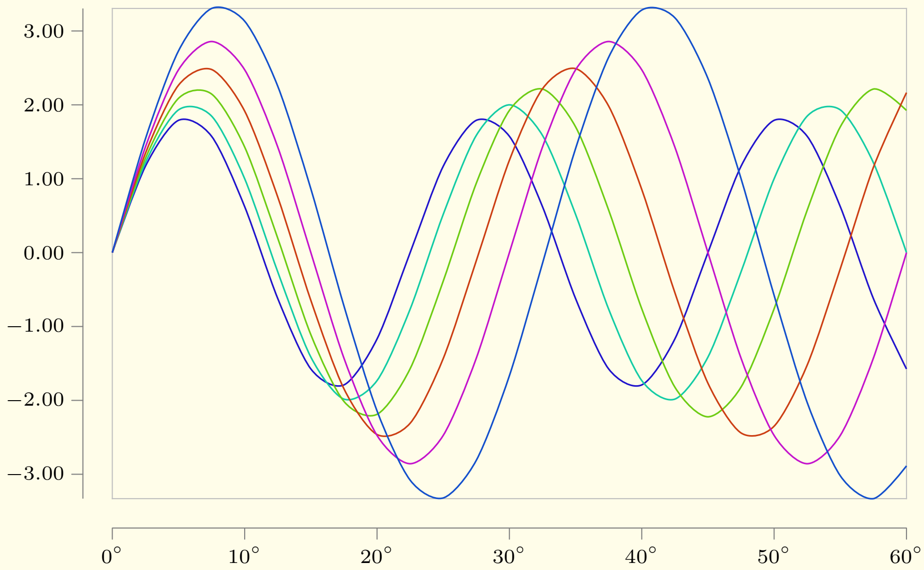
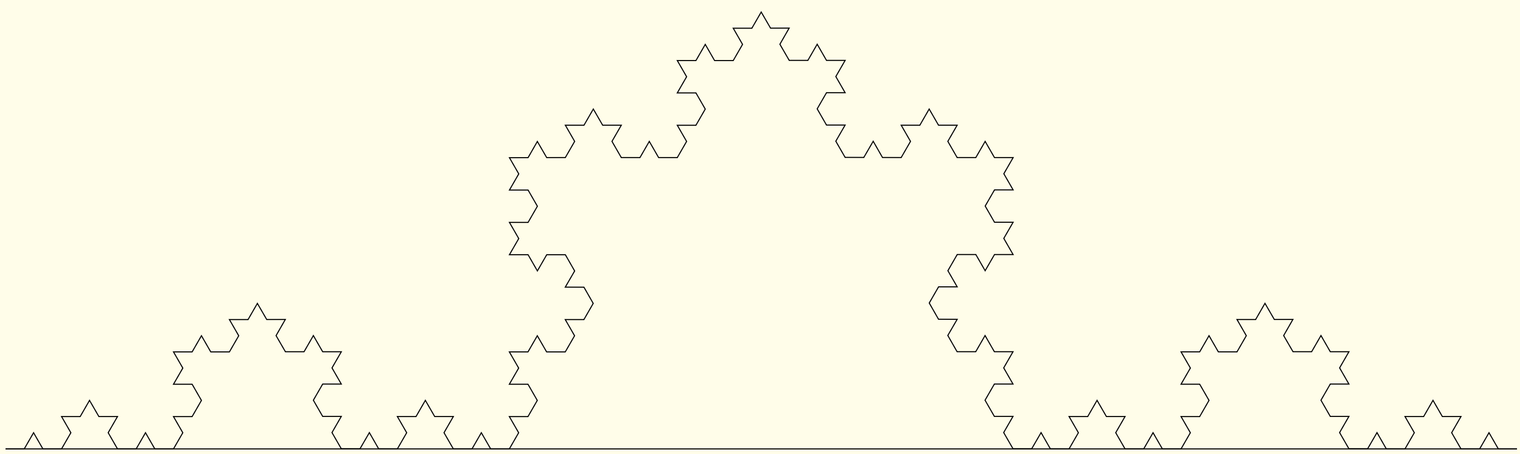
数学分析

答案

Le

更新中, 项目已开源至Github. 点击标题即可获取 LaTeX 源码





感悟

今天是 2023 年 5 月 20 日，一个特别而又普通的日子：为什么说特别，因为我是单身，为什么普通？还是这个原因。这一天我读完了这套数学分析的第一遍，并将部分习题抄录至此，但大概有百分之七十的习题并没有弄懂，你可能觉得是时间仓促导致，但事实并非如此：笔者从 22 年 8 月开始阅读，至今已十月有余。我听闻难事可让人一夜白头，然这十月后我的头发依旧乌黑 (只是掉了几根)，这样比起来楼红卫十分温柔，或者还有一个原因：我还没努力到白头的程度。

我每天都乐此不疲的发现让我头疼的题目，并不是我喜欢头疼，若非迫不得已，我宁愿躺在床上睡大觉。但我每天都很苦恼，这让我几乎无法入眠：大佬做题犹如作画，随便一笔我都必须揣摩良久，最后只能承认自己的愚蠢，这是十分值得伤心的事，我也有理由尽情悲伤。但我尽量幽默一点，因为学习与生活永远不可能让我一直保持笑脸，但幽默总能。

这本书极不适合初学者，当然你如果天赋异禀，那本书能让你飞黄腾达。笔者大一大二学过一点数学分析等之类的课程，看这套书就像牙齿掉光的老太太吃五仁月饼，不过值得一提的是，许多都是一股脑吞下的，以至于事后问我这什么味道：干巴巴，没什么味儿。

我几乎要放弃的时候非常感谢各位群友的帮助，是大家让我间歇性放弃找女朋友的念头而是改为买一只宠物蜈蚣，相信很快就会和大家见面的！另外，明天开始就要开始要第二遍了。届时会完善这些习题。

目录

第 0 章　闲谈

0.1　勘误

1. Page 21　第 4 题 (3) 中对于 $R(x)$ 的系数为有理数时结论才可被证明, 当 $R(x)$ 中包含无理系数时结论不一定成立.

2. Page 27　(F)(O)(C) 错印为 (F)(D)(C).

3. Page 281　最后一行 g 应为 f.

4. Page 196　$f^{(n)}(x)$ 后 -1 的幂次应为 n 而非 $n-1$.

5. Page 299　第二个行列式第一行第六列的元素应为 24 而非 0.

6. Page 315　第七题.

7. Page 23　定理 8.2.7 中大括号.

0.2　符号说明

$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{Z},\mathbb{Z}_+$	整数集, 正整数集
$\mathbb{Q},\mathbb{Q}_+$	有理数域, 正有理数集
$\mathbb{R},\mathbb{R}_+$	实数域, 正实数集
$\mathbb{R}^n$	n 维欧氏空间
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{C}^n$	n 维复空间
S^{n-1}	$\mathbb{R}^n$ 中的单位球面, 即 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\big\vert \lvert x\rvert=1\}$
$\mathbb{S}^n$	n 阶实对称矩阵全体
$B_r(\boldsymbol{x})$	半径为 r 中心在 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 中的开球
$\mathring{B}_r(\boldsymbol{x})$	半径为 r 中心在 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 中的去心开球
$Q_\delta(\boldsymbol{x})$	边长为 2δ 中心在 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 且各边平行于坐标轴的开正方体
$\boldsymbol{A}^\top,\boldsymbol{x}^\top$	矩阵 $\boldsymbol{A}$, 向量 $\boldsymbol{x}$ 的转置
$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$	$\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的数量积, 也常常用 $\langle x,y\rangle,\boldsymbol{x}\top\boldsymbol{y}$ 表示
$\langle x,y\rangle$	内积空间中两个元素 x,y 的内积
$\lVert\boldsymbol{x}\rVert_p$	$\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\top$ 的 $p-$ 范数 $\left(\sum_{k=1}^n\lvert x_k\rvert^p\right)^p$
$\lVert\boldsymbol{A}\rVert_p$	方阵 $\boldsymbol{A}\mathbb{R}^{n\times n}$ 的诱导范数 $\lVert\boldsymbol{A}\rVert_p=\max\limits_{\lVert\boldsymbol{x}\rVert=1}\lVert\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\rVert_p$

$\|\boldsymbol{x}\|$	$\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{x}$ 通常的范数, 即 $\\|\boldsymbol{x}\\|_2$
$\\|\boldsymbol{A}\\|$	方阵 $\boldsymbol{A}\mathbb{R}^{n\times n}$ 通常的诱导范数 $\\|\boldsymbol{A}\\|_2$
$\|E\|$	$\mathbb{R}^n$ 中集合 E 的 Lebesgue 测度 (或 Jordan 测度)—长度, 面积, 体积
$\|E\|^*, \|E\|_*$	$\mathbb{R}^n$ 中集合 E 的 Jordan 外测度, 内测度
m^*E, m_*E	$\mathbb{R}^n$ 中集合 E 的 Lebesgue 外测度, 内测度
$a^+.a_-$	实数 a 的正部 $(\|a\|+a)/2$ 与负部 $(\|a\|-a)/2$
$a\vee b, a\wedge b$	实数 a,b 的最大值和最小值
$\Re z, \Im z$	复数 $z=a+bi$ 的实部 a 和虚部 b, 其中 a,b 为实数
χ_E	集合 E 的特征函数, 既在 E 上取值为 1, 在其余点取值为 0
$\exists$	存在
$\forall$	对于任意
$\gg, \ll$	大大大于, 大大小于
a.e.	几乎处处
s.t.	满足或使得
$\varnothing$	空集
$\in, \ni, \notin$	$a\in E$ 与 $E\ni a$ 均表示 a 是 E 的元素, $a\notin E$ 表 a 不是 E 中的元素
$\subseteq, \supseteq$	$E\subseteq F$ 与 $F\supseteq E$ 均表示 E 包含于集合 F, 即 F 包含 E
$E\{\varphi\in F\}$	表示集合 $\{x\in E\big\|\varphi(x)\in F\}$. 在 E 明确的情况下, 简记为 $\{\varphi\in F\}$
$f(D)$	当 f 是映射, D 是集合时, 表示 D 的像集 $\{f(x)\big\|x\in D\}$
$\cap$	集合的交. $A\cap B$ 表示同时属于 A 和 B 的所有元素组成的集合
$\cup$	集合的并. $A\cup B$ 表示属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集合
$\backslash$	集合的差. $A\backslash B$ 表示属于 A 但不属于 B 的所有元素组成的集合
$\mathscr{C}$	集合的补. $\mathscr{C}E$ 表示在全集 X 明确的情况下, E 的补集 $X\backslash E$
E°	集合 E 的内部, 即 E 的全体内点
E'	集合 E 的导集, 即 E 的极限点 (聚点) 的全体
$\overline{E}$	集合 E 的闭包
∂E	集合 E 的边界
$\subset\subset$	集合的紧包含关系, $E\subset\subset F$ 当且仅当 $\overline{E}$ 是 F 的紧子集
$\alpha E+\beta F$	线性空间中, 集合的伸缩, 代数和与代数差等, 表示集合 $\{\alpha x+\beta y\big\|x\in E, y\in F\}$
$\sum, \prod$	连加号, 连乘号
$[x], x$	实数 x 的正数部分 (即不大于 x 的最大整数) 与小数部分 (即 $x-[x]$)
$\overline{\lim}, \underline{\lim}$	上极限, 下极限
$\overline{\int}, \underline{\int}$	上积分符号, 下积分符号
C_n^k	在 n 个元素中选取 k 个的组合数

$C^k(\Omega)$	在 Ω 上有 k 阶连续 (偏) 导数的函数全体
$C_c^k(\Omega)$	在 Ω 上有紧支集且有 k 阶连续 (偏) 导数的函数全体
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	在 Ω 上 k 阶 (偏) 导数满足 α 次 H'older 条件的函数全体
$\mathscr{S}$	速降函数全体
$\hat{f}\check{f}$	函数 f 的 Fourier 变换, Fourier 逆变换
$f*g$	函数 f 与 g 的卷积

第 1 章 实数

1.1 集合与映射

列入 $\mathcal{A}$ 的习题相对基础, 列入 $\mathcal{B}$ 的习题相对困难或属于扩展问题, 个别习题可能超前. 若习题中加 * 号, 表示该习题与后续内容相关性大, 请教师布置习题时, 尽量勾选该题.

Theorem 1.1.1: 关于 Diophantus 逼近的 Liouville 定理

设 $n \geqslant 2$, 无理数 x 是某个 n 次整系数多项式的零点, 则存在常数 A 使得对于任何整数 q 和正整数 p, 成立

$$\left|x-\frac{q}{p}\right|>\frac{A}{p^n}.$$

1.1 $\mathcal{A}$

1. 设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为复常数, 且对任何 $x \in \mathbb{R}$ 成立

$$a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0=0.$$

证明: $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$.

证明. 令 $x_0=0$ 代入 x 可得 $a_0=0$. 分别令 $x=x_i,(i=1,2,\cdots,n)$ 满足 $x_i \neq x_j j=0,1,\cdots,n$. 可得如下关于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的方程组.

$$\begin{cases}a_1 x_1+a_2 x_1^2+\cdots+a_n x_1^n=0 \\ a_1 x_2+a_2 x_2^2+\cdots+a_n x_2^n=0 \\ \cdots \\ a_1 x_n+a_2 x_n^2+\cdots+a_n x_n^n=0\end{cases}$$

其系数矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix}x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^n x_i\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^n x_i \prod_{1 \leqslant i<j \leqslant n}\left(x_i-x_j\right) \neq 0.$$

故原方程仅有零解, 这便证明了结论. □

或者令 $x=0$, 立即得 $a_0=0$, 于是得到

$$a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_1 x=0.$$

上式两端除以 x, 此时假定 $x \neq 0$, 得到

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0,$$

令 $x = 0$ 得到 $a_1 = 0$. 循环该流程, 可得结论. □

2. 试构造区间 $(0,1)$ 到 $[0,1]$ 的一个双射。

解. 设集合

$$T = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots \right\},$$

构造如下映射

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \notin T, \\ 0, & x = \dfrac{1}{2}, \\ 4x, & x \in T, x \neq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

可以观察出, 这是一个符合题目要求的双射. 另外还可以分别拿出这两个集合的有理数, 对于集合 $[0,1]$, 其所有有理数组成集合为

$$\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\},$$

这里规定 $a_0 = 0, a_1 = 1$. 对于集合 $(0,1)$, 类似有

$$\{a_2, \cdots, a_n, \cdots\},$$

定义映射如下

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \\ a_{n-2} & x = a_n. \end{cases}$$ ■

3. 说明以下映射为有理数到整数集的单射.

$$T(q) = \begin{cases} (m+n)^2 + n, & q = \dfrac{n}{m}, m, n\text{为既约正整数}, \\ 0, & q = 0, \\ -(m+n)^2 - n, & q = -\dfrac{n}{m}, m, n\text{为既约正整数}. \end{cases}$$

证明. 不妨设 $q_1 = n_1/m_1, q_2 = n_2/m_2$,$m, n$ 为既约正整数且 $q_1 \neq q_2$. 若 $n_1 = n_2$ 且 $m_1 \neq m_2$ 或 $m_1 = m_2$ 且 $n_1 \neq n_2$, 显然有 $T(q_1) \neq T(q_2)$.

下证 $n_1 \neq n_2\,, m_1 \neq m_2$ 的情形. 不失一般性, 我们设 $n_1 > n_2$. 此时, 若 $T(q_1) = T(q_2)$ 即

$$(m_1 + n_1)^2 + n_1 = (m_2 + n_2)^2 + n_2$$

必有 $m_1 + n_1 < m_2 + n_2$. 设 $t = m_1 + n_1$, 得到

$$m_2 + n_2 = t + [(m_2 + n_2) - (m_1 + n_1)] := t + k.$$

显然 $k>1, t>n_1$, 于是

$$
\begin{aligned}
(m_2+n_2)^2-(m_1+n_1)^2-n_1 &= (t+k)^2-t^2-n_1 \\
&= k^2+2kt-n_1>0.
\end{aligned}
$$

即若 $(m_2+n_2)^2>(m_1+n_1)^2$ 必有

$$(m_2+n_2)^2>(m_1+n_1)^2+n_1$$

可见此时不可能有 $T(q_1)=T(q_2)$. $q<0$ 的情况可类似说明. □

4. 证明代数数集是可列集.

证明. 设 $P_n(x)$ 为 n 次整系数多项式构成的集合. U_n 为所有 n 次整系数多项式的复零点, 由于对于一个确定的 n 次多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

它的零点为有限多个. 由于可列个可列集的并为可列集, 接下来我们证明 $P_n(x)$ 为可列集. 记 $p(n)$ 为第 $n+1$ 个素数.

定义如下映射

$$f(x)\mapsto\prod_{j=0}^{n}(p(j))^{a_j}.$$

这便建立了一个 $P_n(x)$ 到 $\mathbb{N}$ 的一个双射, 从而 $P_n(x)$ 为可列集, 故其元素的复零点的并集为 U_n 也为可列集, 从而代数数集 $\bigcup\limits_n U_n$ 为可列集. □

5. 证明：存在常数 $A>0$ 使得对于任何整数 q 和正整数 p 成立

$$\left|\sqrt{3}-\frac{q}{p}\right|>\frac{A}{p^2}$$

证明. $\sqrt{3}$ 为 x^2-3 的一个零点, 根据定理1.1.1可知结论成立. □

1.1 $\mathcal{B}$

1. 设 P 为首项系数不为零的 n 次系数多项式, x_1 是它的一个零点, 则存在首项系数不为零的 $n-1$ 次多项式 Q 使得

$$P(x)=(x-x_1)Q(x).$$

证明. 由于

$$x^k-x_1^k=(x-x_1)\left(x^{k-1}+x_1x^{k-2}+\cdots+x_1^{k-2}x+x_1^{k-1}\right).$$

则对 $P(x)$ 中的每项应用上述事实便得到了结论. □

2. 设 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为复常数, $a_n\neq 0$. 证明：多项式

$$p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

至多有 n 个复零点 (含重数).

