $|f(x)| \equiv 2^n(n+1)$ , 这与题设矛盾.  $\square$

5. 设  $f \in C[0, \pi]$ , 且对  $1 \leq k \leq n$  成立  $\int_0^\pi f(x) \cos kx dx = \int_0^\pi f(x) \sin kx dx = 0$ . 证明:  $f$  在  $(0, \pi)$  内至少有  $2n$  个零点.

6. 设  $f \in C[a, b]$  非负, 且在  $c \in [a, b]$  处取得唯一的最大值  $f(c) > 0$ ,  $\varphi$  在  $[a, b]$  上可积, 且在点  $c$  连续, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^b f^n(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b f^n(x) dx} = \varphi(c).$$

证明. 由于  $\varphi$  在  $c$  点连续, 则  $\forall \varepsilon > 0$  使得  $|x - c| < \delta$  时,  $|\varphi(x) - \varphi(c)| < \varepsilon$ , 并且  $\delta$  也满足  $|x - c| \geq \delta$  时有  $0 \leq f(x) < f(c) - \varepsilon$ . 即  $f(c)$  与  $|\varphi|$  的最大值为  $M$  与  $m$ . 又存在  $\eta$  使得  $|x - c| \leq \eta$  时,  $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , 记  $E$  为区间  $[a, b]$  去除  $[c - \delta, c + \delta]$  的部分. 于是有

$$\begin{aligned} \left| \frac{\int_a^b f^n(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b f^n(x) dx} \right| &\leq \frac{\int_a^b f^n(x) |\varphi(x) - \varphi(c)| dx}{\int_a^b f^n(x) dx} \\ &\leq \frac{\int_{c-\delta}^{c+\delta} f^n(x) |\varphi(x) - \varphi(c)| dx}{\int_{c-\delta}^{c+\delta} f^n(x) dx} + \frac{\int_E f^n(x) |\varphi(x) - \varphi(c)| dx}{\int_{c-\eta}^{c+\eta} f^n(x) dx} \\ &\leq \frac{\varepsilon \int_{c-\delta}^{c+\delta} f^n(x) dx}{\int_{c-\delta}^{c+\delta} f^n(x) dx} + \frac{2(b-a-2\delta)m(M-\varepsilon)^n}{2\eta(M-\varepsilon/2)^2} \rightarrow \varepsilon, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 原命题得证.  $\square$

7. 计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \int_0^{\pi/2} x^n \cos x dx}{\int_0^{\pi/2} x^n \sin x dx}.$

解. 注意到

$$\int_0^{\pi/2} x^n \sin x dx = -x^n \cos x \Big|_0^{\pi/2} + n \int_0^{\pi/2} x^{n-1} \cos x dx,$$

即有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \int_0^{\pi/2} x^n \cos x \, dx}{\int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\pi/2} x^n \cos x \, dx}{\int_0^{\pi/2} x^{n-1} \cos x \, dx} = \frac{\pi}{2}.$  ■

我们来证明这样一个命题: 设  $f, \varphi \in C[a, b]$ , 且  $f, \varphi > 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^b \varphi(x) f^{n+1}(x) \, dx}{\int_a^b \varphi(x) f^n(x) \, dx} = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

证明. 记  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_0)$ , 则  $\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{M}{2}\right)$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使得当  $x \in J_\varepsilon := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$  时, 有  $f(x) > M - \varepsilon$ . 令

$$g(x) = \max\{f(x), M - 2\varepsilon\}, \quad x \in [a, b].$$

则  $g$  连续且

$$|g^k(x) - f^k(x)| \leq (M - 2\varepsilon)^k, \quad \forall x \in [a, b], k = 1, 2, \dots.$$

于是我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \int_a^b \varphi(x) (f^{n+1}(x) - g^{n+1}(x)) \, dx \right|}{\int_a^b \varphi(x) f^n(x) \, dx} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(M - 2\varepsilon)^{n+1} \int_a^b \varphi(x) \, dx}{(M - \varepsilon)^n \int_{J_\varepsilon} \varphi(x) \, dx} = 0.$$

从而可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^b \varphi(x) f^{n+1}(x) \, dx}{\int_a^b \varphi(x) f^n(x) \, dx} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^b \varphi(x) g^{n+1}(x) \, dx}{\int_a^b \varphi(x) f^n(x) \, dx} \geq M - 2\varepsilon.$$

这样, 由  $\varepsilon$  的任意性得到  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^b \varphi(x) f^{n+1}(x) \, dx}{\int_a^b \varphi(x) f^n(x) \, dx} \geq M$ , 另一方面

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^b \varphi(x) f^{n+1}(x) \, dx}{\int_a^b \varphi(x) f^n(x) \, dx} \leq M,$$

从而上述命题成立. □

8. 求极限:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n \, dx}{\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \, dx}.$

解. 注意到

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \, dx = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \sim \frac{2}{n+1}, \quad n \rightarrow +\infty,$$

对于  $\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx$ , 置  $t = nx$  得

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx = n \int_0^n \left(1 - \frac{t}{2n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^n dt,$$

于是由 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(1 - \frac{x}{4}\right)^n dx}{\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n dx} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{2n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^n \chi_{[0,n]}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-3t/4} dt = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

9. 试将一些微分中值定理型的问题转化成积分中值定理型的结果, 并考察其异同.

设  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  有连续的导函数, 且  $f(0) = 0$ , 求证:

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x^2) |f'(x)|^2 dx,$$

等号成立当且仅当  $f(x) \equiv cx$ , 其中  $c$  为常数.

证明. 由  $f(0) = 0$  可知  $f(x) = \int_0^x f'(t) dt$ ,  $x \in [0, 1]$ , 由 Cauchy 不等式可得

$$f^2(x) = \left( \int_0^x f'(t) dt \right)^2 \leq \int_0^x (f'(t))^2 dt \cdot \int_0^x 1^2 dt = x \int_0^x (f'(t))^2 dt,$$

于是有

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(x) dx &\leq \int_0^1 \left( x \int_0^x (f'(t))^2 dt \right) dx = \int_0^1 \left( \int_0^x (f'(t))^2 dt \right) d \left( -\frac{1-x^2}{2} \right) \\ &= -\frac{1-x^2}{2} \int_0^x (f'(t))^2 dt \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1-x^2}{2} (f'(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2) (f'(x))^2 dx. \end{aligned}$$

其中等号成立当且仅当  $\left( \int_0^x f'(t) dt \right)^2 \leq \int_0^x (f'(t))^2 dt \cdot \int_0^x 1^2 dt$  恒成立, 故此时有  $f'(t) = c$ , 结合  $f(0) = 0$  即得  $f(x) = cx$ .  $\square$

## 8.5 累次积分

### Theorem 8.5.1: Young 不等式

设  $\varphi$  是  $[0, +\infty]$  上的严格单增的连续函数,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(+\infty) = +\infty$ ,  $\psi$  是  $\varphi$  的反函数, 令

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt, \quad \Psi(y) = \int_0^y \psi(t) dt, \quad x, y \geq 0,$$

则对任何  $a, b \geq 0$  成立

$$ab \leq \Phi(a) + \Psi(b),$$

且等号当且仅当  $b = \varphi(a)$ , 即  $a = \psi(b)$  时取到.

### 8.5.4

1. 计算积分  $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$ , 其中  $\Omega$  为平面  $x=0, y=0, z=0$  和  $x+y+z=1$  所围成的有界区域.

解. 将重积分化为累次积分, 即有

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left( \frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right) dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1-x}{8} - \frac{1}{4} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

2. 计算积分  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  为  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  与  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$  相交的部分.

解. 注意到被积函数仅含  $z$ , 于是有

$$\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \int_0^{1/2} \pi z^2 (2z - z^2) dz + \int_{1/2}^1 \pi z^2 (1 - z^2) dz = \frac{29\pi}{480}.$$

3. 设  $R > 0$ , 计算牟合方盖  $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq R^2, y^2 + z^2 \leq R^2\}$  的体积.

解. 记  $D = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq R^2, y^2 + z^2 \leq R^2\}$ , 考虑到对称性, 我们只计算图形第一象限部分的体积. 注意到该区域边界当  $y$  确定时, 总有  $x^2 = z^2 = R^2 - y^2$ , 记  $D_{xz}$  为  $y$  确定后代表的区域, 于是

$$\iiint_D dx dy dz = \int_0^R \left( \iint_{D_{xz}} dx dz \right) dy = \int_0^R (R^2 - y^2) dy = \frac{2}{3} R^3.$$

从而牟合方盖的体积  $V = 8 \cdot \frac{2}{3} R^3 = \frac{16}{3} R^3$ .

4. 当  $\varphi$  连续可导时, 利用求导得到单调性来证明定理 8.5.1.

证明.

5. 设  $f, g$  在  $[0, 1]$  上单调. 若  $f, g$  均单增或均单减, 证明:  $\int_0^1 f(x)g(x) dx \geq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx$ . 若  $f, g$  之一单增, 另一个单减, 则上述不等式的等号反向.

证明. 若

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx \geq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx,$$

则有

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x)g(x) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x)g(y) dx dy$$

即有

$$\int_0^1 \int_0^1 (f(x)g(x) - f(x)g(y)) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 (f(y)g(y) - f(y)g(x)) dx dy \geq 0.$$

即证

$$\int_0^1 \int_0^1 (f(x)g(x) + f(y)g(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x)) dx dy \geq 0.$$

结合  $f, g$  的单调性与排序不等式可知上式成立, 另外的情况同理可以得到.  $\square$

6. 求证  $\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{\ln(1+x)}{x}} dx \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{\ln^2(1+x)}{x^2}} dx < \frac{\pi^2}{12}.$

证明. 利用基本不等式, 有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{\ln(1+x)}{x}} dx \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{\ln^2(1+x)}{x^2}} dx &= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{\ln(1+x)}{x}} \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{\ln^2(1+y)}{y^2}} dx dy \\ &< \frac{1}{3} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+y)}{y} + \frac{\ln(1+y)}{y} dx dy \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned} \quad \square$$

7. 令  $\Sigma$  为平面直角坐标系中以点  $A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 0), D(0, -1)$  为顶点的正方形区域. 证明:  $\left( \iint_{\Sigma} e^{|x|+|y|} dx dy \right)^{1/2} < 2 \int_0^{\sqrt{2}/2} e^x dx.$

证明. 记  $\Sigma_1$  为  $\Sigma$  与第一象限的交, 则由对称性有

$$\iint_{\Sigma} e^{|x|+|y|} dx dy = 4 \iint_{\Sigma_1} e^{x+y} dx dy.$$

记  $\Sigma_2 = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq \sqrt{2}/2\}$  注意到

$$2 \int_0^{\sqrt{2}/2} e^x dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} e^x dx + \int_0^{\sqrt{2}/2} e^y dy \geq 2 \sqrt{\iint_{\Sigma_2} e^{x+y} dx dy} \geq 2 \sqrt{\iint_{\Sigma_1} e^{x+y} dx dy},$$

从而结论成立. 最右侧不等号成立的原因为  $\Sigma_2$  与  $\Sigma_1$  面积相同, 但  $x+y$  在  $\Sigma_2$  中的值不小于在  $\Sigma_1$  中的值.  $\square$

8. 设函数  $f \in C[a, b]$ , 且  $0 < m \leq f(x) \leq M (\forall x \in [a, b])$ . 证明:

$$(b-a)^2 \leq \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{(m+M)^2}{4Mm} (b-a)^2.$$

证明. 左侧由 Cauchy 不等式有

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq \left( \int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{\frac{1}{f(x)}} dx \right)^2 = (b-a)^2.$$

注意到

$$0 \geq \frac{(f(x) - M)(f(x) - m)}{f(x)} = f(x) + \frac{Mm}{f(x)} - (M+m),$$

即有

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b \frac{Mm}{f(x)} dx \leq (M+m)(b-a),$$

又

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b \frac{Mm}{f(x)} dx \geq 2\sqrt{Mm} \sqrt{\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx},$$

从而结论成立.  $\square$

9. 对以下闭区域  $W$ , 计算  $E = \{(x, y) | \exists x \in \mathbb{R}, \text{s.t. } (x, y, z) \in W\}$ , 以及  $F_{y,z} = \{x | (x, y, z) \in W\} (\forall (y, z) \in E)$ . 进而化  $\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz$  为先对  $x$  积分再对  $(y, z)$  积分的累次积分:

(1)  $W = \{(x, y, z) | x, y \geq 0, x + y \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$ ;

(2)  $W = \{(x, y, z) | x, y \geq 0, 0 \leq z \leq x + y \leq 1\}$ .

解. (1)

(2)

■

### 8.5 B

1. 设  $f \in C(\mathbb{R})$  是双射, 有不动点, 又满足  $f(2x - f(x)) = x (\forall x \in \mathbb{R})$ . 证明  $f(x) \equiv x$ .

证明. 由题设有

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

设  $g(x) = f(x) - x$ , 首先, 归纳证明

$$f(x + kg(x)) = x + (k+1)g(x), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据定义, 对  $k=0$  成立. 假设

$$f(x \pm (k-1)g(x)) = x \pm kg(x), \quad k \in \mathbb{Z},$$

那么

$$\begin{aligned} f(x \pm kg(x)) &= 2(x \pm kg(x)) - f^{-1}(x \pm kg(x)) \\ &= 2(x \pm kg(x)) - x(x \pm (k-1)g(x)) = x \pm (k+1)g(x), \end{aligned}$$

归纳完成.

假设  $g(x) < g(y)$  对于某些  $x, y \in \mathbb{R}$  成立, 那么可以选择  $k \in \mathbb{N}$  使得  $x - kg(x) > y - kg(y)$ . 注意  $f$  是增函数, 否则  $f$  与  $f^{-1}$  是减函数, 这与  $2x = f(x) + f^{-1}(x)$  矛盾. 因此,  $f$  的  $n$  次迭代  $f^{(n)}$  也是一个增函数. 由此可见

$$f^{(n)}(x - kg(x)) \geq f^{(n)}(y - kg(y)),$$

由于  $f^{(n)}(x)(x - kg(x)) = f^{(n-1)}(x + (1-k)kg(x)) = \cdots = x + (n-k)g(x)$ , 类似的

$$f^{(n)}(x - kg(x)) = y + (n-k)g(y),$$

得到

$$x + (n-k)g(x) \geq y + (n-k)g(y),$$

但这并不适用于所有  $n$  足够大的情况, 否则

$$\frac{x}{n-k} + g(x) \geq \frac{y}{n-k} + g(y),$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 得到  $g(x) \geq g(y)$  矛盾. 所以  $g(x)$  是常数, 因此  $f(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$ , 又因  $f(x)$  有不动点, 从而  $f(x) \equiv x$ . □

2. 如果  $\varphi$  是  $[0, +\infty)$  上单调增加的非负函数, 特别的,  $\varphi(0)$  不一定为零,  $\varphi$  不一定严格单调, 且  $\varphi(+\infty)$  不一定为  $+\infty$ . 尝试建立相应的 Young 不等式.

证明. □

3. 设  $f \in C^1[0, h]$ ,  $f(0) = f(h) = 0$ , 证明:  $\int_0^h |f(x)f'(x)| \, dx \leq \frac{h}{4} \int_0^h |f'(x)|^2 \, dx$ , 且系数  $\frac{h}{4}$  不可改进.

证明. 由  $f(0) = 0$  有

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) \, dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| \, dt =: F(x),$$

同理由  $f(h) = 0$  得到  $|f(x)| = \left| \int_h^x f'(t) \, dt \right| \leq \int_h^x |f'(t)| \, dt =: G(x)$ . 于是有

$$\begin{aligned} \int_0^h |f(x)f'(x)| \, dx &= \int_0^{h/2} |f(x)f'(x)| \, dx + \int_{h/2}^h |f(x)f'(x)| \, dx \\ &\leq \int_0^{h/2} F(x)F'(x) \, dx + \int_{h/2}^h G(x)G'(x) \, dx \\ &= \frac{1}{2}F^2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}G^2\left(\frac{h}{2}\right), \end{aligned}$$

而

$$F^2\left(\frac{h}{2}\right) = \left(\int_0^{h/2} |f'(t)| \, dt\right)^2, \quad G^2\left(\frac{h}{2}\right) = \left(\int_{h/2}^h |f'(t)| \, dt\right)^2,$$

再由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\int_0^{h/2} |f'(t)| \, dt\right)^2 \leq \int_0^{h/2} 1^2 \, dx \int_0^{h/2} |f'(x)|^2 \, dx = \frac{h}{2} \int_0^{h/2} |f'(x)|^2 \, dx,$$

同理  $\left(\int_{h/2}^h |f'(x)| \, dt\right)^2 \leq \frac{h}{2} \int_{h/2}^h |f'(x)|^2 \, dx$ , 即证原不等式.

等号成立当且仅当

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq h/2, \\ -c(x-h), & h/2 \leq x \leq h, \end{cases}$$

上述函数满足  $f(0) = f(h) = 0$ , 若还要求  $f(x)$  导数连续, 只有取  $f(x) \equiv 0$ , 若不然,  $f(x)$  在  $x = \frac{h}{2}$  处不可微, 即知  $\frac{h}{4}$  不能再小. 实际上, 这正是华罗庚-Opial 不等式. □

4. 设  $F$  在  $[0, 1] \times [0, 1]$  上有连续的四阶偏导数, 满足  $\left|\frac{\partial^4 F(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2}\right| \leq M$ ,  $F(x, 0) = F(x, 1) = 0 = F(0, y) = F(1, y) = 0 (\forall x, y \in [0, 1])$ . 证明:  $\left|\int_{[0, 1] \times [0, 1]} F(x, y) \, dx \, dy\right| \leq \frac{M}{144}$ .

证明. 先记  $D = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1\}$ , 考虑积分  $\iint_D x(1-x)y(1-y) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \, dy$ , 一方面, 有

$$\left|\iint_D x(1-x)y(1-y) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \, dy\right| \leq \left|M \int_0^1 x(1-x) \, dx \int_0^1 y(1-y) \, dy\right| = \frac{M}{36}.$$



另一方面,

$$\begin{aligned}
 & \iint_D x(1-x)y(1-y) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 x(1-x)y(1-y) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} dy \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^1 x(1-x)y(1-y) d\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}\right) = \int_0^1 dx \int_0^1 x(1-x)(2y-1) \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} dy \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^1 x(1-x)(2y-1) d\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) = \int_0^1 dx \int_0^1 2x(1-x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy \\
 &= 2 \int_0^1 dy \int_0^1 x(1-x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx = 4 \int_0^1 dx \int_0^1 F(x,y) dy = 4 \iint_D F(x,y) dx dy,
 \end{aligned}$$

从而有  $4 \left| \int_{[0,1] \times [0,1]} F(x,y) dx dy \right| \leq \frac{M}{36}$ . 即得结论.  $\square$

## 8.6 重积分变量代换

### 8.6 A

1. 计算  $\iiint_{4x^2+4y^2+z^2 \leq 4x+4y+z} (4x^2+4y^2+z^2) dx dy dz$ .

解. 记原积分为  $I$ , 于是

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{4(x-1/2)^2+4(y-1/2)^2+(z-1/2)^2 \leq 9/4} (4x^2+4y^2+z^2) dx dy dz && \text{(整理)} \\
 &= \iiint_{4x^2+4y^2+z^2 \leq 9/4} \left( 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 \right) dx dy dz && \text{(平移变换)} \\
 &= \iiint_{4x^2+4y^2+z^2 \leq 9/4} \left( 4x^2+4y^2+z^2 + \frac{9}{4} \right) dx dy dz && \text{(奇数次项积分为 0)} \\
 &= \frac{27}{32} \cdot \frac{9}{4} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (x^2+y^2+z^2+1) dx dy dz && \text{(伸缩变换)}
 \end{aligned}$$

最后利用球坐标变换有

$$I = \frac{27}{32} \cdot \frac{9}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 (r^2+1) r^2 \sin \varphi dr = \frac{81\pi}{20}. \quad \blacksquare$$

2. 计算由  $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$  所围成的有界区域  $D$  的面积 (其中  $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ ).

解. 即计算  $\iint_D dx dy$ , 令  $u=a_1x+b_1y+c_1, v=a_2x+b_2y+c_2$ , 则

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \end{pmatrix}} \right| = \left| \frac{1}{a_1b_2-a_2b_1} \right|,$$

$$\text{于是 } \iint_D dx dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \frac{1}{|a_1b_2-a_2b_1|} du dv = \frac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}. \quad \blacksquare$$

3. 计算积分  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{y/(x+y)} dy$ .

解. 置  $x+y=u, y=v$ , 不难得到

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{y/(x+y)} dy = \int_0^1 du \int_0^u e^{v/u} dv = \int_0^1 (e-1)u du = \frac{1}{2}(e-1). \quad \blacksquare$$

4. 设  $f$  在点 0 处可导,  $f(0)=0, \Omega_t = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 2tz\}$ . 求  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^5} \iiint_{\Omega_t} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ .

解. 记原极限为  $I$ . 做变量代换

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = t + r \cos \varphi, \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi], r \geq 0.$$

则当  $t > 0$  时,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^5} \iiint_{\Omega_t} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz &= \frac{1}{t^5} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^t f(r^2 + t^2 + 2tr \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr \\ &= \frac{2\pi}{t^2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 f(t^2 r^2 + t^2 + 2t^2 r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr, \end{aligned}$$

对于任何  $t \in (0, 1]$ , 我们有

$$\begin{aligned} &\frac{2\pi}{t^2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 |f(t^2 r^2 + t^2 + 2t^2 r \cos \varphi) - f'(0)(t^2 r^2 + t^2 + 2t^2 r \cos \varphi)| r^2 \sin \varphi dr \\ &\leq \frac{2\pi}{t^2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 (t^2 r^2 + t^2 + 2t^2 r \cos \varphi) \omega(t^2 r^2 + t^2 + 2t^2 r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr \\ &\leq 2\pi \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 4\omega(4t^2) dr = 8\pi^2 \omega(4t^2), \end{aligned}$$

其中  $\omega(r) = \sup_{0 < |x| \leq r} \left| \frac{f(x)}{x} - f'(0) \right|$  满足  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \omega(r) = 0$ . 所以

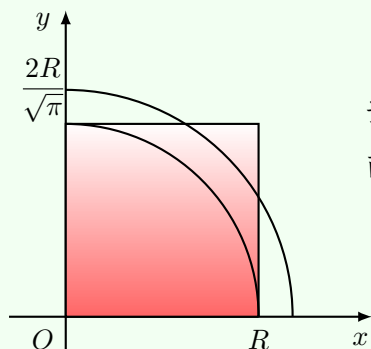
$$I = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\pi}{t^2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 f'(0) (t^2 r^2 + t^2 + 2t^2 r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr = \frac{32\pi}{15} f'(0). \quad \blacksquare$$

5. 设  $R > 0$ , 证明:  $\sqrt{\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2})} \leq \int_0^R e^{-x^2} dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{4}(1 - e^{-4R^2/\pi})}$ .

证明. 记  $P = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, x, y \geq 0\}, Q = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq R\}$ , 易见  $P \subset Q$ , 并且

$$\iint_P e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}),$$

故  $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \leq \iint_Q e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2$ .



记  $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4R^2/\pi, x, y \geq 0\}$ , 易见  $C \setminus Q$  与  $Q \setminus C$  面积相等, 但

$$e^{-(x^2+y^2)} \geq e^{-4R^2/\pi}, \quad (x, y) \in C \setminus Q,$$

而  $(x, y) \in Q \setminus C$  时上述不等式反向, 故有

$$\begin{aligned} \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 &= \iint_Q e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_C e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{2R/\sqrt{\pi}} e^{-r^2} r dr \\ &= \frac{\pi}{4} \left( 1 - e^{-4R^2/\pi} \right), \end{aligned}$$

从而原不等式成立.  $\square$

### 8.6 B

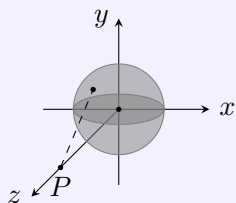
1. 试求半径为  $R$  密度为常值  $\rho$  的球体对于质量为  $m$  的质点  $P$  的万有引力.

解. 首先, 两质量分别为  $m_1, m_2$ , 相距为  $r$  的质点之间的引力为

$$\mathbf{F} = \frac{Gm_1m_2}{r^2},$$

其中  $G$  为引力常数, 约为  $6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ .

现在, 我们不妨记题设球体为  $D = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ , 质点  $P$  坐标为  $(0, 0, p)$ .



在球中任取一点  $Q(x, y, z)$ , 环绕  $Q$  取一体积微元  $dV$ ,  $dV$  与  $P$  之间的引力  $d\mathbf{F}$  为

$$d\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{Gm\rho dV}{x^2 + y^2 + (z - p)^2},$$

方向由  $P$  指向  $Q$ , 我们记  $\angle QPO = \alpha$ , 则  $\mathbf{F}$  沿  $z$  轴方向与垂直  $z$  轴方向的分量为

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} \cos \alpha, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{F} \sin \alpha,$$

注意到  $\cos \alpha = \frac{p - z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - p)^2}}$ , 于是

$$\mathbf{F} = \iiint_D \frac{Gm\rho(p - z)}{(x^2 + y^2 + (z - p)^2)^{3/2}} dV,$$

■

2. 设  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  为区域,  $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  连续可微. 若  $E$  为  $\Omega$  的紧子集, 证明: 存在连续模  $\omega$  使得

$$\|\psi(\mathbf{y}) - \psi(\mathbf{x}) - \psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \omega(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|)$$

## 8.7 函数的光滑逼近

### 8.7.1

1. 证明函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

任意次可导.

证明. 易见  $x \neq 0$  时  $\varphi$  任意次可导.  $x = 0$  时有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0 - 0}{x},$$

则

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x}}{x^2}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

归纳可证

$$\varphi^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

其中  $P_n(x)$  为一  $2n$  次多项式.  $n = 1$  已经满足, 设  $\varphi^{(n)}(x)$  如上式所示, 那么

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t P_n(t)}{e^t} = 0,$$

且有

$$\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}\right)' = P_n'\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} + \frac{1}{x^2} P_n(x) e^{-1/x} = P_{n+1}(x) e^{-1/x},$$

从而  $\varphi(x)$  任意次可导. □

2. 设  $b > a, n > \frac{4}{b-a}$ . 证明: 存在  $g_n \in C_c^\infty((a, b); [0, 1])$  满足  $\text{supp } g_n = \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$ ,  $g_n|_{[a+2/n, b-2/n]} \equiv 1$  以及  $|g'| \leq nM$ , 其中  $M$  是一个与  $n$  无关的一个常数.

证明. □

3. 设  $\alpha > 0, f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ . 定义  $F(x) = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} f(t) dt (\forall x \in \mathbb{R})$ . 证明:

(1) 若  $f$  是单调函数, 则  $F$  也是单调函数.

(2) 若  $f$  是凸函数, 则  $F$  也是凸函数.

(3) 若  $f$  有连续的  $n$  阶导数, 且  $f^{(n)} \geq 0$ , 则  $F^{(n)} \geq 0$ .