证明. 这正是代数基本定理, 这个定理的第一个严格证明是 1799 年由 Gauss 证明的, 后来他又给出了 4 个证明, Jordan, Weyl 等人也给过这个定理的证明. 它的一般表述是: 次数大于零的复数域上的多项式至少有一复数根. 简单起见, 我们使用复变函数中的 Liouville 定理进行证明, Liouville 定理是说: 有界整函数必是常数.

由于 $p(z)$ 在 z 平面上解析, 若 $p(z)$ 在 z 平面无零点, 则 $\dfrac{1}{p(z)}$ 在 z 平面上也解析, 下面证明后者有界, 从而由 Liouville 定理推出矛盾. 事实上, 由于

$$\lim_{z\to\infty} p(z)=\lim_{z\to\infty} z^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right)=\infty,\quad \lim_{z\to\infty}\frac{1}{p(z)}=0,$$

故存在充分大的正数 R 使得 $|z|>R$ 时, $\left|\dfrac{1}{p(z)}\right|<1$. 因 $\dfrac{1}{p(z)}$ 在闭圆 $|z|\leqslant R$ 上连续, 故而有界, 从而 $\dfrac{1}{p(z)}$ 在 z 平面上有界, 由 Liouville 定理知 $\dfrac{1}{p(z)}$ 为常数, 这不可能. □

3. 证明 Viète (韦达) 定理: 设 $a_n\neq 0, x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的 n 个复零点 (含重根), 则对于 $1\leqslant k\leqslant n$, 成立

$$\sum_{1\leqslant m_1<m_2<\cdots<m_k\leqslant n}\prod_{j=1}^{k}x_{m_j}=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

证明. 由前面的两个问题可以知道

$$P(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

即有

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}x+\frac{a_0}{a_n}$$

比较系数便得到了结果. □

4. 称关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 m 次 n 元多项式 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是可轮换的, 如果对任何 $1\leqslant k<j\leqslant n$, 将 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中的 x_k,x_j 分别替换成 x_j,x_k 后多项式的值保持不变. 证明:

(1) 若 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是可轮换的一次多项式, 则它是 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 的常数倍.

(2) 若 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是可轮换的二次多项式, 则有常数 C_1,C_2 使得

$$R(x_1,x_2,\cdots,x_n)=C_1(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+C_2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j.$$

(3) 归纳证明, 若 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是系数为有理数的可轮换的 k 次多项式, 而 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是某首项系数不为零的 n 次有理系数多项式的零点, 则 $R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为有理数.

证明. (1)(2) 是容易证明的, 下面我们证明 (3). 这证明这个结论之前, 我们先引入几个有用的记号 (称为 n 元初等对称多项式):

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{n=1}^{n} x_i, \\
\sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sigma_n &= x_1x_2\cdots x_n.
\end{aligned}$$

事实上我们有如下定理, 称为对称多项式基本定理: 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的对称多项式, 则必存在 $\mathbb{K}$ 上唯一的一个多项式 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, 使

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = g(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n).$$

对称多项式的定义如同可轮换, 但不要求齐次性, 所以 m 次的可轮换多项式为对称多项式. 如果我们证明了定理中 g 的存在性, 那么根据 Viète 定理, 则本题即证. 下面用归纳法证明存在性, 唯一性参考相关书籍.

我们对 n 与多项式 f 的次数 $\deg f$ 进行归纳. 当 $n=1$ 或 $\deg f = 0$ 或 1, 结论显然成立, 假设结论对于 $n-1$ 与小于给定次数 $\deg f$ 的对称多项式成立. 考虑

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}) = f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},0),$$

我们以 $\sigma_1',\sigma_2',\cdots,\sigma_{n-1}'$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 的基本初等对称多项式, 由归纳假设知有 $h(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})$ 使得

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}) = h(\sigma_1',\sigma_2',\cdots,\sigma_{n-1}'),$$

若 $h=0$, 则 $x_n|f$, 又由于 f 为对称多项式, 则 $x_1x_2\cdots x_n|f$, 考虑对称多项式 $\dfrac{f}{x_1x_2\cdots x_n}$, 它的次数为 $\deg f - n$.

若 $h\neq 0$, 考虑

$$h' = f(x_1,x_2,\cdots,x_n) - h(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n-1}),$$

易见 $x_n=0$ 时 $h'=0$, 类似 $h=0$ 的讨论考虑 $\dfrac{h'}{x_1x_2\cdots x_n}$, 它的次数也为 $\deg f - n$. 依归纳假设便完成了证明. □

5. 设 P,Q 分别是 m,n 阶首项系数为 1 的有理系数多项式.

$$P(x) = \prod_{k=1}^{m}(x-x_k), \quad Q(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-y_k).$$

证明:

(1) 多项式 $R(x) = \prod_{k=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(x-x_k-y_j)$ 是有理系数多项式.

(2) 多项式 $S(x)=\prod_{k=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(x-x_ky_j)$ 是有理系数多项式.

6. 证明 Liouville 定理, 即定理 1.1.1.

证明. 设无理数 x_0 是整系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的零点, 令 $M=\max\limits_{x_0-1<x<x_0+1}\{|f'(x)|\}$, $f(x)$ 其他互异的零点为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$. 取 A 满足 $0<A<\min\left\{1,\frac{1}{M},|x_0-x_1|,|x_0-x_2|,\cdots,|x-x_m|\right\}$. 假设存在使定理不成立的 p,q, 就有

$$\left|x_0-\frac{q}{p}\right|\leqslant\frac{A}{p^n}\leqslant A<\min\left\{1,\frac{1}{M},|x_0-x_1|,|x_0-x_2|,\cdots,|x-x_m|\right\}\leqslant 1,$$

那么有

$$x_0-1<\frac{q}{p}<x_0+1, \text{并且}\ \frac{q}{p}\notin\{x_1,x_2,\cdots,x_m\},$$
$$\left|f\left(\frac{q}{p}\right)\right|=\frac{|a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}p+\cdots+a_1qp^{n-1}+a_0p^n|}{p^n}\geqslant\frac{1}{p^n}.$$

根据 Lagrange 中值定理, 存在 ξ 位于 $\frac{q}{p}$ 与 x_0 之间, 使得 $\frac{f}{x_0}-f\left(\frac{q}{p}\right)=f'(\xi)\left(x_0-\frac{q}{p}\right)$, 又根据 M,K 的定义, 得到

$$\left|x_0-\frac{q}{p}\right|=\frac{|f(x_0)-f(q/p)|}{|f'(\xi)|}\geqslant\frac{1}{MP^n}>\frac{K}{p^n}\geqslant\left|x_0-\frac{q}{p}\right|,$$

矛盾, 从而结论得证. □

7. 证明一个复数是代数数当且仅当它的实部和虚部都是代数数.

证明. 设 $x=a+bi$, 下证 x 是代数数当且仅当 a 和 b 都是代数数.

必要性.

充分性. □

1.2 第一次数学危机

1.2 $\mathcal{A}$

1. 在有关讲座中, 项武义教授给出了图 1.1. 从中可见, 当 a,b 依次是正五边形的边长和对角线长时, $b-a$ 和 a 时一个更小的正五边形的边长和对角线. 试以此说明正五边形的边长和对角线长不可公度.

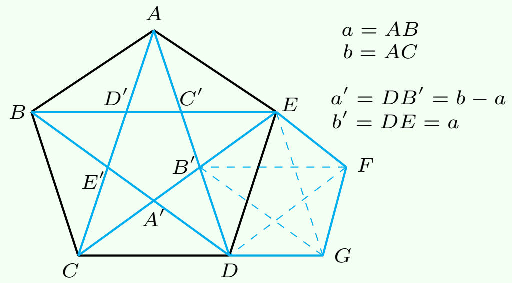


图 1.1

若正五边形的边和对角线可公度，则可以把 a,b 视为正整数，此时 a',b' 也是正整数，且 $a'<a, b'<b$. 易见小于 a 的正整数只有有限个, 因此这一过程不可能无限持续, 这表明正五边形的边和的对角线不可公度.

2. 结合图 1.2 说明等腰直角三角形直角边和斜边长不可公度.

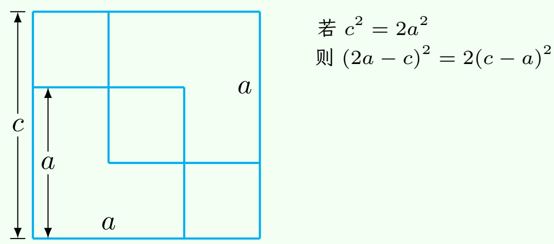


图 1.2

若 $c^2=2a^2$, 依勾股定理, c 是直角边为 a 的等腰直角三角形的斜边. 依图可令 $c'=2a-c, a'=c-a$, 若 c,a 可公度, 则可视为正整数, 此时 a',c' 也是正整数, 且 $c'<c$, 但小于 c 的正整数有限, 这一流程不可能无限持续, 因而等腰直角三角形直角边和斜边不可公度.

1.2 $\mathcal{B}$

1. 对于正整数 n,m, 考察 $\dfrac{m}{n}$ 的十进制小数表示中循环节的长度有何特点.

只考虑 $n>m$ 的情况, 当 $n=9,99,999,\cdots$ 时, 分数的结果都是循环小数, 且循环节的长度与 n 的位数相同. 对于一个给定的循环小数 $a=0.a_1a_2\cdots a_na_1a_2\cdots$, ($a_i$ 表示当前位数上的数字), 有

$$10^na-a=a_1a_2\cdots a_n$$
$$a=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n-1}$$

1.3 实数公理系统

1.3 $\mathcal{A}$

1. 设 $(X,+,\cdot,\leqslant)$ 是一个有序域, 并用 $0^*,1^*$ 表示 X 的零元和单位元. 一般的, $n^*=n1^*$. 我们可以证明 X 中成立加法消去律: 设 $\alpha,\beta,\gamma\in X$, 满足条件 $P:\alpha+\gamma=\beta+\gamma$, 则

$$\begin{aligned}\alpha &\xlongequal{(A3)} \alpha+0^* \xlongequal{(A4)} \alpha+(\gamma+(-\gamma)) \xlongequal{(A1)} (\alpha+\gamma)+(-\gamma)\\ &\xlongequal{P} (\beta+\gamma)+(-\gamma) \xlongequal{(A1)} \beta+(\gamma+(-\gamma))=\beta+0^*=\beta.\end{aligned}$$

类似的证明:

(1) 若 $\alpha\geqslant\beta$, 则 $\alpha+\gamma\geqslant\beta+\gamma$, 且等号当且仅当 $\alpha=\beta$ 时取到.

(2) $\alpha>0^*$ 当且仅当 $-\alpha<0^*$.

(3) 若 $\alpha\gamma=\beta\gamma$, 且 $\gamma\neq 0^*$, 则 $\alpha=\beta$.

(4) $\alpha^2\geqslant 0^*$, 且等号成立当且仅当 $\alpha=0^*$ 时成立. 特别的 $1^*>0^*$.

(5) $\alpha>0^*$ 当且仅当 $1/\alpha>0^*$.

(6) 设 $\alpha>0,\beta>\gamma$, 则 $\alpha\beta>\alpha\gamma$.

证明. (1) 若 $\alpha>\beta$ 有 $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$, 依加法消去律可知有 $\alpha=\beta$, 与假设矛盾. 反之若 $\alpha=\beta$, 依上述也有 $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$.

(2) $\alpha>0^*=\alpha+(-\alpha)$, 依消去律得 $-\alpha<0^*$.

(3)$\alpha=\alpha1^*=\alpha(\gamma\gamma^{-1})=(\alpha\gamma)\gamma^{-1}=\beta\gamma\gamma^{-1}=\beta$.

(4) 先证 $(-1^*)(-1^*)=1^*$:

$$\begin{aligned}1^*+(-1^*)=0^* &\Rightarrow (-1^*)*(1^*+(-1)^*)=0^* \Rightarrow -1^*+(-1^*)(-1^*)=0^*\\ &\Rightarrow (-1^*)(-1^*)=1^*.\end{aligned}$$

若 $\alpha\geqslant 0$, 依乘法的保序性可知 $\alpha^2\geqslant 0$, 并且若 $\alpha>0$ 而 $\alpha^2=0^*$, 则两侧乘以 α^{-1} 得 $\alpha=0^*$, 可得矛盾. 从而若 $\alpha^2=0^*$ 必有 $\alpha=0^*$. 若 $\alpha<0^*$, 则 $-\alpha>0^*$, 从而

$$\alpha\alpha=1^*\cdot\alpha\cdot\alpha=(-1^*)(-1^*)\alpha\alpha=(-\alpha)(-\alpha)>0^*.$$

(5) 设 $\alpha>0,\beta<0$, 则 $-\beta>0$, 从而 $\alpha(-\beta)>0^*$, 于是 $\alpha\beta<0$. 若 $\alpha>0$ 而 $1/\alpha<0$, 则

$$\alpha\cdot 1/\alpha=1^*<0^*$$

矛盾.

(6) 由于 $\alpha>0,\beta-\gamma>0$, 从而 $\alpha(\beta-\gamma)>0$. 可得 $\alpha\gamma>\alpha\gamma$. □

2. 设 $(X,+,\cdot,\leqslant)$ 是一个全序域, $\alpha\in X$ 满足 $\alpha\geqslant 0$ 以及 $\forall\varepsilon>0$, 成立 $\alpha<\varepsilon$. 证明 $\alpha=0$.

证明. 假设 $\alpha>0$, 则令 $\varepsilon=\alpha$, 则与 $\alpha<\varepsilon$ 矛盾. 从而 $\alpha=0$. □

1.3 $\mathcal{B}$

1. 对于有序域 $(X,+,\cdot,\leqslant)$, 是否一定具有 Archimedes 性?

2. 设 $(X,+,\cdot,\leqslant)$ 是一个全序域, $\alpha\in X$ 满足 $\alpha\geqslant 0$ 以及对 X 中任何的正有理数 p 成立 $\alpha<p$. 问是否一定有 $\alpha=0$?

这里正有理数即形如 $m1^*/n1^*$ 的元, 其中 1^* 为乘法单位元, m,n 为正整数.

3. 证明所有 (复) 代数数组成的集合是一个域.

证明. 我们证明一个更宽泛的命题: 设 K/F 是一个域扩张, $\alpha,\beta\in K$. 若 α,β 是域 F 上的代数元, 则 $\alpha\pm\beta,\alpha\beta.\alpha\beta^{-1}(\beta\neq 0)$ 都是 F 上的代数元. 从而 K 中 F 上所有代数元组成的集合是 K 的一个子域, 称这个子域是 F 在 K 中的代数闭包, 记为 $\overline{F}$.

由于 α 是域 F 上的代数元, 因此 $F(\alpha)/F$ 是单代数扩张. 由于 β 是域 F 上的代数元, 从而 β 也是域 $F(\alpha)$ 上的代数元, 因此可以得出 $F(\alpha)(\beta)/F(\alpha)$ 是单代数扩张, 从而 $F(\alpha)(\beta)/F(\alpha)$ 是有限扩张.

于是 $F(\alpha,\beta)/F(\alpha)$ 是有限扩张. 由 $F(\alpha,\beta)\supseteq F(\alpha)\supseteq F$, 则 $F(\alpha,\beta)/F$ 是有限扩张, 由于 $\alpha\pm\beta,\alpha\beta.\alpha\beta^{-1}$ 都属于 $F(\alpha,\beta)$, 因此 $\alpha\pm\beta,\alpha\beta.\alpha\beta^{-1}$ 都是域 F 上的代数元. □

4. 设 $(X,+,\cdot)$ 是一个以实数域 $\mathbb{R}$ 为子域的域, 满足如下条件:

(i) 存在元 $A\in X\backslash\mathbb{R}$.

(ii) 对于 X 中的任一元素 V, 都存在 $a,b\in\mathbb{R}$, 使得 $V=a+bA$.

证明: 存在 $B\in X$ 使得 $B^2=-1$. 进一步, 对 X 中的任一元素 V, 都存在 $a,b\in\mathbb{R}$, 使得 $V=a+bB$.

本题的结论相当于说, 以实数域作为子域的"二元域"一定是复数域.

证明. □

5. 证明: 不存在以 $\mathbb{R}$ 为子域的"三元数"域. 即不存在 $\mathbb{R}^3$ 中满足

$$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$

以及

$$(x_1,0,0)\cdot(x_2,0,0)=(x_1x_2,0,0)$$

的加法 $+$ 和乘法 $\cdot$, 使得 $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ 成为一个域.

1.4　实数系的构造

1.4 $\mathcal{A}$

1. Rudin 在其《数学分析原理》一书中使用了变换 $q=p+\dfrac{2-p^2}{p+2}=\dfrac{2+2p}{p+2}$. 验证:

(i) 若 $p>0$, 且 $p^2<2$, 则 $q>p$ 且 $q^2<2$.

(ii) 若 $p>0$, 且 $p^2>2$, 则 $0<q<p$ 且 $q^2>2$.

解. 由 $p>0$ 且 $p^2<2$ 易知 $q=p+\dfrac{2-p^2}{p+2}>p$, 并且

$$q^2=\left(\frac{2+2p}{p+2}\right)^2=4\left(1-\frac{1}{p+2}\right)^2<4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}+2}\right)^2=2.$$

后者情况类似. ■

2. 试求使变换 $q=p+\dfrac{2-p^2}{ap+b}$ 具有习题 **1** 中性质 (i)—(ii) 的所有有理数对 (a,b).

解. ■

3. 证明无理数在实数集中的稠密性: 对于任何 $x\in\mathbb{R}$, 以及 $\varepsilon>0$, 存在无理数 y 使得 $|y-x|<\varepsilon$.

4. 设 $a>0$, 而 n 为正整数. 证明: $\min\{a,1\}\leqslant a^{1/n}\leqslant\max\{a,1\}$.

证明. 易见 $a\in(0,1)$ 时, 有 $a\leqslant a^{1/n}\leqslant 1$; 若 $a\geqslant 1$, 则 $1\leqslant a^{1/n}<a$. 总而言之有 $\min\{a,1\}\leqslant a^{1/n}\leqslant\max\{a,1\}$. □

5. 设 $p,q>1$ 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,a,b>0$. 利用

$$(1+x)^\alpha-1\leqslant\alpha x,\qquad x\geqslant 0,0<\alpha\leqslant 1\tag{$\heartsuit$}$$

证明 Young 不等式: $ab\leqslant\dfrac{1}{p}a^p+\dfrac{1}{q}b^q$.

证明. 不妨设 $a^p>b^q$, 则令 $x=\dfrac{a^p}{b^q}-1,\alpha=\dfrac{1}{p}$ 带入式($\heartsuit$)得到

$$\frac{a}{b^{q/p}}-1\leqslant\frac{1}{p}\left(\frac{a^p}{b^q}-1\right),$$

即 $ab\leqslant\dfrac{1}{p}a^p+\dfrac{1}{q}b^q$. 另外的情况类似. □

6*. 设 I 是一个非空指标集, 对 I 中每一个元 α, 都对应两个实数 x_α 以及 y_α. 我们将 $\sup\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 和 $\inf\{x_\alpha|\alpha\in I\}$ 写成 $\sup\limits_{\alpha\in I}x_\alpha$ 和 $\inf\limits_{\alpha\in I}x_\alpha$. 证明: 在广义实数系中,

(1) $\inf\limits_{\alpha\in I}(-x_\alpha)=-\sup\limits_{\alpha\in I}x_\alpha$.

(2) 对以下所列的每一个不等式, 若其两端在广义实数系中都有意义, 则该不等式成立:

$$\begin{aligned}\inf_{\alpha\in I}x_\alpha+\inf_{\alpha\in I}y_\alpha&\leqslant\inf_{\alpha\in I}(x_\alpha+y_\alpha)\leqslant\sup_{\alpha\in I}x_\alpha+\inf_{\alpha\in I}y_\alpha\\&\leqslant\sup_{\alpha\in I}(x_\alpha+y_\alpha)\leqslant\sup_{\alpha\in I}x_\alpha+\sup_{\alpha\in I}y_\alpha.\end{aligned}$$

(3) 若 $x_\alpha>0(\forall\alpha\in I)$, 并在此种情形规定 $\dfrac{1}{0}=+\infty$, 则有

$$\sup_{\alpha\in I}\frac{1}{x_\alpha}=\frac{1}{\inf\limits_{\alpha\in I}x_\alpha}.$$

(4) 设 $x_\alpha>0, y_\alpha>0\,(\forall\alpha\in I)$. 对以下所列的每一个不等式, 若其两端在广义实数系中都有意义, 则该不等式成立:

$$\begin{aligned}\inf_{\alpha\in I}x_\alpha\inf_{\alpha\in I}y_\alpha\leqslant\inf_{\alpha\in I}(x_\alpha y_\alpha)&\leqslant\sup_{\alpha\in I}x_\alpha\inf_{\alpha\in I}y_\alpha\\&\leqslant\sup_{\alpha\in I}(x_\alpha y_\alpha)\leqslant\sup_{\alpha\in I}x_\alpha\sup_{\alpha\in I}y_\alpha.\end{aligned}$$

证明. (1)

(2)

(3)

(4) □

1.4 $\mathcal{B}$

1. 对于 $a>0$ 以及有理数 $\dfrac{m}{n}$, 其中 m,n 为既约整数, $n>0$. 当 $m\neq1$ 时, 定义

$$a^{\frac{m}{n}}=(a^m)^{\frac{1}{n}}$$

自然, 当 $m=1$ 时, 上式也成立. 进一步, 当 $n=2k+1$ 为奇数时, 定义

$$(-a)^{m/(2k+1)}=(-1)^m a^{m/2k+1}.$$

下设 $a,b>0$, 且 p,q 为有理数, 证明:

(1) $(a^p)^q=a^{pq}$.

(2) $a^pa^q=a^{p+q}$.

(3) $a^pb^p=(ab)^p$.

(4) 若 $a>1,p>0$, 则 $a^p>1$.

(5) 当 $a>1$ 时, a^p 关于 $p\in\mathbb{Q}$ 严格单调递增.

(6) 设 $a>1$, 证明: 对于任何 $b\in\mathbb{R}$, 成立 $\sup\{a^p|p<b\}=\inf\{a^p|p>b.\}$

2. 设 $a\geqslant1$, 且 b 为无理数, 定义

$$a^b=\sup\{a^p|p\leqslant b\ \text{且}p\ \text{为有理数}\}.$$

证明: 当 p 为有理数时上式也成立.

进一步, 当 $0<a<1$ 时, 定义 $a^b=(a^{-1})^{-b}$.

3. 设 $a,b>0$, 且 $x,y\in\mathbb{R}$, 证明:

(1) $(a^x)^y=a^{xy}$.

(2) $a^xa^y=a^{x+y}$.

(3) $a^x b^x = (ab)^x$.

(4) 若 $a > 1, x > 0$, 则 $a^x > 1$.

(5) 若 $a > 1$, 则 a^x 关于 $x \in \mathbb{R}$ 严格单增.

(6) 若 $0 < a < 1$, 则 a^x 关于 $x \in \mathbb{R}$ 严格单减.

4. 设 $a > 0, a \neq 1, b > 0$, 证明有唯一实数 x 满足 $a^x = b$.

该实数称为以 a 为底以 b 为真数的对数. 记作 $\log_a b$, 在底 a 明确的情况下, 可以简写为 $\log b$. $log_{10} b$ 记作 $\lg b$, $\log_e b$ 记作 $\ln b$, 称为自然对数.

5. 设 $a, b, x > 0, a \neq 1, b \neq 1$. 证明: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$.

6. 证明: 当 $a > 1$ 时, $\log_a b$ 关于 $x > 0$ 严格单增. 当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a b$ 关于 $x > 0$ 严格单减.

7. 设 $a, x, y > 0, a \neq 1$, 证明: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

1.5　附录

1.5 $\mathcal{A}$

1. 证明: 具有最小上界性的有序域一定具有 Archimedes 性.

证明. 令集合

$$P = \left\{ n \middle| \frac{y}{n} \geqslant x \right\},$$

若 $P = \varnothing$, 则对 $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, 都有 $nx > y$, 否则 P 有最小上界, 不妨记为 n_0, 这时有

$$\frac{y}{n_0} \geqslant x > \frac{y}{n_0 + 1},$$

右侧的不等号等价于 Archimeds 性. □

1.5 $\mathcal{B}$

1. 试在 Cantor 用 Cauchy 列构造实数的基础上, 建立上确界存在定理, Cauchy 准则等 (参见第二章内容).

第 2 章　序列极限

2.1　数列极限

2.1 $\mathcal{A}$

1. 用定义证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^3+4n^2-100}{2n^3-9n-11}=\dfrac{3}{2}$.

证明. $\forall\varepsilon>0$, 要使得

$$\left|\frac{3n^3+4n^2-100}{2n^3-9n-11}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon,$$

即

$$\left|\frac{4n^2+27n/2-167/2}{2n^3-9n-11}\right|<\varepsilon.$$

当 $n>100$ 时

$$\left|\frac{4n^2+27n/2-167/2}{2n^3-9n-11}\right|<\left|\frac{4n^2+n^2}{2n^3-n^3}\right|=\left|\frac{5}{n}\right|<\varepsilon,$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^3+4n^2-100}{2n^3-9n-11}=\dfrac{3}{2}$. □

2. 用定义证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\lg\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=0$.

证明. 注意到 $x>0$ 时 $\lg(1+x)<x$, 于是由 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 则 $n>N$ 时有

$$\left|\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\lg\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=0$. □

2.1 $\mathcal{B}$

1. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ 的充要条件是存在单调下降且无正下确界的正数列 $\{w_n\}$ 使得 $\forall n\geqslant 1$ 成立 $|a_n|\leqslant w_n$.

证明. 若存在单调下降且无正下确界的正数列 $\{w_n\}$ 使得 $\forall n\geqslant 1$ 成立 $|a_n|\leqslant w_n$, 则易见 $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$. 反过来, 我们这样构造 w_n: 记

$$w_n=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|,\cdots\}=|a_{k_1}|,\ 1\leqslant n\leqslant k_1,$$

$$w_n=\max\{|a_{k_1+1}|,|a_{k_1+2},\cdots\}=|a_{k_2}|,\ k_1<n\leqslant k_2,$$

$$w_n=\max\{|a_{k_2+1}|,|a_{k_2+2},\cdots\}=|a_{k_3}|,\ k_2<n\leqslant k_3,$$

$$\cdots\cdots$$

可得 $\{w_n\}$ 符合题设. 从而结论得证. □

2. 设 $0 \leqslant p \leqslant k-1$, 求 $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{C_{kn}^{p} + C_{kn}^{p+k} + \cdots + C_{kn}^{p+(n-1)k}}{2^{kn}}$.

解. 假设有这样一套装置, 用 kn 个开关共同控制 k 个灯泡: 开关或开或闭, 灯泡按 $0, 1, \cdots, k-1$ 的编号来编号. 对于编号为 $p(p = 0, 1, \cdots, k-1)$ 的灯泡来说, 当且仅当闭合开关总数模 k 余 p 时亮起. 这编号 p 的灯泡亮起的概率即为 $\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} C_{kn}^{p+ik}}{2^{kn}}$.

很显然, 这 k 个灯泡中有且仅有一个灯泡亮起. 当 $n \to \infty$ 时, 每个灯泡都有相同的机会亮起, 编号为 p 的灯泡亮起的概率也为 $1/k$. 即得

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{C_{kn}^{p} + C_{kn}^{p+k} + \cdots + C_{kn}^{p+(n-1)k}}{2^{kn}} = \frac{1}{k}.$$

这道题还有其他解法见技巧书. ■

2.2 无穷大量, 无穷小量, Stolz 公式

Theorem 2.2.1: Stolz-Cesáro 定理

设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是两个实数列, 若

(i) $\{y_n\}$ 严格单增,

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = +\infty$,

(iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \ell$, 其中 ℓ 可能为有限数, $+\infty$ 或 $-\infty$,

则

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell.$$

Theorem 2.2.2

设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是两个实数列, 若

(i) $\{y_n\}$ 严格单调减少,

(ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$,

(iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = \ell$, 其中 ℓ 可能为有限数, $+\infty$ 或 $-\infty$,

则

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell.$$

2.2 $\mathcal{A}$

1. 证明: $\{a_n\}$ 的极限为 L 当且仅当 $\{a_{2n}\}$ 与 $\{a_{2n+1}\}$ 的极限 L, 其中 L 为有限数, $+\infty$, $-\infty$ 或 ∞.

证明. 必要性. 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. 若 $|L| < +\infty$. 则对 $\forall\varepsilon > 0$, 有 $N > 0$ 使得 $n > N$ 时有

$$|a_n - L| < \varepsilon,$$

特别地, $2n > N$ 时也有

$$|a_{2n} - L| < \varepsilon, \quad |a_{2n+1} - L| < \varepsilon.$$

若 $L = +\infty$, 则对 $\forall A > 0$, 有 $N > 0$ 使得 $n > N$ 时有 $a_n > A$, 特别地, 当 $2n > N$ 时也有 $a_n > A$, 其余情况类似.

充分性. 先说明 L 有限的情况, 由于 $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = L$, 则对 $\forall\varepsilon > 0$, 有 $N_1 \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $n > N_1$ 时有

$$|a_{2n} - L| < \varepsilon,$$

同理由 $\lim_{n\to+\infty} a_{2k-1} = L$, 有 $N_2 \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $n > N_2$ 时有

$$|a_{2n+1} - L| < \varepsilon,$$

取 $N = (2N_1) \vee (2N_2 + 1)$, 那么当 $n > N$ 时, 都有 $|a_n - L| < \varepsilon$. L 无穷时情况类似. □

2. 设 p 为有理数, 证明 $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^p - n^p}{n^{p-1}} = p$.

证明. $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^p - n^p}{n^{p-1}} = \lim_{n\to+\infty} n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1\right) = p$. □

3. 证明定理 2.2.2.

证明. 当 $\ell \in \mathbb{R}$ 时, 由条件知 $\forall\varepsilon > 0$, 均存在 $N_1 \in \mathbb{N}_+$ 使得 $n > N_1$ 时有

$$\ell - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} < \ell + \varepsilon,$$

注意到 $\{y_n\}$ 单调递减, 故有

$$(\ell - \varepsilon)(y_{n-1} - y_n) < x_{n-1} - x_n < (\ell + \varepsilon)(y_{n-1} - y_n),$$

取 $m > n > N_1$, 并将上面的不等式中的 n 依次换成 $n+1, n+2, \cdots, m$, 然后把这些不等式相加得到

$$(\ell - \varepsilon)(y_n - y_m) < x_n - x_m < (\ell + \varepsilon)(y_n - y_m),$$

也即

$$\left|\frac{x_n - x_m}{y_n - y_m} - \ell\right| < \varepsilon, \quad \forall m > n > N_1,$$

现令 $m \to \infty$, 则由 $\lim_{m\to\infty} x_m = \lim_{m\to\infty} y_m = 0$ 得到

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall n > N_1,$$

这说明 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell$.

若 $\ell=+\infty$, 则当 n 充分大时有 $\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-t_{n-1}}>0$, 故此时 $\{x_n\}$ 严格单调递减趋于 0. 另外, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=0,$$

从而由上一段讨论知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=0$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=+\infty$.

若 $\ell=-\infty$, 我们记 $z_n=-x_n$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n-z_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty,$$

由上一段的讨论知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n}{y_n}=+\infty$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=-\infty$. □

4. 设 $x_1=a$, $x_2=b$, $x_{n+2}=\dfrac{1}{2}(x_{n+1}+x_n)\,(n=1,2,3,\cdots)$. 试证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

解. 递推数列有特征方程

$$\lambda^2=\frac{1}{2}(\lambda+1),\quad 即\quad 2\lambda^2-\lambda-1=0,$$

解得 $\lambda_1=1,\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$. 即设原数列有通项公式 $x_n=C_1+C_2\lambda_2^n$. 代入 $x_1=a,x_2=b$ 解得 $C_1=\dfrac{2b-a}{3},C_2=\dfrac{4b-4a}{3}$. 即 $x_n=\dfrac{2b-a}{3}+\dfrac{4b-4a}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. 易见 $\{x_n\}$ 收敛, 极限为 $\dfrac{2b-a}{3}$. ■

5. 设 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\sum\limits_{k=1}^n x_k^2=1$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{3n}x_n=1$.

证明. 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^n x_k^2$, 显然 $\{S_n\}$ 单调递增. 并且 $\dfrac{1}{x_n}\sim S_n(n\to+\infty)$, 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$ 有限, 则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1/S\neq 0$, 这与 S_n 收敛矛盾, 从而

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty,\qquad \lim_{n\to+\infty}x_n=0.$$

结合 Stolz 定理, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3n)x_n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^3}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^3-S_{n-1}^3}{3},$$

于是我们仅需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n^3-S_{n-1}^3\right)=3$. 注意到

$$\begin{aligned}S_n^3-S_{n-1}^3&=(S_n-S_{n-1})\left(S_n^2+S_nS_{n-1}+S_{n-1}^2\right)\\&=x_n^2\left(S_n^2+S_n\left(S_n-x_n^2\right)+\left(S_n-x_n^2\right)^2\right)=3\left(x_nS_n\right)^2-3x_n^4S_n+x_n^6\\&=3\left(x_n\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^2-3x_n^2\left(x_n\sum_{k=1}^n x_k^2\right)+x_n^6\to 3\quad(n\to+\infty).\end{aligned}$$

□

6. 设 a 和 d 是给定的正数. 对于 $n=1,2,3,\cdots$, 由等差数列 $a,a+d,\cdots,a+(n-1)d$ 形成的算数平均数 A_n 和几何平均数 G_n, 试求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{G_n}{A_n}$.