证明. (1) 不妨设有连续单增的函数  $g(x)$ , 记  $G(x) = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} g(t) dt$ , 于是有

$$G'(x) = \frac{1}{\alpha} (g(x+\alpha) - g(x)) \geq 0,$$

从而对于连续函数, 上述结论成立. 而一般的  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ , 我们知道对于  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $g(x) \in C_c(\mathbb{R})$  使得

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon,$$

从而  $\forall x_1 > x_2$ , 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \left| \int_{x_1}^{x_1+\alpha} f(t) dt - \int_{x_2}^{x_2+\alpha} f(t) dt - \left( \int_{x_1}^{x_1+\alpha} g(t) dx - \int_{x_2}^{x_2+\alpha} g(t) dt \right) \right| \\ &= \frac{1}{\alpha} \left| \int_{x_1}^{x_1+\alpha} (f(t) - g(t)) dt - \int_{x_2}^{x_2+\alpha} (f(t) - g(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \left( \int_{x_1}^{x_1+\alpha} |g(t) - f(t)| dt + \int_{x_2}^{x_2+\alpha} |g(t) - f(t)| dt \right) \leq \frac{2}{\alpha} \varepsilon. \end{aligned}$$

有  $\varepsilon$  的任意性可知原命题成立.  $\square$

4. 设  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ,  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  非负且恒不为零. 定义  $F = f * \varphi$ . 证明对于这样定义的函数  $F$ , 也具有第 3 题中所列的性质.

5. 若对任何  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  上的一元实函数  $f$  满足  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . 进一步,  $f$  在一个区间内有界. 证明: 存在常数  $c$  使得  $f(x) = cx (\forall x \in \mathbb{R})$ .

### 8.7B

1. 试利用 Weierstrass 第一逼近定理证明 Weierstrass 第二逼近定理.

证明.  $\square$

2. 试利用 Weierstrass 第二逼近定理证明 Weierstrass 第一逼近定理.

证明.  $\square$

3. 将习题 8.7A 中的第 2 题推广到高维情形: 设  $D \subset \mathbb{R}^n$  为有界区域. 对于  $\delta > 0$ , 取区域  $\Omega$  使得  $D \subset \subset \Omega$ ,  $\inf_{x \in D, y \in \partial \Omega} |x - y| \geq \delta$ . 证明: 存在  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , 满足  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi|_D \equiv 1$  以及  $|\nabla \varphi| \leq \frac{M}{\delta}$ , 其中  $M$  是与  $\delta$  无关的一个常数.

4. 设  $\mathbb{R}$  上可测实函数  $f$  满足  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . 证明: 存在常数  $c$  使得  $f(x) = cx (\forall x \in \mathbb{R})$ .

提示: 存在闭集  $E \subset [0, 1]$ , 使得  $|E| > \frac{3}{4}$  且  $f$  限制在  $E$  上连续. 证明:  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \subset E - E$ .

5. 设  $\mathbb{R}$  上可测实函数  $f$  中点凸. 证明:  $f$  是凸函数.

6. 在 Weierstrass 逼近定理的证明中, 一个重要的思想是利用 Bernstein(伯恩斯坦) 多项式, 设  $f$  是  $[0, 1]$  上的函数, 其 Bernstein 多项式定义为

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1].$$

试证明:

(1) 对任何  $x \in [0, 1]$ , 有  $\sum_{k=0}^n C_n^k (k - nx)^2 x^k (1 - x)^{n-k} = nx(1 - x)$ .

(2) 设  $f \in C[0, 1]$ , 证明:  $\{B_n(f; x)\}$  在  $[0, 1]$  上一致收敛到  $f(x)$ .

7. 设  $T: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  是线性算子, 若对任何非负的  $f \in [a, b]$ , 都有  $Tf$  非负, 则称  $T$  是正线性算子. 试证明如下的 **Korovkin**(科罗夫金) 定理: 设  $\{T_n\}$  是  $C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  的一列正线性算子, 若对于  $f(x) = 1, x, x^2, \{T_n f\}$  均在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f$ , 则对任何  $f \in C[a, b]$ ,  $\{T_n f\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f$ .

8. 验证第 5 题给出的  $B_n$  是  $C[0, 1]$  到  $C[0, 1]$  的正线性算子, 且对于  $f(x) = 1, x, x^2, \{T_n f\}$  均在  $[0, 1]$  上一致收敛于  $f$ .

## 8.8 光滑逼近的应用

### Theorem 8.8.1

设  $q, r$  为对偶数, 函数  $g$  以  $T > 0$  为周期,  $g|_{[0, T]} \in L^r[0, T], f \in L^q[a, b]$ , 则

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) g(px) dx = \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \int_a^b f(x) dx.$$

### Theorem 8.8.2

设  $f$  在  $[0, 1]$  上 Riemann 可积,  $s$  是无理数, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\{ks\}) = \int_0^1 f(x) dx.$$

### 8.8A

1. 计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^2 |\sin nx|}{1 + x^2} dx$ .

解. 由定理 8.8.1, 立即可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^2 |\sin nx|}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2} dx = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

2. 设  $[0, +\infty)$  上的非负连续函数  $f$  单调递减,  $F(x) = \int_0^x (x - 2t)f(t) dt (\forall x \geq 0)$ , 证明  $F$  是  $[0, +\infty)$  上的凸函数.

证明. 我们只需证明  $F'(x) = \int_0^x f(t) dt - xf(x)$  单增, 任取  $0 < x_1 < x_2$ , 则  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , 又

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_0^{x_2} f(t) dt - x_2 f(x_2) - \int_0^{x_1} f(t) dt + x_1 f(x_1) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt + x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2) \\ &\geq (x_2 - x_1)f(x_2) + x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2) = x_1 (f(x_1) - f(x_2)) \geq 0. \end{aligned}$$

从而  $F$  为凸函数.  $\square$

3. 设  $g$  为  $[a, b]$  上的单调函数, 证明存在  $[a, b]$  上连续可导的单调函数列  $\{g_n\}$  使得  $g_n(a) = g(a), g_n(b) = g(b), \max_{x \in [a, b]} |g_n(x)| \leq M_g = \max_{x \in [a, b]} |g(x)|$  以及  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b |g_n(x) - g(x)| dx = 0$ .

证明.  $\square$

4. 将定理 8.8.1 推广到多维情形. 设  $p, q$  为对偶数,  $E \in \mathbb{R}^n$  为有界可测集,  $f \in L^p(E)$ .  $Q$  为矩形  $[0, a_1] \times [0, a_2] \times \cdots \times [0, a_n]$ , 函数  $g$  以  $Q$  为周期, 即对任何  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  以及  $1 \leq k \leq n$  成立  $g(\mathbf{x} + a_k \mathbf{e}_k) = g(\mathbf{x})$ . 证明: 若  $g|_Q \in L^q(Q)$ , 则

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_E f(\mathbf{x}) g(p\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{|Q|} \int_E g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

5. 设  $f \in C(a, b)$ , 证明:

- (1) 若对任何  $a < x_1 < x_2 < b$ , 成立  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ , 则  $f$  为凸函数.
- (2) 若对任何  $a < x_1 < x_2 < b$ , 成立  $\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ , 则  $f$  为凸函数.

证明. (1) 我们分两步证明:

(i) 设  $f$  有连续的二阶导数. 固定  $x$  并令  $\delta > 0$  充分小. 则由题设,

$$f(x) \leq \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) dt,$$

即

$$0 \leq \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} (f(t+x) - f(x)) dt.$$

于是

$$0 \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{3}{\delta^3} \int_{-\delta}^{\delta} (f(t+x) - f(x)) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{f(\delta+x) + f(x-\delta) - 2f(x)}{\delta^2} = f''(x).$$

因此  $f$  是区间  $(a, b)$  内的凸函数.

(ii) 任取  $\delta \in \left(0, \frac{b-a}{4}\right)$ . 令  $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ ,

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_x^{x+\varepsilon} dt \int_t^{t+\varepsilon} f(s) ds, \quad \forall x \in (a+\delta, b-\delta).$$

则  $f_\varepsilon$  有连续的二阶导数, 且易见对任何  $a + \delta < x_1 < x_2 < b - \delta$  成立

$$f_\varepsilon\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f_\varepsilon(x) dx.$$

所以由 (i) 的结论,  $f_\varepsilon$  是  $(a + \delta, a - \delta)$  内的凸函数. 即

$$f_\varepsilon(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f_\varepsilon(x) + \beta f_\varepsilon(y), \quad \forall x, y \in (a + \delta, b - \delta); \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1.$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 注意到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(x) = f(x),$$

即得

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall x, y \in (a + \delta, b - \delta); \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1.$$

由  $\delta$  的任意性, 即得  $f$  是  $(a, b)$  内的凸函数.

(2) 类似于 (1), 我们不妨假设  $f$  有连续的二阶导数. 此时, 固定  $x$  并令  $\delta > 0$  充分小, 则由题设,

$$\frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} f(t) dt \leq \frac{f(x + \delta) + f(x)}{2},$$

即

$$0 \leq \delta f(x + \delta) + \delta f(x) - 2 \int_x^{x+\delta} f(t) dt.$$

于是

$$0 \leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\delta f(x + \delta) + \delta f(x) - 2 \int_x^{x+\delta} f(t) dt}{\delta^3/6} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\delta f'(x + \delta) + f(x) - f(x + \delta)}{\delta^2/2} = f''(x),$$

因此  $f$  是凸函数. □

6. 设  $f \in C[0, 1]$ , 且对任何  $n \geq 0$ , 成立  $\int_0^1 f(x) x^{2n} dx = 0$ . 证明  $f \equiv 0$ .

7. 设  $f \in L^1[a, b]$ ,  $N \geq 0$ , 且对任何  $n \geq N$ , 成立  $\int_a^b f(x) x^n dx = 0$ . 证明:  $f$  在  $[a, b]$  上几乎处处等于零.

证明. □

8. 设  $f \in L^1[a, b]$ , 且对  $n = 1, 2, \dots$  成立  $\int_0^\pi f(x) \cos nx dx = 0$ . 证明:  $f$  在  $[0, \pi]$  上几乎处处等于某个函数.

9. 对于  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  及  $k \in \mathbb{N}$ , 记  $M_k(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} t^k \varphi(t) dt$ . 设  $\eta \in C_c^\infty$  满足  $M_0(\eta) = 1$ . 证明:

(1)  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  是某个  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  的导函数的充要条件是  $M_0(\varphi) = 0$ .

(2) 对任何  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\varphi - M_0(\varphi)\eta$  是某个  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  的导函数.

(3)  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  是某个  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  的二阶导数的充要条件是  $M_0(\varphi) = M_1(\varphi) = 0$ .

(4) 对任何  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\varphi - M_0(\varphi)\eta + (M_1(\varphi) - M_0(\varphi)M_1(\eta))\eta'$  是某个  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  的二阶导数.



10. 设  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ,  $g \in C(\mathbb{R})$ , 且对任何  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  成立

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi''(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x) dx.$$

证明:  $f$  几乎处处等于某个二阶连续可微的函数  $G$ , 其中  $G'' = g$ .

### 8.8B

1. 设  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  两两不同,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \alpha_k e^{ix\lambda_k} = 0$ . 试用多种方法证明:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ .

2. 设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 证明: 对任何  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , 方程  $x'(t) = Ax(t)$  满足初值  $x(0) = x_0$  的解  $x(\cdot; x_0)$  均满足  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0) = 0$  的充要条件是  $A$  的特征值具有负实部.

3. 对于  $k \geq 2$ , 仿习题 8.8A 第 9 题给出  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  是某个  $\psi \in C_c^\infty$  的  $k$  阶导数的充要条件, 并计算  $c_0, c_1, \dots, c_k$  使得  $\varphi - \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} c_j \eta^{(j)}$  是某个  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  的  $k$  阶导数, 其中  $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  满足  $\int_{\mathbb{R}} \eta(t) dt = 1$ .

4. 设  $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ,  $k \geq 1$ , 且对任何  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , 成立

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi^{(k)}(x) dx = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x) dx.$$

试仿习题 8.8A 第 4 题和第 10 题给出  $f$  与  $g$  的关系并给出证明.

5. 推广定理 8.8.2: 设  $f$  在  $[0, 1]^m$  上 Riemann 可积, 又对任何不全为零的整数  $n_1, n_2, \dots, n_m$ ,  $\sum_{k=1}^m n_k s_k$  均为无理数, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\{ks_1\}, \{ks_2\}, \dots, \{ks_n\}) = \int_{[0,1]^n} f(x) dx.$$

6. 证明: 在第一题中, 将条件  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \alpha_k e^{ix\lambda_k} = 0$  减弱为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \alpha_k e^{ix\lambda_k} = 0$ , 结论仍然成立.

7. 试进一步减弱第 1 题或它的一些特例的条件.

## 8.9 附录

### 8.9A

1. (1) 试构造  $\mathbb{R}$  上严格单增的  $C^\infty$  函数  $f$ , 使得  $E = \{f' = 0\}$  具有正测度.

(2) 证明:  $f(E)$  是闭零测度集.

(3) 令  $F = \mathbb{R} \setminus f(E)$ ,  $g = \chi_F$ . 证明:  $g$  在  $\mathbb{R}$  上局部 Riemann 可积, 当有界闭区间  $[a, b]$  与  $E$  的交集测度非零时,  $g \circ f$  在  $[a, b]$  上不是 Riemann 可积的.

**8.9B**

1. 设  $f$  是有界闭区间  $[a, b]$  上的连续可微函数,  $\{f' = 0\}$  是零测度集,  $f([a, b]) = [c, d]$ . 证明: 对于  $[c, d]$  上的 Riemann 可积函数  $g$ , 复合函数  $g \circ f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积.

证明.

□

## 第 9 章 函数列与函数项级数

### 9.1 函数列与函数项级数的一致收敛及其性质

#### 9.1 A

1. 利用有限覆盖定理证明 Dini 定理.

证明. 由于  $f_n(x) \rightarrow f(x) (n \rightarrow +\infty)$ , 则对于  $\forall \varepsilon > 0, x_0 \in [a, b], \exists N_{(x_0)} \in \mathbb{N}$  使得

$$|f_{N_{(x_0)}}(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon,$$

则

$$|f_{N_{x_0}}(x) - f(x)| \leq |f_{N_{x_0}}(x) - f(x)| + |f_{N_{x_0}}(x) - f_{N_{x_0}}(x_0)| + |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

又因为对于固定的  $x_0 \in [a, b]$ , 当  $n > N_{x_0}$  时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_{N_{x_0}}(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

取区间  $[a, b]$  的一个开覆盖

$$H = \{U(x_i, \delta_{x_i}) | x_i \in [a, b], i \in \Lambda\},$$

其中  $\delta_{x_i}$  满足  $\exists N_{x_i}$ , 当  $n > N_{x_i}, x \in U(x_i, \delta_{x_i})$  时有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

利用有限覆盖定理选取有限覆盖即证结论. □

2. 试考察本节例题中那些函数列 (函数项级数) 的一致收敛性可用 Dini 定理解决.

3. 设函数  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , 而且  $\forall x \in \mathbb{R}, n \geq 1$ , 有  $|f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)| < \frac{1}{n^2}$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = Ce^x$ , 其中  $C$  为一常数.

证明. 由题设可知对于任意  $x \in \mathbb{R}$  有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

从而  $\sum_{n=1}^{\infty} |f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)|$  收敛. 于是  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$  使得

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} |f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)| \right| < \varepsilon,$$

任取  $k > j > N$ , 则有

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x) - f^{(j)}(x)| &= |f^{(k)}(x) - f^{(k-1)}(x) + f^{(k-1)}(x) - \cdots + f^{(j+1)}(x) - f^{(j)}(x)| \\ &\leq |f^{(k)}(x) - f^{(k-1)}(x)| + |f^{(k-1)}(x) - f^{(k-2)}(x)| + \cdots + |f^{(j+1)}(x) - f^{(j)}(x)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

从而  $\{f^{(n)}(x)\}$  一致收敛, 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = F(x)$ , 则有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{(n+1)}(x) = F'(x)$ , 从而  $F(x) = F'(x)$ , 容易解得  $F(x) = Ce^x$ .  $\square$

4. 计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1^2}{n^3}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^3}\right)$ .

解. 取对数. 注意到  $-\frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) - x < 0 (\forall x \in (0, 1))$ , 所以

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k^4}{n^6} < \sum_{k=1}^n \left[ \ln \left(1 + \frac{k^2}{n^3}\right) - \frac{k^2}{n^3} \right] < 0,$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^4}{n^6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{k^4}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^4 dx = 0.$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k^2}{n^3}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{3}$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1^2}{n^3}\right) \left(1 + \frac{2^2}{n^3}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^3}\right) = e^{1/3}. \quad \blacksquare$$

还有另一种行之有效的方法, 使用不等式

$$\frac{k}{n+k} < \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right) < \frac{k}{n},$$

我们有

$$\frac{k}{n^3+k} < \ln \left(1 + \frac{k}{n^3}\right) < \frac{k}{n^3},$$

于是

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+n^2} < \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+k^2} < \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k^2}{n^3}\right) < \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3},$$

而  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , 代入即得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k^2}{n^3}\right) = \frac{1}{3}$ .

5. 设  $\{g_n\}$  是  $[a, b]$  上一致有界的可测函数列,  $f_n(x) = \alpha_n + \int_a^x g_n(t) dt (x \in [a, b]; n \geq 1)$ ,  $\{\alpha_n\}$  收敛. 进一步, 以下条件之一成立:

(i)  $\{g_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛到  $g$ , 且对每个  $n \geq 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} \int_a^x g_n(x) dt = g_n(a)$ .

(ii)  $g_n$  在  $[a, b]$  上几乎处处收敛到  $g$ , 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} \int_a^x g(t) dt = g(a)$ .

证明:  $\{f_n\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛到某个函数  $f$ , 且  $f$  在点  $a$  的右导数等于  $g(a)$ .

证明.  $\square$

### 9.1 B

1. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\cdot)$  在  $[a, b]$  上收敛. 若对任何  $\varepsilon > 0$  及  $N \geq 1$ , 存在区间  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$

以及  $n_1, n_2, \dots, n_k \geq N$  使得  $\bigcup_{j=1}^k (a_j, b_j) \supset [a, b]$ , 且

$$\left| \sum_{l=n_j}^{\infty} u_l(x) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in (a_j, b_j) \cap [a, b]; j = 1, 2, \dots, k,$$

则称  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\cdot)$  在  $[a, b]$  上拟一致收敛.

证明: 若  $u_n$  都在  $[a, b]$  上连续 ( $n \geq 0$ ), 则  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  在  $[a, b]$  上连续当且仅当它在  $[a, b]$  上拟一致收敛.

证明. □

2. 试将上一题的结果推广到  $\mathbb{R}^n$  中.

3. 设  $\{f_k\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的实连续函数列, 它在  $\mathbb{R}^n$  上逐点收敛于  $f$ . 试证明以下结论:

(i)  $F = \bigcup_{\substack{p < q \\ p, q \in \mathbb{Q}}} [f^{-1}(p, q) \setminus (f^{-1}(p, q))^{\circ}]$  是  $f$  上不连续点全体.

(ii) 对于  $p < q$ ,

$$\begin{aligned} f^{-1}((p, q)) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists m, k \geq 1, \text{ s.t. } p + \frac{1}{m} \leq f_j(x) \leq q - \frac{1}{m}, \forall j \geq k \right\} \\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid p + \frac{1}{m} \leq f_j(x) \leq q - \frac{1}{m} \right\}. \end{aligned}$$

(iii) 集合  $F$  是一列无处稠密集的并.

(iv) 函数  $f$  一定有连续点.

4. 设  $f$  在区间  $(a, b)$  处处可导, 证明:  $f'$  必有连续点.

5. 设  $\{a_n\}$  是递增数列,  $a_1 > 1$ . 求证: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$  收敛的充要条件是  $\{a_n\}$  有界. 又问级数通项中的  $a_n$  能不能换成  $a_{n+1}$ ?

证明. 充分性. 若  $\{a_n\}$  有界, 设  $a_n \leq M$ , 则

$$\sum_{n=1}^m \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}} \leq \sum_{n=1}^m \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1 \ln a_1} = \frac{a_{m+1} - a_1}{a_1 \ln a_1} \leq \frac{M}{a_1 \ln a_1},$$

由此可知  $\sum_{n=1}^m \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$  收敛.

必要性. 若  $\sum_{n=1}^m \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$  收敛, 由于

$$\ln a_{n+1} - \ln a_n = \ln \left( 1 + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \right) \leq \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n},$$

所以  $\frac{b_{n+1} - b_n}{b_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ , 其中  $b_n = \ln a_n$ , 因此  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{b_{n+1}}$  收敛.

有 Cauchy 收敛准则, 存在自然数  $m$ , 使得对一切自然数  $p$ , 有

$$\frac{1}{2} > \sum_{n=m}^{m+p} \frac{b_{n+1} - b_n}{b_{n+1}} \geq \sum_{n=m}^{m+p} \frac{b_{n+1} - b_n}{b_{m+p+1}} = 1 - \frac{b_m}{b_{m+p+1}}.$$

由此可知  $\{b_n\}$  有界, 因为  $p$  是任意的, 所以  $\{a_n\}$  有界.

题中级数的分母  $a_n$  不能换成  $a_{n+1}$ . 如取  $a_n = e^{n^2}$  无界, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$  收敛.  $\square$

6. 对于二元函数  $f$ , 考虑以下各种情形中两种运算的次序交换问题. 利用已学的结果, 你可以给出那些情形的结果:

	关于 $y$ 的极限	关于 $y$ 的积分	关于 $y$ 的导数
关于 $x$ 的极限	$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) =$ $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^d f(x, y) dy =$ $\int_c^d \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) =$ $\frac{\partial}{\partial y} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$
关于 $x$ 的积分		$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx =$ $\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$	$\int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx =$ $\frac{\partial}{\partial y} \int_a^b f(x, y) dx$
关于 $x$ 的导数			$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) =$ $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right)$

7. 设  $a_n > 0$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  收敛, 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$  收敛.

证明. 只需指出  $n = 2m (m \in \mathbb{N})$  时有  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k} \leq 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$  即可. 为此, 对  $n$  个数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  作重新排列为  $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ , 则对正整数  $p \geq 1$ , 我们有

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p} &\geq a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p-1} \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_{2p-1} \geq pb_p, \\ \frac{2p-1}{a_1 + \cdots + a_{2p-1}} &\leq \frac{2p-1}{pb_p} < \frac{2}{b_p}, \quad \frac{2p}{a_1 + \cdots + a_{2p}} \leq \frac{2}{b_p}, \\ \frac{2p-1}{a_1 + \cdots + a_{2p-1}} + \frac{2p}{a_1 + \cdots + a_{2p}} &< \frac{4}{b_p}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^N \left( \frac{2p-1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2p-1}} + \frac{2p}{a_1 + \cdots + a_{2p}} \right) &< \sum_{p=1}^N \frac{4}{b_p}, \\ \sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} &\leq \sum_{p=1}^n \frac{4}{b_p} = 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}. \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$  即证.  $\square$

8. 推广第 5 题. 比如考察单调增加趋于无穷的函数  $f$  以及  $\sum_{n=1}^{\infty} (f(S_n) - f(S_{n-1}))$ ; 又或者考察在  $(0, M)$  内单调下降且  $F(0^+) = +\infty$  的函数  $F$  以及  $\sum_{n=1}^{\infty} (F(S_n^{-1}) - F(S_{n-1}^{-1}))$ .

## 9.2 函数项级数一致收敛性的判别法

## Theorem 9.2.1

考虑  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  上的函数项级数  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\cdot)v_k(\cdot)$ . 设  $\{v_k(\cdot)\}$  在  $E$  上一致有界, 对每个  $x \in E$ , 数列  $\{v_k(x)\}$  单调.

(i) (Abel 判别法) 若  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\cdot)$  在  $E$  上一致收敛, 则  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\cdot)v_k(\cdot)$  在  $E$  上一致收敛.

(ii) (Dirichlet 判别法) 若  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\cdot)$  的部分和函数列  $\left\{ \sum_{j=1}^k u_j(\cdot) \right\}$  在  $E$  上一致有界,  $\{v_k(x)\}$  在  $E$  上一致收敛到零, 则  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\cdot)v_k(\cdot)$  在  $E$  上一致收敛.

## 9.2 A

1. 考察  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$  的连续性, 可微性.

解. 易见  $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ , 由 Weierstrass 判别法可知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$  在  $\mathbb{R}$  上一致收敛, 因而和函数在  $\mathbb{R}$  上连续.

考察级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$  形式求导后的级数  $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ , 对于  $x \in (0, 2\pi)$ , 有

$$\left| \sum_{n=1}^N \sin nx \right| = \left| \frac{\cos(x/2) - \cos(N+1/2)x}{2 \sin(x/2)} \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}, \quad x \neq 2k\pi,$$

由 Dirichlet 判别法易见  $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  关于  $x \in (0, 2\pi)$  内闭一致收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$  在  $(0, 2\pi)$  上连续可导.

记  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ ,  $S'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ . 下面考察  $S(x)$  在  $x = 2k\pi$  处得可微性, 只需讨论  $x = 0$  的情况即可. 由于

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{x - \pi}{2}, \quad 0 < x < 2\pi,$$

事实上, 由 Dirichlet 判别法可知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$  收敛, 于是由 Abel 定理,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx} t^n}{n} = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} e^{inx} dt = \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{ix} - t}{(t - \cos x)^2 + \sin^2 x} dt = -\ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right) + \frac{i(\pi - x)}{2}, \end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = -\ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right), \quad x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right),$$

则有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \pi}{2} = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} \frac{x - \pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

这意味着

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S'(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} S(x) = \frac{\pi}{2},$$

而由 Lagrange 中值定理有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{S(x) - S(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} S'(\xi), \quad (0 < \xi < x),$$

由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} S'(x) = -\frac{\pi}{2}$ , 从而  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{S(x) - S(0)}{x} = -\frac{\pi}{2}$ , 同理可知  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{S(x) - S(0)}{x} = \frac{\pi}{2}$ . 即  $S(x)$  在  $x = 0$  处单侧导数不等, 从而和函数在  $x = 2k\pi$  处不可微. ■

2. 求实数  $a$  的取值范围, 使得  $\sum_{n=20}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n^{ax} + (-1)^n x}$  关于  $x \in [1, +\infty)$  一致收敛.

解. 当  $a \leq 0$  时, 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n x}{n^{ax} + (-1)^n x} \neq 0$ , 从而  $a > 0$ .

考虑级数  $\sum_{n=20}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n^{ax}}$ , 由 Dirichlet 判别法可知其在题设范围内一致收敛. 于是

$$\frac{(-1)^n x}{n^{ax}} - \frac{(-1)^n x}{n^{ax} + (-1)^n x} = \frac{x}{n^{ax} (n^{ax} + (-1)^n x)} \sim \frac{x}{n^{2ax}},$$

由此知  $a > \frac{1}{2}$  时原级数关于  $x \in [1, +\infty)$  一致收敛. ■

3. 求实数  $a$  的取值范围, 使得函数项级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{ax} + \sin nx}$  关于  $x \in [\pi, +\infty)$  一致收敛.

解. 当  $a \leq 0$  时, 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin nx}{n^{ax} + \sin nx} \neq 0$ , 从而  $a > 0$ . ■

4. 证明定理 9.2.1, 即 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法.