解. 由题设 $G_n=\sqrt[n]{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a+kd)}$, $A_n=\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}(a+kd)}{n}=a+\dfrac{n-1}{2}$, 记 $t=\dfrac{a}{d}$. 于是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{G_n}{A_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(a+kd)}}{(n-1)d/2}\cdot\frac{(n-1)d/2}{a+(n-1)d/2}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}(t+k)}\cdot\frac{2}{n-1}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)}}\cdot\frac{2}{n-1}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\Gamma(t)}}\sqrt[n]{\left(\frac{t+n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi(t+n)}}\cdot\frac{2}{n-1}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{t+n}{\mathrm{e}}\frac{2}{n+1}=\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

■

7. 令 $a_{n,k}=\dfrac{k}{n-k+1}(n\geqslant k\geqslant 1)$. 证明:

(1) 对于固定的 $k\geqslant 1$, $\{a_{n,k}\}$ 是无穷小.

(2) $A_n=\prod\limits_{k=1}^{n}a_{n,k}$ 不是无穷小.

证明. 易见

$$\lim_{n\to+\infty}a_{n,k}=\lim_{n\to+\infty}\frac{k}{n-k+1}=0,$$

并且

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}a_{n,k}=1,$$

从而结论得证. □

8. 设 $E\subseteq\mathbb{R}$ 为非空集. 证明: 存在 E 中点列 $\{x_k\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=\sup E$, 这里 $\sup E$ 可以是 $+\infty$.

注: 对于 $f:D\to\mathbb{R}$, 满足 $\lim\limits_{k\to+\infty}f(x_k)=\sup\limits_{x\in D}f(x)\left(\inf\limits_{x\in D}f(x)\right)$ 的 D 中的点列 $\{x_k\}$ 称为 f 在 D 上的极大化序列 (极小化序列).

证明. 若 $\sup E=+\infty$, 则对于任意给定的正数 M, 都有 $x_1\in E, x_1\geqslant M$; 同理对于 $M+1$, 也有 $x_2\in E, x_2\geqslant M+1$, 依次类推, 此时有 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=+\infty=\sup E$.

否则 $\sup E<+\infty$, 任取 E 的一个上界 M 与 $x_0\in E$, 令 $E_1=[x_0,M]$, $T=(x_0+M)/2$, 这样区间 E_1 被 T 二分, 优先考察右侧的集合 $[T,M]$, 若 $[T,M]\cap E\neq\varnothing$, 则令 $E_2=[T,M]$, 否则令 $E_2=[x_0,T]$, 继续将 E_2 二分, 并仿上法选择 E_3, 以此类推. 易见 $\{E_k\}$ 形成一列闭区间套, 设 $x_k\in E_k$, 则 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=\sup E$. □

2.2 $\mathcal{B}$

1. (Toeplitz(特普利茨) 定理) 设有无穷下三角矩阵 $(t_{mn})_{n\geqslant m}$:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & & & \\ t_{21} & t_{22} & & \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

满足下列条件

(i) 每一列元素趋于零, 即 $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{nm} = 0$.

(ii) 各行元素的绝对值之和有界, 即 $\forall n \in \mathbb{Z}_+$,

$$|t_{n1}| + |t_{n2}| + \cdots + |t_{nn}| \leqslant K < +\infty.$$

记 $y_n = t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{nn}x_n$. 证明:

(1) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

(2) 记 $T_n = t_{n1} + t_{n2} + \cdots + t_{nn}$. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 1$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ 有限, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$.

证明. (1) 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ 知存在 $M > 0$ 使得

$$|x_n| < M, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

并且对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$, 使得 $n > N$ 时, 有

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

对于上述的 ε 与 N, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nm} = 0$ 可知 $\exists N_1 \in \mathbb{N}_+$, 使得 $N_1 > N$, 且当 $n > N_1$ 时有

$$|t_{nm}| < \frac{\varepsilon}{2NM}, \qquad m = 1, 2, \cdots, N,$$

从而当 $n > N_1$ 时, 由 y_n 的定义得

$$\begin{aligned} |y_n| &= |t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \cdots + t_{nn}x_n| \leqslant |t_{n1}x_1| + |t_{n2}x_2| + \cdots + |t_{nn}x_n| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2NM} \cdot NM + \left(|t_{n(N+1)}| + |t_{n(N+2)}| + \cdots + |t_{nn}|\right) \frac{\varepsilon}{2K} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

(2) 由题设知 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a) = 0$, 而

$$z_n := t_{n1}(x_1 - a) + t_{n2}(x_2 - a) + \cdots + t_{nn}(x_n - a) = y_n - aT_n,$$

由前面的结论知 $\lim\limits_{n\to n\to} z_n = 0$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n + a \lim\limits_{n\to\infty} T_n = a$. □

2. 试考察 Stolz 定理和 Toeplitz 定理的关系.

由 Toeplitz 定理可以推导出 Stolz 定理 2.2.1, 理由如下.

记号如同问题 **1**. 令上述的无穷下三角矩阵的元素为 $t_{nm} = \dfrac{y_{m+1}-y_m}{y_{m+1}}$, 容易验证其满足定理条件, 又记 $a_n = \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$, 于是

$$b_n := t_{n1}a_1 + t_{n2}a_2 + \cdots + t_{nn}a_n = \frac{x_{n+1}-x_1}{y_{n+1}}.$$

由 Toeplitz 定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$, 易见 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \ell$.

2.3　Euclid 空间中的基本概念

Definition 2.3.1

设 X 为非空集, 映射 $d: X\times X \to \mathbb{R}$ 称为 X 上的度量, 又称距离, 如果对任何 $x,y,z\in X$ 成立:

(i) **非负性.** $d(x,y)\geqslant 0$, 且等号当且仅当在 $x=y$ 时成立.

(ii) **对称性.** $d(x,y)=d(y,x)$.

(iii) **三角不等式.** $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$.

此时, 称 (X,d)(或简称 X) 为度量空间或距离空间, 称 $d(x,y)$ 为 x 与 y 间的距离.

2.3 $\mathcal{A}$

1*. 设 $E\subseteq\mathbb{R}$ 为非空有界闭集. 证明 E 有最大值最小值, 即 $\sup E\in E$, $\inf E\in E$.

证明. □

2. (距离的等价定义). 在定义 2.3.1中, 由 (ii)—-(iii) 可以得到: (iii′) 对任何 $x,y\in X$, 成立 $d(x,z)\leqslant d(y,x)+d(y,z)$. 证明: (i)–(iii) 与 (i), (iii′) 等价.

3. 设 E 为 $\mathbb{R}$ 中的无理数全体. 证明 $\overline{E}=\mathbb{R}$.

4. 称 $\mathbb{R}^n$ 中各分量均为有理数的点为有理点. 证明 $\mathbb{R}^n$ 中有理点的全体的闭包为 $\mathbb{R}^n$.

2.3 $\mathcal{B}$

1. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, 证明存在 E 的至多可列的子集 F, 使得 $\overline{F}\supseteq E$.

2. 设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, 证明存在集合 F 使得 F 的导集为 E.

3. 下表穷举了集合的内部、导集、边界和闭包. 请证明每一格中的结果, 对于非等式的情形, 举出不成立的例子. 进一步, 思考能否得出其他的关系式.

集合	内部	导集	边界	闭包
E°	$(E^\circ)^\circ = E^\circ$	$(E^\circ)' = \overline{E^\circ}$	$\partial(E^\circ) \subseteq \partial E \cap E'$	$\overline{E^\circ} \subseteq E'$
E'	$(E')^\circ = \overline{E}^\circ \supseteq E^\circ$	$(E')' \subseteq E'$	$\partial(E') \subseteq \partial E \cap E'$	$\overline{E'} = E'$
∂E	$(\partial E)^\circ = (\overline{E} \cap \overline{\mathscr{C}E})^\circ$	$(\partial E)' \subseteq \partial E \cap E'$	$\partial(\partial E) \subseteq \partial E$	$\overline{\partial E} = \partial E$
$\overline{E}$	$(\overline{E})^\circ \supseteq E^\circ$	$(\overline{E})' = E'$	$\partial(\overline{E}) \subseteq \partial E$	$\overline{(\overline{E})} = \overline{E}$

4. 设 X 为线性空间, 称映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X \to \mathbb{R}$ 为 X 上的内积, 如果它满足: 对于任何 $x, y, z \in X$ 以及 $\alpha \in \mathbb{R}$,

(1) 非负性. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$, 且等号成立当且仅当 $x = 0$ 时成立.

(2) 线性性. $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

(3) 关于数乘线性. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

(4) 对称性. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

此时称 X 为 (实) 内积空间. 令 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. 证明 $\|\cdot\|$ 为 X 上的范数—称为由该内积诱导的范数, 且该范数满足平行四边形法则:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

证明. 容易验证按上述规则定义的范数满足非负性和齐次性, 下证其满足三角不等式, 在此之前, 我们先证明 Cauchy-Schwarz 不等式: 即 $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$, 等号成立当且仅当 x, y 线性相关.

首先, 当 $x = 0$ 或 $y = kx$ 时 (即 x, y 线性相关), 我们有

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle 0, y\rangle| = |0\langle 0, y\rangle| = 0 = \|0\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\| ,$$

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle x, kx\rangle| = |k\langle x, x\rangle| = |k|\,\|x\|^2 = \|x\| \cdot \|kx\| = \|x\| \cdot \|y\| .$$

当 x, y 线性无关时, 即对任何实数 k, 都有 $y \neq kx$, 也即 $kx - y \neq 0$, 于是由内积的非负性有

$$0 < \langle kx - y, kx - y\rangle = \|x\|^2 k^2 - 2\langle x, y\rangle k + \|y\|^2 ,$$

这意味着关于 k 的一元二次方程 $\|x\|^2 k^2 - 2\langle x, y\rangle k + \|y\|^2 = 0$ 无实根, 即 $\Delta = 4\langle x, y\rangle - 4\|x\| \cdot \|y\| < 0$, 即 $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$. 这个不等式也称为 Cauchy-Buniakowsky-Schwarz(柯西-布尼亚科夫斯基-施瓦茨) 不等式.

利用 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 ,$$

即 $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

易见

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= 2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .\end{aligned}$$

□

5. 设 $X, \|\cdot\|$ 为赋范线性空间, 若范数 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形法则, 令 $\langle x, y\rangle = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$. 验证 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 X 上的内积.

解. 即该范数满足 $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. 下面对上题所给内积性质进行注意验证:

(1) 非负性. 由

$$\langle x, x\rangle = \frac{\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2}{4} = \|x\|^2 \geqslant 0,$$

且等号成立当且仅当 $x = 0$. 故而非负性成立.

(2) 线性性. 由

$$\langle x, y+z\rangle = \frac{\|x+(y+z)\|^2 - \|x-(y+z)\|^2}{4},$$

结合平行四边形法则有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\cdot\frac{\|x+(y+z)\|^2 - \|x-(y+z)\|^2}{2} \\
=&\frac{\|x+y+z\|^2 + \|x+y-z\|^2 - \left(\|x-y+z\|^2 + \|x-y-z\|^2\right)}{4\times 2} \\
=&\frac{\|x+y\|^2 + \|z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y\|^2}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\cdot\frac{\|x+(y+z)\|^2 - \|x-(y+z)\|^2}{2} \\
=&\frac{\|x+y+z\|^2 + \|x+z-y\|^2 - \left(\|x+z-y\|^2 + \|x-y-z\|^2\right)}{4\times 2} \\
=&\frac{\|x+z\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2 - \|z\|^2}{4},
\end{aligned}$$

上面两式相加, 便得

$$\langle x, y+z\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} + \frac{\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2}{4} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle,$$

故而线性性成立.

(3) 关于数乘线性与对称性是显然成立的. ■

6. 试构造 $\mathbb{R}$ 中一列非空集 $\{E_k\}$ 使得 $E_{k+1} = E_k' \subset E_k (k \geqslant 1)$.

2.4 Eucild 空间中的基本定理

Theorem 2.4.1

设 $\{\boldsymbol{A}_k\}$ 是 $\mathbb{S}^n$ 中的 Loewner 偏序下的单调有界列, 则 $\{\boldsymbol{A}_k\}$ 收敛.

记 $\mathbb{S}^n$ 为 n 阶实对称矩阵全体, 在其中引入 **Loewner(勒夫纳)** 偏序: 对于 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{S}^n$, 定义

$\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{B}$ 为: $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵, 即对任何 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, 成立

$$\boldsymbol{x}^{\top} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{x}^{\top} \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}.$$

2.4 $\mathcal{A}$

1. 设 $x_0 \in (0,2)$, $x_{n+1}=x_n(2-x_n)(n \geqslant 0)$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.
由此, 对于 $c>0$, 任取 $y_0>0$ 满足 $cy_0<1$, 令 $y_{n+1}=y_n(2-cy_n)(n \geqslant 0)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\dfrac{1}{c}$.
这一事实让我们有可能利用乘法来计算倒数的近似值.

证明. 无论 x_0 为何值时, 有

$$x_{n+1}=x_n(2-x_n) \leqslant \left(\frac{x_n+2-x_n}{2}\right)^2=1.$$

即 $\{x_n\}$ 有界. 特别的, $x_1 \leqslant 1$, 等号成立当且仅当 $x_0=1$, 此时结论是平凡的, 否则由 $x_n<1$, 则有

$$x_{n+1}=x_n(2-x_n)>x_n, \qquad n \geqslant 1,$$

即 $\{x_n\}(n=1,2,\cdots)$ 单调递增, 于是 $\{x_n\}$ 存在, 对条件两侧取极限即得结论.

后者令 $x_n=cy_n$ 即得结论. □

2. 设 $x_0 \geqslant 0$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}(n \geqslant 0)$. 试分别用以下方法证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=2$.
(1) 说明 $\{x_n\}$ 单调有界.
(2) 证明存在常数 $C>0$ 使得 $|x_n-2| \leqslant \dfrac{C}{2^n}(\forall n \geqslant 1)$.

证明. (1) 是容易说明的 (数学归纳法). 对于 (2), 我们取 $f(x)=\sqrt{x+2}(x \geqslant 0)$. 这样有

$$f(2)=2, \qquad x_{n+1}=f(x_n),$$

并且

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2+x}}<\frac{1}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}|x_n-2| &= |f(x_{n-1})-f(2)|=|f'(\eta)|\,|x_{n-2}-2| \\ &< \frac{1}{2}|x_{n-2}-2|<\cdots<\frac{1}{2^n}|x_0-2|.\end{aligned}$$

或者,

$$\begin{aligned}|x_n-2| = |\sqrt{x_{n-1}+2}-2| &= \left|\frac{x_{n-1}-2}{\sqrt{x_{n-2}+2}+2}\right| \leqslant \left|\frac{x_{n-2}-2}{2}\right| \\ &<\cdots<\frac{1}{2^n}|x_0-2|.\end{aligned}$$

总之无论如何, 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=2$. □

3. 设 $a_0, b_0>0$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$. 证明: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛且极限相同.

证明. 对 $a,b>0$, 由算数几何平均不等式有 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, 于是有

$$\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)}{a+b}\geqslant 0.$$

从而有 $\dfrac{a_n+b_n}{2}\geqslant\sqrt{a_nb_n}\geqslant\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$, 即 $a_{n+1}\geqslant b_{n+1}(n=0,1,\cdots)$, 由于

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+b_n/a_n}{2}\leqslant 1,$$

从而 $\{a_{n+1}\}$ 单调递减, 同理可证 $\{b_{n+1}\}$ 单调递增, 有 $[b_{n+1},a_{n+1}]\subset[b_n,a_n]$ 又

$$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{a_n-b_n}{2(a_n+b_n)}\cdot(a_n-b_n)<\frac{1}{2}(a_n-b_n)<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}(a_1-b_1)\to 0,\quad n\to\infty,$$

依 Cauchy-Cantor 闭区间套定理原命题得证. □

4. 对于 $n\geqslant 1$, 考虑

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n,\quad b_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1).$$

证明: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均收敛, 且收敛到同一极限, 该极限称为 **Euler(欧拉)** 常数.

证明. 利用不等式

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},\qquad\forall n\geqslant 1.$$

由于

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0.\\ b_{n+1}-b_n&=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0.\\ a_n-b_n&=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0,\ \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0.\end{aligned}$$

可见 $\forall n\geqslant 1$, 有 $[b_{n+1},a_{n+1}]\subseteq[b_n,a_n]$. 依 Cauahy-Cantor 闭区间套定理得证结论. □

5. 设 $c\geqslant -3$,

$$x_1=\frac{c}{2},\qquad x_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{x_n^2}{2},\quad n=1,2,3,\cdots,$$

问 $\{x_n\}$ 何时收敛, 并求极限.

解. 我们分情况对 c 的范围进行讨论.

(i) $c>1$. 此时由基本不等式有

$$x_{n+1}=\frac{c+x_n^2}{2}\geqslant\sqrt{c}x_n\geqslant\cdots\geqslant\left(\sqrt{c}\right)^n x_1,$$

故 $c>1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

(ii) $0 \leqslant c \leqslant 1$. 此时有 $x_1 = \frac{c}{2} < 1$, 假设 $x_n < 1$, 那么 $x_{n+1} < 1$. 即由数学归纳法得 x_n 有界. 另一方面

$$x_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{x_n^2}{2}, \quad x_n = \frac{c}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2},$$

两式相减得到 $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{2}$, 注意到 $x_2 > x_1 = \frac{c}{2}$, 则由上式递推便可得到 $x_{n+1} > x_n$. 即 $\{x_n\}$ 单增有界, 从而收敛. 并且, 若 $\{x_n\}$ 收敛, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = X$, 则对递推公式两侧取极限得到

$$A = \frac{c}{2} + \frac{A^2}{2} \Rightarrow A = 1 \pm \sqrt{1-c},$$

结合 $x_n < 1$, 故 $0 < c \leqslant 1$ 时 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 - \sqrt{1-c}$.

(iii) $-3 \leqslant c < 0$. 易见此时对一切 n 有 $x_n \geqslant \frac{c}{2}$. 并且 $x_1 = \frac{c}{2} < 0$, 假设 $x_n < 0$, 则有

$$|x_n| \leqslant \frac{c}{2}, \quad x_n^2 \leqslant \frac{|c|}{4} \cdot |c| < |c|, \quad x_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{x_n^2}{2} < \frac{c+|c|}{2} = 0.$$

即此时 $\frac{c}{2} \leqslant x_n < 0$. 仿上法, 分别考虑 $n = 2k+1, 2k-1$ 以及 $n = 2k+2, 2k$ 的情况, 有

$$x_{2k+1} - x_{2k-1} = \frac{x_{2k}^2 - x_{2k-2}^2}{2}, \tag{$\blacklozenge$}$$
$$x_{2k+2} - x_{2k} = \frac{x_{2k+1}^2 - x_{2k-1}^2}{2}. \tag{$\lozenge$}$$

事实上, 有 $x_3 > x_1 = \frac{c}{2}$, 故 $|x_3| < |x_1|, x_3^2 < x_1^2$, 在($\lozenge$)式中令 $k = 1$, 得到 $x_4 < x_2$, 即有 $|x_4| > |x_2|, x_4^2 > x_2^2$, 在($\blacklozenge$)式中令 $k = 2$, 又得到 $x_5 > x_3$ 等等. 总之有

$$x_{2k+1} > x_{2k-1}, \quad x_{2k+2} < x_{2k}.$$

结合 $\{x_{2k}\}, \{x_{2k+1}\}$ 均有界, 从而二者极限存在, 记 $X_1 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1}, X_2 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}$. 结合题设递推公式得到

$$X_1 = \frac{c}{2} + \frac{X_2^2}{2}, \quad X_2 = \frac{c}{2} + \frac{X_1^2}{2}, \tag{$\spadesuit$}$$

两式相减, 得到 $(X_1 - X_2)(X_1 + X_2 + 2) = 0$. 若 $X_1 + X_2 + 2 = 0$, 即 $X_1 = -2 - X_2$, 代入($\spadesuit$)中左式有

$$X_2^2 + 2X_2 + (c+4) = 0,$$

此时 $\Delta = 4 - 4(4+c) \leqslant 0$, 即 $c < -3$ 时, 上式在实数范围内无解, 因此只能有 $X_1 = X_2$. 另外当 $c = -3$ 时, 易见 $X_1 = X_2 = -1$. 故 $-3 \leqslant c < 0$ 时 $\{x_n\}$ 收敛, 结合步骤 (ii) 的分析可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 - \sqrt{1-c}$. ■

6. 证明: 对于任何 $n \geqslant 1$, 存在 $\theta_n \in (0,1)$ 使得 $\mathrm{e} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}$. 由此说明 e 是无理数.

证明. 由于

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

又因为

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}&=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{m!}+\cdots\\&<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^k}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}\right)=\frac{n+2}{(n+1)\cdot(n+1)!}\\&=\frac{1}{n\cdot n!}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}<\frac{1}{n\cdot n!}.\end{aligned}$$

这几乎就完成了第一部分的证明.

下面说明 e 是无理数, 事实上, 若其为有理数, 则定能表示成既约分数的形式, 设其为 p/q, 有上述可知

$$\mathrm{e}=\frac{p}{q}=\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}+\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}+\frac{\theta_n}{q\cdot q!}.$$

于是有

$$\frac{p}{q}-\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}=\frac{\theta_n}{q\cdot q!},$$

两侧乘以 $q\cdot q!$, 则左侧为以整数, 右侧为 $\theta_n\in(0,1)$, 这是不可能的. □

7. 设 E, F 为 $\mathbb{R}$ 中的非空集, 定义 $d(E,F)=\inf\limits_{x\in E,y\in F}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$.

(1) 若 E,F 为非空闭集, 且 E 有界, 证明存在 $\boldsymbol{x}_0\in E,\boldsymbol{y}_0\in F$ 使得 $|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|=d(E,F)$.

(2) 举例说明存在不相交的非空闭集 $E,F\in\mathbb{R}^n$ 使得 $d(E,F)=0$.

证明. (1)

(2) 取 $E=\{(x,0)|x\in\mathbb{R}\},F=\{(x,\mathrm{e}^x)|x\in\mathbb{R}\}$, 则 E,F 都是闭集且 $d(E,F)=0$. □

8. 设 $\mathbb{R}^n$ 中有界非空闭集 $\{E_k\}$ 满足 $E_{k+1}\subseteq E_k(k\geqslant 1)$. 证明: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 为非空闭集.

证明. □

9*. 梳理/证明以下结果, 并尝试对这些结论有一个直观的理解:

(1) 收敛数列的子列收敛到同一极限.

(2) 如果一个数列有两个子列收敛到不同极限, 则该数列发散.

(3) 如果有界数列的收敛子列均收敛到同一个极限, 则该数列收敛.

(4) 有界数列 $\{a_n\}$ 不收敛到 A 当且仅当存在一个收敛到 $B\neq A$ 的子列.

(5) $\bar{x}$ 为 E 的聚点当且仅当存在 E 中两两不同的点列 x_n 使得 $x_n\to\bar{x}$.

(6) $\bar{x}$ 为 E 的聚点当且仅当存在 $x_n\in E\backslash\{\bar{x}\}$ 使得 $x_n\to\bar{x}$

证明. (1) 设 $\{a_n\}$ 收敛到 a, 则 $\forall\varepsilon>0$, 有 N_1 使得 $n>N_1$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$, 若其有子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛到 $b\neq a$, 则同理存在 N_2 使得 $n_k>N_2$ 时 $|a_{n_k}-b|<\varepsilon$, 我们不妨取 $\varepsilon<\dfrac{|b-a|}{2}$, 则 $n>N_1+N_2$ 时有

$$|b-a|-\varepsilon\leqslant|a-b|-|a_n-a|\leqslant|a_n-a+a-b|<|a_n-b|<\varepsilon,$$

矛盾. 直观的理解是收敛数列的子列收敛到同一极限, 否则将导致原数列发散.

(2)

(3)

(4)

(5)

(6) □

10. 设 $E\subseteq\mathbb{R}$. 证明存在至多可列集 $F\subseteq E$ 使得 E 在 E 中稠密.

11. 证明: 闭区间 $[a,b]$ 不能表示为两个不相交的非空闭集的并.

证明. 反证法, 设 $[a,b]=[a_1,b_1]\cup[a_2,b_2]$ 并且 $[a_1,b_1]\cap[a_2,b_2]=\varnothing$, 可设 $a_1<b_1<a_2<b_2$, 若 $a\neq a_1$, 则或者 $a>a_1$, 此时 $a_1\notin[a,b]$, 或者 $a<a_1$, 此时 $a\notin[a_1,b_1]\cup[a_2,b_2]$ 均矛盾, 从而必有 $a=a_1$, 同理 $b=b_1$, 但 (b_1,a_2) 非空, 易见

$$[a_1,b_1]\cup[a_2,b_2]=[a,b]\backslash(b_1,a_2),$$

这与假设矛盾, 从而结论成立. □

12. 证明: $\mathbb{R}$ 中既开又闭的集只有空集和 $\mathbb{R}$.

证明. 参考下一题. □

13. 证明: $\mathbb{R}^n$ 中既开又闭的集只有空集和 $\mathbb{R}^n$.

证明. 设 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中既开又闭的集合. 因 S 是闭集, 故 $\mathbb{R}^n\backslash S$ 为开集. 于是 $\mathbb{R}^n=S\cup(\mathbb{R}^n\backslash S)$ 是两个不相交开集的并. 由 $\mathbb{R}^n$ 的连通性可知 S 与 $\mathbb{R}^n\backslash S$ 中至少有一为空集, 故 $S=\mathbb{R}^n$ 或 $\varnothing$. □

2.4 $\mathcal{B}$

1. 设 $x_0\in(0,1)$, $x_{n+1}=x_n(1-x_n)(n\geqslant 0)$. 不使用 Stolz 公式, 按以下过程证明:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$,

(2) 对任何 $n\geqslant 1$, 成立 $(n+1)x_n<1$,

(3) 从某一项开始, $\{nx_n\}$ 单调有界.

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=1$.

证明. (1) 易见 $0<x_n<1$ 且 $x_{n+1}<x_n$, 从而 $\{x_n\}$ 有极限, 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$, 有 $A=A(1-A)$, 即得 $A=0$.

(2) 当 $n=1$ 时有 $x_1=x_0(1-x_0)\leqslant\left(\frac{x_0+1-x_0}{2}\right)^2=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$, 即成立 $(1+1)x_1<1$. 假设对 x_n 成立 $(n+1)x_n<1$, 则由 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, 注意到 $f(x)=x(1-x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{n+1}\right)$ 上单调递增, 则 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)<\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n^2+2n+1}<\frac{1}{n+2}$, 由数学归纳法可知对任何 $n\geqslant 1$ 成立 $(n+1)x_n<1$.

(3) 易见 $\{nx_n\}$ 有界. 并且有

$$(n+1)x_{n+1}-nx_n=(n+1)x_n(1-x_n)-nx_n=nx_n^2+x_n-x_n^2>0,$$

即 $\{nx_n\}$ 单调递增.

(4) 由上述知 $\{nx_n\}$ 有极限, 不妨记 $\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=B$, 另记 $c_n=nx_n$. 由 (2) 知

$$c_n<1-\frac{c_n}{n}.$$

由于 $\{c_n\}$ 有界, 则令 $n\to+\infty$ 得到 $B\leqslant 1$. 另一方面, 若 $B<1$, 则存在 k 使得 $B<k<1$, 注意到

$$-\frac{\ln\left(1-\frac{c_n}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\to B<k,\quad n\to+\infty,$$

故 n 充分大时, 有 $1-\frac{c_n}{n}\geqslant\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-k}$, 并且由 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$ 知 $c_{n+1}=\frac{n+1}{n}c_n\left(1-\frac{c_n}{n}\right)$, 有

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{c_n}{n}\right)\geqslant\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-k},$$

故有 $C_0>0$ 使得对充分大的 n 有 $c_n\geqslant C_0n^{1-k}$, 这与 $\{c_n\}$ 有界矛盾. 故 $B=1$. □

2. 在习题 2.4 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 的第 5 题中, $c<-3$ 会如何?

解. 我们继续习题 2.4 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 中第 5 题的讨论. 在下面的叙述中, 我们需要使用之前的结论.

(iv) $-4\leqslant c<-3$. 这种情况下, 与 **(iii)** 十分类似. 同理, 我们可以得到 $\frac{c}{2}\leqslant x_n\leqslant 0$, 并且也有 $\{x_{2k}\}$ 与 $\{x_{2k+1}\}$ 收敛. 沿用之前的记号, 得到

$$X_1=\frac{c}{2}+\frac{X_2^2}{2},\quad X_2=\frac{c}{2}+\frac{X_1^2}{2},$$
$$(X_1-X_2)(X_1+X_2+2)=0,$$

下面我们证明, 这种情况下, $X_1\neq X_2$. 否则 $\{x_n\}$ 收敛到 $X=X_1=X_2=1-\sqrt{1-c}$, 由于 $|X|>1$, 于是 n 充分大时有

$$\left|\frac{x_n+X}{2}\right|>1,$$

同时考虑到

$$x_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{x_n^2}{2},\quad X=\frac{c}{2}+\frac{X^2}{2},$$

两式相减得到
$$|x_{n+1}-X|=\left|\frac{x_n+X}{2}\right|\cdot|x_n-X|\geqslant|x_n-X|,$$
这表明若 $\{x_n\}$ 收敛到 X, 必有 $N\in\mathbb{Z}$ 使得 $n>N$ 时 $x_n=X$. 由于 $X=\frac{c}{2}+\frac{X^2}{2}>\frac{c}{2}=x_1$, 故 $N>1$. 选取满足 $n=N-1$ 时成立 $x_n\neq X$ 的 N, 于是
$$|x_N-X|=\left|\frac{x_{N-1}+X}{2}\right|\cdot|x_{N-1}-X|,$$
这表明 $x_{N-1}=-X$. 故 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $\exists n$ 使得 $x_n=-X$. 由于 $X=1-\sqrt{1-c},-X=\sqrt{1-c}-1>1$, 而 $x_n<0$. 故此时 $\{x_n\}$ 不收敛. 即此时有 $X_1+X_2+2=0$. $\{x_n\}$ 有两极限点. 易见其为方程 $x^2+2x+(4+c)=0$ 的两个根. 特别的, $c=-4$ 时, $X_1=0,X_2=-2$.

(v) $-8\leqslant c<-4$. 首先 $c=-8$ 时. 易见此时收敛并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=4$. 当 $-8<c<-4$ 时, 归纳易得 $|x_n|\leqslant-\frac{c}{2}<1+\sqrt{1-c}$, 即若 $\{x_n\}$ 收敛必有 $X=1-\sqrt{1-c}$. 由上面的分析知, 这等价于 $\exists k\geqslant 2$ 使得 $x_k=-X=\sqrt{1-c}-1$. 易见 x_n 可表成 c 得多项式, 即有 $x_k:=f_k(c)$, 由于
$$f_k(-4)\leqslant 0<\sqrt{1-(-4)}-1,\quad f_k(-8)=4>\sqrt{1-(-8)}-1,$$
故对每个 $k\geqslant 2$ 都存在有限个 $c\in(-8,-4)$ 使得 $x_k=f_k(c)=\sqrt{1-c}-1$. 故此时使 $\{x_n\}$ 收敛的值为 $(-8,-4)$ 中的可数多个值.

(vi) $c<-8$. 此时 $x_1=\frac{c}{2},x_2=\frac{c}{2}+\frac{x_1^2}{2}=\frac{c}{2}+\frac{c^2}{8}$, 并且此时
$$\frac{c}{2}+\frac{c^2}{8}>4,\quad\left|\frac{c^2}{8}\right|=\left|\frac{c}{8}\right|\cdot|c|>|c|\Rightarrow\left|\frac{c}{2}+\frac{c^2}{8}\right|>\left|\frac{c}{2}\right|,$$
即此时 $0<|x_1|<x_2$, 结合
$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n^2-x_{n-1}^2}{2},$$
可知此时 $\{x_n\}$ 单增, 即有 $x_3>x_2>4$, 于是当 $n>3$ 时,
$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n+x_{n-1}}{2}(x_n-x_{n-1})>4(x_n-x_{n-1}),$$
这意味着 $\{x_n-x_{n-1}\}$ 无界, 进而 $\{x_n\}$ 无界. 故 $c<-8$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. ■

3. 设 $[a,b]$ 上函数 $\{f_n\}$ 一致有界, 即存在常数 $M>0$ 使得
$$|f_n(x)|\leqslant M,\qquad\forall n\geqslant 1,\ x\in[a,b],$$
证明存在子函数列 $\{f_{n_k}\}$ 在 $[a,b]$ 的所有有理数点收敛.

证明. 设 $[a,b]$ 上的有理数集为
$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots,$$
由于 $\{f_n\}$ 一致有界, 则对 $\forall x_0\in[a,b]$, $\{f_n(x_0)\}$ 都是 $\mathbb{R}$ 中的有界列, 由 Bolzano-Weierstrass 定理可知, 其有收敛子列. 设对于 a_1, 子列 $\{f_{1_k}\}$ 收敛, 则对于 a_2, 抽取 $\{f_{1_k}\}$ 的子列 $\{f_{2_k}\}$, 则 $\{f_{2_k}\}$ 对于 a_1,a_0 都收敛, 在 f_{2_k} 中选取子列 f_{3_k} 使得 $\{f_{3_k}(a_3)\}$ 收敛, 并以此类推. 这就完成了证明. □

4. 设整数 $m \geqslant 1$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{m+\sqrt{m+1+\sqrt{m+2+\cdots+\sqrt{m+n}}}}$ 存在, 并记该极限为 a_m. 进一步, 计算 $\lim\limits_{m\to+\infty}(a_m-\sqrt{m})$.

解. 记原连根式为 $A_n^{(m)}$, 关于 n 单增, 只需证其存在上界, 反复利用

$$\sqrt{m+x}\leqslant\sqrt{m}\left(1+\frac{x}{2m}\right), \forall x\geqslant 0,$$

令 $\alpha_m=\dfrac{1}{2\sqrt{m}}$, 可得

$$A_n^{(m)}\leqslant\sqrt{m}\sum_{k=0}^{n}\alpha_m^k+\sum_{k=1}^{n}k\alpha_m^{k+1}\leqslant\sqrt{m}+\frac{\sqrt{m}\alpha_m}{1-\alpha_m}+\left(\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}\right)^2,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n^{(m)}=a_m$ 存在, 且

$$\sqrt{m+\sqrt{m}}\leqslant a_m\leqslant\sqrt{m}+\frac{\sqrt{m}\alpha_m}{1-\alpha_m}+\left(\frac{\alpha_m}{1-\alpha_m}\right)^2,$$

可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_m-\sqrt{m})=\dfrac{1}{2}$. ■

5. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots+n\sqrt{1+(n+1)}}}}}=3.$

证明. 令

$$f(x)=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+\cdots}}}}\quad(x\geqslant 1),$$

那么 $f(x)$ 满足函数方程

$$f^2(x)=1+xf(x+1).$$

因为 $(x+1)^2=1+x(x+2)$, 所以函数 $x+1$ 是它的一个解. 我们来证明这是唯一解.