证明. 我们先证明这样一件事: 设  $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$  或  $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ , 记  $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$ , 如果

$$|A_k| \leq M (k = 1, 2, \cdots, n), \text{ 那么 } \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq M(|b_1| + 2|b_n|).$$

由 Abel 变换, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| &= \left| A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k) \right| \leq |A_n| |b_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |A_k| |b_{k+1} - b_k| \\ &\leq M \left( \sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| + |b_n| \right) = M(|b_1 - b_n| + |b_n|) \leq M(|b_1| + 2|b_n|). \end{aligned}$$

这正是 Abel 引理.



Abel 判别法. 设对任意  $x \in E$  与  $n \in \mathbb{N}_+$  有  $|v_n(x)| \leq M$ . 因为  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$  在  $E$  上一致收敛, 所以  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N$  使得  $n > N$  时有  $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3M}$  对任意  $x \in E$  与  $p \in \mathbb{N}_+$  成立, 于是由 Abel 引理, 即得

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3M} (|v_{n+1}(x)| + 2|v_{n+p}(x)|) < \varepsilon,$$

因而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_k(x) v_k(x)$  在  $E$  上一致收敛.

Dirichlet 判别法. 设对任意  $x \in E$  与  $n \in \mathbb{N}_+$  有  $\left| \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| \leq M$ . 则对  $n+1 \leq m \leq n+p$ , 有

$$\left| \sum_{k=n+1}^m u_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^m u_k(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^m u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| \leq 2M,$$

另外, 由于  $\{v_k(x)\}$  在  $E$  上一致收敛到零, 则对任意  $\varepsilon$ , 有  $N$  使  $n > N$  时有  $|v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6M}$ , 于是结合 Abel 引理有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \leq 2M (|v_{n+1}(x)| + 2|v_{n+p}(x)|) < \varepsilon,$$

因而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_k(x) v_k(x)$  在  $E$  上一致收敛. □

5. 设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{2^n}$ . 证明: 对任意  $j, k \in \mathbb{Z}$ ,  $S$  在点  $\frac{j}{2^k}$  不可导.

证明. 易见  $S(x)$  的一般项  $\frac{\sin 2^n x}{2^n}$  都是可导的, 对于任意  $k \in \mathbb{Z}$ , 置  $x = \frac{t}{2^k}$ , 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n-k} t}{2^n} = \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n-k} t}{2^{n-k}} = \frac{1}{2^k} \left( \sum_{n=1}^k \frac{\sin 2^{n-k} t}{2^{n-k}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n t}{2^n} \right),$$

这意味着, 我们只需证  $S(x)$  在点  $j$  处不可导.

记  $u_k(x) = \frac{\sin 2^k x}{2^k}$ , 取序列  $j_n = j + \frac{\pi}{2^n}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} j_n = j$ . 若

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S(j_n) - S(j)}{j_n - j}$$

不存在, 则  $S(x)$  在  $j$  处不可导, 注意到  $u_k(x)$  以  $\frac{\pi}{2^{k-1}}$  为周期, 于是有

$$u_k(j_n) = \frac{\sin(2^k j + 2^{k-n} \pi)}{2^k} = u_k(j), \quad k = n+1, n+2, \dots,$$

则

$$\frac{u_k(j_n) - u_k(j)}{j_n - j} = \begin{cases} \frac{\sin(2^k j + 2^{k-n} \pi) - \sin 2^k j}{2^{k-n} \pi}, & k = 1, 2, \dots, n \\ 0, & k = n+1, n+2, \dots \end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}\frac{S(j_n) - S(j)}{j_n - j} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(j_n) - u_k(j)}{j_n - j} = \sum_{k=1}^n \frac{u_k(j_n) - u_k(j)}{j_n - j} \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{n-k} \pi (\sin(2^k j + 2^{k-n} \pi) - \sin 2^k j) \\ &= \sum_{k=1}^n \pi^2 \cos(2^k j + \xi_k), \quad \xi_k \in (0, 2^{k-n} \pi) \subset (0, \pi),\end{aligned}$$

下证  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \cos(2^k j + \xi_k) \neq 0$ . 否则对于充分大的  $k$ , 存在  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$  以及任意小的  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  使得

$$2^k j + \xi_k = k_1 \pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1, \quad 2^{k-1} j + \xi_{k-1} = k_2 \pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2,$$

二倍右式减去左式得

$$2\xi_{k-1} - \xi_k = (2k_2 - k_1)\pi + \frac{\pi}{2} + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_1,$$

进一步有

$$\frac{2\xi_{k-1} - \xi_k - \pi/2}{\pi} = 2k_2 - k_1 + \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\pi},$$

注意  $\frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\pi}$  可以任意小, 而

$$-\frac{3}{2} - \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\pi} < \frac{2\xi_{k-1} - \xi_k - \pi/2}{\pi} < \frac{3}{2} - \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\pi},$$

这意味着  $2k_2 - k_1$  只能取  $-1, 0, 1$  这三个值, □

### 9.2B

1. 设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}} e^{-nx}$ , 求  $S$  的定义域并讨论其连续性, 可微性.

解. 我们先证明这样一个命题, 事实证明, 该命题对于今后证明某函数项级数非一致收敛是十分方便的:

只要  $x \geq \delta > 0$ , 结合

$$e^{nx} \geq 1 + nx + \frac{1}{2}(nx)^2 \geq \frac{(nx)^2}{2} \Rightarrow e^{-nx} \leq \frac{2}{(nx)^2},$$

有

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}} e^{-nx} \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2}{n^2 x^2} = \frac{2}{n^{5/2} x^{3/2}} \leq \frac{2}{n^{5/2} \delta^{3/2}},$$

由 Weierstrass 判别法可知  $S(x)$  在  $[\delta, +\infty)$  上一致收敛.

另一方面, 记  $u_n = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}} e^{-nx}$ , 取  $x_n = \frac{1}{n}$ , 则  $u_n(x_n) = \frac{1}{en}$ , 易见  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_n)$  发散, 从而  $S(x)$  在  $(0, \delta)$  上不一致收敛. ■

2. 设  $x = -a_n$  是方程  $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = 0$  的实数解,  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^p e^{-a_n x}$ , 其中  $p \in \mathbb{R}$  为常数, 证明:

(1) 存在正常数  $C_1, C_2$  使得  $C_1 n \leq a_n \leq C_2 n (n = 1, 2, \dots)$ ;

(2)  $f$  在  $(0, +\infty)$  内连续.

证明. (1) 原方程有且仅有一实根  $x_n$  (可见 6.3 B 第 9 题), 且  $x_n < 0$ , 否则  $x_n \geq 0$ , 此时

$$1 + x_n + \frac{x_n^2}{2!} + \frac{x_n^3}{3!} + \cdots + \frac{x_n^{2n-1}}{(2n-1)!} > 0$$

由于  $a_n = -x_n$ , 故  $a_n > 0$ . 由 Taylor 公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{e^\xi x^{2n}}{(2n)!}, \quad \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间},$$

将  $x = -a_n$  代入上式, 得到

$$e^{-a_n} = \frac{e^\xi a_n^{2n}}{(2n)!}, \quad \xi \in (-a_n, 0)$$

注意到  $\frac{e^{-a_n} a_n^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{e^\xi a_n^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{a_n^{2n}}{(2n)!}$ , 于是

$$\frac{e^{-a_n} a_n^{2n}}{(2n)!} \leq e^{-a_n} \Rightarrow a_n \leq \sqrt[2n]{(2n)!},$$

下面我们证明一个有用的不等式

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

由  $\sqrt{k(n-k)} \leq \frac{n}{2}$ , 则  $\frac{1}{2}(\ln k + \ln(n-k)) \leq \ln \frac{n}{2}$ , 从而

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k \leq (n-1) \ln \frac{n}{2} \Rightarrow (n-1)! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

即有  $\frac{n}{2} \cdot (n-1)! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$ , 于是  $n! \leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n < e \left(\frac{n}{2}\right)^n$ . 另外, 令  $x_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , 于是有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}e} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}{e} < n,$$

并且  $x_1 = \frac{1}{e} < 1$ , 于是  $x_n = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}} < n!$ , 即得  $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$ .

利用上述不等式, 有

$$a_n \leq \sqrt[2n]{(2n)!} < \sqrt[2n]{e \left(\frac{2n}{2}\right)^{2n}} = \sqrt[2n]{e} \cdot n < \sqrt{e} \cdot n,$$

另一方面,

$$e^{-a_n} \leq \frac{a_n^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow a_n \geq \sqrt[2n]{e^{-a_n}(2n)!} > \sqrt[2n]{e^{-\sqrt{e}n}} \cdot \frac{2n}{e} = 2e^{-\sqrt{e}/2-1}n,$$

即得  $2e^{-\sqrt{e}/2-1}n \leq a_n \leq \sqrt{e} \cdot n$ .

(2)  $\{a_n\}$  为正并且严格单调递增. □

设  $u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$  是定义在区间  $I$  上的函数, 且满足下列条件之一, 则函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $I$  上不一致收敛.

(1) 存在数列  $\{x_n\} \subset I$ , 使得  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_n)$  发散.

(2)  $\forall x \in I$ , 有  $u_n(x) > 0 (n = 1, 2, \dots)$ , 且存在数列  $\{x_n\} \subset I$  使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\lambda u_n(x_n) > 0, \quad \lambda \leq 1.$$

(3)  $u_n(x) = \frac{a_n(x)}{b_n(x)} (x \in I, n = 1, 2, \dots)$ , 对于每个  $x \in I$ ,  $a_n(x)$  与  $b_n(x)$  均为关于  $n$  的单调增加的正值函数, 且存在数列  $\{x_n\} \subset I$  使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n(x_n)}{b_{2n}(x_n)} > 0.$$

证明.

□

### 9.3 幂级数与函数的幂级数展开

#### 9.3 A

1. 举例说明存在幂级数使得其收敛域分别为

$$\{0\}, \quad (-1, 1), \quad [-1, 1), \quad (-1, 1], \quad [-1, 1], \quad (-\infty, +\infty).$$

解. 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$  仅在  $x = 0$  处收敛, 因为除此之外的任何  $x$  都使级数的一般项不趋于零.

容易验证其他题设的收敛域可以对应以下级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2. 考虑收敛半径为 1 的幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . 举例或说明:

(1) 是否存在例子使得  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  及其形式求导后的级数在  $[-1, 1]$  上收敛?

(2) 是否存在例子使得  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $[-1, 1]$  上收敛, 而其形式求导后的级数的收敛域是  $(-1, 1]$ ?

(3) 当  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛域是  $(-1, 1]$  时, 使得级数形式求导  $k$  次后的级数的收敛域依然为  $(-1, 1]$ , 这样的  $k$  可以用多大?

解. (1) 易见级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$  的收敛半径为 1, 形式求导后得到  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2}$  其收敛域为  $[-1, 1]$ .

(2)

(3)

3. 试将以下函数展开成 Maclaurin 级数, 并求其收敛域:

$$(1) \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 3x + 2}; \quad (2) \frac{x}{x^2 + 2x + 2};$$

$$(3) \frac{1}{x^4 + 4x^2 + 4}; \quad (4) e^x \cos x;$$

$$(5) \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt; \quad (6) \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

解. (1) 由

$$\frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 3x + 2} = 1 + \frac{3}{1+x} - \frac{4}{2+x} = 1 + 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

级数的收敛域为  $(-1, 1)$ .

(2) 由

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 + 2x + 2} &= \frac{x}{(x+1+i)(x+1-i)} = \frac{ix}{2} \left( \frac{1}{x+1+i} - \frac{1}{x+1-i} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i}{2} \left( \left( \frac{1}{1+i} \right)^{n+1} - \left( \frac{1}{1-i} \right)^{n+1} \right) x^n \end{aligned}$$

■

4. 试给出  $\arctan x$  在点 1 处的 Taylor 展开式及其收敛域.

解. 由于  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ , 于是

$$\arctan x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1},$$

■

5. 设  $f$  的 Maclaurin 展开式在点  $x=1$  处绝对收敛, 证明  $f^2$  的 Maclaurin 展开式在点  $x=-1$  处绝对收敛.

证明. 记  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 有  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$ , 则

$$f^2(x)|_{x=-1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \right)^2 \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \right)^2 < +\infty. \quad \square$$

6. 证明: 对任何  $n \geq 1$ ,  $(1-x)^n e^{1/(1-x)}$  的 Maclaurin 展开式的收敛半径为 1, 但在点  $x=1$  处发散.

证明. □

7. 考虑  $\frac{1}{1-x}$  的 Maclaurin 展开式的余项, 可得

$$\int_0^x \frac{(n+1)(x-t)^n}{(1-t)^{n+2}} dt = \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad x \in [0, 1).$$

试利用上式估计  $(1+x)^\alpha$  的  $n$  阶 Maclaurin 展开式的余项

$$r_n(x) = \int_0^x (n+1)(x-t)^n \binom{\alpha}{n+1} (1+t)^{\alpha-n-1} dt, \quad x \in (-1, 1).$$

进而, 证明  $(1+x)^\alpha$  在  $(-1, 1)$  可展开成 Maclaurin 级数.

8. 设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径大于 1, 其和函数为  $f$ , 满足  $\min_{x \in [-1, 1]} |f(x)| \geq 1$ . 设  $g = \frac{1}{f}$ . 依次证明:

(1) 存在常数  $C > 0$  使得

$$\left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right| \leq \frac{C^n}{(1-|x|)^n}, \quad n \geq 0, |x| \leq 1.$$

(2) 记  $A = C + 1$ , 则

$$\left| \frac{g^{(n)}(x)}{n!} \right| \leq \frac{A^{n+1}}{(1-|x|)^n}, \quad n \geq 0, |x| \leq 1.$$

(3)  $g$  在点 0 处可以展开成幂级数.

证明.

□

9. 设  $R$  为正实数, 若  $f$  在  $(-R, R)$  内实解析, 其 Maclaurin 展开式的收敛半径是  $r \in (0, R]$ . 问: 在收敛域内,  $f$  的 Maclaurin 展开式是否等于  $f$ .

解.

■

### 9.3B

1. 举例说明存在收敛半径为 1 的幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 它任意次逐项求导后的级数均在点  $x = 1$  处收敛. 进一步, 证明: 此类级数也一定在点  $-1$  处收敛.

证明.

□

2. 举例说明存在收敛半径为 1 的幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 它任意次逐项积分后得到的级数均在点  $x = 1$  处发散. 进一步, 证明: 此类级数也一定在点  $-1$  处发散.

证明.

□

3. 设  $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 试考察  $\tan x$  在点  $x_0$  处的 Taylor 展开式的收敛半径.

解.

■

4. 对于 Riemann  $\zeta$  函数  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ . 证明:  $\zeta$  在  $(1, +\infty)$  上实解析.

5. 考察是否存在  $n \geq 1$ , 使得  $(1-x)^n \sin \frac{1}{1-x}$  的 Maclaurin 展开式在点  $x = 1$  处收敛.

6. 证明:  $(a, b)$  上的实解析函数是一个复区域  $D$  上的复解析函数在  $(a, b)$  上的限制.

7. 设  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  满足  $\text{supp } \varphi \subseteq [-2, 2]$  以及  $\varphi|_{[-1, 1]} = 1$ . 对于实数列  $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ , 定义

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \varphi(a_n x) x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明:  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , 且  $f^{(n)}(0) = a_n (\forall n \geq 0)$ . 此结果表明任何幂级数都是某个函数的 Taylor 展开式.

## 9.4 幂级数的应用

## 9.4A

1. 利用幂级数计算级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ .

解. 由于

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{8} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4} \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{8} \frac{1}{2n+3},$$

考虑幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x^4}{8} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^2}{4} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{1}{8} \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right),$$

设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ , 则  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2}$ , 由此可得

$$S(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = S(x) - x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+3}}{2n+3} = S(x) - x - \frac{x^3}{3},$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^4}{8} S(x) - \frac{x^2}{4} (S(x) - x) + \frac{1}{8} \left( S(x) - x - \frac{x^3}{3} \right) = \frac{1}{12}. \quad \blacksquare$$

2. 计算  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$ .

解. 由于  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}$ , 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi + \ln(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}. \quad \blacksquare$$

3. 计算  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

解. 在 2.7B 第 5 题中, 我们得到了

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right),$$

即有  $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$ , 注意到

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{6} + \frac{\pi^4 x^4}{120} - o(x^5), \quad x \rightarrow 0,$$

而根据根与系数的关系, 对右侧的无穷乘积有

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right) = 1 - x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + x^4 \sum_{i \neq j} \frac{1}{i^2 \cdot j^2} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0,$$

于是有  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ,  $\sum_{i \neq j} \frac{1}{i^2 \cdot j^2} = \frac{\pi^4}{120}$ , 而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^2 - 2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{i^2 \cdot j^2} = \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4}{60} = \frac{\pi^4}{90}. \quad \blacksquare$$

4. 计算  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)H_n}{2^n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{2^n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{2^n(n+1)}$ , 其中  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

解. 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k+1}{2^k},$$

而

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k+1}{2^k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{2^k} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} x^{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} x^{k+1} \right)' \Big|_{x=1/2} \\ &= \left( \frac{x^2}{1-x} - \frac{x^2(1-x^{n-1})}{1-x} \right)' \Big|_{x=1/2} = \frac{2+n}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k+1}{2^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{n2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \\ &= 2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/2} x^{n-1} dx = 2 + 4 \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} dx = 2 + 4 \ln 2. \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} \\ &= 2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/2} x^{n-1} dx \right) = 2 \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} dx = 2 \ln 2. \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{2^n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k(k+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k(k+1)} \right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x} dx - \int_0^{1/2} \frac{x-x^n}{1-x} dx \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx \\ &= 2 \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} \int_0^x \frac{1}{1-t} dt dx = 2 \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-x)}{x-1} dx = (\ln 2)^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5. 证明: 若级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  Cesàro 可和, 则  $\left\{ \frac{a_n}{n+1} \right\}$  有界.

证明. 记  $S_n = \sum_{k=1}^N a_k$ ,  $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k$ , 由题设  $\sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n$ . 由于

$$\frac{S_n}{n+1} = \frac{(n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}}{n+1} = \sigma_n - \frac{n}{n+1}\sigma_{n-1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$



于是

$$\frac{a_n}{n+1} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n+1} = \frac{S_n}{n+1} - \frac{n}{n+1} \frac{S_{n-1}}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

从而  $\left\{ \frac{a_n}{n+1} \right\}$  有界. □

6. 举例说明存在 Abel 可和但不 Cesàro 可和的级数.

解.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)$ . 容易验证该级数 Abel 可和, 但不 Cesàro 可和. ■

7. 证明:

$$\pi = \frac{1}{64} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1024^n} \left( -\frac{32}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \frac{256}{10n+1} - \frac{64}{10n+3} - \frac{4}{10n+5} - \frac{4}{10n+7} + \frac{1}{10n+9} \right).$$

证明. 我们将上式从左到右分拆成七个级数, 分别记为  $a_1, a_2, \dots, a_7$ .

我们先计算  $a_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 32}{1024^n (4n+1)}$ , 令

$$f(x) := 2^{5/2} \cdot 32 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{4n+1}}{4n+1}, \quad x \in (0, 1),$$

则  $f(2^{-5/2}) = a$ , 并且有  $f'(x) = -\frac{2^{5/2} \cdot 32}{1+x^4}$ , 即有

$$-2^{5/2} \cdot 32 \int_0^{2^{-5/2}} \frac{1}{1+x^2} dx = a,$$

同理可得

$$a_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1024^n (4n+3)} = \int_0^{2^{-5/2}} \frac{-(2^{5/2})^3 x^2}{1+x^4} dx,$$

以及

$$a_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+i_k} q_k}{1024^n (10n + (2k-5))} = (-1)^{i_k} 2^{2k-5} q_k \int_0^{1/2} \frac{x^{2k-6}}{1+x^{10}} dx, \quad k = 3, 4, 5, 6, 7,$$

上式中的  $i_k, q_k$  由题设公式给定. 则有  $64\pi = \sum_{k=1}^7 a_k$ . □

### 9.4B

1. 计算积分  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ .

解. 由  $\ln(1+x)$  的幂级数展开,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \dots,$$

有

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2},$$

我们有  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , 于是  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ . ■

2. 试讨论级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  在各种收敛情况下 (绝对收敛, 条件收敛, 发散), 它们的 Cauchy 乘积的收敛情况. 并给出证明或反例.

解. ■

3. (小  $o$  Tauber 定理) 设  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  的 Abel 和为  $A$ . 证明:

(1) 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$ , 则  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ .

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛当且仅当  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$ .

证明. (1) 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$ , 可设  $\delta_n = \sup_{k \geq n} \{ka_k\}$ , 则  $\{\delta_n\}$  单调递减趋于 0. 令

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (0 \leq x < 1).$$

对于任何正整数  $N$ , 都有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n - A &= \sum_{n=0}^N a_n - S(x) + S(x) - A = \sum_{n=1}^N a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + (S(x) - A) \\ &=: I_1(x) + I_2(x) + I_3(x), \end{aligned}$$

对  $x \in [0, 1)$ , 有

$$\begin{aligned} |I_1(x)| &\leq (1-x) \sum_{n=1}^N |a_n| (1+x+\cdots+x^{n-1}) \leq (1-x) \sum_{n=1}^N n|a_n| \leq (1-x)N\delta_1, \\ |I_2(x)| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |na_n| \frac{x^n}{n} \leq \frac{\delta_N}{N} \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n = \frac{\delta_N}{N} \frac{x^{N+1}}{1-x} \leq \frac{\delta_N}{N(1-x)}. \end{aligned}$$

令  $x_N = 1 - \frac{\sqrt{\delta_N}}{N}$ , 即  $N(1-x_N) = \sqrt{\delta_N}$ . 易见当  $N \rightarrow +\infty$ ,  $x_N \rightarrow 1$ . 可得

$$|I_1(x_N)| \leq \delta_1 \sqrt{\delta_N}, \quad |I_2(x_N)| \leq \frac{\delta_N}{\sqrt{\delta_N}} = \sqrt{\delta_N}, \quad I_3(x_N) = S(x_N) - A,$$

结合

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n - A \right| \leq |I_1(x_N)| + |I_2(x_N)| + |I_3(x_N)| \leq (\delta_1 + 1)\sqrt{\delta_N} + |S(x_N) - A|,$$

令  $N \rightarrow +\infty$  结论即证.

(2) 必要性. 记  $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ , 由题设  $\{A_n\}$  收敛到  $A$ . 由 Abel 变换得到

$$\sum_{k=1}^n ka_k = nA_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( nA_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \right),$$

由 Stolz 公式  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( nA_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \right) = A - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{(n+1) - n} = A - A = 0$ . 从而必要性成立.

充分性. 记  $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ka_k, b_0 = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ , 由于

$$na_n = nb_n - (n-1)b_{n-1} \Rightarrow a_n = b_n - b_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{n},$$

于是  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n}$ , 由  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{b_{n-1}}{n} = 0$  结合 (1) 可知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.  $\square$

**4. Hardy-Littlewood(哈代-利特尔伍德) 定理:** 设  $S_n \geq 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = A$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n S_k = A.$$

请按以下步骤证明该定理.

(1) 当  $f$  为多项式时, 成立

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n f(x^n) = A \int_0^1 f(x) dx. \quad (\clubsuit)$$

(2) 对任何  $f \in C[0, 1]$ ,  $(\clubsuit)$  式成立.

(3) 对任何分段常值函数,  $(\clubsuit)$  式成立.

(4) 取  $f(x) = \frac{1}{x} \chi_{[1/e, 1]}(x), x_n = 1 - \frac{1}{n}$ , 证明  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n S_k = (1-x_n) \sum_{n=1}^{\infty} S_k x_n^k f(x_n^k)$  并结束定理的证明.

证明. 不妨设  $A = 1$ .

(1) 对于任何  $k \in \mathbb{N}_+$ , 由于  $1 - x^{k+1} = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^k)$ , 我们有

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^{k+1}) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n x^{n(k+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = 1,$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n x^{nk} = \frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k dx,$$

由此对于任何多项式  $f(x)$ , 成立  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n f(x^n) = \int_0^1 f(x) dx$ .

(2) 现任取  $f \in C[0, 1]$ , 则有多项式  $P_k$  使得

$$\varepsilon_k \equiv \max_{x \in [0, 1]} |P_k(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty,$$

则对于  $x \in (0, 1)$ , 有

$$\begin{aligned} & \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n f(x^n) - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n |f(x^n) - P_k(x^n)| \\ & + \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n P_k(x^n) - \int_0^1 P_k(x) dx \right| + \int_0^1 |f(x) - P_k(x)| dx \\ & \leq \varepsilon_k (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n + \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n P_k(x^n) - \int_0^1 P_k(x) dx \right| + \varepsilon_k, \quad \forall k \geq 0, \end{aligned}$$

令  $x \rightarrow 1^-$  得到

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 1^-} \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n P_k(x^n) - \int_0^1 P_k(x) dx \right| \leq 2\varepsilon_k, \quad \forall k \geq 0.$$

在令  $k \rightarrow +\infty$  得到

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n f(x^n) = \int_0^1 f(x) dx.$$

(3) 现对分段常值函数证明上式. 任取  $0 < a < b < 1$ , 我们先证  $f = \chi_{[a,b]}$  的情况. 取  $\varepsilon \in \left(0, \min \left\{a, 1-b, \frac{b-a}{3}\right\}\right)$ . 做分段连续函数  $f^\varepsilon$  与  $f_\varepsilon$ , 使得  $f^\varepsilon$  在  $[0, a-\varepsilon]$  和  $[b+\varepsilon, 1]$  上的取值为 0, 在  $[a, b]$  上为 1, 在余下的区间  $[a-\varepsilon, a]$  和  $[b, b+\varepsilon]$  上用直线连接. 而  $f_\varepsilon$  在  $[0, a]$  与  $[b, 1]$  上为 0, 在  $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$  上为 1, 在余下的区间  $[a, a+\varepsilon]$  和  $[b-\varepsilon, b]$  上用直线连接.

$$f^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ \frac{x-a+\varepsilon}{\varepsilon}, & x \in [a-\varepsilon, a], \\ \frac{b+\varepsilon-x}{\varepsilon}, & x \in [b, b+\varepsilon], \\ 0, & x \in [0, a-\varepsilon] \cup [b+\varepsilon, 1], \end{cases} \quad f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon], \\ \frac{x-a}{\varepsilon}, & x \in [a, a+\varepsilon], \\ \frac{b-x}{\varepsilon}, & x \in [b-\varepsilon, b], \\ 0, & x \in [0, a] \cup [b, 1], \end{cases}$$

则  $f^\varepsilon, f_\varepsilon$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $\forall x \in (0, 1)$ ,

$$f_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq f^\varepsilon(x).$$

从而

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n f_\varepsilon(x^n) \leq (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n f(x^n) \leq (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n f^\varepsilon(x^n),$$

令  $x \rightarrow 1^-$  得到

$$\int_0^1 f_\varepsilon(x) dx \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n f(x^n) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n f^\varepsilon(x^n) \leq \int_0^1 f^\varepsilon(x) dx.$$

在令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  即得(♣)式对于  $f = \chi_{[a,b]}$  成立. 同理或者利用已证结果可以证明当  $f$  为  $\chi_{[0,a]}, \chi_{[b,1]}, \chi_{(a,b)}, \chi_{[a,b]}$  这样的区间时, (♣)式也成立, 从而当  $f$  为分段常值函数时, (♣)式成立.

$$(4) \text{ 取 } f(x) = \frac{1}{x} \chi_{[1/e, 1]}(x), x_n = 1 - \frac{1}{n}, \text{ 即 } f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in [1/e, 1], \\ 0, & x \in [0, 1/e) \end{cases}, \text{ 便有}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} S_k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k f\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right) = \int_0^1 f(x) dx = 1,$$

注意到  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$ , ( $n \geq 2$ ) 我们有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n S_k = 1$ , 结论得证.  $\square$

5. 利用  $\sum_{k=0}^n C_{2k}^k C_{2(n-k)}^{n-k} = 4^n$  证明:  $\sum_{k=0}^n \frac{C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k}}{(2k+1)(2n-2k+1)} = \frac{4^{2(n+1)}}{8(n+1)^2 C_{2n+2}^{n+1}}$ . 进一步, 计算  $\arcsin^2 x$  和  $\ln^2(x + \sqrt{1+x^2})$  的 Maclaurin 级数.