显然, 当 $x\geqslant 2$ 时有

$$f(x)\geqslant\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots}}}}=\lim_{n\to\infty}x^{1/2+1/2^2+\cdots+1/2^n}=x>\frac{1}{2}(x+1).$$

并且

$$\begin{aligned}
f(x)&\leqslant\sqrt{(x+1)\sqrt{(x+2)\sqrt{(x+3)\sqrt{(x+4)\cdots}}}}\\
&<\sqrt{(x+1)\sqrt{2(x+1)\sqrt{4(x+1)\sqrt{8(x+1)\cdots}}}}\\
&=\sqrt{(x+1)\sqrt{(x+1)\sqrt{(x+1)\sqrt{(x+1)\cdots}}}}\sqrt{1\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{8\cdots}}}},
\end{aligned}$$

上式右边第一个因子等于

$$\lim_{n\to\infty}(x+1)^{1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n}=x+1,$$

依据 $\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)2^{-k}=1$, 第二个因子等于

$$\lim_{n\to\infty} 1^{1/2}2^{1/4}4^{1/8}\cdots(2^{n-1})^{1/2^n}=2,$$

所以

$$f(x)<2(x+1).$$

合起来就是

$$\frac{1}{2}(x+1)<f(x)<2(x+1).$$

在上面的不等式中易 x 为 $x+1$ 得

$$\frac{1}{2}(x+2)<f(x+1)<2(x+2),$$

而由函数方程 $f^2(x)=1+xf(x+1)$ 可知

$$\frac{1}{2}+xf(x+1)<f^2(x)<2+xf(x+1).$$

由上述两式推出

$$\frac{1}{2}\left(1+x(x+2)\right)<f^2(x)<2(1+x(x+2)),$$

亦即

$$\frac{1}{2}(x+1)^2<f^2(x)<2(x+1)^2,$$

因此得到

$$\sqrt{\frac{1}{2}}(x+1)<f(x)<\sqrt{2}(x+1).$$

重复上述过程, 也就是说, 首先在上式中易 x 为 $x+1$ 得

$$\sqrt{\frac{1}{2}}(x+2)<f(x+1)<\sqrt{2}(x+2),$$

并且由函数方程可知

$$\sqrt{\frac{1}{2}}+xf(x+1)<f^2(x)<\sqrt{2}+xf(x+1).$$

于是从两式推出

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\left(1+x(x+2)\right)<f^2(x)<\sqrt{2}\left(1+x(x+2)\right),$$

因而得到

$$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}(x+1)<f(x)<\sqrt[4]{2}(x+1).$$

一般地, 应用数学归纳法可证

$$\sqrt[2^k]{\frac{1}{2}}(x+1)<f(x)<\sqrt[2^k]{2}(x+1).$$

在其中令 $k\to\infty$ 即得 $x+1\leqslant f(x)\leqslant x+1$. 这样, 我们最终得到 $f(x)=x+1$. 对应于原极限知其为 3. □

6. 推广第 5 题.

解. 结合第 5 题的证明可以得到如下结果:

$$\sqrt{1+a\sqrt{1+(a+1)\sqrt{1+(a+2)\sqrt{1+\cdots}}}}=a+1,\qquad a\geqslant 1.$$ ■

7. 证明命题 2.4.1: 设 $\{\boldsymbol{A}_k\}$ 是 $\mathbb{S}^n$ 中 Loewner 偏序意义下的单调有界列, 则 $\{\boldsymbol{A}_k\}$ 收敛.

证明. □

8. 在 Loewner 偏序意义下, 设 E 是 $\mathbb{S}^n$ 中的非空上有界集, 证明或否定: E 一定有最小上界.

9. 设 $x_0>0$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}(n\geqslant 0)$. 问: $\lim\limits_{n\to+\infty}4^n(2-x_n)$ 是否存在? 该极限存在时, 能否得到极限的值?

解. 当 $0<x_0<2$ 时, 令 $x_0=2\cos\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则有 $x_1=\sqrt{2+2\cos\alpha}=2\cos\dfrac{\alpha}{2}$, 归纳可得

$$x_n=2\cos\frac{\alpha}{2^n},$$

此时 $\lim\limits_{n\to+\infty}4^n(2-x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}4^n\left(2-2\cos\dfrac{\alpha}{2^n}\right)=\alpha^2$.

当 $x_0\geqslant 2$ 时, 令 $x_0=\dfrac{1}{\alpha}+\alpha(\alpha>0)$, 则有 $x_1=\sqrt{2+\alpha+\dfrac{1}{\alpha}}=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\alpha}$, 归纳可得

$$x_n=\alpha^{-1/2^n}+\alpha^{1/2^n},$$

此时 $\lim\limits_{n\to+\infty}4^n(2-x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}4^n\left(2-\alpha^{-1/2^n}-\alpha^{1/2^n}\right)=\ln^2\alpha$. ■

10. 一般地, 对于所求过的极限, 可考虑进一步的结果, 例如, 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$, 试试能否找到一个无穷大 y_n 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n\left(x_n-A\right)$ 为一个非零常数.

这是可能的.

11. 固定 $r\in(0,4)$, 任取 $x_0\in(0,1)$, 令 $x_{n+1}=rx_n(1-x_n)(n\geqslant 0)$. 问 r 取什么值时, 可以证明对于任何 $x_0\in(0,1)$, 按上述方式定义的 $\{x_n\}$ 一定收敛?

试编写一计算机程序, 感受对于不同的 r, 当 n 足够大时 x_n 的收敛情况.

解. 由 $0<x_0<1$, 如果 $x_n\in(0,1)$, 则

$$0<x_{n+1}=rx_n(1-x_n)\leqslant r\left(\frac{x_n+1-x_n}{2}\right)^2=\frac{r}{4}<1,$$

由归纳法可知 $x_n\in(0,1)$. 下面我们分情况对 r 的范围进行讨论.

(i) $0<r\leqslant 1$. 易见 $\{x_n\}$ 单调有界, 设其收敛于 A, 则有 $A=rA(1-A)$, 则或者 $A=0$, 或者 $A=1-\dfrac{1}{r}$, 但此时 $1-\dfrac{1}{r}<0(r\neq 1)$, 这是不可能的, 故 $A=0$.

(ii) $r>1$

■

12. 设 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 都是 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 的覆盖. 称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细, 如果对于任何 $V \in \mathscr{V}$ 存在 $U \in \mathscr{U}$ 使得 $V \subseteq U$.

对于 $\lambda > 0$, 若 $\{B_\lambda(x) | x \in E\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细, 则称 λ 为覆盖 $\mathscr{U}$ 的 **Lebesgue** 数. 易见, 若 E 的一个子集 F 的直径小于 Lebesgue 数 λ, 则可在 $\mathscr{U}$ 中找到元素 V 包含 F.

试证明 **Lebesgue** 覆盖定理: 设 $\mathscr{U}$ 为紧集 $E \subset \mathbb{R}$ 的开覆盖, 则它存在 Lebesgue 数.

证明. □

13. 考虑线性空间

$$X = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\},$$

在其上定义

$$||\{x_n\}|| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}, \qquad d(\{x_n\}, \{y_n\}) = ||\{x_n - y_n\}||.$$

证明 $||\cdot||$ 是 X 上的范数, 并以此范数定义收敛性, 开闭集等. 证明:

(1) 在 X 上, Cauchy 准则成立.

(2) 在 X 上, 致密性定理不成立, 即有界点列不一定有收敛子列.

(3) 设 $\{x_k\}$ 是 X 中的点列, 它的每一个分量都有界, 即记 $\boldsymbol{x}_k = \{x_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 时, 对任何 $n \geqslant 1$, $\{x_{k,n}\}_{k=1}^{\infty}$ 是有界集. 证明: 存在 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的子列使得其每一个分量都收敛.

(4) 在 X 上, 有限覆盖定理不成立.

(5) 在 X 上, 闭区间套定理成立. 即若 $\{F_k\}$ 是 X 中的一列单调下降且直径趋于零的闭集列, 则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 为单点集.

(6) X 中存在一列有界非空闭集 $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$ 使得 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 为空集.

证明. □

14. 回答下列问题.

(1) 在 $[-\infty, +\infty]$ 中[a], 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ 或 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, 我们就称 $\{a_n\}$ 收敛到 $+\infty$ 或 $-\infty$. 试重新考察习题 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 中的第 9 题.

(2) 对于 $E \subseteq [-\infty, +\infty]$, 若存在 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $(a, +\infty] \subseteq E$ $([-\infty, a) \subseteq E)$, 则称 $+\infty(-\infty)$ 为 E 的内点. 若 $U \subseteq [-\infty, +\infty]$ 的所有点都是其内点, 则称 U 为 $[-\infty, +\infty]$ 的开集. 考虑在 $[-\infty, +\infty]$ 中, 哪些集合是紧集, 即 $[-\infty, +\infty]$ 中满足任何开覆盖都有有限子覆盖的集合.

15. 设 $E \in \mathbb{R}$, 则 E 满足什么条件时, 成立: 对于 E 的任何闭覆盖, 均有有限子覆盖.

解. ■

16*. 设 U 为 $\mathbb{R}$ 中的非空开集, 证明:

(1) 若 $x_0 \in U$, 则存在唯一的开区间 (α, β)—这样的区间称为 U 的构成区间, 满足:

(i) $x_0 \in (\alpha, \beta) \subseteq U$; (ii) 若 $x_0 \in (a, b) \subseteq U$, 则 $(a, b) \subseteq (\alpha, \beta)$.

(2) U 可以表示为至多可列个两两不交的构成区间的并.

证明. (1) 由于 $x_0 \in U$ 是 U 的内点, 所以集合

$$A := \{y \in U \big| \, y < x_0 \text{ 且 } (y, x_0) \subseteq U\}$$

非空, 定义 $\alpha = \inf A$. 那么 $-\infty \leqslant \alpha < x_0$, 并且 $(\alpha, x_0) \in U$. 如果 α 是实数, 那么根据 α 的定义, 必有 $\alpha \notin U$.

同理, 定义集合

$$B := \{y \in U \big| x_0 < y \text{ 且 } (x_0, y) \subseteq U\},$$

取 $\beta = \sup B$, 则由 α, β 的定义可见

$$x_0 \in (\alpha, \beta) \subseteq U,$$

并且若 $x_0 \in (a, b) \subseteq U$, 则 $(a, b) \subseteq (\alpha, \beta)$.

(2) 把全体具有这样性质的开区间所构成的集合记为 $\mathscr{G}$, 那么 $\mathscr{G}$ 中任意两个元素作为开区间都不交. 从它的每一个元素中选取一个有理数与之对应, 全体这样的有理数集合记为 S, 那么 $\mathscr{G}$ 与 S 一一对应, 而 S 是 $\mathbb{Q}$ 的子集, 从而是可数集, 从而结论得证. □

17. 设 $\{x_n\}$ 是在 $[0,1]$ 中稠密的点列, 任取 $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $E = [0,1] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(x_n - \dfrac{\alpha}{2^n}, x_n + \dfrac{\alpha}{2^n}\right)$. 证明 E 为非空的疏朗集.

证明. ? □

18. 证明: 闭区间 $[a, b]$ 不能表示为至多两个但至多可列个两两不交的非空闭集的并.

证明. □

19. 证明: $\mathbb{R}^n$ 不能表示成一列无处稠密集的并.

证明. □

20. 设 $\{V_k\}$ 是一列在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密的开集, 证明: $\bigcap\limits_{k} V_k$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

证明. □

[a]以下说法在 $\mathbb{R}$ 中不适用

2.5　上、下极限

2.5 $\mathcal{A}$

1. 若 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$, 且 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{x_n}=1$. 证明序列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明. 由于

$$\varlimsup_{n\to+\infty} x_n\cdot\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n}{\varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n}=1,$$

从而有 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n=\varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n$, 故 $\{x_n\}$ 收敛. □

2. 设 $\{x_n\}$ 满足 $0\leqslant x_{m+n}\leqslant x_m\cdot x_n\,(\forall m,n\geqslant 1)$. 证明 $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ 收敛.

证明. 易见

$$0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\cdot x_1\leqslant\cdots\leqslant x_1^n.$$

从而 $\sqrt[n]{x_n}\leqslant x_1$, 故 $\varlimsup\limits_{b\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}$ 有限. 给定正整数 p, 使得 $n=kp+r$, 其中 $k\geqslant 0$, $0\leqslant r<p$, 于是

$$x_n=x_{pk+r}\leqslant x_{pk}\cdot x_r\leqslant x_p^k\cdot x_r,$$

即有

$$\sqrt[n]{x_n}\leqslant\sqrt[n]{x_p^k}\sqrt[n]{x_r}\leqslant\sqrt[p]{x_p}\sqrt[n]{x_r},$$

注意到 $x_r\in\{x_1,x_2,\cdots,x_{p-1}\}$ 有界, 令 $n\to+\infty$ 得到

$$\sqrt[n]{x_n}\leqslant\sqrt[p]{x_p}$$

对任意 p 都成立, 于是有

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\varliminf_{p\to+\infty}\sqrt[p]{x_p}.$$

依上、下极限的性质, 反向不等式也成立, 从而目标序列收敛. □

3. 举例说明, 在第 2 题中, $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ 可以没有单调性.

解. $x_1=2,x_2=1,x_3=2,x_4=1,x_5=2,\cdots$ ■

4. 设 $\{a_n\}$ 满足 $a_m+a_n-1\leqslant a_{m+n}\leqslant a_m+a_n+1(\forall m,n\geqslant 1)$. 求证:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 存在.

(2) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n}=q$, 则 $nq-1\leqslant a_n\leqslant nq+1$.

证明. 注意到, 对于任意 $k,t\in\mathbb{N}_+$,

$$\begin{aligned}a_{kt}=a_{(t-1)k+k}&\leqslant a_{(t-1)k}+a_k+1\leqslant a_{(t-2)k}+2a_k+2\\&\leqslant\cdots\leqslant a_{(t-(t-1))k}+(t-1)a_k+(t-1)\\&=ta_k+t-1.\end{aligned}$$

对于任意 n, 我们给定 k, 则有

$$n=kt+\ell,\quad 0\leqslant \ell<k,$$

于是有

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n}&=\frac{a_{kt+\ell}}{n}\leqslant\frac{a_{kt}+a_\ell+1}{n}\leqslant\frac{ta_k+t+a_\ell}{n}=\frac{ta_k+t}{kt+\ell}+\frac{a_\ell}{n}\\&=\frac{a_k+1}{k+\ell/t}+\frac{a_\ell}{n},\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty$, 此时 $t\to+\infty$, 取上极限得到 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{a_k+1}{k}$ 对任意 k 成立, 同理利用左侧的不等式可以得到 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}\geqslant\frac{a_k-1}{k}$, 也即

$$\frac{a_k-1}{k}\leqslant\varliminf_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{a_k+1}{k},$$

令 $k\to+\infty$ 便知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}$ 存在. 另外, 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=q$, 依上式有

$$\frac{a_k-1}{k}\leqslant q\leqslant\frac{a_k+1}{k},$$

也即 $kq-1\leqslant a_k\leqslant kq+1$. □

5. 设 $r\in(0,1)\,,x_0=0,\ x_{n+1}=r(1-x_n^2)(n=0,1,2,\cdots)$. 试探究 $\{x_n\}$ 的敛散性.

解. 易见 $0<x_n<1(n\geqslant 1)$ 有界. 我们先证明这样一件事: 对于正整数 m, 只要 $k>2m+1$, 则 $x_k<x_{2m+1}$. 当 $m=0$ 时, $2m+1=1$, 易见 $k>1$ 有 $x_k=r(1-x_{k-1}^2)<r=x_1$ 成立, 假设对 $m\in\mathbb{N}_+$ 成立, 考虑 $m+1$ 时

$$k>2(m+1)+1\Rightarrow k-2>2m+1,$$

又由

$$x_{k-1}=r(1-x_{k-2}^2)>r(1-x_{2m+1}^2)=x_{2m+2}\Rightarrow x_k=r(1-x_{k-1}^2)<r(1-x_{2m+2}^2)=x_{2(m+1)+1},$$

从而由数学归纳法可知结论成立. 特别的, $\{x_{2k+1}\}$ 严格单调递减. 同理可证对于 $m\in\mathbb{N}$, 若 $k>2m$, 则 $x_k>x_{2m}$, 即得 $\{x_{2k}\}$ 严格单调递增. 从而可设 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_{2k}=A,\ \lim\limits_{k\to+\infty}x_{2k+1}=B$.

对于 $x_{n+1}=r(1-x_n^2)$, 分别令 $n=2k-1,2k$ 再令 $k\to+\infty$ 可得

$$A=r(1-B^2),\quad B=r(1-A^2),$$

两式相减得到 $(A-B)\,(1-r(A+B))=0$. 即或者 $A=B$, 或者 $1-r(A+B)=0$, 注意到

$$x_{2n+1}+x_{2n}=r(1-x_{2n}^2)+x_{2n}\Rightarrow A+B=r(1-A^2)+A,$$

代入 $1-r(A+B)=0$ 有

$$r^2A^2-rA-r^2+1=0\Rightarrow\left(rA-\frac{1}{2}\right)^2=r^2-\frac{3}{4},$$

这意味着 $r^2 < \frac{3}{4}$ 时, 即 $0 < r < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时 $1 - r(A+B) = 0$ 无解, 此时只能有 $A = B$, 结合式递推公式可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{\sqrt{4r^2+1}-1}{2r}$. 考虑 $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 有

$$x_{2k+1} = r(1 - x_{2k}^2) = r\left(1 - r^2(1 - x_{2k-1}^2)^2\right) \Rightarrow r^3B^4 - 2r^3B^2 + B + r^3 - r = 0,$$

得 $\frac{3\sqrt{3}}{8}B^4 - \frac{3\sqrt{3}}{4}B^2 + B - \frac{\sqrt{3}}{8} = 0$, 即

$$\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(B - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 (B + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow B = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

同理可得 $A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

下证 $\frac{\sqrt{3}}{2} < r < 1$ 时 $\{x_n\}$ 发散. 只需要证明 $A \neq B$. 由上述的分析注意到

$$r^3B^4 - 2r^3B^2 + B + r^3 - r = 0 \Rightarrow (B^2r - r + B)(B^2r^2 - Br - r^2 + 1) = 0,$$

考虑 $B^2r^2 - Br - r^2 + 1 = 0$ 的解, 记

$$C = \frac{1 - \sqrt{4r^2-3}}{2r}, \quad D = \frac{1 + \sqrt{4r^2-3}}{2r},$$

我们证明, 对于任何 $m \in \mathbb{N}_+$, 有 $x_{2m} < C, x_{2m+1} > D$. 但当 $\frac{\sqrt{3}}{2} < r < 1$ 时有 $0 < C < \frac{\sqrt{3}}{3} < D < 1$, 进而 $0 \leqslant A \leqslant C < \frac{\sqrt{3}}{3} < D \leqslant B \leqslant 1$, 即得 $A \neq B$, 从而 $\{x_n\}$ 发散. 事实上, 注意到

$$C^2 = \frac{4r^2 - \left(2 + 2\sqrt{4r^2-3}\right)}{4r^2} = 1 - \frac{D}{r}, \quad D^2 = \frac{4r^2 - \left(2 - 2\sqrt{4r^2-3}\right)}{4r^2} = 1 - \frac{C}{r},$$

当 $m = 0$ 时, $x_0 = 0 < C, x_1 = r > D$. 假设对 $m \in \mathbb{N}_+$ 成立, 考虑 $m+1$ 时

$$x_{2(m+1)} = r\left(1 - x_{2m+1}^2\right) < r(1 - D^2) = C, x_{2(m+1)+1} = r\left(1 - x_{2(m+1)}^2\right) > r\left(1 - C^2\right) = D,$$

由数学归纳法可知结论成立. 综上, $r \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$,$\{x_n\}$ 收敛, $r \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ 时 $\{x_n\}$ 发散. ■

6. 设 $0 < q < 1$, a_n, b_n 满足: $a_n = b_n - qa_{n+1} (n = 1, 2, \cdots)$, 且 a_n, b_n 有界. 求证: $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在.

证明. □

7. 在第 6 题中当 $q \notin (0, 1)$ 时, 结论会怎样?

解. ■

8. 设 $a_n \geqslant 0$ 满足 $a_{n+1} \leqslant a_n + \frac{1}{n^2}$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明. 由题意知

$$a_{n+1} \leqslant a_n + \frac{1}{n^2} \leqslant a_n + \frac{1}{n(n-1)} = a_n + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Rightarrow a_{n+1} + \frac{1}{n} \leqslant a_n + \frac{1}{n-1},$$

于是 $\left\{a_n + \frac{1}{n-1}\right\}$ 递减且有下界. 故 $\left\{a_n + \frac{1}{n-1}\right\}$ 收敛. 而 $a_n = a_n + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1}$ 也收敛. □

9. 利用上下极限证明 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 准则.

证明. □

2.5 $\mathcal{B}$

1. 推广习题 2.5 $\mathcal{A}$ 中的第 2 题和第 4 题.

解. ■

2. 设 $x \in \mathbb{R}$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$.

证明. 我们先证明这样一个事实: 设 $h:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, 也就是说, 不论实数 A 多么大, 都能找到实数 B 使得当 $x > B$ 时, $h(x) > A$ 成立, 那么

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{h(x)}\right)^{h(x)} = \mathrm{e}.$$

记 $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{h(x)}\right)^{h(x)}$, 考虑充分大的 x 使得 $h(x) > 1$. 记

$$[h(x)] = m, h(x) - m = \alpha \in [0,1),$$

其中 $[x]$ 指不超过 x 的最大整数, 那么

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+\alpha} < f(x) \leqslant \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+\alpha},$$
$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{\alpha-1} e_{m+1} < f(x) \leqslant \left(1+\frac{1}{m}\right)^{\alpha} e_m.$$

其中 $e_m := \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m$. 令 $x\to+\infty$, 这暗含着 $m\to+\infty$, 即得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}$.

回到题目的证明: $x = 0$ 时的情形不需考虑. 设 $x \neq 0$. 记 $h_n = h_n(x) = \dfrac{x}{n}$, 则由上述结果有

$$\lim_{n\to+\infty}(1+h_n)^{1/h_n} = \mathrm{e}.$$

两边取 x 次幂, 有

$$\mathrm{e}^x = \left(\lim_{n\to+\infty}(1+h_n)^{1/h_n}\right)^x,$$

下面我们仅需说明

$$\left(\lim_{n\to+\infty}(1+h_n)^{1/h_n}\right)^x = \lim_{n\to+\infty}(1+h_n)^{x/h_n},$$

就完成了证明.

为此, 我们证明下面的定理: 设 $\alpha\in\mathbb{R}, f(x) := x^\alpha, x > 0$, 则 $\lim\limits_{y\to 0} f(x+y) = f(x)$. 这正是对幂函数连续性的刻画. 即证明 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta$, 只要 $|y| < \delta$, 就有

$$|f(x+y) - f(x)| < \varepsilon.$$

设 $|y| < x$. 这保证 $x + y > 0$, 有

$$f(x+y) - f(x) = f(x)\left(\left(1+\frac{y}{x}\right)^\alpha - 1\right),$$

记 $h=\dfrac{y}{x}$, 并记 $m=[\alpha]+1$, 分两种情形讨论:

(1) $0\leqslant h<1$. 此时

$$0\leqslant(1+h)^{\alpha}-1\leqslant(1+h)^{m}-1=h\sum_{k=1}^{m}(1+h)^{m-k}\leqslant h\left(m\cdot 2^{m}\right).$$

(2) $-1\leqslant h<0$. 此时

$$0\leqslant 1-(1+h)^{\alpha}\leqslant 1-(1+h)^{m}=-h\sum_{k=1}^{m}(1+h)^{m-k}\leqslant -h(m\cdot 2^{m}).$$

总之,

$$|f(x+y)-f(x)|=f(x)\left|(1+h)^{\alpha}-1\right|\leqslant|h|\left(m\cdot 2^{m}\right).$$

由此可见, $\forall\varepsilon\in(0,1)$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon x}{m\cdot 2^{m}}$, 就对于满足 $|y|<\delta$ 的 y 成立 $|f(x+y)-f(x)|<\varepsilon$. 这就完成了证明. □

3. 证明: 对任何 $x\in\mathbb{R}$ 成立 $\mathrm{e}^{x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$.

证明. 我们定义 $T_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n}$, 由上一题的结论可知对于任何 $x\in\mathbb{R}$, $\{T_n(x)\}$ 都是 Cauchy 列. 再设 $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k}}{k!}$. 则对于 $m>n>2N$, 其中 $N=[|x|]+1$, 有

$$|S_m(x)-S_n(x)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\frac{N^{k}}{k!}<\sum_{k=n+1}^{m}\frac{N^{k}}{(2N)^{k-2N}}=(2N)^{2N}\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}<\frac{(2N)^{2N}}{2^{n}},$$

所以对于一切实数 x, $\{S_n(x)\}$ 是 Cauchy 列.

另一方面, 当 $n>2$ 时,

$$S_n(x)-T_n(x)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)x^{k},$$

注意到当 $k\geqslant 2$ 时,

$$0<1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\leqslant\frac{1+\cdots+(k-1)}{n}=\frac{k(k-1)}{2n},$$

得到

$$|S_n(x)-T_n(x)|\leqslant\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{|x|^{k}}{(k-2)!}=\frac{x^{2}}{2n}S_{n-2}(|x|),$$

从而对于一切实数 x, 数列 $\{S_n(x)\}$ 与 $\{T_n(x)\}$ 等价. 因此有 $\mathrm{e}^{x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$. □

4. 设 $\{x_n\}$ 是正数列, 证明 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)\geqslant 1$.

证明. 设 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, n\left(\dfrac{1+x_{n+1}}{x_n}-1\right)<1$, 则 $\exists N>0$, 当 $n\geqslant N$ 时,

$$n\left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n}\right)<1,$$

此即 $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{x_n}{n} - \dfrac{x_{n+1}}{n+1} (n = N, N+1, \cdots, N+k-1, \cdots)$. 这是无穷多个不等式, 将前 k 个不等式相加得

$$\frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{N+k} < \frac{x_N}{N} - \frac{x_{N+k}}{N+k} < \frac{x_N}{N}.$$

此式应对一切 $k > 1$ 成立, 但实际上, 左端当 $k \to +\infty$ 时, 极限为 $+\infty$, 矛盾.

事实上, 本题有如下推广: 设 $\{a_n\}$ 为任意正数列, p 是任意给定的正整数, 则

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \left(\frac{a_1 + a_{n+p}}{a_n}\right) > \mathrm{e}^p, \qquad \varlimsup_{n\to+\infty} n\left(\frac{1 + a_{n+p}}{a_n} - 1\right) > p,$$

上述不等式中的 p 不可用更大的数代替, 并且上述两个不等式等价. □

5. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的实函数. 满足: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, 成立 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. 任取 $x_0 \in \mathbb{R}$, 定义 $x_{n+1} = f(x_n) (n \geqslant 0)$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛, 且极限不依赖于 x_0 的选择.

证明. □

2.6　正项级数

2.6 $\mathcal{A}$

1*. 设 $\{a_n\}$ 为一正数列. 证明:

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

证明. 设 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a < \infty$, 证明 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geqslant a$ □

2. 讨论以下级数的收敛性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 5}{n^4 + 4n + 7}$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 100n + 1} \cos\frac{1}{n}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$;　　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\alpha}$.

解. (1) 由于 $\dfrac{n^3 + 2n + 5}{n^4 + 4n + 7} \sim \dfrac{1}{n}$, 故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 5}{n^4 + 4n + 7}$ 发散.

(2) 由于 $\dfrac{1}{n^2 - 100n + 1} \cos\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n^2 - 100n + 1} \sim \dfrac{1}{n^2}$, 故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 100n + 1} \cos\frac{1}{n}$ 收敛;

(3) 由于 $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, 故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ 收敛;

(4) 注意到

$$\begin{aligned}
3 &= \frac{2+4}{2} > \sqrt{2 \times 4}, & 2 &= \frac{1+3}{2} > \sqrt{1 \times 3},\\
5 &= \frac{4+6}{2} > \sqrt{4 \times 6}, & 4 &= \frac{3+5}{2} > \sqrt{3 \times 5},\\
&\vdots & &\vdots\\
2n-1 &= \frac{(2n-2) + 2n}{2} > \sqrt{(2n-2) \cdot 2n}, & 2n &= \frac{(2n-1) + (2n+1)}{2} > \sqrt{(2n-1)(2n+1)},
\end{aligned}$$

于是有

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^{\alpha} < \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\alpha} < \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)^{\alpha},$$

于是当 $\alpha > 2$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{\alpha}$ 收敛, 其余情况发散. ■

3. 举例说明, 当 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ 时, 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 既可能收敛也可能发散.

解. 对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 均有 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$, 但前者发散而后者收敛. ■

4. 设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant 0$. 证明: 若 $\sum\limits_{n=0}^{n}a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

证明. 对于任何 m 与 $n>m$, 我们有

$$(n-m)a_n < a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n < \alpha_m,$$

其中 α_m 为该收敛级数的余式, 由此得 $na_n < \frac{n}{n-m}\alpha_m$. 由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{n}a_n$ 收敛, 故对于任给得 $\varepsilon>0$, 则存在 M 使得 $\alpha_M<\varepsilon$. 其次, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n-M}=1$, 故存在 $N(N>M)$, 使得 $n\geqslant N$ 时有 $\frac{n}{n-M}<2$. 于是, 当 $n\geqslant N$ 时, 有 $0<na_n<2\varepsilon$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. □

5. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a$. 证明 $a=0$.

证明. 反证法. 若 $a\neq 0$, 则由 $a_n>0$ 知 $a>0$, 结合 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a$ 可知对于 $\forall 0<\varepsilon<a$, 存在 N, 使得 $n>N$ 时有

$$na_n > a-\varepsilon, \quad 即 \quad a_n > \frac{a-\varepsilon}{n},$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 由此推知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 收敛, 矛盾. □

6. 讨论级数 $\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p+\cdots$ 的收敛性.

解. 该题与 2.6 $\mathcal{A}$ 第 **2** 题的第 (4) 题是完全相同的. 这里给出另一种方法. 由于 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{p}{2n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}=\frac{p}{2},$$

由 Rabba 判别法, 知当 $p>2$ 时, 级数收敛. ■

7. 研究数列 $\left\{\frac{1}{1+\alpha}\ \frac{2}{2+\alpha}\cdots\frac{n}{n+\alpha}\right\}$ 当 n 趋于无穷时候的阶, 其中 α 是一个非负常数.

解. 当 n 趋于无穷时, 由 String 公式可得

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+\alpha}\right)=\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^{n}}{\sqrt{2\pi(n+\alpha)}\left((n+\alpha)/\mathrm{e}\right)^{n+\alpha}}\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^{\alpha}}.$$ ∎

8. 研究级数 $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{n^{p}(\ln n)^{q}(\ln\ln n)^{r}}$ 的敛散性, 其中 p,q,r 为实数.

解. 当 $p>1$ 时, 令 $p=1+2\varepsilon,\varepsilon>0$, 则

$$\frac{n^{1+\varepsilon}}{n^{p}(\ln n)^{q}(\ln\ln n)^{r}}=\frac{n^{1+\varepsilon}}{n^{1+2\varepsilon}(\ln n)^{q}(\ln\ln n)^{r}}=\frac{1}{n^{\varepsilon}(\ln n)^{q}(\ln\ln n)^{r}}\to 0,\quad n\to+\infty,$$

由 $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ 收敛可知 $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{n^{p}(\ln n)^{q}(\ln\ln n)^{r}}$ 收敛.

当 $p<1$ 时, 令 $p=1-2\varepsilon,\varepsilon>0$, 则

$$\frac{n^{1-\varepsilon}}{n^{p}(\ln n)^{q}(\ln\ln n)^{r}}=\frac{n^{1-\varepsilon}}{n^{1-2\varepsilon}(\ln n)^{q}(\ln\ln n)^{r}}=\frac{n^{\varepsilon}}{(\ln n)^{q}(\ln\ln n)^{r}}\to+\infty,\quad n\to+\infty,$$

由 $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$ 发散可知 $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{n^{p}(\ln n)^{q}(\ln\ln n)^{r}}$ 发散.

当 $p=1$ 时. ∎

2.6 $\mathcal{B}$

1. 给定 $0\leqslant l\leqslant 1\leqslant L\leqslant+\infty$, 是否存在收敛或发散的正项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 使得 $\displaystyle\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$, 且 $\displaystyle\varliminf_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$?

解. 存在, 可设 $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n}, n=2k,\\ \dfrac{1}{4^n}, n=2k+1\end{cases}$, $k\in\mathbb{Z}$, 于是 $\displaystyle\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$, 且 $\displaystyle\varliminf_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$. ∎

2. 利用与级数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{p}n}$ 比较, 仿 Raabe 判别法给出一个判别定理.

解. 根据例 2.6.4, 我们已经知道, 级数 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$ 当且仅当 $p>1$ 时收敛. 于是我们有

$$
\begin{aligned}
&\text{正项级数}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\text{收敛.}\\
\Longleftarrow&\exists p>1, M>0, N\geqslant 3, \text{s.t.}\ \forall n\geqslant N,\quad a_n\leqslant\frac{M}{n\ln^p n}\\
\Longleftrightarrow&\exists p>1, M>0, N\geqslant 3, \text{s.t.}\ \forall n\geqslant N,\quad p\leqslant\frac{\ln M-\ln n-\ln a_n}{\ln(\ln n)}\\
\Longleftrightarrow&\varliminf_{n\to\infty}\frac{-\ln n-\ln a_n}{\ln(\ln n)}>1\\
\Longleftrightarrow&\varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln n+\ln a_n-\ln(n+1)-\ln a_{n+1}}{\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln n)}>1\\
\Longleftrightarrow&\varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n}{n+1}+\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}}{\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)}>1\Longleftrightarrow\varliminf_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}+\frac{a_n}{a_{n+1}}-1}{\frac{\ln(n+1)}{\ln n}-1}>1\\
\Longleftrightarrow&\varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)}{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}>1\Longleftrightarrow\varliminf_{n\to\infty}\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)>1.
\end{aligned}
$$

同理可证 $\varlimsup_{n\to\infty}\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)<1$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散. ■

3. 试考察不可数个正数的和.

2.7　任意项级数

Theorem 2.7.1: Mertens 定理

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛到 A, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛到 B, 则他们的 Cauchy 乘积 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛到 AB.