证明.  $\square$

6. 试计算级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2}$ .

解. 记级数一般项为  $u_n$ , 则

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \int_0^x \cos t \cdot \sin^{2n} t \, dt \, dx, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \int_0^x \cos t \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} t \, dt \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \int_0^x \cos t \cdot \frac{1}{1 - \sin^2 t} \, dt \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \csc x \int_0^x \sec t \, dt \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec t \, dt \int_t^{\frac{\pi}{2}} \csc x \, dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\tan \frac{t}{2})}{\cos t} \, dt \stackrel{\tan \frac{t}{2} = x}{=} -\frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

7. 设  $|x| < 1$ , 考虑第一类完全椭圆积分  $K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2 \cos^2 \theta}}$ . 依次证明:

(1) 对任何  $x \in (-1, 1)$ , 成立  $K(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(C_{2n}^n)^2 x^{2n}}{4^{2n}}$ .

(2) 对任何  $x \in (-1, 1)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , 有  $\frac{1}{|1 - xe^{i\theta}|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k}^k x^k}{4^k} e^{ik\theta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{2j}^j x^j}{4^j} e^{-ij\theta}$ .

提示: 可以证明两边平方后的等式相等.

(3) 对任何  $x \in [0, 1)$ , 有  $\frac{1}{1+x} K\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(C_{2n}^n)^2 x^{2n}}{4^{2n}} = K(x)$ .

证明. (1) 由

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2 \cos^2 \theta}} = \frac{C_{2n}^n x^{2n} \cos^{2n} \theta}{4^n},$$

又由之前结果

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta \, d\theta = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} = \frac{C_{2n}^n}{4^n} \frac{\pi}{2},$$

于是  $K(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(C_{2n}^n)^2 x^{2n}}{4^{2n}}$ .

(2)

(3)

8. 对于  $a, b > 0$ , 令  $M(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}$ . 另一方面, 令  $a_0 = a, b_0 = b$ , 并归纳定义  $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} (n \geq 0)$ . 依次证明:

(1)  $\{a_n\}, \{b_n\}$  收敛到同一值, 记为  $AGM(a, b)$ , 我们称之为  $a, b$  的算术几何平均.

(2)  $AGM\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) = AGM(a, b), M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) = M(a, b)$ .

(3) 成立如下的 Gauss(高斯) 公式:  $AGM(a, b) = \frac{\pi}{2M(a, b)}$ .

证明. (1)

(2)

(3)

□

9. 设  $b_k$  和  $B_k (k \geq 0)$  为 Bernoulli 数与 Bernoulli 多项式,  $\zeta$  为 Riemann  $\zeta$  函数.

(1) 利用  $\frac{te^t}{e^t - 1} = t + \frac{t}{e^t - 1}$ , 证明: 当  $k \neq 1$  时,  $B_k(1) = b_k$ . 另一方面, 有  $b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}, B_k(1) = \frac{1}{2}$ .

(2) 利用  $\frac{te^{(1-x)t}}{e^t - 1} = \frac{-te^{-xt}}{e^{-t} - 1}$  证明对任何  $k \geq 0$ , 成立  $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$ .

(3) 利用  $\frac{-te^{xt}}{e^{-t} - 1} = te^{xt} + \frac{te^{xt}}{e^t - 1}$  证明对任何  $k \geq 1$ , 成立  $B_k(-x) = (-1)^k B_k(x) + (-1)^k kx^{k-1}$ .

(4) 证明对任何  $k \geq 1$ , 成立  $b_{2k+1} = 0$ .

(5) 证明对任何  $k \geq 0$ ,  $B_k\left(\frac{1}{2} - x\right) = (-1)^k \left(\frac{1}{2^{k-1}} B_k(2x) - B_k(x)\right)$ .

(6) 证明对任何  $k \geq 0$ ,  $B'_{k+1}(x) = (k+1)B_k(x)$ , 进而  $\int_0^x B_k(s) ds = \frac{B_{k+1}(x) - B_{k+1}}{k+1}$ .

(7) 设  $n \geq 1$ , 证明 Euler 公式:  $\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1} b_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}$ .

提示: 对于  $x \in [0, 1]$ , 令  $T_0(x) = 0$ ,

$$T_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2(2n)!} B_{2n}(x) - \frac{1}{(2\pi)^{2n}} H_n(2\pi x), \quad \forall n \geq 1,$$

其中

$$H_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{2n}}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

特别地,

$$H_1(x) = \zeta(2) - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

验证  $T_n''(x) = -T_{n-1}(x)$ .

证明.

□

10. 利用 Bernoulli 数与 Bernoulli 多项式求以下函数的 Maclaurin 级数:

(1)  $\tan x$ , (2)  $\sec x$ , (3)  $\tanh x$ , (4)  $x \cot x$  (在  $x=0$  处定义为 1).

11. 对于  $n$  阶正定矩阵  $A$ , 证明存在唯一的正定矩阵  $B$ , 使得  $e^B = A$ .

证明.

□

12. 是否有  $\delta > 0$  以及  $(0, \delta)$  上的  $n$  阶正定矩阵值函数  $Y(\cdot)$ , 在  $(0, \delta)$  上满足  $Y(t) < I$ ,  $Y'(t) = (I - Y^2(t))^{1/2}$  以及  $\lim_{t \rightarrow 0^+} Y(t) = 0$ ?

13. 考察各基本初等函数, 思考可以把它们的定义推广到什么样的  $n$  阶方阵?

## 9.5 常微分方程初值问题的存在性

## 9.5 A

1. 设  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  连续可微. 证明:

(1) 设  $a < b < c$ . 若在  $[a, b]$  上,  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$  且  $\varphi(a) = x_0$ , 而在  $[b, c]$  上,  $\psi'(t) = f(t, \psi(t))$  且  $\psi(b) = \varphi(b)$ , 若  $x(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a, b], \\ \psi(t), & t \in [b, c] \end{cases}$  是方程组  $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(a) = x_0, \end{cases}, t \in [a, c]$  的解.

(2) 方程组 (9.5.2) 的解的最大存在区间存在, 且为开区间.

2. 证明方程  $x'(t) = (1 - x^2(t))(\cos t^2 + \sin x(t))$  的满足初值条件  $x(0) = 0$  的解的最大存在区间是  $(-\infty, +\infty)$ .

3. 证明 Gronwall-Bellman(格朗沃尔-贝尔曼) 不等式:

设  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 而  $\varphi \in C[t_0, T], \psi, \beta \in L^1[t_0, T], \psi$  非负, 满足

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t (\psi(s)\varphi(s) + \beta(s)) \, ds, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

证明:

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right) + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t \psi(r) \, dr\right) \beta(s) \, ds, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

提示: 考虑满足以下等式的函数  $\Phi$ :

$$\Phi(t) = \alpha + \int_{t_0}^t (\psi(s)\varphi(s) + \beta(s)) \, ds, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

证明. 考虑满足以下等式的函数  $\Phi$ :

$$\Phi(t) = \alpha + \int_{t_0}^t (\psi(s)\varphi(s) + \beta(s)) \, ds, \quad \forall t \in [t_0, T],$$

即  $\varphi(t) \leq \Phi(t)$ , 又有

$$\Phi'(t) = \psi(t)\varphi(t) + \beta(t) \leq \psi(t)\Phi(t) + \beta(t) \Rightarrow (\Phi'(t) - \psi(t)\Phi(t)) < \beta(t),$$

则有

$$\frac{d}{dt} \left( \Phi(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right) \right) \leq \exp\left(-\int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right) \beta(t),$$

积分得到

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left( \Phi(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right) \right) \, dt &= \Phi(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right) - \alpha \\ &\leq \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s \psi(r) \, dr\right) \beta(s) \, ds, \end{aligned}$$

于是

$$\Phi(t) \leq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s) \, ds\right) + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t \psi(r) \, dr\right) \beta(s) \, ds, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

由  $\varphi(t) \leq \Phi(t)$  即得结论. □

4. 设  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  连续可微, 且  $f(t, x)$  关于  $x$  满足线性增长条件, 即存在常数  $K > 0$  使得

$$|f(t, x)| \leq K(|x| + 1), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

证明: 对于任何初值条件, 方程  $x'(t) = f(t, x(t))$  的解的最大存在区间是  $(-\infty, +\infty)$ .

证明. □

5. 设  $\delta > 0$ ,  $f$  是  $(-\delta, \delta)$  内的连续可微函数, 满足  $f'(x) = f^4(x) - x^8$  以及  $f(0) = 0$ , 试证明  $f \in C^\infty(-\delta, \delta)$ , 并讨论  $f$  取正负的情况. 进一步, 讨论  $f$  的解析性.

### 9.5 B

1. 构造函数  $f$  使得方程  $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = 0 \end{cases}$  的解的最大存在区间为  $-\infty, 1$ , 且其解  $x$  满足

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x(t) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} x(t) = +\infty.$$

2. 设  $\{f_k\}$  是  $\mathbb{R}^n$  的紧子集  $E$  上的一列一致有界且等度连续的函数列,  $f \in C(E)$ . 证明: 若以下条件之一成立, 则  $\{f_k\}$  本身在  $E$  上一致收敛到  $f$ .

(i)  $\{f_k\}$  的任何在  $E$  上逐点收敛的子列均收敛到  $f$ .

(ii) 对于  $\{f_k\}$  的满足

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_E f_{k_j}(x) dx = \int_E g(x) h(x) dx, \quad \forall h \in C(E)$$

的子列  $\{f_{k_j}\}$  和相应的  $g \in C(E)$ , 均成立  $g = f$ .

3. 设  $T > 0$ ,  $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  连续, 且  $f_x(t, x)$  也在  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$  上连续且一致有界. 设  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , 记  $x(\cdot; x_0)$  为方程

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

的解. 任取  $e \in S^{n-1}$ , 证明: 当  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  时,  $X_\varepsilon(\cdot; e) = \frac{x(\cdot; x_0 + \varepsilon e) - x(\cdot; x_0)}{\varepsilon}$  在  $[0, T]$  上一致收敛到方程

$$\begin{cases} X'(t) = f_x(t, x(t; x_0)) X(t), & t \in [0, T], \\ X(0) = e \end{cases}$$

的解  $X(\cdot)$ .

4. 设  $T > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  连续, 且  $f_x(t, x, u)$ ,  $f_u(t, x, u)$  也在  $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  上连续且一致有界. 设  $\varphi \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ , 记  $x(\cdot; \varphi)$  为方程

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \varphi(t)), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$



的解. 任取  $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R}^m)$ , 证明: 当  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  时,  $Y_\varepsilon(\cdot) = \frac{x(\cdot; \varphi + \varepsilon\psi) - x(\cdot; \varphi)}{\varepsilon}$  在  $[0, T]$  上一致收敛到方程

$$\begin{cases} Y'(t) = f_x(t, x(t; \varphi), \varphi(t)) Y(t) + f_u(t, x(t; \varphi), \varphi(t)) \psi(t), & t \in [0, T], \\ Y(0) = \mathbf{0} \end{cases}$$

的解  $Y(\cdot)$ .

5. 试讨论方程  $f'(x) = f^4(x) - x^8$  在任何初值条件下解的最大存在区间为整个  $\mathbb{R}$ .

# 第 10 章 反常积分与含参变量积分

## 10.1 基于 Riemann 积分的反常积分

### 10.1 A

1. 设  $f$  在  $(0, 1]$  上非负单调, 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$ , 这里右端的积分可能是  $+\infty$ .

证明. 不妨设  $f$  单调递减, 则有

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

于是有

$$\int_{1/n}^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^{1-1/n} f(x) dx,$$

令  $n \rightarrow +\infty$  即得结论. □

2. 讨论以下积分的敛散性<sup>a</sup>:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a(x-1)^{2b}} dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \sin(x^p + \frac{1}{x^q}) dx, \quad p, q > 0;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x^\alpha |x-1|^\beta} dx;$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}};$$

$$(5) \int_0^{+\infty} (\ln x) \sin(x^p) dx.$$

解. (1) 当  $a > 0$  时,  $x = 0$  是瑕点,  $b > 0$  时,  $x = 1$  可能是瑕点. 为此不妨设  $0 < \delta < 1$ , 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a(x-1)^{2b}} dx = \int_0^\delta \frac{\ln x}{x^a(x-1)^{2b}} dx + \int_\delta^1 \frac{\ln x}{x^a(x-1)^{2b}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a(x-1)^{2b}} dx =: I_1 + I_2 + I_3,$$

先考察  $I_1$  得敛散性, 易见  $I_1$  的敛散性于  $\int_0^\delta \frac{\ln x}{x^a} dx$  相同, 由于

$$\int_0^\delta \frac{\ln x}{x^a} dx = - \int_{1/\delta}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{2-a}} dt,$$

易见后者在  $a < 1$  时收敛. 从而  $a < 1$  时  $I_1$  收敛.

对于  $I_2$ , 其敛散性与  $\int_\delta^1 \frac{\ln x}{(x-1)^{2b}} dx$  同, 注意到当  $b \leq \frac{1}{2}$  时有

$$\frac{\ln x}{(x-1)^{2b}} \rightarrow 0 \left(b < \frac{1}{2}\right), 1 \left(b = \frac{1}{2}\right), \quad x \rightarrow 1,$$

此时  $x = 1$  不是瑕点, 故  $I_2$  收敛. 否则  $b > \frac{1}{2}$  时,  $\frac{\ln x}{(x-1)^{2b}} \sim \frac{1}{(x-1)^{2b-1}} (x \rightarrow 1)$ , 于是  $b < 1$  时  $I_2$  收敛.

对于  $I_3$ , 有  $\frac{\ln x}{x^a(x-1)^{2b}} \sim \frac{\ln x}{x^{a+2b}} (x \rightarrow +\infty)$ , 从而  $a + 2b > 1$  时  $I_3$  收敛.

综上, 当  $a < 1, b < 1$  且  $a + 2b > 1$  时原积分收敛.

(2)

(3)

(4) 易见  $x = k\pi (k \in \mathbb{Z}_+)$  都是瑕点, 由于  $\sin x \sim$

(5) ■

3. 说明以下积分收敛并求其值:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx;$$

$$(2) \int_0^\pi x \ln \sin x dx;$$

$$(3) \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx;$$

$$(4) \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+1/x^2)} dx;$$

解. (1) 易见无论  $\alpha$  为何值, 都有  $\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \leq \frac{1}{1+x^2}$ , 而  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$  收敛, 从而原积分收敛. 置  $x = \frac{1}{t}$ , 得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} dt,$$

于是  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \frac{\pi}{4}$ .

(2) 注意到  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \sin x = 0$ , 故 0 不是瑕点, 而

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \sqrt{\pi - x} \cdot x \ln \sin x = 0,$$

可知  $\int_0^\pi x \ln \sin x dx$  收敛. 置  $x = \pi - t$ , 有

$$I := \int_0^\pi x \ln \sin x dx = \int_0^\pi (\pi - t) \ln \sin t dt = \pi \int_0^\pi \ln \sin x dx - I,$$

从而  $\int_0^\pi x \ln \sin x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \ln \sin x dx = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2$ .

(3) 先考虑  $|r| < 1$  的情形. 把  $r$  看成参变量, 记  $I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx$  并对  $r$  求导, 得到

$$I'(r) = \int_0^\pi \frac{-2 \cos x + 2r}{1 - 2r \cos x + r^2} dx,$$

由此可得  $I'(0) = -2 \int_0^\pi \cos x dx = 0$ . 现设  $r \neq 0$ , 则

$$I'(r) = \frac{1}{r} \int_0^\pi \left( 1 - \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \right) dx = \frac{1}{r} \left( \pi - (1-r^2) \int_0^\pi \frac{dx}{1-2r \cos x + r^2} \right),$$

做变换  $t = \tan(x/2)$ , 可得

$$(1-r^2) \int_0^\pi \frac{dx}{1-2r \cos x + r^2} = \frac{1+r}{1-r} \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{1 + \left( \frac{1+r}{1-r} t \right)^2} = 2 \arctan \frac{1+r}{1-r} t \Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

这里用到了  $|r| < 1$  的条件, 从而  $I'(r) \equiv 0$ , 易见  $I(0) = 0$ , 从而  $I(r) \equiv 0$ .

在考虑  $|r| > 1$  的情形. 令  $\rho = 1/r$ , 则  $|\rho| < 1$ . 于是

$$I(r) = I\left(\frac{1}{\rho}\right) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\rho \cos x + \rho^2) dx - \int_0^\pi \ln \rho^2 dx = -2\pi \ln |\rho| = 2\pi \ln |r|.$$

当  $r = \pm 1$  时, 利用上题结果可知

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

可以得到  $I(\pm 1) = 0$ . 即得  $I(r) = \begin{cases} 0, & |r| \leq 1, \\ 2\pi \ln |r|, & |r| > 1. \end{cases}$

(4) 易见  $\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+1/x^2)} dx$  收敛, 置  $x = \frac{1}{t}$  得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+1/x^2)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-(t^2+1/t^2)} dt,$$

于是有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+1/x^2)} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-((x-\frac{1}{x})^2+2)} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-((x-\frac{1}{x})^2+2)} d\left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^2}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

4. 利用  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right), x \in (0, 2\pi)$  说明  $\int_0^\pi \ln \sin x dx = -\pi \ln 2$ .

5. 设  $f$  在  $[0, +\infty)$  非负, 严格单调下降, 证明:  $\int_0^x f(t) \sin t dt > 0$ . 特别地, 对于任何  $x > 0$  成立  $\int_0^x e^{-t} \sin t dt > 0$ .

证明. □

6. 若  $f(0^+)$  存在,  $\forall A > 0, \int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  收敛, 试计算 Frullani 积分  $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ , 其中  $a, b > 0$ .

解. 我们先回顾该积分的计算方法.

设  $f(0^+)$  与  $f(+\infty)$  都存在, 且对任何  $0 < \delta < \Delta < +\infty$ ,  $\int_\delta^\Delta \frac{f(x)}{x} dx$  存在. 则

$$\begin{aligned} \int_\delta^\Delta \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_\delta^\Delta \frac{f(ax)}{x} dx - \int_\delta^\Delta \frac{f(bx)}{x} dx \\ &= \int_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t} dt \end{aligned}$$

我们记  $J_1 = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} dt, J_2 = \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t} dt$ . 于是由积分第一中值定理

$$J_1 = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} dt = f(\xi_1) \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{1}{t} dt = f(\xi_1) \ln \frac{b}{a}, \quad a\delta \leq \xi_1 \leq b\delta,$$

$$J_2 = \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t} dt = f(\xi_2) \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{1}{t} dt = f(\xi_2) \ln \frac{b}{a}, \quad a\Delta \leq \xi_2 \leq b\Delta.$$

这时当  $\delta \rightarrow 0^+$ ,  $\Delta \rightarrow +\infty$  时, 得到  $\xi_1 \rightarrow 0^+$ ,  $\xi_2 \rightarrow +\infty$ , 即得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0^+) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}.$$

由题设  $f(0^+)$  存在,  $\forall A > 0$ ,  $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  收敛, 则

$$J_2 = \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t} dt = \int_A^{b\Delta} \frac{f(t)}{t} dt - \int_A^{a\Delta} \frac{f(t)}{t} dt \rightarrow 0, \quad \Delta \rightarrow +\infty,$$

从而  $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0^+) \ln \frac{b}{a}$ .

同理若  $f(+\infty)$  存在,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\int_0^\varepsilon \frac{f(x)}{x} dx$  收敛, 则

$$J_1 = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{a\delta}^\varepsilon \frac{f(t)}{t} dt - \int_{b\delta}^\varepsilon \frac{f(t)}{t} dt \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0^+.$$

从而  $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(+\infty) \ln \frac{a}{b}$ . ■

7. 若  $f(+\infty)$  存在,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\int_0^\varepsilon \frac{f(x)}{x} dx$  收敛, 试计算 Frullani 积分  $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ , 其中  $a, b > 0$ .

解. 参见上一题的解答. ■

8. 设  $f \in C[0, +\infty)$ ,  $f > 0$ . 若  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)} dx$  收敛. 证明:  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A^2} \int_0^A f(x) dx = +\infty$ .

证明. 首先, 对于任意  $A > 0$ , 总存在  $a > 0$  使得  $\frac{1}{f(x)}$  在区间  $(a, a+1)$  上满足  $\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{A^3}$ , 否则

$$\int_a^{a+N} f(x) dx = \sum_{n=a}^{a+N-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{f(x)} dx \geq \frac{N}{A^3} \rightarrow +\infty, \quad N \rightarrow +\infty,$$

与积分  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)} dx$  收敛矛盾. 从而对任意  $A$ , 存在区间  $(a, a+1)$  使得  $f(x) > A^3$ , 进而

$$\frac{1}{A^2} \int_0^A f(x) dx \geq \frac{1}{A^2} \int_a^{a+1} f(x) dx > A \rightarrow +\infty, \quad A \rightarrow +\infty. \quad \square$$

9. 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(nx + 1/x)}{1+x^2} dx = 0$ .

证明. 由于  $\cos(nx + 1/x) = \cos(nx) \cos(1/x) - \sin(nx) \sin(1/x)$ , 记

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(1/x)}{1+x^2} \cdot \cos(nx) dx, \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{1+x^2} \cdot \sin(nx) dx,$$

易见对于任何  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $I_n, J_n$  都收敛. 我们只需要证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n - J_n) = 0$ , 由分部积分公式

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(1/x)}{1+x^2} \cdot \cos(nx) dx &= \frac{\sin nx \cos(1/x)}{n} \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \left( \frac{\cos(1/x)}{1+x^2} \right)' \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1/x) \cdot \frac{1+x^2}{x^2} - 2x \cdot \cos(1/x)}{(1+x^2)^2} \cdot \sin nx dx \end{aligned}$$

□

10. 推广习题 8.3A 第 6 题如下: 设  $f \in C[a, b]$  非负, 且在  $c \in [a, b]$  取得唯一的最大值  $f(c) > 0$ ,

$\varphi$  在  $[a, b]$  上绝对可积, 并在点  $c$  连续. 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_a^b f^n(x) \varphi(x) dx}{\int_a^b f^n(x) dx} = \varphi(c)$ .

<sup>a</sup>注: 在讨论含参数的问题时, 一开始不妨对参数的分类分得细一点, 最后再作适当的合并.

### 10.1 B

1. 尝试给出比习题 A 第 1 题的题设更弱的条件, 使得结论仍然成立.
2. 试讨论更一般的反常重积分的定义. 特别的, 考虑在定义反常重积分时, 瑕点集可以一般到什么程度.
3. 求  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$  当  $x \rightarrow 1^-$  的阶.

解. 易见  $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ , 由单调性, 当  $0 < x < 1$  时, 我们有

$$x^{n^2} < \int_{(n-1)}^n x^{t^2} dt < x^{(n-1)^2}, \quad (n \geq 1),$$

因此

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \leq 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt,$$

而

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 \ln \frac{1}{x}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\ln \frac{1}{x}}}.$$

当  $x \rightarrow 1^-$  时,  $\ln x \sim x - 1$ , 因此  $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$ . ■

4. (1) 举例说明, 存在恒正的  $f$  使得  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 但  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  不存在.

(2) 举例说明, 存在恒正的无穷次可导函数  $f$  使得  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 但  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  不存在.

(3) 若  $f$  一致连续, 且  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

5. 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin x^n dx = 0$ .

证明. 由于

$$\int_0^{\pi/2} \sin x^n dx = \int_0^1 \sin x^n dx + \int_1^{\pi/2} \sin x^n dx,$$

而

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 \sin x^n dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, \\ -\frac{2}{n} &\leq \int_1^{\pi/2} \frac{1}{nx^{n-1}} \cdot nx^{n-1} \sin x^n dx \stackrel{\text{积分第二中值定理}}{=} \frac{1}{n} \int_0^{\xi} d(-\cos x^n) \leq \frac{2}{n} \end{aligned}$$

依夹逼准则有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin x^n dx = 0$ . □

6. 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \cos x^n dx = 1$ .

证明. 仿上法, 我们有

$$1 \geq \int_0^1 \cos x^n dx \geq \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^{2n}\right) dx = 1 - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

$$-\frac{2}{n} \leq \int_1^{\pi/2} \frac{1}{nx^{n-1}} \cdot nx^{n-1} \cos x^n dx = \frac{1}{n} \int_0^\xi d(\sin x^n) \leq \frac{2}{n}$$

依夹逼准则便得结论.  $\square$

7. 设函数  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  连续且严格单调, 证明: “ $g$  在  $[0, 1]$  上非负可积蕴含  $f \circ g$  在  $[0, 1]$  上非负可积” 等价于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} < +\infty$ .

8. 证明:  $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \sin t dt$  在  $(0, +\infty)$  上有界.

证明. 记  $F(x, \alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \sin \alpha t dt$ , 原问题即证  $F(x, 1)$  在  $x \in (0, +\infty)$  上有界. 由于

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \int_0^{+\infty} te^{-xt^2} \cos \alpha t dt,$$

对任意的  $\alpha \in \mathbb{R}$  成立, 事实上, 由于

$$|te^{-xt^2} \cos \alpha t| \leq te^{-xt^2},$$

而  $\int_0^{+\infty} te^{-xt^2} dt$  收敛, 故由 Weierstrass 判别法可知  $\int_0^{+\infty} te^{-xt^2} \cos \alpha t dt$  对  $b \in \mathbb{R}$  一致收敛, 因而等式成立, 又有

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \int_0^{+\infty} te^{-xt^2} \cos \alpha t dt = \frac{1}{2x} - \frac{\alpha}{2x} \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \sin \alpha t dt = \frac{1}{2x} - \frac{\alpha}{2x} F(x, \alpha),$$

并且有  $F(x, 0) = 0$ , 得到

$$F(x, \alpha) = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4x}\right) \int_0^\alpha \frac{1}{2x} \exp\left(\frac{\alpha^2}{4x}\right) d\alpha,$$

于是  $F(x, 1) = \exp\left(-\frac{1}{4x}\right) \int_0^1 \frac{1}{2x} \exp\left(\frac{\alpha^2}{4x}\right) dx$ , 而

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x} \int_0^1 \exp\left(\frac{\alpha^2}{4x}\right) dx &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{1/(2\sqrt{x})} \exp(u^2) du \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \int_0^2 \exp(u^2) du + \int_1^{1/(2\sqrt{x})} \left(2 - \frac{1}{u^2}\right) \exp(u^2) du \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \int_0^1 \exp(u^2) du + \int_1^{1/(2\sqrt{x})} \frac{d \exp(u^2)}{du} \frac{1}{u} du \right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{x}} \left( C + 2\sqrt{x} \exp\left(\frac{1}{4x}\right) \right), \end{aligned}$$

其中  $C = \int_0^1 e^{u^2} du$ . 于是  $F(x, 1) \leq \frac{C}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{1}{4x}\right) + 2$ , 右侧当  $x \rightarrow 0^+$  时有有限极限, 并且结合 8.4A 第 4 题可知  $f(x) > 0$ . 结论即证.  $\square$

9. 设  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x}$ .

证明. 记  $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 下证

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt = I.$$

由于  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛, 可以找到  $x_0 > 0$ , 使得对  $\forall \varepsilon > 0, x \geq x_0$  有  $|F(x) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 于是当  $x > x_0$ , 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt - I &= \frac{1}{x} \int_0^x (F(t) - I) dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{x_0} (F(t) - I) dt + \left(1 - \frac{x_0}{x}\right) \cdot \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (F(t) - I) dt, \end{aligned}$$

因此

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt - I \right| < \frac{1}{x} \left| \int_0^{x_0} (F(t) - I) dt \right| + \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |F(t) - I| dt.$$

右端第二项  $< \frac{\varepsilon}{2}$ ; 当  $x$  充分大时, 第一项同样也小于  $\frac{\varepsilon}{2}$ , 于是有

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt - I \right| < \varepsilon.$$

另一方面

$$\int_0^x t f(t) dt = \int_0^x t F'(t) dt = x F(x) - \int_0^x F(t) dt$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x F(x) - \int_0^x F(t) dt}{x} = 0. \quad \square$$

10. 设  $f$  是  $[0, +\infty)$  上非负可导函数.  $f(0) = 0, f'(x) \leq \frac{1}{2}, \int_0^{+\infty} f(x) dx$  收敛. 求证: 对任何  $p > 1, \int_0^{+\infty} f^p(x) dx$  也收敛, 且  $\int_0^{+\infty} f^p(x) dx \leq \left( \int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^{(p+1)/2}$ .

证明. 令  $g(t) = \left( \int_0^t f(x) dx \right)^{(p+1)/2} - \int_0^t f^p(x) dx$ , 则  $g(t)$  可导,

$$g'(t) = f(t) \left( \frac{p+1}{2} \left( \int_0^t f(x) dx \right)^{(p-1)/2} - f^{p-1}(t) \right).$$

令  $h(t) = \left( \frac{p+1}{2} \right)^{2/(p-1)} \int_0^t f(x) dx - f^2(t)$ , 则有  $h'(t) = f(t) \left( \left( \frac{p+1}{2} \right)^{2/(p-1)} - 2f'(t) \right)$ .

由于  $\beta > 1, f'(x) \leq \frac{1}{2}$ , 我们有  $h'(t) \geq 0$ . 这说明  $h(t)$  单调递增, 从  $h(0) = 0$  得  $h(t) \geq 0$ , 因此  $g'(t) \geq 0$ , 从  $g(0) = 0$  得  $g(t) \geq 0$ , 即

$$\int_0^t f^p(x) dx \leq \left( \int_0^t f(x) dx \right)^{(p+1)/2},$$

令  $t \rightarrow +\infty$  即得结论. □



11. 设  $\alpha \in (0, 1), \beta \in (0, 1], \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^{\alpha}}{n^{\beta}}$  的收敛性如何?

解. ■

12. 设  $\alpha > 1, \beta \in (0, 1]$ , 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^{\alpha}}{n^{\beta}}$  的收敛性, 你能够说些什么?

13. 设  $\alpha > 0, \beta > 0$ , 对于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta} \sin n^{\alpha}}$  的收敛性, 你能够说些什么?

14. 设  $f \in C^1[0, 1], f(0) = f(1) = 0$ . 证明:  $\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx$ . 进一步, 如何把条件放宽到  $f \in C_0^1(0, 1)$ ? 其中  $C_0^1(0, 1) = \{f \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1) | f(0) = f(1) = 0\}$ .

证明. 由分部积分可知

$$\int_0^1 f(x) dx = x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x f'(x) dx = - \int_0^1 x f'(x) dx,$$

同理  $\int_0^1 f(x) dx = - \int_0^1 (x-1) f'(x) dx$ . 从而

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2 &= \left(\frac{1}{2} \int_0^1 (2x-1) f'(x) dx\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^1 (2x-1)^2 dx \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \leq \frac{1}{12} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad \square$$

## 10.2 含参变量反常积分的一致收敛性及判别法

### 10.2 A

1. 证明以下含参变量积分关于所考虑的参数内闭一致收敛, 但非一致收敛:

(1)  $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0;$

(2)  $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^3 x dx, \alpha > 0;$

(3)  $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, p, q > 0;$

(4)  $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} (\ln x) \ln^2(1-x) dx, p, q > 0;$

(4)  $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx, \alpha > 0;$

(6)  $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2 x^2} dx, \alpha > 0.$

证明. (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6) □

2. 考察以下含参变量积分关于所考虑的参数的一致收敛性<sup>a</sup>:

$$(1) \int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx, \alpha \in \mathbb{R}; \quad (2) \int_0^1 x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}} dx, \alpha > -2, \beta > 0;$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx, y \in \mathbb{R}; \quad (4) \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx, y > 0;$$

解. (1)

(2)

(3)

(4) ■

3. 设  $f \in C(0, +\infty)$ ,  $\int_0^{+\infty} t^{\lambda} f(t) dt$  当  $\lambda = a, \lambda = b$  时都收敛. 证明:  $\int_0^{+\infty} t^{\lambda} f(t) dt$  关于  $\lambda \in [a, b]$  一致收敛.

证明. □

<sup>a</sup>习题中讨论一致收敛性需包括内闭一致收敛性, 或者说需要讨论关于一致收敛性能够得到的最好结果.

### 10.2 B

1. 考察使得以下积分收敛的参数  $\alpha, p, q$  以及积分一致收敛的范围:

$$(1) \int_0^1 x^{\alpha} \sin \left( x^p + \frac{1}{x^q} \right) dx; \quad (2) \int_1^{+\infty} x^{\alpha} \sin \left( x^p + \frac{1}{x^q} \right) dx.$$

解. 内容... ■

2. 试讨论变量代换对于反常积分收敛性与一致收敛性的影响.

## 10.3 含参变量积分的性质

### Theorem 10.3.1

设  $f: [a, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  其中  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  为区域, 且存在  $\mathbf{y}_0 \in \Omega$ , 使得  $\int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y}_0) dx$  收敛. 对几乎所有的  $x \in [a, +\infty)$ ,  $f(x, \cdot)$  在  $\Omega$  内 (连续) 可微. 对任何  $A > a$ , 存在  $g_A \in L[a, A]$  使得

$$|f_{\mathbf{y}}(x, \mathbf{y})| \leq g_A(x), \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega, \text{ a.e. } x \in [a, A].$$

进一步,  $\int_a^{+\infty} f_{\mathbf{y}}(x, \mathbf{y}) dx$  关于  $\mathbf{y} \in \Omega$  一致收敛, 则对任何  $\mathbf{y} \in \Omega$ ,  $\int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y}) dx$  收敛, 而  $\varphi(\mathbf{y}) = \int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y}) dx$  在  $\Omega$  内 (连续) 可微且

$$\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \int_a^{+\infty} f_{\mathbf{y}}(x, \mathbf{y}) dx, \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega.$$

另外, 当  $\Omega$  为有界凸区域时,  $\int_a^{+\infty} f(x, \mathbf{y}) dx$  关于  $\mathbf{y} \in \Omega$  一致收敛.

## 10.3A

1. 求极限:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x} dx$ .

解. 因为有

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x} dx \stackrel{\tan x=t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t^n + 1}{(t^{n+1} + 1)\sqrt{t^2 + 1}} dt$$

同时有  $\frac{t^n + 1}{(t^{n+1} + 1)\sqrt{t^2 + 1}} \leq \frac{2}{\sqrt{1 + t^2}}$ , 依 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^n + 1}{(t^{n+1} + 1)\sqrt{t^2 + 1}} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2 + 1}} dt = 2\ln(\sqrt{2} + 1).$$

或者, 注意到  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ , 有  $0 \leq \sin x \leq \cos x \leq 1, \sec x \geq 1$ , 于是

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x} dx \geq \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x \cos x + \cos^{n+1} x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x} dx,$$

另一方面,

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x} dx \leq \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\cos^{n+1} x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x} dx + \int_0^{\pi/4} \tan^n x \sec x dx,$$

而

$$\int_0^{\pi/4} \tan^n x \sec x dx \leq \int_0^{\pi/4} \tan^n x \sec^2 x dx = \frac{1}{n+1}.$$

依夹逼准则可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^{n+1} x + \cos^{n+1} x} dx = \int_0^{\pi/4} \sec x dx = \ln(\sqrt{2} + 1).$$

注意到被积函数关于  $x = \frac{\pi}{2}$  对称, 这就证明了结论. ■

2. 通过引入参数并利用积分号下求导计算  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ .

解. 记  $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2} dx$ , 则有  $I(0) = 0, I(1) = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ . 显然含参积分关于  $\alpha$  一致收敛, 于是有

$$I'(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \frac{x}{1+\alpha x} dx = \frac{1}{1+\alpha^2} \left( \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} \alpha - \ln(1+\alpha) \right),$$

于是

$$I(1) = \int_0^1 I'(\alpha) d\alpha = \int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2} \left( \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} \alpha \right) d\alpha - I(1),$$

$$\text{于是 } I(1) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+\alpha^2} \left( \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} \alpha \right) d\alpha = \frac{\pi}{8} \ln 2. \quad \blacksquare$$

3. 对应于定理 10.3.1, 给出并证明含参变量无穷积分被积函数关于参数仅在单点可微时的结果.

4. 对应于定理 10.3.1, 给出可能含有瑕点的含参变量积分可微性的结果并证明.

5. 证明  $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-\alpha)^{2-\alpha}} dx$  是区间  $(0, 2)$  内关于  $\alpha$  的无界, 连续函数.

证明. □

6. 计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 \frac{x^n \ln x}{1+x^n} dx$  并说明计算过程合理.

解. 由 Weierstrass 判别法可知原积分关于参数  $n$  一致收敛, 从而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^2 \frac{x^n \ln x}{1+x^n} dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1+x^n} dx + \int_1^2 \frac{x^n \ln x}{1+x^n} dx \right) \\ &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n \ln x}{1+x^n} dx + \int_1^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n \ln x}{1+x^n} dx \\ &= \int_1^2 \ln x dx = 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

7. 设  $a, b > 0$ , 利用 Frullani 积分计算  $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ .

解. 置  $\ln x = -t$ , 于是

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(a+1)} - e^{-t(b+1)}}{t} dt = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

8. 考察下列积分与例 10.3.5 的联系, 并尝试以各种方法计算这些积分:

$$(1) \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx, \quad a \geq 1.$$

$$(2) \int_0^\pi \ln(1 + a \cos x) dx \quad |a| \leq 1.$$

$$(3) \int_0^\pi \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx, \quad a^2 + b^2 > 0.$$

解. 依靠例 10.3.5 可以知道  $\int_0^\pi \ln(2 - 2 \cos x) dx = 0$ . 于是也有  $\int_0^\pi \ln(2 + 2 \cos x) dx = 0$ , 从而

$$\int_0^\pi \ln(1 - \cos x) dx = \int_0^\pi \ln(1 + \cos x) = -\pi \ln 2,$$

于是有

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \ln(1 - \cos x) dx + \int_0^\pi \ln(1 + \cos x) dx &= \int_0^\pi \ln(1 - \cos^2 x) dx \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \ln(1 - \sin^2 x) dx = -2\pi \ln 2. \end{aligned}$$

(1) 记  $F(a) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx$ , 则有

$$\begin{aligned} F'(a) &= \int_0^{\pi/2} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2a}{(a^2 - 1) \sin^2 x + a^2 \cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2a \sec^2 x}{(a^2 - 1) \tan^2 x + a^2} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2a}{(a^2 - 1) \tan^2 x + a^2} d(\tan x) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}, \end{aligned}$$

于是

$$F(a) = \int \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} da = \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) + C,$$

由前述分析知  $F(1) = -\pi \ln 2$ , 从而  $C = -\pi \ln 2$ , 即  $F(a) = \pi \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) - \pi \ln 2$ .

(2) 记  $G(x) = \int_0^\pi \ln(1 + a \cos x) dx$ , 有  $G(x) = \int_0^\pi \ln(1 - a \cos x) dx$ , 这意味着我们可以只讨论  $a > 0$  的情况, 同时它也带给我们了另一个便利. 这在之后的不久便能体会到. 易见  $F(a) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 - \cos^2 x) dx$ , 当  $0 < a \leq 1$  时,  $\frac{1}{a} \geq 1$ , 于是

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{a}\right) &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1 - a^2 \cos^2 x}{a^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\ln(1 + a \cos x) + \ln(1 - a \cos x) - \ln a^2) dx = G(x) - \pi \ln a, \end{aligned}$$

由 (1) 的结果可得

$$G(x) = \pi \ln(1 + \sqrt{1 - a^2}).$$

(3) 由于

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx &= \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx + \int_{\pi/2}^\pi \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx + \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx, \end{aligned}$$

不妨记  $I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx$ . 若  $a = b > 0$ , 则有

$$I(a, a) = \int_0^{\pi/2} \ln a^2 dx = \pi \ln a,$$

当  $a, b > 0$  时有

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(a, b)}{\partial a} &= \int_0^{\pi/2} \frac{2a \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx = 2a \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2 x}{a^2 \tan^2 x + b^2} dx \\ &= 2a \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(a^2 t^2 + b^2)(1 + t^2)} dt = \frac{2a}{a^2 - b^2} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{1 + t^2} - \frac{b^2}{a^2 t^2 + b^2} \right) dt \\ &= \frac{2a}{a^2 - b^2} \left( \arctan t - \frac{b}{a} \arctan \frac{a}{b} t \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{a + b}, \end{aligned}$$

于是  $I(a, b) = \pi \ln(a + b) + C(b)$ , 令  $a = b$  带入可得

$$C(a) = I(a, a) - \pi \ln(2a) = \pi \ln a - \pi (\ln 2 + \ln a) = -\pi \ln 2,$$

即  $C(b) = -\pi \ln 2$ , 得到  $I(a, b) = \pi \ln \frac{a + b}{2}$ .

当  $a > 0, b = 0$  时, 有

$$I(a, 0) = \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} (\ln a + \ln \sin x) dx = 2 \left( \frac{\pi}{2} \ln a + \left( -\frac{\pi}{2} \ln 2 \right) \right) = \pi \ln \frac{a}{2},$$

同理  $a = 0, b > 0$  时  $I(0, b) = \pi \ln \frac{b}{2}$ . 综上所述当  $a^2 + b^2 > 0$  时有  $I(a, b) = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}$ , 显然

对于  $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx$  有同样的结果, 故

$$\int_0^\pi \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx = 2\pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}. \quad \blacksquare$$

例 10.3.5 设  $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ . 计算  $\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx$ .

解. 首先, 从含参积分的瑕点定义来看, 当  $\alpha$  取值于整个  $\mathbb{R}$  时,  $[0, \pi]$  上所有点都是积分的瑕点. 但当我们把  $\alpha$  限制在  $\mathbb{R}$  上的有界集上时, 积分可能的瑕点只有 0 和  $\pi$ . 我们有

$$\sin^2 x \leq 1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2 \leq 2 + 2\alpha^2,$$

因此,

$$|\ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)| \leq |\ln \sin^2 x| + \ln(2 + 2\alpha^2), \quad \forall x \in (0, \pi),$$

于是由 Weierstrass 判别法,  $\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx$  关于  $\alpha \in (-\infty, +\infty)$  内闭一致收敛. 于是利用一致收敛性或 Lebesgue 控制收敛定理,

$$F(\alpha) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx$$

在  $-\infty, +\infty$  上连续. 我们有

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= F(-\alpha) = \frac{1}{2}(F(\alpha) + F(-\alpha)) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln((1 + \alpha^2) - 4\alpha^2 \cos^2 x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln((1 + \alpha^2)^2 - 2\alpha^2 \cos 2x - 2\alpha^2) dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \ln(1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos x) dx = \frac{1}{2} F(\alpha^2). \end{aligned}$$

因此,  $F(\pm 1) = 0$ . 更一般地, 反复利用上式可得

$$F(\alpha) = \frac{1}{2^n} F(\alpha^{2^n}), \quad \forall |\alpha| < 1, n \geq 1.$$

所以

$$F(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} F(\alpha^{2^n}) = 0, \quad F(0) = 0, \quad \forall |\alpha| < 1.$$

最后, 结合  $F\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -2\pi \ln |\alpha| + F(\alpha)$  可得  $F(\alpha) = \begin{cases} 2\pi \ln |\alpha|, & |\alpha| > 1, \\ 0, & |\alpha| < 1. \end{cases}$  ■

9. 证明  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} e^{-\alpha x} dx = 0$ .

证明. □

10. 计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\cos(\pi x) - e^{-n^2 x^2}}{n \arcsin x} \frac{dx}{\ln(1+x)}$  并说明计算过程成立的理由.

解. ■

11. 计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^n} dx$  并说明计算过程的正确性.

解. ■

12. 证明或证伪: 当  $n \rightarrow +\infty$  时,  $\int_0^\pi e^{xt} \left( \frac{\cos(n+1/2)t}{\ln(1+t)} - \frac{\cos nt}{t} \right) dt$  关于  $x \in [0, 1]$  一致收敛于零.

13. 设  $f$  是  $[0, 1)$  上的连续可微函数,  $f(0) = 0, f' \in L^2(0, 1)$ . 证明:

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx \leq 4 \int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

证明. 记  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \in (0, 1), \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$ , 那么原不等式等价于

$$\int_0^1 (g(x))^2 dx \leq 4 \int_0^1 (g(x) + xg'(x))^2 dx,$$

即

$$0 \leq \int_0^1 (3g^2 + 8xgg' + 4x^2(g')^2) dx = 2 \int_0^1 (g^2 + 2xgg') dx + \int_0^1 (g + 2xg')^2 dx,$$

而  $\int_0^1 (g^2 + 2xgg') dx = (xg^2) \Big|_0^1 = g^2(1) \geq 0$ , 原不等式得证.  $\square$

14. 设  $f$  为以  $\pi$  为周期且在  $[0, \pi]$  上可积的偶函数. 证明:

$$(1) \int_0^{+\infty} f(x) \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi/2} f(x) dx.$$

$$(2) \int_0^{+\infty} f(x) \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \int_0^{\pi/2} f(x) dx.$$

证明. (1) 我们分三步证明.

(i) 收敛性. 首先,  $\int_0^{2\pi} \frac{f(x) \sin x}{x} dx$  是一个定积分. 其次, 由题设, 可见

$$\int_{2\pi}^{2k\pi} f(x) \sin x dx = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

由此不难得到对任何  $A > 2\pi$ , 成立

$$\left| \int_{2\pi}^A f(x) \sin x dx \right| \leq \int_0^\pi |f(x)| dx.$$

于是由 Dirichlet 判别法,  $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{f(x) \sin x}{x} dx$  收敛, 即原积分收敛.

(ii)  $f$  为三角多项式情形. 若  $f = \sum_{k=0}^m a_k \cos(2kx)$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{f(x) \sin x}{x} dx &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^m \frac{a_k \cos(2kx) \sin x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^m a_k \frac{\sin((2k+1)x) - \sin((2k-1)x)}{x} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^m a_k (\operatorname{sgn}(2k+1) - \operatorname{sgn}(2k-1)) = \frac{\pi a_0}{2} = \int_0^{\pi/2} f(x) dx. \end{aligned}$$

(iii) 一般情形. 一般地, 由于  $f$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数, 根据 Weierstrass 逼近定理, 存在一列三角多项式  $T_n$  使得

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - T_n| dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

令

$$g_n(x) = \frac{T(x) + T(-x)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(t) - T_n(t)) dt.$$

则  $g_n$  具有形式  $g_n(x) = \sum_{k=0}^{m_n} a_{n,k} \cos(2kx)$ , 满足

$$\int_0^{2\pi} (g_n(x) - f(x)) dx = 0,$$

且

$$\varepsilon_n \equiv \int_0^{\pi} |f(x) - g_n(x)| dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

记

$$G_n(x) = \int_0^x (f(t) - g_n(t)) \sin t dt, \quad x \geq 0.$$

则

$$G_n(2k\pi) = 0, \quad |G_n(x)| \leq \int_0^{\pi} |f(t) - g_n(t)| dt = \varepsilon_n.$$

我们有

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{2\pi} \frac{(f(x) - g_n(x)) \sin x}{x} dx \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(x) - g_n(x)| dx = 2\varepsilon_n, \\ & \left| \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{(f(x) - g_n(x)) \sin x}{x} dx \right| = \left| \frac{G_n(x)}{x} \right|_{2\pi}^{+\infty} + \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{G_n(x)}{x^2} dx \\ & = \left| \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{G_n(x)}{x^2} dx \right| \leq \varepsilon_n \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \leq \varepsilon_n. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} \frac{f(x) \sin x}{x} dx - \int_0^{\pi/2} f(x) dx \right| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{(f(x) - g_n(x)) \sin x}{x} dx - \int_0^{\pi/2} (f(x) - g_n(x)) dx \right| \\ & \leq \left| \int_0^{2\pi} \frac{(f(x) - g_n(x)) \sin x}{x} dx \right| + \left| \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{(f(x) - g_n(x)) \sin x}{x} dx \right| + \left| \int_0^{\pi/2} (f(x) - g_n(x)) dx \right| \\ & \leq 2\varepsilon_n + \varepsilon_n + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow +\infty$  即得结论.

(2) 情况类似.

(i) 收敛性. 易见  $\int_0^{2\pi} f(x) \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$  是一个定积分, 而  $\int_{2\pi}^{+\infty} f(x) \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$  绝对收敛, 因此, 原积分收敛.



(ii)  $f$  为三角多项式情形. 设  $f = \sum_{k=0}^m a_k \cos(2k\pi x)$ . 注意到

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos(2kx) \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2kx) \sin 2x - 2k \sin(2kx) \sin^2 x}{x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2(k+1)x) - \sin(2(k-1)x) - 2k \sin(2kx) + k \sin(2(k+1)x) + k \sin(2(k-1)x)}{2x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} (\operatorname{sgn}(k+1) - \operatorname{sgn}(k-1) - 2k \operatorname{sgn}(k) + k \operatorname{sgn}(k+1) + k \operatorname{sgn}(k-1)) = \begin{cases} \pi/2, & k=0, \\ 0, & k \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

此时  $\int_0^{+\infty} f(x) \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \int_0^{\pi/2} f(x) dx$  成立.

(iii) 一般情形. 一般地, 对于满足题意的函数  $f$ , 存在一列三角多项式  $g_n(x) = \sum_{k=0}^{m_n} a_{n,k} \cos(2kx)$ , 使得

$$\max_{x \in [0, \pi]} |g_n(x)| \leq M_f := \sup_{x \in [0, \pi]} |f(x)|,$$

且

$$\varepsilon_n \equiv \int_0^{\pi} |f(x) - g_n(x)| dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

取自然数列  $\{k_n\}$  使得  $k_n \rightarrow +\infty$ , 且  $k_n^2 \varepsilon_n \leq 1$ . 我们有

$$\left| \int_0^{+\infty} (f(x) - g_n(x)) \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx \right| \leq \int_0^{k_n \pi} |f(x) - g_n(x)| dx + 2M_f \int_{k_n \pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = k_n \varepsilon_n + \frac{2M_f}{k_n \pi}.$$

于是

$$\int_0^{+\infty} f(x) \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x) \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} g_n(x) dx = \int_0^{\pi/2} f(x) dx.$$

由此即得结论.  $\square$

本题还有其它方法. 直接利用换元法与  $\csc x$  的展开式, 简述步骤如下.

15. 设  $f$  为以  $2\pi$  为周期在  $[0, 2\pi]$  上可积的偶函数. 证明:

$$\int_0^{+\infty} f(x) \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(x)(1 + \cos x) dx.$$

证明.  $\square$

16. 证明  $\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ .

证明. 由  $\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \int_0^1 \frac{1}{e^{x \ln x}} dx$ , 并且  $\int_0^1 \frac{1}{e^{x \ln x}} dx = \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x \ln x)^n}{n!} \right) dx$ , 设

$$f(x) = |x \ln x|, \quad x \in [0, 1],$$

即  $f(x) = -x \ln x$ , 易见  $f(x)$  有最大值  $\frac{1}{e}$ , 从而上述的被积函数中的级数有优级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$ , 由 Weierstrass 判别法可知该级数一致收敛, 从而可逐项积分, 即

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x dx,$$

现在来计算  $\int_0^1 x^n \ln^n x dx$ , 置  $x^{n+1} = e^{-y}$  得到

$$\int_0^1 x^n \ln^n x dx = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} y^n e^{-y} dy,$$

将右侧的积分记为  $\Gamma(n)$ , 有

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} y^n e^{-y} dy = -y^n e^{-y} \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} y^{n-1} e^{-y} dy = n\Gamma(n-1),$$

$$\text{于是 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}. \quad \square$$

17. 对于  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , 用  $L \ln L(E)$  表示满足  $\int_E |f(x)| \ln(1 + |f(x)|) dx < +\infty$  的函数  $f$  的全体. 现设  $a > 0, f: [0, 1] \rightarrow [a, +\infty), f \in L \ln L[0, 1]$ . 证明:

$$\int_0^1 f(x) \ln f(x) dx \geq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \ln f(x) dx.$$

证明. □

18. 试利用  $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}$  证明:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

证明. □

### 10.3B

1. 设  $\alpha > 0$ , 求  $n \rightarrow +\infty$  时  $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{1+x^\alpha \sin^2 x} dx$  的阶.

解. 我们记

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{1+x^\alpha \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{x+n\pi}{1+(x+n\pi)^\alpha \sin^2 x} dx,$$

一方面

$$\begin{aligned} I_n &\geq 2 \int_0^{\pi/2} \frac{n\pi}{1+(n+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2 x} dx \geq 2 \int_0^{\pi/2} \frac{n\pi}{1+(n+1)^\alpha \pi^\alpha x^2} dx \\ &= \frac{2n\pi}{(n+1)^{\alpha/2} \pi^{\alpha/2}} \arctan \left( \frac{(n+1)^{\alpha/2} \pi^{\alpha/2+1}}{2} \right) = O(n^{1-\alpha/2}). \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} I_n &\leq 2 \int_0^{\pi/2} \frac{(n+1)\pi}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 x} dx \leq 2 \int_0^{\pi/2} \frac{(n+1)\pi}{1+n^\alpha \pi^\alpha (2x/\pi)^2} dx \\ &= \frac{(n+1)\pi}{n^{\alpha/2} \pi^{\alpha/2-1}} \arctan(n^{\alpha/2} \pi^{\alpha/2}) = O(n^{1-\alpha/2}). \end{aligned}$$

$$\text{故 } \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{1+x^\alpha \sin^2 x} dx = O(n^{1-\alpha/2}). \quad \blacksquare$$

2. 计算  $\int_0^{+\infty} \frac{(1-x^2) \arctan x^2}{x^4+4x^2+1} dx$ .

解. 注意到  $\arctan x^2 = \int_0^{x^2} \frac{1}{1+y^2} dy$ , 于是有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{(1-x^2) \arctan x^2}{x^4+4x^2+1} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{x^4+4x^2+1} \left( \int_0^{x^2} \frac{1}{1+y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\sqrt{y}}^{+\infty} \frac{1-x^2}{x^4+4x^2+1} \cdot \frac{1}{1+y^2} dx dy \end{aligned}$$

先处理  $\int_{\sqrt{y}}^{+\infty} \frac{1-x^2}{x^4+4x^2+1} dx$ , 有

$$\frac{1-x^2}{x^4+4x^2+1} = \frac{A}{x^2+2-\sqrt{3}} - \frac{B}{x^2+2+\sqrt{3}},$$

其中  $A = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, B = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ , 于是有

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{y}}^{+\infty} \frac{1-x^2}{x^4+4x^2+1} dx &= \int_{\sqrt{y}}^{+\infty} \frac{A}{x^2+2-\sqrt{3}} - \frac{B}{x^2+2+\sqrt{3}} dx \\ &= \frac{A}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} - \frac{B}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \Big|_{\sqrt{y}}^{+\infty} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \arctan \left( \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{y} \right) - \arctan \left( \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{y} \right) \right). \end{aligned}$$

我们记  $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\alpha\sqrt{y})}{1+y^2} dy (\alpha \geq 0)$ , 易见其关于参数  $\alpha$  一致收敛, 于是

$$\int_0^{+\infty} \int_{\sqrt{y}}^{+\infty} \frac{1-x^2}{x^4+4x^2+1} \cdot \frac{1}{1+y^2} dx dy = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( I(\sqrt{2-\sqrt{3}}) - I(\sqrt{2+\sqrt{3}}) \right).$$

另一方面, 易见  $I(0) = 0$ ,

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{(1+y^2)(1+\alpha^2 y)} dy = \int_0^{+\infty} \frac{2y^2}{(1+y^4)(1+\alpha^2 y^2)} dy,$$

记  $f(z) = \frac{2z^2}{(1+z^4)(1+\alpha^2 z^2)}$ , 其在上半平面内有三个极点,

$$a_1 = e^{\pi i/4}, \quad a_2 = e^{3\pi i/4}, \quad a_3 = \frac{i}{\alpha},$$

容易计算  $\operatorname{Res} f(z) = \frac{2z^2}{4z^3(1+\alpha^2 z^2) + 2\alpha^2 z(1+z^4)} \Big|_{z=a_k}$  分别为

$$r_1 := -\frac{e^{3\pi i/4}}{2(1+\alpha^2 e^{\pi i/2})}, \quad r_2 := -\frac{e^{\pi i/4}}{2(1+\alpha^2 e^{3\pi i/2})}, \quad r_3 := \frac{i\alpha}{1+\alpha^4},$$

于是  $I'(\alpha) = \pi i \sum_{k=1}^3 r_k = \frac{(\sqrt{2}\alpha^2 - 2\alpha + \sqrt{2})\pi}{2(1 + \alpha^4)}$ , 注意到

$$\int \frac{\alpha}{1 + \alpha^4} d\alpha = \frac{1}{2} \arctan \alpha^2 + C,$$

以及

$$\int \frac{\alpha^2 + 1}{1 + \alpha^4} d\alpha = \int \frac{1 + 1/\alpha^2}{(\alpha - 1/\alpha)^2 + 2} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{\alpha - 1/\alpha}{\sqrt{2}} \right) + C.$$

于是

$$\begin{aligned} I\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) - I\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) &= \int_{\sqrt{2+\sqrt{3}}}^{\sqrt{2-\sqrt{3}}} I'(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \arctan \left( \frac{\alpha - 1/\alpha}{\sqrt{2}} \right) - \arctan \alpha^2 \right) \Big|_{\sqrt{2+\sqrt{3}}}^{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\pi}{2} \left( 2 \arctan \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - \left( \arctan \sqrt{2-\sqrt{3}} - \arctan \sqrt{2+\sqrt{3}} \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

所以  $\int_0^{+\infty} \frac{(1-x^2) \arctan x^2}{x^4 + 4x^2 + 1} dx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi^2}{12} = -\frac{\sqrt{2}\pi^2}{24}$ . ■

3. 设  $\alpha \in [0, 1]$ , 计算  $\int_0^\pi \ln |a^2 - \sin^2 x| dx$ .

解. ■

4. 试寻求一些线性算子的积分不等式, 给出与之对偶的不等式.

5. 构造  $[0, 1]$  上的线性函数  $f$ , 使得  $\overline{\{(x, f(x)) | x \in [0, 1]\}} = [0, 1] \times [0, 1]$ .

6. 设  $p > 1, f \in L^p(0, +\infty)$  且  $f$  非负, 证明 **Hardy** 不等式:

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{+\infty} f^p(x) dx,$$

其中  $\left( \frac{p}{p-1} \right)^p$  为最佳常数, 等号成立当且仅当  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 0$ .

证明. □

7. 设  $p > 1, f \in L^p(0, +\infty)$  且  $f$  非负. 又设  $r > 0, r \neq 1$ . 证明 Hardy 不等式的推广: 若  $r > 1$ , 则

$$\int_0^{+\infty} x^{-r} \left( \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \left( \frac{p}{r-1} \right)^p \int_0^{+\infty} x^{p-r} f^p(x) dx.$$

若  $0 < r < 1$ , 则

$$\int_0^{+\infty} x^{-r} \left( \int_x^{+\infty} f(t) dt \right)^p dx \leq \left( \frac{p}{r-1} \right)^p \int_0^{+\infty} x^{p-r} f^p(x) dx.$$

证明. □

8. 设  $p, q > 1$  为对偶数,  $f \in L^q(0, +\infty)$  且  $f$  非负. 令  $F(f)(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ . 利用 Hardy 不等式以及对偶关系证明:  $\|F(f)\|_{L^q(0, +\infty)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^q(0, +\infty)}$ .

证明. □

## 10.4 Euler 积分

## 10.4A

1. 求实数  $a$  的取值范围, 使得积分  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(x+1)(x+2)(x+3)} dx$  收敛, 并计算该积分.

解. 由于

$$\frac{1}{x^a(x+1)(x+2)(x+3)} \sim \frac{1}{6x^a}, x \rightarrow 0^+, \quad \frac{1}{x^a(x+1)(x+2)(x+3)} \sim \frac{1}{x^{a+3}}, x \rightarrow +\infty,$$

从而  $a \in (-2, 1)$  时原积分收敛. 又

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right),$$

如果  $a \in (0, 1)$ , 那么根据例 10.4.2 的已知结果

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^a} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)x^{1-a}} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(x+1)(x+2)(x+3)} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{x^a(1+x)} - \frac{2}{x^a(x+2)} + \frac{1}{x^a(x+3)} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)} dx - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2^a x^a(x+1)} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{3^a x^a(x+1)} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin a\pi} - \frac{1}{2^a} \frac{\pi}{\sin a\pi} + \frac{1}{2 \cdot 3^a} \frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{\pi}{2 \sin a\pi} \left( 1 - \frac{1}{2^{a-1}} + \frac{1}{3^a} \right), \end{aligned}$$

当  $a = 0$  时, 可以算得

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx &= \frac{1}{2} \int_0^A \left( \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} (\ln(A+1) - 2\ln(A+2) + \ln(A+3) + 2\ln 2 - \ln 3) \rightarrow \ln 2 - \frac{\ln 3}{2}, \quad A \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

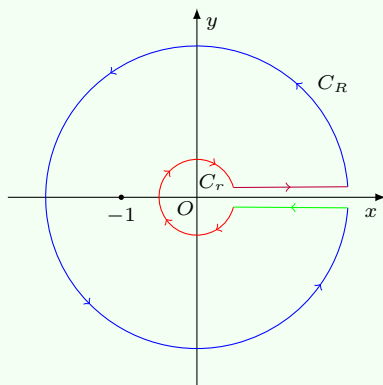
类似得,  $a = -1$  时有

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx &= \frac{1}{2} \int_0^A \left( \frac{4}{x+2} - \frac{3}{x+3} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} (4\ln(A+2) - 3\ln(A+3) - \ln(A+1) - 4\ln 2 + 3\ln 3) \rightarrow \frac{3}{2} \ln 3 - 2\ln 2, \quad A \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

现在我们来计算  $a \in (-2, 0)$  的情况, 前面的计算已经表明了  $a = -1$  的情形, 事实证明, 这是有益的, 因为下面的计算无法显示  $a$  为整数时的值. 方便起见, 令  $b = -a$ , 则  $b \in (0, 2)$  原积分也对应变为

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^b}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx.$$

设  $F(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)}$ , 考虑围道积分  $\int_C z^b F(z) dz$ , 其中  $C$  是如下图所示的区域.



则

$$\begin{aligned}\int_C z^b F(z) dz &= \int_r^R x^b F(x) dx + \int_{C_R} z^b F(z) dz + \int_R^r (xe^{2\pi i})^b F(x) dx + \int_{C_r} z^b F(z) dz \\ &= (1 - e^{2\pi i b}) \int_r^R x^b F(x) dx + \int_{C_R} z^b F(z) dz + \int_{C_r} z^b F(z) dz,\end{aligned}$$

由于  $x \rightarrow 0$  时  $x^{b+1}F(x) \rightarrow 0$ , 所以

$$\left| \int_{C_r} z^b F(z) dz \right| = \left| \int_{C_r} z^{b+1} F(z) \frac{dz}{z} \right| \leq \max_{C_r} |z^{b+1} F(z)| \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \max_{C_r} |z^{b+1} F(z)| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0,$$

同理结合  $x \rightarrow +\infty$  时  $x^{b+1}F(x) \rightarrow 0$  可得

$$\left| \int_{C_R} z^b F(z) dz \right| = \left| \int_{C_R} z^{b+1} F(z) \frac{dz}{z} \right| \leq \max_{C_R} |z^{b+1} F(z)| \frac{2\pi R}{R} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty,$$

于是有

$$\int_C z^b F(z) dz = (1 - e^{2\pi i b}) \int_r^R x^b F(x) dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(z^b F(z)), \quad (0 < \arg z < 2\pi),$$

令  $r \rightarrow 0^+, R \rightarrow +\infty$  得到

$$\int_0^{+\infty} x^b F(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i b}} \sum \operatorname{Res}(z^b F(z)),$$

又

$$1 - e^{2\pi i b} = e^{\pi i b} (e^{-\pi i b} - e^{\pi i b}) = (-1)^{b+1} (2i \sin b\pi),$$

最后得到

$$\int_0^{+\infty} x^b F(x) dx = -\frac{\pi}{\sin b\pi} \sum \operatorname{Res}((-z)^b F(z)),$$

$F(z)$  在负实轴上只有  $-1, -2, -3$  三个一阶极点, 易得

$$\sum \operatorname{Res}((-z)^b F(z)) = \frac{1}{2} - 2^b + \frac{3^b}{2},$$

于是  $\int_0^{+\infty} x^b F(x) dx = -\frac{\pi}{\sin b\pi} \left( \frac{1}{2} - 2^b + \frac{3^b}{2} \right)$ , 即

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(x+1)(x+2)(x+3)} dx = \frac{\pi}{2 \sin a\pi} \left( 1 - \frac{1}{2^{a-1}} + \frac{1}{3^a} \right).$$

■

2. 试计算如下积分:

$$\begin{aligned} (1) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx; & \quad (2) \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx; \\ (3) \int_0^1 \frac{\ln(1+x+x^2)}{x} dx; & \quad (4) \int_0^1 \frac{\ln(1-x+x^2)}{x} dx. \end{aligned}$$

解. (1) 我们有

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x} dx - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx,$$

注意到

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = \lim_{p \rightarrow 0^+} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial q} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \lim_{p \rightarrow 0^+} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

而

$$\frac{\partial}{\partial q} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{\Gamma'(q)\Gamma(p)\Gamma(p+q) - \Gamma'(p+q)\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma^2(p+q)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} (\psi(q) - \psi(p+q)),$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0^+} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} &= \lim_{p \rightarrow 0^+} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} (\psi(q) - \psi(p+q)) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0^+} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{p} (\psi(q) - \psi(p+q)) = -\psi'(1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}, \end{aligned}$$

于是  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$ . 注意在这过程之中我们也得到了  $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}$ , 而她的作用不久就会让我们感觉到.

(2) 置  $x^2 = t$  并结合上一问的结果

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{2t} dt = \frac{\pi^2}{24}.$$

(3) 注意到

$$(1-x^3) = (1-x)(1+x+x^2), \quad (1+x^3) = (1+x)(1-x+x^2),$$

这启示我们计算  $\int_0^1 \frac{\ln(1 \pm x^3)}{x} dx$ , 事实上我们有

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^3)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^6)}{x} dx - \int_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x} dx,$$

又置  $x^3 = t$ , 发现

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\frac{\pi^2}{18},$$

这也意味着  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^3)}{x} dx = \frac{\pi^2}{36}$ , 于是有

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x+x^2)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x} dx - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{9}.$$

(4) 根据上述分析有

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x+x^2)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^3)}{x} dx - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{18}. \quad \blacksquare$$

3. 设  $n \geq 2$ , 试用多种方法证明  $\prod_{k=0}^{n-1} \sin(x + \frac{k\pi}{n}) = \frac{\sin nx}{2^{n-1}}$ .

证明. □

4. 设  $n \geq 2$ , 证明:  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ .

证明. 我们直接使用下一题的结论, 注意到

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{\Gamma(\frac{1}{n}) \Gamma(1 - \frac{1}{n})}, \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{\Gamma(\frac{2}{n}) \Gamma(1 - \frac{2}{n})}, \dots, \sin \frac{(n-1)\pi}{n},$$

于是有

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{\pi^{n-1}}{\left(\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma(\frac{k}{n})\right)^2} = \frac{n}{2^{n-1}}. \quad \square$$

5. 设  $n \geq 2$ , 证明:  $\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{(n-1)/2}$ .

证明. 由 Gauss 叠乘定理:

$$\Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{1}{k}\right) \cdots \Gamma\left(s + \frac{k-1}{k}\right) = (2\pi)^{(k-1)/2} k^{1/2 - ks} \Gamma(ks),$$

得到

$$\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{s \rightarrow 0^+} (2\pi)^{(n-1)/2} n^{1/2 - ns} \frac{\Gamma(ns)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{(n-1)/2}. \quad \square$$

6. 计算  $\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx$ .

解. 换元, 然后使用余元公式:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx &= \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \Gamma(x) \ln \Gamma(1-x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin \pi x} dx = -\frac{\pi}{2} \int_0^1 \ln \sin \pi x dx = \frac{\ln 2\pi}{2} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

7. 设  $f \in C^1(\mathbb{R})$  以 1 为周期,  $f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(2x)$ . 证明:  $f \equiv 0$ .

证明.  $f'$  为  $\mathbb{R}$  上的连续周期函数, 所以它有连续模

$$\omega(r) = \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ |x-y| \leq r}} |f'(x) - f'(y)|, \quad \forall r \geq 0,$$

$\omega(r)$  在  $[0, +\infty)$  上连续单调增加, 且  $\omega(0) = 0$ .

由题设有

$$f'(x) + f'\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2f'(2x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$



于是对于任何  $\alpha > 0$ , 有

$$\begin{aligned}\omega(2\alpha) &= \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ |x-y| \leq 2\alpha}} |f'(x) - f'(y)| = \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ |x-y| \leq \alpha}} |f'(2x) - f'(2y)| \\ &= \frac{1}{2} \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ |x-y| \leq \alpha}} \left| f'(x) + f'\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left( f'(y) + f'\left(y + \frac{1}{2}\right) \right) \right| \leq \omega(\alpha),\end{aligned}$$

反复利用上式得到

$$\omega(\alpha) \leq \omega\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \cdots \leq \omega\left(\frac{\alpha}{2^n}\right), \quad \forall n \geq 1,$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 得到

$$\omega(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \omega\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \omega(0) = 0,$$

所以  $f'(x)$  是常数. 因为  $f(x)$  为可微的周期函数, 因为  $f'(x)$  有零点. 于是  $f'(x) \equiv 0$ . 所以  $f$  为常数, 易见  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ , 从而  $f \equiv 0$ .  $\square$

### 10.4B

1. 证明:  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - \cos x}{x} dx = 0$ .

证明. 记  $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{e^{-x} - \cos x}{x} dx (\alpha \geq 0)$ , 易见其关于参数  $\alpha$  一致收敛, 于是有

$$\begin{aligned}I'(\alpha) &= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} (\cos x - e^{-x}) dx = \left( \frac{e^{-\alpha x} (\sin x - \alpha \cos x)}{\alpha^2 + 1} + \frac{e^{-(\alpha+1)x}}{\alpha + 1} \right) \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} - \frac{1}{\alpha + 1}.\end{aligned}$$

注意到  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) = 0$ , 于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - \cos x}{x} dx = I(0) = - \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} - \frac{1}{1 + \alpha} d\alpha = 0. \quad \square$$

2. 计算  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos x^2}{x} dx$ .

解. 记  $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x^a) - \cos(x^a)}{x} dx$ , 置  $x^a = t$ , 利用上一问的结果, 得到

$$I(a) = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - \cos t}{t} dx \equiv 0,$$

于是由  $I(1) = I(2)$  可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos x^2}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x) - \exp(-x^2)}{x} dx,$$

我们只需要计算右侧的积分, 即有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-x) - \exp(-x^2)}{x} dx &= \int_0^{+\infty} (\exp(-x) - \exp(-x^2)) d(\ln x) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx - 2 \int_0^{+\infty} x \exp(-x^2) \ln x dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx = \frac{1}{2} \Gamma'(1) = -\frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{从而 } \int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos x^2}{x} dx = -\frac{\gamma}{2}. \quad \blacksquare$$

3. 计算  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t^2 dt$ .

解. 换元, 使用累次积分并运用已知结果.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin t^2 dt &= 2 \int_0^{+\infty} \sin t^2 dt \stackrel{t^2=x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} \sin x \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{\sqrt{\pi}} dt dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} \sin x dx dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{1+n^3x^3}$ .

解. 我们证明这样一个有趣的命题: 设函数  $g \in [0, +\infty)$  单调递减, 并且 Riemann 积分  $\int_0^{+\infty} g(x) dx$  收敛. 则对于任何满足条件  $|f(x)| \leq g(x)$  的函数  $f \in [0, \infty)$  有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sum_{n=1}^{\infty} f(nx) = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ .

如果我们证明了这个命题, 那么对于本问, 取  $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$ , 就有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^3x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sum_{n=1}^{\infty} f(nx) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \quad \blacksquare$$

下面我们将证明这个命题.

证明. 考察  $M_n := h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) - \int_0^{+\infty} f(x) dx$ , 设  $N, L$  是某些正整数, 我们将  $M_n$  表示为

$$\begin{aligned} M_n &= h \sum_{n=1}^N f(nh) + h \sum_{n=N+1}^{\infty} f(nh) - \int_0^L f(x) dx - \int_L^{+\infty} f(x) dx \\ &= \left(h - \frac{L}{N}\right) \sum_{n=1}^N f(nh) + h \sum_{n=N+1}^{\infty} f(nh) + \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(nh) - \int_0^L f(x) dx\right) - \int_L^{+\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

(i) 因为  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上 Riemann 可积, 所以对于任何给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在最小的正整数  $L = L(\varepsilon)$  使得

$$\int_{L-1}^{+\infty} g(x) dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

下文固定此  $L$ .

(ii) 对于任何给定的  $h \in (0, 1)$ , 可取正整数  $N$  满足  $Nh \leq L \leq (N+1)h$ , 于是

$$nh \in \left(\frac{Ln}{N+1}, \frac{Ln}{N}\right] \subset \left(\frac{n-1}{N}L, \frac{n}{N}L\right], \quad 1 \leq n \leq N,$$

由题设可知, 积分  $\int_0^L f(x) dx$  存在, 所以

$$\frac{L}{N} \sum_{n=1}^N f(nh) \rightarrow \int_0^L f(x) dx, \quad N \rightarrow +\infty,$$

注意由  $N$  的取法可知  $\frac{L}{N} \in \left[h, \frac{N+1}{N}h\right)$ , 所以当  $h \rightarrow 0^+$  时  $N \rightarrow +\infty$ , 于是当  $0 < h < h_0$  (其中  $h_0 = h_0(\varepsilon)$ ) 时, 有

$$\left| \frac{L}{N} \sum_{n=1}^N f(nh) - \int_0^L f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

(iii) 因为  $\frac{L}{N} \in \left[h, \frac{N+1}{N}h\right)$ , 所以

$$\left| h - \frac{L}{N} \right| \leq \frac{N+1}{N}h - h = \frac{h}{N},$$

并且由  $|f(x)| < g(x)$ , 我们有

$$\left| \left( h - \frac{L}{N} \right) \sum_{n=1}^N f(nh) \right| \leq \left| h - \frac{L}{N} \right| \sum_{n=1}^N g(nh) \leq \frac{h}{N} \sum_{n=1}^N g(nh).$$

因为  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递减, 所以

$$h \sum_{n=1}^N g(nh) < \int_0^{Nh} g(x) dx < \int_0^{+\infty} g(x) dx,$$

并且因为  $\int_0^{+\infty} g(x) dx$  收敛, 所以当  $0 < h < h_0$  (其中  $h_0$  足够小) 时也有  $\frac{1}{N} \int_0^{+\infty} g(x) dx < \frac{\varepsilon}{4}$ . 于是由前式得知, 当  $0 < h < h_0$  时

$$\left| \left( h - \frac{L}{N} \right) \sum_{n=1}^N f(nh) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

(iv) 另外, 依步骤 (i), 我们有

$$\left| h \sum_{n=N+1}^{\infty} f(nh) \right| \leq h \sum_{n=N+1}^{\infty} g(nh) \leq \int_{L-1}^{+\infty} g(x) dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

(v) 最后, 综上所述诸估计, 我们得到对于任何  $\varepsilon > 0$ , 当  $0 < h < h_0$  时  $|M_n| < \varepsilon$ . 因此结论得证. □

5. 计算  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx$ .

解. 易见

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx &= 2 \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = -2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \ln x dx \\ &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^{2n} \ln x dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

6. 设  $p, q > 1$  为对偶数,  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q$  收敛. 证明如下离散的 Hard-Hilbert 不等式:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q \right)^{1/q}.$$

证明. □

7. 计算  $\psi$  在  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$  等点的值.

解. 我们将利用以下两个公式

$$\sum_{j=0}^k \psi\left(x + \frac{j}{k}\right) = k(\psi(kx) - \ln k), \quad \forall x > 0. \quad (\heartsuit)$$

$$\psi(x) - \psi(1-x) = -\pi \cot \pi x, \quad \forall x \in (0, 1). \quad (\spadesuit)$$

在式(♥)中令  $k=2$  得到

$$\psi(x) + \psi\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2(\psi(2x) - \ln 2),$$

令  $x = \frac{1}{2}$ , 即有  $\psi\left(\frac{1}{2}\right) + \psi(1) = 2(\psi(1) - \ln 2)$ , 由此解得  $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \psi(1) - 2\ln 2 = -\gamma - 2\ln 2$ .

令  $k=3$ , 在分别令  $x = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ , 有

$$\psi\left(\frac{1}{6}\right) + \psi\left(\frac{5}{6}\right) = 2\psi\left(\frac{1}{2}\right) - 3\ln 3,$$

$$\psi\left(\frac{1}{3}\right) + \psi\left(\frac{2}{3}\right) = 2\psi(1) - 3\ln 3,$$

结合(♠)式, 即有

$$\psi\left(\frac{1}{6}\right) - \psi\left(\frac{5}{6}\right) = -\sqrt{3}\pi,$$

$$\psi\left(\frac{1}{3}\right) - \psi\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

联立解得

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{1}{3}\right) &= -\gamma - \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & \psi\left(\frac{2}{3}\right) &= -\gamma - \frac{3}{2}\ln 3 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, \\ \psi\left(\frac{1}{6}\right) &= -\gamma - 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi, & \psi\left(\frac{5}{6}\right) &= -\gamma - 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi, \end{aligned}$$

随即令  $k=4$ ,  $x = \frac{1}{4}$ , 结合(♠)式, 有

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right) + \psi\left(\frac{3}{4}\right) = 3\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) - 8\ln 2, \quad \psi\left(\frac{1}{4}\right) - \psi\left(\frac{3}{4}\right) = -\pi,$$

解得

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right) = -\gamma - 3\ln 2 - \frac{\pi}{2}, \quad \psi\left(\frac{3}{4}\right) = -\gamma - 3\ln 2 + \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

8. 证明  $\Gamma$  函数在定义域内解析.

证明.

□

9. 证明例 9.4.7 中的结论.

## 10.5 变分法初步

## 10.5 A

1. 证明: 对于任何  $a, b > 0$ , 存在唯一的  $r > 0$  以及  $\theta \in (0, 2\pi]$  使得  $a = r(\theta - \sin \theta), b = r(1 - \cos \theta)$ .

证明. □

2. 证明 (10.5.28) 式.

3. 设  $f \in C[a, b]$ . 若存在  $h_1, h_2 \in L^1[a, b]$  使得

$$f(x) = f(a) + \int_a^x h_j(t) dt, \forall x \in [a, b], j = 1, 2.$$

证明:  $\int_a^b |h_1(x) - h_2(x)| dx = 0$ .

4. 设  $1 < q < +\infty, E \subseteq \mathbb{R}^n$  为测度非零的可测集,  $G$  由 (10.5.50) 式给出. 证明:  $\forall g \in L^q(E)$ , 存在  $g_\varepsilon \in G$  使得  $\|g_\varepsilon - g\|_{L^q(E)} < \varepsilon$ .

## 10.5 B

1. 举例说明, 对于  $A \in C([a, b]; \mathbb{R}^{(2m) \times (2m)}), A^\top(x) = A(\forall x \in [a, b])$ , 条件

$$\int_a^b \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{pmatrix}^\top A^\top \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) \end{pmatrix} dx \geq 0, \quad \forall \varphi \in C_0^1([a, b]; \mathbb{R}^m)$$

并不蕴涵

$$A \geq 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

# 第 11 章 曲线积分与曲面积分

## 11.1 第一型曲线积分

### 11.1 A

1. 计算以下第一型曲线积分:

$$(1) \int_C xyz \, ds, \text{ 其中 } C \text{ 为空间曲线 } \begin{cases} x(t) = \cos t, \\ y(t) = \sin t, \\ z(t) = t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

解. 由参数方程得

$$\int_C xyz \, ds = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sin t \cdot t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \, dt = -\frac{\sqrt{2}\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

$$(2) \int_C x^2 \, ds, \text{ 其中 } C \text{ 为平面曲线 } x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

解. 置  $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t \in [0, 2\pi]$ , 从而

$$\int_C x^2 \, ds = \int_0^{2\pi} \cos^6 t \sqrt{9 \sin^2 t \cos^2 t} \, dt = 3 \int_0^{2\pi} \cos^6 t |\sin t \cos t| \, dt = \frac{3}{2}. \quad \blacksquare$$

$$(3) \int_C |xy| \, ds, \text{ 其中 } C \text{ 为平面曲线 } (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

解. 置  $x = \sqrt{\cos 2t} \cos t, y = \sqrt{\cos 2t} \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ , 利用对称性则有

$$\int_C |xy| \, ds = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2t \cdot \cos t \cdot \sin t}{\sqrt{\cos 2t}} \, dt = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^{1/2} x \, dx = \frac{1}{2} B\left(1, \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3}. \quad \blacksquare$$

### 11.1 B

1. 试将定积分的一些性质移植到第一型曲线积分.

解. ■

## 11.2 第一型曲面积分

### 11.2 A

1. 设  $a, b > 0$ , 计算椭圆柱面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  在  $z \geq 0, y \geq 0$  中夹在平面  $y = z$  和平面  $z = 0$  之间部分的侧面积.

解. 记  $L$  为在  $xOy$  平面上的曲线  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 结合题设有  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ , 即  $z(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ , 于是面积可以表成以下第一型曲线积分

$$\int_L z(x) \, ds = \int_0^\pi b\sqrt{1 - \cos^2 \theta} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \, d\theta.$$

选取  $x, z$  为参数, 则由  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  与  $y = z$  得到题设区域到  $xOz$  面的投影

$$D = \left\{ (x, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, z \geq 0 \right\}.$$

又记  $F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ , 则有  $y_x = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ , 于是题设区域的面积

$$S = \iint_D \sqrt{1 + y_x^2} \, dx \, dz,$$

置  $x = ar \cos \theta, z = br \sin \theta$ , 结合  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 代入  $y_x$ , 则有

$$S = \iint_D \sqrt{1 + y_x^2} \, dx \, dz = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{b^2 r^2 \cos^2 \theta}{a^2 (1 - r^2 \cos^2 \theta)}} \cdot abr \, dr$$

■

2. 计算螺旋面  $\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = a\theta \end{cases} \quad (r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi])$  的面积.

记  $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, a\theta)$ , 从而  $\mathbf{r}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ ,  $\mathbf{r}_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, a)$ , 于是题设曲面的面积 ( $D = \{(r, \theta) \mid r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi]\}$ )

$$\begin{aligned} S &= \iint_D |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{a^2 + r^2} \, dr \\ &= \pi R \sqrt{a^2 + R^2} + \pi a^2 \ln \left( \frac{R + \sqrt{a^2 + R^2}}{a} \right). \end{aligned}$$

3. 设  $\Sigma$  为三角形  $x + y + z = 1 (x, y, z \geq 0)$ , 计算第一型曲面积分  $\iint_\Sigma \frac{1}{x + 2y + 3z} \, dS$ . 计算曲面积分  $\iint_\Sigma x^2 \, dS$ .

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \frac{1}{x + 2y + 3z} \, dS &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{\sqrt{3} \, dy}{3 - 2x - y} = \sqrt{3} \int_0^1 \ln \left( \frac{3-x}{2-x} \right) dx = \sqrt{3} \ln \frac{27}{16}. \\ \iint_\Sigma x^2 \, dS &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 \, dy = \int_0^1 x^2 (1-x) \, dx = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

4. 设球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  上均匀分布着单位面积质量为  $\rho$  的物质. 某质点质量为  $m$ , 位于点  $(0, 0, r), r \neq R$ . 试求球面上的物质的质量以及球面对于该质点的引力.

解.

5. 设  $\ell$  是长为  $L$  且足够光滑的平面闭曲线. 对于  $\delta > 0$ , 设  $W_\delta$  为所有以  $\ell$  上的点为球心,  $\delta$  为半径的球的并. 证明: 当  $\delta$  足够小时,  $W_\delta$  的表面积为  $2\pi\delta L$ .

当  $\delta$  足够小时,  $W_\delta$  暴露在外面积为

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \theta \delta \, d\theta \, dL = 2\pi\delta L.$$

6. 设  $\varphi, \psi$  在  $[a, b]$  上连续可导. 证明: 曲线  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (t \in [a, b])$  绕  $x$  轴旋转一周所得到的旋转面的面积为  $2\pi \int_a^b |\psi(t)| \sqrt{|\varphi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2} \, dt$ .

曲线绕  $x$  轴旋转一周得到旋转面的面积  $S$  正是

$$\sup \left\{ \sum_{j=1}^N 2\pi \alpha_j |E_j| \mid \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{E_j} \text{ 为 } [a, b] \text{ 上的简单函数, } 0 \leq \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{E_j} \leq |y| \right\},$$

记题设曲线为  $L$ , 于是  $S = 2\pi \int_L |y| \, ds = 2\pi \int_a^b |\psi(t)| \sqrt{|\varphi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2} \, dt$ .

### 11.2 B

1. 设  $a, b, c$  为实数,  $A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ,  $f \in L^1[-A, A]$ , 证明 Poisson(泊松) 公式

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz) \, dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(Au) \, du.$$

证明. 我们对坐标系  $Oxyz$  进行旋转, 记新坐标系为  $Ouvw$ , 平面  $Ovw$  即为  $ax+by+cz=0$ ,  $u$  轴垂直于该平面, 于是有

$$u = \frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

则有

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz) \, dS = \iint_{u^2+v^2+w^2=1} f(Au) \, dS,$$

于是有  $v^2 + w^2 = (1 - u^2)$ , 则令

$$u = u, \quad v = \sqrt{1-u^2} \cos \theta, \quad w = \sqrt{1-u^2} \sin \theta,$$

□



## 11.3 第二型曲线积分

## 11.3A

1. 计算以下第二型曲线积分:

$$(1) \int_C ye^{xy} \cos z \, dx + xe^{xy} \cos z \, dy - e^{xy} \sin z \, dz, \text{ 其中 } C \text{ 为曲线 } \begin{cases} x(t) = \cos t, \\ y(t) = \sin t, \\ z(t) = t \end{cases} \text{ 对应于 } t \text{ 从 } 0 \text{ 到 } 2\pi \text{ 的那一段.}$$

$$(2) \int_C (3x + 2y) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy, \text{ 其中 } C \text{ 为平面闭曲线 } x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \text{ 的逆时针方向.}$$

解. (1) 由题意知

$$\int_C ye^{xy} \cos z \, dx + xe^{xy} \cos z \, dy - e^{xy} \sin z \, dz = \int_0^{2\pi} e^{\sin t \cos t} (\cos 2t - \sin t) \, dt,$$

首先由

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{\sin t \cos t} \sin t \, dt &= \int_0^{\pi} e^{\sin t \cos t} \sin t \, dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin t \cos t} \sin t \, dt \\ &= \int_0^{\pi} e^{\sin t \cos t} \sin t \, dt - \int_0^{\pi} e^{\sin x \cos x} \sin x \, dx = 0, \end{aligned}$$

其次

$$\int_0^{\pi} e^{\sin t \cos t} \cos 2t \, dt = e^{\sin t \cos t} \Big|_0^{\pi} = 0,$$

于是原积分为 0.

(2) 置  $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t$  从 0 到  $2\pi$ , 于是

$$\begin{aligned} &\int_C (3x + 2y) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} (3(\cos^6 t - \sin^6 t) \sin^2 t \cos t - 3(3\cos^3 t + 2\sin^3 t) \cos^2 t \sin t) \, dt \\ &= -6 \int_0^{2\pi} \sin^4 t \cos^2 t \, dt = -\frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

2. 设  $C$  为  $\mathbb{R}^2$  中  $C^1$  简单曲线.  $P, Q$  为  $C$  上的连续函数, 证明  $\left| \int_C P \, dx + Q \, dy \right| \leq \int_C \sqrt{P^2 + Q^2} \, ds$ .

证明.

$$\left| \int_C P \, dx + Q \, dy \right| = \left| \int_C (P, Q) \cdot ds \right| = \int_C |(P \cos \alpha + Q \sin \alpha) \, ds| \leq \int_C |P \cos \alpha + Q \sin \alpha| \, ds,$$

由 Cauchy 不等式知  $|P \cos \alpha + Q \sin \alpha| \leq \sqrt{P^2 + Q^2} \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$ , 命题获证.  $\square$

## 11.3B

1. 对于  $\mathbb{C}$  中的  $C^1$  曲线  $C$  及其上的复值连续函数  $f$ , 记  $f(z) dz = f(x + iy)(dx + i dy) = f(x + iy) dx + i f(x + iy) dy$ . 若令  $s$  为  $C$  的弧长参数,  $C_{s, \Delta s}$  为  $C$  上对应于弧长从  $s$  到  $s + \Delta s$  的那一段, 则  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\left| \int_{C_{s, \Delta s}} dz \right|}{|\Delta s|} = 1$ . 这样相当于  $|dz| = ds$ . 证明:  $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds$ .

证明. 利用题设条件与 Cauchy 不等式有:

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &= \left| \int_C f(x + iy) dx + i f(x + iy) dy \right| \\ &\leq \int_C |(f(x + iy), i f(x + iy)) \cdot (dx, dy)| \leq \int_C |f(z)| ds \end{aligned} \quad \square$$

## 11.4 第二型曲面积分

## 11.4A

1. 计算以下第二型曲面积分:

(1)  $\iint_{\Sigma} (x + y) dy dz + (y + z) dz dx + (z + x) dx dy$ , 其中  $\Sigma$  为曲面  $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$  的上半部分, 方向取上侧.

(2)  $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + (z + 2)^2 dx dy$ , 其中  $\Sigma$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  对应于  $0 \leq z \leq 1$  的那部分, 方向取上侧.

解. (1) 为计算  $\iint_{\Sigma} (x + y) dy dz$ , 将  $\Sigma$  投影到  $yz$  平面, 其投影为

$$D_1 = \left\{ (y, z) \mid \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1, z \geq 0 \right\}.$$

曲面分为两部分:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left\{ (x, y, z) \mid x = \sqrt{1 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9}}, (y, z) \in D_1 \right\}, \text{方向为前侧,} \\ \Sigma_2 &= \left\{ (x, y, z) \mid x = -\sqrt{1 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9}}, (y, z) \in D_1 \right\}, \text{方向为后侧.} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (x + y) dy dz &= \iint_{\Sigma_1} (x + y) dy dz + \iint_{\Sigma_2} (x + y) dy dz \\ &= \iint_{D_1} \left( \sqrt{1 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9}} + y \right) dy dz + \iint_{D_1} \left( \sqrt{1 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9}} - y \right) dy dz \\ &= 2 \iint_{D_1} \sqrt{1 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9}} dy dz = 4\pi. \end{aligned}$$

同理计算可得  $\iint_{\Sigma} (y + z) dz dx = 4\pi$ ,  $\iint_{\Sigma} (z + x) dx dy = 4\pi$ . 从而

$$\iint_{\Sigma} (x + y) dy dz + (y + z) dz dx + (z + x) dx dy = 12\pi.$$

(2) 由对称性

$$\iint_{\Sigma} x^2 dy dz = \iint_{\Sigma} y^2 dz dx = 0.$$

于是仅需计算

$$\iint_{\Sigma} (z+2)^2 dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left( \sqrt{x^2+y^2} + 2 \right)^2 dx dy = \frac{43}{6} \pi.$$

■

2. 设  $\Sigma$  为  $\mathbb{R}^3$  中的有向  $C^1$  曲面,  $P, Q, R$  为  $\Sigma$  上的连续函数. 证明:

$$\left| \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \right| \leq \iint_{\Sigma} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} dS.$$

证明. 由第一, 第二型曲面积分的关系与 Cauchy 不等式得到

$$\left| \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \right| = \left| \iint_{\Sigma} (P, Q, R) \cdot \mathbf{n}(x) dS \right| \leq \iint_{\Sigma} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} dS.$$

其中  $\mathbf{n}$  为  $\Sigma$  对应的单位法向量.

□

### 11.4 B

1. 若请你对  $\mathbb{R}^3$  中的曲面  $\Sigma$  即函数  $P$  定义  $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz$ , 则对于  $\Sigma$  和  $P$  的要求要怎么提?

解.

■

## 11.5 Green 公式, Gauss 公式, Stokes 公式

### 11.5 A

1. 计算以下曲线积分绕原点的循环常数:

$$(1) \int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} \quad (2) \int_C \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}.$$

解. 不妨取  $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ , 置  $x = \cos \theta, y = \sin \theta, (\theta \in [0, 2\pi])$ , 于是得到

$$\int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = 2\pi, \quad \int_C \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = 0.$$

■

2. 设曲线  $C$  为  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2t \sin t, \\ z = t \end{cases}$  对应于  $t$  从 0 到  $2\pi$  的第一段. 试计算

$$\int_C e^{xy} [(y \cos(x+y) + yz^2 - \sin(x+y)) dx + (x \cos(x+y) + xz^2 - \sin(x+y)) dy + 2z dz].$$

解. 方便起见设原积分为  $\int_C P dx + Q dy + R dz$ . 令  $L$  为直线段  $x = 1, y = 0, z$  从  $2\pi$  跑到 0, 于是  $C \cup L$  为闭曲线, 任取曲面  $\Sigma$  以  $C \cup L$  为边界, 方向与  $C \cup L$  的方向成右手系, 由 Stokes 公

式得到

$$\int_{C \cup L} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

从而

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = - \int_L P dx + Q dy + R dz = \int_0^{2\pi} 2ez dz = 4e\pi^2. \quad \blacksquare$$

3. 设  $R > 0$ , 计算积分  $\iint_{\Sigma} \frac{Rx dy dz + (z+R)^2 dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , 其中  $\Sigma$  为下半球面  $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  的上侧.

解. 记原积分为  $I_2$ , 选取平面  $D = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0\}$ , 方向为上侧, 可以得到

$$I_2 := \iint_D \frac{Rx dy dz + (z+R)^2 dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \iint_D \frac{R^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = 2\pi R^3.$$

记  $\Omega$  为  $\Sigma \cup D$  的内部, 于是由 Gauss 公式

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{(z+R)^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \right) dx dy dz \\ &= \frac{13}{6}\pi R^3 + \pi R^2 - \frac{2}{3}\pi^2 R^3 \end{aligned}$$

于是  $I_1 = \frac{2}{3}\pi^2 R^3 - \pi R^2 - \frac{1}{6}\pi R^3$ . ■

4. 设  $S$  为椭球面  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$  的上半部分 ( $z > 0$ ), 对于  $P = (x, y, z) \in S$ ,  $\Sigma$  为  $S$  在点  $P$  处的切平面,  $\rho(x, y, z)$  为原点到平面  $\Sigma$  的距离, 求积分  $\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$ .

解. 首先, 记  $f = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 - 1$ , 对于  $P = (A, B, C) \in S$ ,  $\Sigma$  的方程为

$$(f_x|_{x=A}, f_y|_{y=B}, f_z|_{z=C}) \cdot (x - A, y - B, z - C) = 0,$$

即  $Ax + By + 2Cz - A^2 - B^2 - 2C^2 = 0$ . 由此

$$\rho(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}},$$

即计算  $\iint_S \frac{z\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}}{x^2 + y^2 + 2z^2} dS$ . 注意到  $\Sigma$  上的点  $(x, y, z)$  处, 指向曲面外侧的单位法向量为  $\frac{(x, y, 2z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}}$ , 这样就是计算

$$I(S) := \iint_S \frac{zx}{x^2 + y^2 + 2z^2} dy dz + \frac{zy}{x^2 + y^2 + 2z^2} dz dx + \frac{2z^2}{x^2 + y^2 + 2z^2} dx dy.$$

置  $D = \{(x, y, z) | \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1, z = 0\}$ , 易见  $I(D) = 0$ . 令  $\Omega$  表示  $S \cup D$  的内部, 利用 Gauss 公式, 得到

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} \frac{6z(x^2 + y^2 + 2z^2) - 2x^2z - 2y^2z - 8z^3}{(x^2 + y^2 + 2z^2)^2} dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (6r \cos \varphi \sin \varphi - 2r \cos \varphi \sin^3 \varphi - 4r \cos^3 \varphi \sin \varphi) dr = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5. 设  $\theta_1 < \theta_2 \leq \theta_1 + 2\pi$ . 证明: 在极坐标下由射线  $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$  和曲线  $C: \rho = \rho(\theta) (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2)$  所围成的曲边扇形 (如图 11.1 所示) 的面积为  $\frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta) d\theta$ . 当  $\rho$  连续可导时, 验证这一结果与公式 (11.5.9) 给出的结果一致. 思考这一面积为什么不是  $\frac{1}{2} \int_C \rho^2 d\sigma$ .

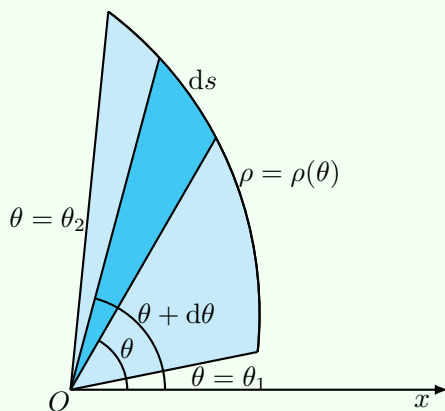


图 11.1 第 5 题图

解. ■

6. 试对于足够光滑的  $f$  和  $\mathbf{F}$ , 化简以下表达式:

$$(1) \nabla \cdot \nabla f; \quad (2) \nabla \times \nabla f; \quad (3) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}); \quad (4) \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}); \quad (5) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}).$$

解. 不妨设  $f = f(x, y, z), \mathbf{F} = X(x, y, z)\mathbf{i} + Y(x, y, z)\mathbf{j} + Z(x, y, z)\mathbf{k}$ , 于是

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

容易验证  $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}, \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ .

$$\begin{aligned} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \right), \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla \times \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \\ &= \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z \partial y} \right). \end{aligned}$$

值得一提的是  $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \Delta \mathbf{F}$ . ■

7. 保守场, 无源场和无旋场之间有没有什么关系?

解. content... ■

8. 用记号  $\nabla$  重写 Gauss 公式和 Stokes 公式.

解. Gauss 公式可以表示为

$$\iint_{\partial \Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV,$$

Stokes 公式可表示为

$$\int_{\partial \Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}. \quad \blacksquare$$

## 9. 验证

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

适用于 Green 公式, Ostrogradskii-Gauss 公式, Stokes 公式以及 Newton-Leibniz 公式.

解. ■

10. 试利用 Stokes 公式计算  $\int_C y dx + 2z dy + 3x dz$ , 其中  $C$  为圆周  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$  从  $z$  轴正向<sup>a</sup>看去, 曲线是逆时针方向的.

解. 平面  $x + y + z = 0$  的法线的方向余弦为  $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , 于是由 Stokes 公式

$$\int_C y dx + 2z dy + 3x dz$$

<sup>a</sup>表示从上往下看.

## 11.5 B

1. 设  $a, b, c > 0$ ,  $\Sigma$  为曲面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . 利用 Gauss 公式计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} \frac{dS}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

解. 记原积分为  $I$ , 注意到有

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} dS.$$

注意到曲面  $\Sigma$  的单位法向量为  $\frac{(x/a^2, y/b^2, z/c^2)}{\sqrt{x^2/a^4 + y^2/b^4 + z^2/c^4}}$ . 于是有

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} =: \iint_{\Sigma} P dz + Q dz dx + R dx dy,$$

由于  $P, Q, R$  在原点处不可导, 而在别处有

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

再由 Gauss 公式有

$$I = \iint_{\Sigma'} \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{\Sigma'} \frac{dS}{\rho^2} = \frac{4\pi\rho^2}{\rho^2} = 4\pi,$$

其中  $\Sigma'$  是半径  $\rho$  充分小使得含于  $\Sigma$  的球面  $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ . ■

2. 设  $A$  是  $n$  阶方阵,  $\Omega$  为  $\mathbb{R}^n$  中具有  $C^1$  边界的有界区域,  $\varphi \in C_0^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . 证明:

$$\int_{\Omega} \det(A + \varphi_x) dx = \det(A) |\Omega|.$$

证明. □

3. 设  $n \geq 1$ ,  $R$  是仅在点  $(0,0)$  为零的  $2n$  次二元多项式,  $P, Q$  是不超过  $2n-2$  次的二元多项式. 若  $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{R(x,y)}{(x^2+y^2)^n} > 0$ , 且在点  $(0,0)$  之外成立  $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x R(x,y)} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y R(x,y)}$ , 证明: 曲线积分  $\int_C \frac{P dx + Q dy}{R}$  绕点  $(0,0)$  的循环常数为零.

证明. □

4. 在上一题中, 去掉条件  $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{R(x,y)}{(x^2+y^2)^n} > 0$  后结论是否依然成立.

解. ■

## 11.6 调和函数与解析函数

### 11.6 A

1. 利用解析函数的性质证明:  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - \cos x}{x} dx = 0$ .

证明. 考虑积分  $\int_L \frac{e^{iz}}{z} dz$ , 其中  $L$  是如下图所示的路径:

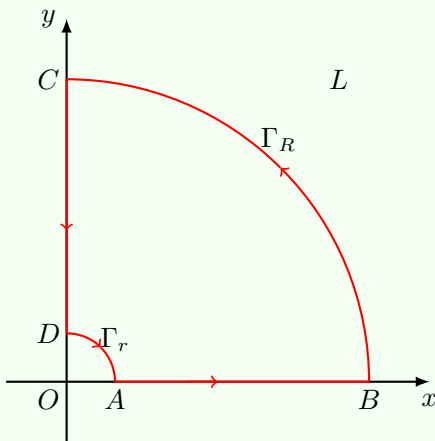


图 11.2

其中  $\Gamma_R$  表图中半径为  $R$  的弧. 由于  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$  在  $\Gamma_R$  所围区域内解析, 从而

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

又

$$\int_L f(z) dz = \int_{AB} f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \int_{CD} f(z) dz + \int_{\Gamma_r} f(z) dz,$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_{AB} f(z) dz + \int_{CD} f(z) dz &= \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_R^r \frac{e^{-y}}{y} dy \\ &= \int_r^R \frac{-e^{-x} + e^{ix}}{x} dx = - \int_r^R \frac{e^{-x} - \cos x}{x} dx + i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx, \end{aligned}$$

下面我们说明  $\int_{\Gamma_r} f(z) dz = -\frac{\pi i}{2}$ , 由于  $\lim_{r \rightarrow 0} z f(z) = 1$ , 则  $r$  充分小时, 有

$$|z f(z) - 1| < \frac{2}{\pi} \varepsilon,$$

又

$$\left| \int_{\Gamma_r} f(z) dz - i \frac{\pi}{2} \right| = \left| \int_{\Gamma_r} \frac{z f(z) - 1}{z} dz \right| < \varepsilon,$$

从而结论得证. 又由 Jordan 引理可知

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

结合上述结论可知  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - \cos x}{x} dx = 0$ . □

2. 设  $1 \leq p < +\infty$ ,  $\varphi$  为  $\mathbb{R}^n$  上的调和函数,  $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . 证明  $\varphi \equiv 0$ .

证明. □

3. 设  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$  为上调和函数, 即满足  $-\Delta \varphi \geq 0$ . 任取  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , 证明  $F(r) = \frac{1}{|B_r(\mathbf{x}_0)|} \cdot \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  关于  $r > 0$  单调. □

证明.

4. 设  $f$  在有界复区域  $D$  上复解析, 在  $\bar{D}$  上连续. 若存在  $z_0 \in D$  满足  $|f(z_0)| \leq \min_{z \in \partial D} |f(z)|$ . 证明:  $f$  在  $D$  内为常数或有零点.

证明. 假设  $f$  不为常数且无零点, 则  $\frac{1}{f(z)}$  在  $D$  上解析, 依条件有  $\left| \frac{1}{f(z_0)} \right| \geq \max_{x \in \partial D} \left| \frac{1}{f(z)} \right|$ , 这与最大模原理矛盾, 从而  $f$  在  $D$  内有零点. □

5. 设  $f$  在  $\mathbb{C}$  上复解析,  $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = +\infty$ . 证明:  $f$  有零点. 进一步, 若存在  $n \geq 1$  使得  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{|f(z)|}{|z|^n} = a \in (0, +\infty]$ , 则  $f$  至少有  $n$  个零点 (含重数).

证明. 由条件知  $\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = 0$ , 若  $f$  无零点, 则  $\frac{1}{f(z)}$  解析, 但依极限知  $\exists z_0$ , 使得  $\forall |z| > |z_0|$  时有  $|1/f(z)| > |1/f(z_0)|$ , 与最大模原理矛盾, 从而  $f$  有零点. 进一步, 若  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{|f(z)|}{|z|^n} = a \in (0, +\infty]$ , 则  $\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z)}{z^{n-1}} \right| = +\infty$ , 归纳即得结论. □

6. 证明: 对任何  $z \in \mathbb{C}$  以及  $\delta \in (0, 1)$ , 有  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\int_{(0, 1-\delta) \cup (1+\delta, +\infty)} x^z (xe^{-x})^s dx}{\int_0^{+\infty} (xe^{-x})^s dx} = 0$ .



证明. 记  $\alpha$  为  $xe^{-x}$  在  $[0, 1-\delta] \cup [1+\delta, +\infty]$  上的最大值, 给定  $\beta \in (\alpha, e^{-1})$ , 则存在长度为  $l$  的区间  $I \subseteq [1-\delta, 1+\delta]$ , 使得  $xe^{-x} \geq \beta$  对  $x \in I$  恒成立. 从而  $\int_0^{+\infty} (xe)^s dx \geq l \cdot \beta^s$ ,  $s$  足够大时, 存在常数  $C_1$  使得

$$\left| \int_0^{1-\delta} x^z (xe^{-x})^s dx \right| \leq C_1 \cdot \alpha^s,$$

又存在常数  $C_2$  使得

$$\begin{aligned} \left| \int_{1+\delta}^{+\infty} x^z (xe^{-x})^s dx \right| &\leq \int_{1+\delta}^{+\infty} x^{\operatorname{Re} z} (xe^{-x})^s dx \\ &\leq \int_{1+\delta}^{+\infty} x^{\operatorname{Re} z} (xe^{-x})^{s-1} \cdot [s(x-1) - \operatorname{Re} z] e^{-x} dx = - \int_{1+\delta}^{+\infty} d[x^{\operatorname{Re} z} (xe^{-x})^s] \leq C_2 \cdot \alpha^s. \quad \square \end{aligned}$$

### 11.6 B

1. 设  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \in S^{n-1}$ . 证明: 在  $\mathbb{R}^n$  的单位球  $B_1(x)$  内,  $f(x) = |\sigma - x|^\alpha$  可以展开成  $x$  的幂级数, 且对任何  $\delta \in (0, 1)$ , 该幂级数关于  $(\sigma, x) \in S^{n-1} \times B_\delta(0)$  一致收敛.

2. 已知当  $0 < \alpha < 1$  时, 成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi \cot(\alpha\pi)}{2\alpha}.$$

试利用复解析函数的性质证明: 当  $\alpha > 0$  时, 成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = -\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\pi}{2\alpha \tanh(\alpha\pi)}.$$

3. 试用不同的方法证明

$$\operatorname{sh} x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

## 11.7 附录: $C^1$ 曲面上的 Hausdorff 测度

### Theorem 11.7.1

设  $1 \leq k \leq n$ ,  $D_0$  为  $\mathbb{R}^k$  中得区域, 单射  $\varphi: D_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  连续可微, 则对于紧包含于  $D_0$  得可测集  $D$ ,  $\Sigma = \varphi(D)$  得  $k$  维测度为

$$V_k(\Sigma) = \int_D \sqrt{\det(\varphi_u^T \varphi_u)} du.$$

等价地,

$$V_k(\Sigma) = \int_D \sqrt{\varphi_u \text{ 的所有 } k \text{ 阶子式的平方和}} du.$$

**11.7 A**

1. 设  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  为区域,  $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ . 设  $F \subset \Omega$  为紧集,

$$\omega(r) = \sup_{\substack{0 < |u-v| \leq r \\ u \in F, v \in \Omega}} \frac{|\varphi(u) - \varphi(v)|}{|u - v|}, \quad r > 0.$$

证明  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \omega(r) = 0$ .

证明.

□

**11.7 B**

1. 试减弱定理 11.7.1 得条件使得结论仍然成立.

解.

■

# 第 12 章 Fourier 级数

## 12.1 三角级数, Fourier 级数

### 12.1 A

1. 设  $f$  以  $2\pi$  为周期, 对于  $x \in [0, 2\pi)$ ,  $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ , 其中  $0 \leq a < b < 2\pi$ . 试将  $f$  展开成 Fourier 级数.

解. 我们有

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{[a,b]}(x) dx = \frac{b-a}{\pi}, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{[a,b]}(x) \cos nx dx = \frac{\sin nb - \sin na}{n\pi}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{[a,b]}(x) \sin nx dx = \frac{\cos na - \cos nb}{n\pi}. \end{aligned}$$

因此

$$f(x) \sim \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin nb - \sin na}{n\pi} \cos nx + \frac{\cos na - \cos nb}{n\pi} \sin nx \right). \quad \blacksquare$$

2. 试将  $|\cos x|$  和  $|\sin x|$  展开成 Fourier 级数.

解. 对于  $|\cos x|$ , 我们有

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \frac{4}{\pi}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos x| \cos 2nx dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)(2n-1)}.$$

对于  $|\sin x|$ , 有

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| dx = \frac{4}{\pi}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| \cos 2nx dx = -\frac{4}{\pi(2n+1)(2n-1)}.$$

于是有

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1} \cos nx}{\pi(2n+1)(2n-1)}, \quad |\cos x| = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cos nx}{\pi(2n+1)(2n-1)}. \quad \blacksquare$$

?

3. 设  $p, q$  为对偶数,  $f \in L^p_{\#}(\mathbb{R}), g \in L^q_{\#}(\mathbb{R})$ . 令

$$h(x) = \int_0^{2\pi} f(y)g(x-y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

证明:  $h$  以  $2\pi$  为周期. 进一步, 试用  $f, g$  的 Fourier 系数表示  $h$  的 Fourier 系数.

证明. 由

$$h(x+2\pi) = \int_0^{2\pi} f(y)g(x+2\pi-y) dy = \int_0^{2\pi} f(y)g(x-y) dy = h(x),$$

从而  $h(x)$  以  $2\pi$  为周期.

我们不妨记  $f$  的 Fourier 级数展开为  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ , 并且

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

注意  $f$  的 Fourier 级数可以表示为  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ , 其中

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - b_n i}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + b_n i}{2}, \quad n \geq 1,$$

于是有  $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, dx$ , 我们以此为基础, 分析  $h$  的 Fourier 系数与  $f, g$  的 Fourier 的

关系, 分别记  $g, h$  的 Fourier 展开为  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n e^{inx}$ ,  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q_n e^{inx}$ , 于是

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x) e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} f(y) g(x-y) \, dy \right) e^{-inx} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny} \left( \int_0^{2\pi} g(x-y) e^{-in(x-y)} \, dx \right) \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny} \, dy \cdot \int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx} \, dx = c_n \cdot 2\pi p_n. \end{aligned} \quad \square$$

4. 设  $f \in L^1_{\#}(\mathbb{R})$ ,  $h_1(x) = f(-x)$ ,  $h_2(x) = f(x+x_0)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), 其中  $x_0 \in \mathbb{R}$ . 试用  $f$  的 Fourier 系数表示  $h_1, h_2$  的 Fourier 系数.

解. 设

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

通过计算得

$$\begin{aligned} h_1(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx - b_n \sin nx), \\ h_2(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \cos nx + (b_n \cos nx_0 - a_n \sin nx_0) \sin nx). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

5. 设  $f(x) = x^2 - x$  ( $x \in [0, \pi]$ ). 试将  $f$  分别展开成以  $2\pi$  为周期的余弦级数与正弦级数.

解. 对  $f$  偶延拓  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \in [0, \pi], \\ x^2 + x, & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$  从而由

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2\pi^3 - 3\pi^2}{3\pi}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{2(2\pi - 1)(1 + \cos n\pi)}{\pi n^2}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

得

$$f(x) \sim \frac{2\pi^3 - 3\pi^2}{6\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2\pi - 1)(1 + \cos n\pi)}{\pi n^2} \cos nx.$$

同理对  $f$  奇延拓  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \in [0, \pi], \\ -(x^2 + x), & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$  由

$$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx = \frac{4 \cos n\pi - 4 - 2n^2(\pi^2 - \pi) \cos n\pi}{\pi n^3}, \quad n \geq 1,$$

于是

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cos n\pi - 4 - 2n^2(\pi^2 - \pi) \cos n\pi}{\pi n^3} \sin nx. \quad \blacksquare$$

6. 设  $f$  以  $2\pi$  为周期,

$$f(x) = -\ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right), \quad \forall x \in (0, 2\pi).$$

试计算  $f$  的 Fourier 级数.

解. 计算得到

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = -\frac{1}{\pi} \left( 2\pi \ln 2 + 2 \int_0^\pi \ln \sin x dx \right) = 0.$$

对于  $\int_0^\pi \ln \sin x dx$ , 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sqrt{\pi - x} \ln \sin x = 0,$$

即原积分收敛, 又

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^\pi \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} 2 \ln \sin 2x dx = \pi \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx + 2 \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx \\ &= \pi \ln 2 + 2 \int_0^\pi \ln \sin x dx = \pi \ln 2 + 2I = -\pi \ln 2. \end{aligned}$$

继续计算得到

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right) \cos nx dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \ln 2 + \ln \sin \frac{x}{2} \right) \cos nx dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} \ln 2 \cdot \sin nx dx + \int_0^{2\pi} \ln \sin \frac{x}{2} \cdot \cos nx dx \right) \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \ln \sin x \cdot \cos 2nx dx = -\frac{2}{\pi} \left( \ln \sin x \cdot \frac{\sin 2nx}{2n} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin 2nx \cdot \cos x}{2n \sin x} dx \right) \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin 2nx \cdot \cos x}{\sin x} dx. \end{aligned}$$

注意到  $\sin 2nx \cdot \cos x = \sin(2n+1)x - \cos 2nx \cdot \sin x$ , 则

$$\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x - \cos 2nx \cdot \sin x}{\sin x} dx = \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx,$$

注意到

$$\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt),$$

从而

$$\frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin 2nx \cdot \cos x}{\sin x} dx = \int_0^\pi \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos 2kt \right) dt = \pi.$$

故  $a_n = \frac{1}{n}$ .

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right) \sin nx \, dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \ln 2 + \ln \sin \frac{x}{2} \right) \sin nx \, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} \ln 2 \cdot \sin nx \, dx + \int_0^{2\pi} \ln \sin \frac{x}{2} \cdot \sin nx \, dx \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \sin \frac{x}{2} \cdot \sin nx \, dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \sin x \cdot \sin 2nx \, dx \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \sin x \cdot \sin 2n(\pi - x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \sin x \cdot \sin 2nx \, dx = 0. \end{aligned}$$

即  $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ . ■

7. 设  $k \geq 1, a_n, b_n$  为  $f \in C_{\#}^k(\mathbb{R})$  的 Fourier 系数. 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k b_n = 0$ .

证明. 由推广的 Riemann-Lebesgue 引理易知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ . 这也作为三角级数成为某一函数 Fourier 展开的必要条件.

进一步由题设有

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = f(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) \sin nx \, dx$$

若记  $f'(x)$  的 Fourier 系数为  $a_n^{(1)}, b_n^{(1)}$ , 则  $a_n = -\frac{1}{n} b_n^{(1)}$ , 同理可得  $b_n = \frac{1}{n} a_n^{(1)}$ , 于是得到

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

记  $a_n^{(l)}, b_n^{(l)}$  为  $f^{(l)}$  的 Fourier 系数 ( $l \leq k$ ), 于是

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{n} b_n^{(1)} = -\frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} a_n^{(2)} \right) = \cdots = \pm \frac{1}{n^k} b_n^{(k)}, \quad \left( \text{或 } \pm \frac{1}{n^k} a_n^{(k)} \right) \\ b_n &= \frac{1}{n} a_n^{(1)} = \frac{1}{n} \left( -\frac{1}{n} a_n^{(2)} \right) = \cdots = \pm \frac{1}{n^k} a_n^{(k)}, \quad \left( \text{或 } \pm \frac{1}{n^k} b_n^{(k)} \right) \end{aligned}$$

从而  $a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right), b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ , 即得结论. □

### 12.1 B

1. 给定  $m \geq 1$ .

(1) 证明: 当  $n \rightarrow +\infty$  时,  $m$  阶三角多项式列

$$T_n(x) = a_{n0} + \sum_{k=1}^m (a_{nk} \cos kx + b_{nk} \sin kx)$$

关于  $x \in [0, 2\pi]$  一致收敛当且仅当对每个  $k (0 \leq k \leq m)$ ,  $\{a_{nk}\}$  和  $\{b_{nk}\}$  均收敛.

(2) 设  $\mathcal{T}_m$  表示以  $2\pi$  为周期的  $m$  阶三角多项式全体. 证明:  $\forall f \in C_{\#}(\mathbb{R})$ , 存在  $S \in \mathcal{T}_m$ , 使得

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x) - S(x)| = \inf_{T(x) \in \mathcal{T}_m} \max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x) - T(x)|.$$

证明. (1)

(2)

□

2. 试寻找比习题 A 第 7 题更一般的条件使得  $f$  的 Fourier 系数  $a_n, b_n$  满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k b_n = 0.$$

解. 在其证明中,  $f \in C_{\#}^k(\mathbb{R})$  可以退化到  $f^{(k)}(x) \in L(\mathbb{R})$ .

■

## 12.2 Fourier 级数的收敛性

### 12.2 A

1. 设  $f \in C_{\#}^1[0, 2\pi]$ , 证明:  $\int_0^{2\pi} \left| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \right|^2 dx \leq C \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx$ , 且其最佳常数为  $C = 1$ .

证明. 设

$$f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

于是有

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (kb_k \cos kx - ka_k \sin kx),$$

依 Parseval 等式便有

$$\begin{aligned} \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \right|^2 dx. \\ \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) &= \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} & C \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt - \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \right|^2 dx \\ &= \pi \left( \sum_{n=1}^{\infty} (Cn^2 - 1)(a_n^2 + b_n^2) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

□

2. 按以下步骤对  $C^1$  平面上的简单闭曲线  $C$ , 证明等周不等式  $4\pi S \leq L^2$ , 其中  $L, S$  分别为  $C$  的周长与所围区域的面积. 依次证明:

(1) 设  $s$  为弧长参数, 令  $t = \frac{2\pi s}{L}$ ,  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t \in [0, 2\pi])$ , 则  $L^2 =$

$$2\pi \int_0^{2\pi} (|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2) dt.$$

(2)  $S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt.$

(3)  $4\pi S \leq L^2$ .

证明. 首先由  $t = \frac{2\pi s}{L}$ , 得到  $\frac{ds}{dt} = \frac{L}{2\pi}$ , 从而

$$\frac{L^2}{4\pi^2} = \left( \frac{ds}{dt} \right) = |x'(t)|^2 + |y'(t)|^2,$$

积分得到  $L^2 = 2\pi \int_0^{2\pi} (|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2) dt$ .

由 Green 公式易见

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = \iint_D dx dy = S,$$

其中  $D$  表示闭曲线所围区域.

设

$$\begin{aligned} x(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \\ y(t) &\sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx). \end{aligned}$$

易见上述 Fourier 一致收敛, 则有

$$x'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx), \quad y'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nd_n \cos nx - nc_n \sin nx),$$

于是依照 Parseval 等式有

$$\frac{L^2}{2\pi^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |x'(t)|^2 dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |y'(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2),$$

容易得到

$$\begin{aligned} \frac{2S}{\pi} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n (2a_n d_n - 2c_n b_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n (2|a_n d_n| + 2|c_n b_n|) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^2 + d_n^2 + c_n^2 + b_n^2), \end{aligned}$$

由于  $n^2 \geq n$ , 于是  $4\pi S \leq L^2$ . □

3. 设  $f$  在  $[0, +\infty)$  上单调且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . 证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx dx = 0$ .

证明. 由于  $\left| \int_0^A \sin nx dx \right| = \frac{1 - \cos nA}{n} \leq 1$  有界,  $f$  单调且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 依 Dirichlet 判别法知  $\int_0^{+\infty} f(x) \sin nx dx$  收敛, 这意味着  $\exists A$  使得  $\forall \varepsilon > 0$  使得

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x) \sin nx dx \right| < \varepsilon,$$

令  $F(x) = xf(x)$ , 则  $F(0^+) = 0$ , 于是由 Dirichlet 引理可得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{F(x) - F(0^+)}{x} \sin nx = 0.$$

再由  $\varepsilon$  的任意性即得结论. □



4. 设  $n \geq 1$ , 证明:  $\int_0^{\pi/2} x \left( \frac{\sin nx}{\sin x} \right)^4 dx < \frac{n^2 \pi^2}{4}$ .

证明. 只需证  $n \geq 2$  的情况, 令

$$\int_0^{\pi/2} x \left( \frac{\sin nx}{\sin x} \right)^4 dx = \int_0^{\pi/(2n)} x \left( \frac{\sin nx}{\sin x} \right)^4 dx + \int_{\pi/(2n)}^{\pi/2} x \left( \frac{\sin nx}{\sin x} \right)^4 dx =: I + J.$$

对  $I$ , 用数学归纳法易知  $\left| \frac{\sin nx}{\sin x} \right| \leq n$ , 从而  $I \leq \frac{n^2 \pi^2}{8}$ ; 对  $J$ , 利用  $|\sin nx| \leq 1$  及  $\frac{2}{\pi} t < \sin t$  ( $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ), 可得  $J < \frac{n^2 \pi^2}{8}$ . 相加即得结论.  $\square$

5. 设  $f \in C(\mathbb{R})$  以 1 为周期,  $f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(2x)$ . 若存在  $g \in L^1[0, 1]$  使得  $f(x) = f(0) + \int_0^x g(t) dt$ , 证明:  $f \equiv 0$ .

证明. 设  $f$  的 Fourier 展开式为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2k\pi x) + b_k \sin(2k\pi x)),$$

则  $f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right)$  的 Fourier 展开为

$$\begin{aligned} & a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} ((1 + (-1)^k) a_k \cos(2k\pi x) + (1 + (-1)^k) b_k \sin(2k\pi x)) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (2a_{2k} \cos(4k\pi x) + 2b_{2k} \sin(4k\pi x)), \end{aligned}$$

而  $f(2x)$  的 Fourier 展开为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(4k\pi x) + b_k \sin(4k\pi x)).$$

比较系数得到

$$a_0 = 0, \quad a_k = 2a_{2k}, \quad b_k = 2b_{2k}, \quad k \geq 1,$$

从而

$$a_k = 2^n a_{2^n k}, \quad b_k = 2^n b_{2^n k}, \quad \forall k \geq 1, n \geq 1,$$

由题设  $f(x) = f(0) + \int_0^x g(t) dt$ , 于是

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n \int_0^1 f(x) \cos(2n\pi x) dx = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^1 g(x) \sin(2n\pi x) dx = 0,$$

同理  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n b_n = 0$ , 所以

$$a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} 2^n k a_{2^n k} = 0, \quad b_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} 2^n k b_{2^n k} = 0, \quad \forall k \geq 1,$$

这样  $f$  的 Fourier 系数均为 0, 所以  $f \equiv 0$ .  $\square$

6. 设  $1 \leq p < +\infty$ ,  $f \in L^p[0, 2\pi]$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sigma_n(f; \cdot) - f(\cdot)\|_{L^p[0, 2\pi]} = 0$ .

证明. 由于

$$\|\sigma_n(f; x) - f(x)\|_{L^p[0, 2\pi]} = \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} (f(x+t) - f(x)) \left( \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt \right|^p dx,$$

□

### 12.2B

1. 设  $f \in L^1_{\#}(\mathbb{R})$ ,  $g_n \in L^{\infty}(\mathbb{R}) (n \geq 1)$ , 满足

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_n(x) dx = 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |g_n(x)| dx \leq M, \quad \forall n \geq 1,$$

其中  $M$  为常数. 又对任何  $\delta > 0$ , 成立

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} (|g_n(x)| + |g_n(-x)|) dx = 0, \quad \sup_{\substack{\delta \leq |x| \leq \pi \\ n \geq 1}} |g_n(x)| < +\infty.$$

证明:

(1) 若  $f$  在点  $x_0$  连续, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g_n(x_0 - y) dy = f(x_0)$ .

(2) 若  $f$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g_n(x - y) dy - f(x) \right| = 0$ .

2. 推广上一题的结果.

3. 计算  $\int_0^{\pi/2} x \ln(\sin x) \ln(\cos x) dx$ .

证明. 容易得到  $\int_0^{\pi/2} x \ln(\sin x) \ln(\cos x) dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) \ln(\cos x) dx$ , 利用

$$\ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad \forall x \in (0, 2\pi).$$

置  $I = \int_0^{\pi/2} x \ln(\sin x) \ln(\cos x) dx$  我们有

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi/2} \left\{ [\ln(\sin x) + \ln(\cos x)]^2 - \ln^2(\sin x) - \ln^2(\cos x) \right\} dx \\ &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi/2} \left[ \ln^2 \frac{\sin 2x}{2} - 2 \ln^2(\sin x) \right] dx \\ &= \frac{\pi}{8} \int_0^{\pi/2} \left\{ \left[ 2 \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4nx}{n} \right]^2 - 2 \left[ \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n} \right]^2 \right\} dx \\ &= \frac{\pi}{8} \left( \pi \ln^2 2 - \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{8} \ln^2 2 - \frac{\pi^4}{192}. \end{aligned}$$

□

4. 试考察函数  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln x}$  在  $[-\pi, \pi]$  上的可积性.

5. 设  $\alpha \in (0, 1)$ , 考察函数  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$  和  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$  当  $x \rightarrow 0^+$  时的阶.

6. 设  $f \in C_{\#}[0, 2\pi]$  的 Fourier 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ . 问  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$  是不是某个  $g \in C_{\#}[0, 2\pi]$  的 Fourier 级数?
7. 设  $\{b_n\}$  为单调下降的正数列, 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$  在  $[-\pi, \pi]$  上一致收敛的充要条件是  $nb_n \rightarrow 0$ .
8. 试讨论如何定义方程 (12.2.47) 的解, 以及在何种条件下, 方程 (12.2.47) 有唯一解, 而 (12.2.48)-(12.2.49) 给出了方程的解.
9. 对于  $p \in [1, +\infty)$ , 证明 (12.3.38) 式与 (12.2.40) 式的等价性.
10. 证明 (12.2.39) 与 (12.2.41) 式等价.

## 12.3 Fourier 变换

### Theorem 12.3.1

设  $f, g \in \mathcal{S}$ , 则

$$\begin{aligned}(f * g)^{\wedge}(\boldsymbol{x}) &= \widehat{f}(\boldsymbol{x})\widehat{g}(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \\ (fg)^{\wedge}(\boldsymbol{x}) &= \left(\widehat{f} * \widehat{g}\right)(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

### Theorem 12.3.2

设  $f, g \in \mathcal{S}$ , 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\overline{g(\boldsymbol{x})} \, d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\boldsymbol{x})\overline{\widehat{g}(\boldsymbol{x})} \, d\boldsymbol{x}.$$

### 12.3A

1. 设  $L \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $g(\boldsymbol{x}) = f(r\boldsymbol{x})$ , 其中  $r > 0$  为给定实数, 试求  $f$  的 Fourier 变换表示  $g$  的 Fourier 变换.

解. ■

2. 设  $f \in C_c^2(\mathbb{R})$ , 证明  $\lim_{x \rightarrow \infty} |x^2 \widehat{f}(x)| = 0$ . 进而对于任何  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ , 有

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \widehat{f}\left(\frac{n}{T}\right) g\left(\frac{n}{T}\right) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}g(x) \, dx.$$

证明. □

3. 对于

$$f \in X_a = \{f | f \text{ 非负, 偶, } \operatorname{supp} f = \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right], f \text{ 在 } \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \text{ 内 Lipschitz 连续}\},$$

证明:  $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \, dx = f(0)$ .

证明. □

4. 设  $f(x) = \pi e^{-2\pi|x|}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ). 试求  $f$  的 Fourier 变换.

解. ■

5. 证明:  $g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2} e^{2\pi y z} dy$  复可导.

证明. □

6. 试用积分号下求导的方法计算

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} e^{-2\pi i x y} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

解. 首先  $F(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} dy$ , 即

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1,$$

又

$$F'(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} e^{-2\pi i x y} (-2\pi i y) dy = -2\pi i e^{-\pi x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(y+ix)^2} y dy,$$

由

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(y+ix)^2} y dy &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(y+ix)^2} ((y+ix) - ix) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(y+ix)^2} d(y+ix)^2 - ix \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(y+ix)^2} dy = -ix, \end{aligned}$$

于是  $F'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2}$ , 可知  $F(x) = \int_0^x F'(x) dx + F(0) = e^{-\pi x^2}$ . ■

### 12.3 B

1. 试仿下列等式给出一些类似的等式.

对于正数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 当且仅当  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1$  时, 成立

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\pi^2 \cos a_1 x}{\pi^2 - 4a_1^2 x^2} \cdots \frac{\pi^2 \cos a_n x}{\pi^2 - 4a_n^2 x^2} dx &= \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2^n \sin^n(1/2)} \int_0^{+\infty} \prod_{k=1}^n \left( \frac{\sin \frac{2a_k x + 1}{2}}{2a_k x + 1} + \frac{\sin \frac{2a_k x - 1}{2}}{2a_k x - 1} \right) dx &= \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\pi^2 - 2a_1 \pi x \sin a_1 x}{\pi^2 - 4a_1^2 x^2} \cdots \frac{\pi^2 - 2a_n \pi x \sin a_n x}{\pi^2 - 4a_n^2 x^2} dx &= \frac{\pi}{2}, \\ 3^n \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin a_1 x - a_1 x \cos a_1 x}{a_1^3 x^3} \cdots \frac{\sin a_n x - a_n x \cos a_n x}{a_n^3 x^3} dx &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

解. ■

2. 设  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , 且  $\int_{\mathbb{R}} (f^2(x) + (f'(x))^2) dx = 1$ . 证明:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , 且  $\|f\|_{\infty} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

证明. □

3. 设  $\alpha \in \mathbb{R}$ , 计算含参变量积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\pi x)}{1+x^2} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(\alpha\pi x)}{1+x^2} dx$ .

解. 记  $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\pi x)}{1+x^2} dx$ . 显然有  $J(\alpha) = J(-\alpha)$ , 为此我们不妨设  $\alpha \geq 0$ . 注意到  $\int_0^{+\infty} e^{-t(1+x^2)} dt = \frac{1}{1+x^2}$ , 于是

$$\int_0^{+\infty} \cos(\alpha\pi x) \left( \int_0^{+\infty} e^{-t(1+x^2)} dt \right) dx = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cos(\alpha\pi x) dx,$$

记  $I(\alpha, t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cos(\alpha\pi x) dx$ , 如果我们置  $x = \sqrt{\frac{\pi}{t}}p$ ,  $\alpha = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}q$ , 则

$$I(\alpha, t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\pi p^2} \cos(2\pi pq) dp,$$

注意到在 12.3.A 第 6 题中算得

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} e^{-2\pi ixy} dy = e^{-\pi x^2},$$

这意味着  $I(\alpha, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\pi q^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{\pi^2 \alpha^2}{4t}\right)$ . 于是

$$J(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-t - \frac{\pi^2 \alpha^2}{4t}\right) \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

置  $t = u^2$ , 得

$$J(\alpha) = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u^2 + \frac{\pi^2 \alpha^2}{4u^2}\right)\right) du = \sqrt{\pi} e^{-\pi\alpha} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2u}\right)^2\right) du,$$

置  $y = u - \frac{\pi\alpha}{2u}$ , 有  $dy = \left(1 + \frac{\pi\alpha}{2u^2}\right) du$ , 并且  $u = 0, y = -\infty$ ;  $u = +\infty, y = +\infty$ , 于是

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy &= \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2u}\right)^2\right) \left(1 + \frac{\pi\alpha}{2u^2}\right) du \\ &= \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2u}\right)^2\right) du + \frac{\pi\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2u}\right)^2\right) \frac{du}{u^2}, \end{aligned}$$

对于  $\frac{\pi\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2u}\right)^2\right) \frac{du}{u^2}$ , 令  $u = -\frac{\pi\alpha}{2w}$ , 则  $du = \frac{\pi\alpha}{2} \frac{dw}{w^2}$ , 于是

$$\begin{aligned} \frac{\pi\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2u}\right)^2\right) \frac{du}{u^2} &= \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\left(w - \frac{\pi\alpha}{2w}\right)^2\right) \frac{2}{\pi\alpha} dw \\ &= \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\left(w - \frac{\pi\alpha}{2w}\right)^2\right) dw, \end{aligned}$$

即有  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2u}\right)^2\right) du$ , 从而

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2u}\right)^2\right) du = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

即得  $J(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\pi|\alpha|}$ . 对于  $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(\alpha\pi x)}{1+x^2} dx$ , 注意到

$$J'(\alpha) = -\pi \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(\alpha\pi x)}{1+x^2} dx = -\frac{\pi^2}{2} e^{-\pi\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

类似可得其余结果, 最终  $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(\alpha\pi x)}{1+x^2} dx = \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{\pi}{2} e^{-\pi|\alpha|}$ . ■

4. 证明: (12.3.27) 式给出了方程 (12.3.23) 的唯一解.

证明. □

5. 设  $p \in (1, 2)$ , 速降函数列  $\{\varphi_k\}$  在  $L^p(\mathbb{R}^n)$  中强收敛于  $f$ . 证明:  $\{\widehat{\varphi}_k\}$  在  $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$  中强收敛于  $\widehat{f}$ , 其中  $p'$  是  $p$  的对偶数.

证明. □

6. 设  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ . 证明: 可取到速降函数列  $\{f_k\}$  同时在  $L^1(\mathbb{R}^n)$  和  $L^2(\mathbb{R}^n)$  中强收敛于  $f$ .

证明. □

7. 证明: Plancherel 定理在  $L^2(\mathbb{R}^n)$  中成立.

证明. □

8. 设  $p \in [1, 2]$ , 证明 Hausdorff-Young 不等式对于  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  成立.

证明. □

9. 试推广定理 12.3.1 和 12.3.2.

解. ■

## 12.4 Fourier 级数的唯一性

### Lemma 12.4.1: Cantor 引理

设  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  在区间  $[a, b]$  上收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ .

### Lemma 12.4.2: Riemann 第二定理

设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ , 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \sin^2 nh}{n^2 h} = 0.$$

**Lemma 12.4.3**

设  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = A$ , 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \frac{\sin nh}{nh} \right)^2 = A.$$

**12.4 A**

1. 试利用闭区间套定理证明引理 12.4.1.

证明.

□

2. 证明引理 12.4.2

证明.

□

**12.4 B**

1. 推广引理 12.4.3.

解.

■