2.7 $\mathcal{A}$

1. 讨论以下级数的收敛性 (包括绝对收敛性):

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n x^n}{n!}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n+(-1)^n)}{n}$.

解. (1) 由于

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}-\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

故该级数收敛且绝对收敛.

(2) 记 $a_n=\frac{n^n}{n!}$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$. 从而 $x\in\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时收敛, 并且绝对

收敛. 当 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时, 有

$$\frac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}=\frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n\mathrm{e}^n}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

从而发散. 当 $x=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 易见其为 Leibniz 级数, 即得条件收敛.

(3) 注意到 $\sin\left(n+\dfrac{1}{n}\right)\sim\sin n$, 而

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}2\sin k\sin(1/2)}{2\sin(1/2)}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\cos\dfrac{2k-1}{2}-\cos\dfrac{2k+1}{2}\right)}{2\sin(1/2)}=\frac{\cos\dfrac{1}{2}-\cos\dfrac{2n+1}{2}}{2\sin(1/2)},$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$ 部分和有界, $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ 单调递减趋于零, 故由 Dirichlet 判别法知该级数收敛. 但

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)\right|\sim\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right|>\left|\frac{\sin n}{n}\right|,$$

后者发散, 故为条件收敛.

(4) 条件收敛. ■

2. 证明对于任何 x, 级数 $\sin x-\sin\sin x+\sin\sin\sin x-\sin\sin\sin\sin x+\cdots$ 收敛.

证明. 不妨设 $a_0=x\in(0,\pi), a_{n+1}=\sin a_n(n\geqslant 1)$, 于是原级数即为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, 易见 $\{a_n\}$ 单调递减趋于零, 由 Leibniz 判别法可知该级数收敛. 若 $a_0=x\in(-\pi,0)$, 则 $-x\in(0,\pi)$, 原级数即为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, 同理可获结论. 结合 $\sin x$ 的周期性易见对于任何 x, 结论成立. □

3. 设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 加括号得到, 即 $A_n=\sum\limits_{k=p_n}^{p_{n+1}-1}a_k$, 其中 $\{p_n\}$ 是严格单增的正整数列, $p_1=1$. 证明:

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\{p_{n+1}-p_n\}$ 有界, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

4. 级数 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}+\cdots$ 是否收敛?

解. 易见

$$1,1,1,-1,-1,-1,1,1,1,-1,\cdots,$$

部分和有界, 而 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 单调递减趋于 0, 依 Dirichlet 判别法知其收敛. ■

5. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 通过重排可以发散到 $+\infty$ 以及 $-\infty$.

证明. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都发散到正无穷, 且 $\lim_{n\to+\infty} a_n^+ = \lim_{n\to+\infty} a_n^- = 0$. 我们这样排列: 先按原来的顺序选取若干正项, 使其和大于 1, 然后添加第一个负项, 然后在余下的正项中继续选取, 使得整个和大于 2, 然后添加第二个负项, 依此类推. 由于 $\lim_{n\to+\infty} a_n^- = 0$, 故 n 充分大时 a_n^- 可以任意小, 从而可知由上法得到的级数将发散到 $+\infty$, 相似的操作方式可使其发散到 $-\infty$. □

6. 试利用 Dirichlet 判别法证明 Abel 判别法.

证明. 若数列 $\{b_n\}$ 单调有界且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则由单调收敛定理可知 $\{b_n\}$ 收敛, 不妨记 $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, 从而 $\{b_n - b\}$ 单调趋于零. 根据 Dirichlet 判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$ 收敛, 于是由

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b) + b\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. □

7. 证明 Mertens 定理, 即定理 **2.7.1**.

证明. 记 $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_n\, B_n = \sum_{k=1}^{n} b_n\, C_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$. 我们要证 $\lim_{n\to+\infty} C_n = AB$, 易见

$$\begin{aligned}
C_n &= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \cdots + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots a_nb_1) \\
&= a_1\left(b_1 + b_2 + \cdots + b_n\right) + a_2(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_nb_1 \\
&= a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_nB_1.
\end{aligned}$$

如果令 $\beta_n = B_n - B$, 则 $\beta_n \to 0 (n \to +\infty)$, 于是

$$C_n = A_nB - \gamma_n,$$

其中 $\gamma_n = \sum_{\ell=1}^{n} a_1\beta_{n+1-\ell} = a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_1$, 这样的问题就归结于证 $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = 0$.

由于 $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0$, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时有 $|\beta_n| < \varepsilon$. 于是由 γ_n 的定义可得

$$\begin{aligned}
|\gamma_n| &\leqslant |a_1\beta_n + \cdots a_{n-N}\beta_{N+1}| + |a_{n-N+1}\beta_N + \cdots + \cdots a_n\beta_1| \\
&< \varepsilon M + |a_{n-N+1}\beta_N + \cdots + \cdots a_n\beta_1|,
\end{aligned}$$

其中 $M = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. 在上式中固定 N, 令 $n \to +\infty$, 即得

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |\gamma_n| \leqslant \varepsilon M,$$

由此可知 $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n = 0$, 从而 $\lim_{n\to+\infty} C_n = AB$. □

8. 设 $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{kj}$ 绝对收敛, 证明: $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{kj}$ 绝对收敛, 且 $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{kj}$.

证明. □

9. 举例说明两个条件收敛的级数的 Cauchy 乘积有可能收敛, 也有可能发散.

解. 取 $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 条件收敛,

取 $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 条件收敛, 但这对于其 Cauchy 乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 有

$$|c_n| = \sum_{i+j=n+1} \frac{1}{\sqrt{ij}} \geqslant \sum_{i+j=n+1} \frac{2}{i+j} = \frac{2n}{n+1} \geqslant 1,$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散. ■

10. 按绝对收敛, 条件收敛, 发散分类, 穷举两个级数的 Cauchy 乘积收敛性的各种可能性. 并给出必要的证明和反例.

11. 确定实数 p 的取值区间, 使在该区间内的二重级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{(m+n)^p}$ 收敛.

解. ■

12. 考察 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n \sin n^2}{n}$ 的敛散性.

解. 我们有

$$\sin n \sin n^2 = \frac{1}{2}\left(\cos(n^2-n) - \cos(n^2+n)\right),$$

而

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\cos(k^2-k) - \cos(k^2+k)\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\cos 0 - \cos(N^2+N)\right| \leqslant 1,$$

又 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 单调递减趋于 0. 依 Dirichlet 判别法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n \sin n^2}{n}$ 收敛. ■

2.7 $\mathcal{B}$

1. 利用 Abel 变换证明钟开莱不等式: 设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$,

$$\sum_{k=1}^{m} b_k \geqslant \sum_{k=1}^{m} a_k, \qquad \forall m = 1, 2, \cdots, n.$$

则 $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k^2$.

证明. 记 $A_m = \sum_{k=1}^{m} a_k, B_m = \sum_{k=1}^{m} b_m$, 则由 Abel 变换

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = a_n A_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(a_k - a_{k+1}) \leqslant a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} B_k(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

从而结论成立. □

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛. 试证明存在 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 使得 $A_n = a_n b_n (n \geqslant 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 部分和有界, 而 $\{b_n\}$ 单调下降趋于零.

解. ■

3. 证明: $\lim_{\alpha \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} = \frac{1}{2}$.

证明. 令 $a_n(\alpha) = \frac{1}{n^\alpha}, B_0 = 0, \Delta B_{n-1} = B_n - B_{n-1} = (-1)^{n-1}$, 则

$$\Delta a_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha},$$

且

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} = \frac{1-(-1)^n}{2},$$

于是对 $\forall m \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} &= \sum_{n=1}^{m} a_n(\alpha) \Delta B_{n-1} = a_m(x) B_m - \sum_{n=1}^{m-1} B_n \Delta a_n(\alpha) \\
&= \frac{1}{m^\alpha} \frac{1-(-1)^n}{2} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1-(-1)^n}{2} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right).
\end{aligned}$$

由于对于 $\forall \alpha \in (0, +\infty)$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ 都收敛, 所以令 $m \to +\infty$, 由上面的等式可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right).
\end{aligned}$$

下面证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛. 令 $b_n(\alpha) = -\Delta a_n(\alpha) (n \in \mathbb{Z}_+)$, 则由

$$b_n(\alpha) = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha} \right)$$

可知, 对于任何 $\alpha \in [0, +\infty)$, $\{b_n(\alpha)\}$ 关于 n 单调减少, 并且当 $x \in [0, 1]$ 时, 有

$$|b_n(\alpha)| \leqslant 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x} \leqslant 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1},$$

当 $\alpha > 1$ 时, 有

$$|b_n(\alpha)| \leqslant \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{n},$$

于是数列 $\{b_n(\alpha)\}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛于零. 故由 Dirichlet 判别法知该级数一致收敛, 于是

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} &= \lim_{\alpha\to0^+}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\lim_{\alpha\to0^+}\left(\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

4. 对于 $s > 1$, **Riemann(黎曼)** ζ 函数定义为: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. 设 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为所有素数, 证明 **Euler** 乘积公式: $\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-1/p_n^s}$.

证明. 设 $M, N \in \mathbb{Z}_+$ 且 $M > N$, 由算术基本定理可知, 任何一个正整数可以唯一表成若干素数的乘积, 并且对于正整数 $n < N$, 每一个素数都会小于 N, 其次数也不会超过 M, 于是有

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} \leqslant \prod_{p\leqslant N}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots+\frac{1}{p^{Ms}}\right) \leqslant \prod_{p\leqslant N}\frac{1}{1-p^{-s}} \leqslant \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-1/p_n^s},$$

令 $N \to +\infty$ 即得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \leqslant \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-1/p_n^s}$. 另一方面, 由算术基本定理可知

$$\prod_{p\leqslant N}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots+\frac{1}{p^{Ms}}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},$$

令 $M \to +\infty$ 有 $\prod_{p\leqslant N}\frac{1}{1-p^{-s}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, 也即 $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-1/p_n^s} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, 这便完成了证明. □

5. Euler 最早根据 $\sin\pi x$ 的零点为 $0, \pm1, \pm2, \cdots$ 而猜测如下的 **Euler** 公式:

$$\sin\pi x = \pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

试按如下步骤证明 Euler 公式:

(1) 对于 $n \geqslant 0$ 以及 $t \in (-1, 1)$, 证明:

$$\sin\left((2n+1)\arcsin t\right) = (2n+1)t\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{t^2}{\sin^2\left(k\pi/(2n+1)\right)}\right).$$

(2) 证明: $|x| \leqslant n + \frac{1}{2}$ 时,

$$\sin\pi x = (2n+1)\sin\frac{\pi x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\pi x/(2n+1)\right)}{\sin^2\left(k\pi/(2n+1)\right)}\right).$$

(3) 固定 $x \in \mathbb{R}$, 对于 $m > K > |\pi x|$, 成立

$$\begin{aligned}\prod_{k=K}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\cdot\prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\right) &\leqslant \varliminf_{n\to+\infty}\prod_{k=K}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\pi x/(2n+1)\right)}{\sin^2\left(k\pi/(2n+1)\right)}\right)\\ &\leqslant \varlimsup_{n\to+\infty}\prod_{k=K}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\pi x/(2n+1)\right)}{\sin^2\left(k\pi/(2n+1)\right)}\right)\\ &\leqslant \prod_{k=K}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right).\end{aligned}$$

(4) 证明对任何 $x \in \mathbb{R}$, 成立

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\pi x/(2n+1)\right)}{\sin^2\left(k\pi/(2n+1)\right)}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right).$$

证明. □

6. 证明: $\cos \pi x = \displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{(n+1/2)^2}\right).$

证明. □

第 3 章　函数极限与连续

3.1　函数极限

Proposition 3.1.1

设实函数 f,g 在 $(a,+\infty)$ 内局部有界, 且

(i) 对于任何 $x>a$, $g(x+1)>g(x)$;

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$,

则

$$\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}\leqslant\varliminf_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\varlimsup_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}$$

Theorem 3.1.1: Heine 定理

设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f}:E\to\mathbb{R}^m$ 为 E 上的映射, $\boldsymbol{x}_0\in E'$, 则 $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in E}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$ 当且仅当对 $E\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 中任何趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$, 成立 $\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{A}$.

3.1 $\mathcal{A}$

1*. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f}:E\to\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{x}_0\in E'$, 证明: $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in E}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 存在当且仅当对 $E\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 中任何趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$, 极限 $\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$ 存在.

证明. 由 Heine 定理可知必要性成立, 下证充分性. 易见只需证明若对于 $E\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 中任何趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$, 极限 $\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$ 存在且相等即可. 假设序列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ 与 $\{\boldsymbol{b}_n\}$ 均趋于 $\boldsymbol{x}_0$, 但

$$\lim_{n\to+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_n)\neq\lim_{n\to+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}_n),$$

构造序列 $\boldsymbol{c}_n:=\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{(n+1)/2},\boldsymbol{b}_{n/2},\cdots\}$, 易见 $\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}_k)$ 不存在, 矛盾. 这说明对于任何趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$, 若极限 $\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$ 存在, 则必相等, 依 Heine 定理可知充分性成立. □

2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\sin\dfrac{k}{n^3}-\dfrac{k}{n^3}\right|=0$ 并由此计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k}{n^3}$.

证明. □

3. 证明命题 3.1.1.

证明. □

4. 设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足

$$\begin{cases} x_n^2+y_n^2+2y_n=1+\sin\dfrac{1}{n} \\ x_n+\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)y_n=\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \end{cases}$$

证明 $\{x_n\},\{y_n\}$ 收敛并求其极限.

证明. 取 $z_n'=(x_n,y_n+1)$ 则

$$|z_n'|^2=x_n^2+y_n^2+2y_n+1=2+\sin\frac{1}{n}\leqslant 3.$$

从而 $\{z_n'\}$ 是有界列, 于是 $z_n=(x_n,y_n)$ 也有界, 取 $\{z_n\}$ 的一收敛子列 $\{z_{n_k}\}$, 其收敛于 $z=(x,y)$ 且满足

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$$

解得 $x=1,y=0$. □

5. 设 ψ,φ 为定义在 $(0,+\infty)$ 上的周期函数, 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\psi(x)-\varphi(x))=0$. 证明 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$.

证明. 若 $\exists x_0\in(0,+\infty)$ 使得 $\varphi(x_0)\neq\psi(x_0)$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\psi(x)-\varphi(x))\neq 0$ 矛盾, 从而 $\varphi\equiv\psi$. □

3.1 $\mathcal{B}$

1. 证明对于 $x\neq 0$, 成立 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{x}$. 特别地, 有 **Vièta** 公式: $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\cos\dfrac{\pi}{2^n}=\dfrac{2}{\pi}$.

证明. 令 $J_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{x}{2^k}$, 有

$$\sin\frac{x}{2^n}\cdot J_n=\frac{\sin x}{2^n},\qquad \text{即}\qquad J_n=\frac{\sin x}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}}$$

令 $n\to+\infty$ 即得结果. 后者过程类似. □

2. 仿照习题 3.1 $\mathcal{A}$ 第 2 题编写一个习题.

3. 抽取下列几个极限类型, 写出相关定义 (其中 a,A 为实数), Cauchy 准则和 Heine 定理.

自变量变换	极限值		自变量变化	极限值		自变量变化	极限值
$x\to a$	A		$x\to a^+$	A		$x\to a^-$	A
$x\to a$	$+\infty$		$x\to a^+$	$+\infty$		$x\to a^-$	$+\infty$
$x\to a$	$-\infty$		$x\to a^+$	$-\infty$		$x\to a^-$	$-\infty$
$x\to a$	∞		$x\to a^+$	∞		$x\to a^-$	∞
$x\to \infty$	A		$x\to +\infty$	A		$x\to -\infty$	A
$x\to \infty$	$+\infty$		$x\to +\infty$	$+\infty$		$x\to -\infty$	$+\infty$
$x\to \infty$	$-\infty$		$x\to +\infty$	$-\infty$		$x\to -\infty$	$-\infty$
$x\to \infty$	∞		$x\to +\infty$	∞		$x\to -\infty$	∞

4. 设 a_0,a_1,ℓ,α 为正数, $a_1\neq a_0$, $a_{n+1}=\dfrac{(\ell+n^\alpha)a_n^2}{\ell a_n+n^\alpha a_{n-1}}(n\geqslant 1)$. 证明:

(1) 若 $\alpha<1$, 则 $\{a_n\}$ 有正的极限.

(2) 若 $\alpha=1,\ell>1$, 则 $\{a_n\}$ 有正的极限.

(3) 若 $\alpha>1$, 则 $\{a_n\}$ 发散或极限为零.

(4) 若 $\alpha=\ell=1$, 则 $\{a_n\}$ 发散或极限为零.

3.2　连续函数

3.2 $\mathcal{A}$

1. 证明 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}0, & x\text{为有理数},\\ 1, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

在 $\mathbb{R}$ 上处处不连续.

证明. □

2. 考虑 $[0,1]$ 上的 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\,(\text{其中 } p,q \text{ 为既约整数}),\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$$

证明 R 在有理点不连续, 在无理点连续.

证明. 对于任意的 $x_0\in[0,1]$ 来说, 若任取 $\varepsilon>0$, 则满足不等式 $q<\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的正整数 n 至多只有有限个, 即在 $[0,1]$ 中至多只有有限个有理数 $\dfrac{p}{q}$, 使得 $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{1}{q}>\varepsilon$. 因而我们可以取 $\delta>0$,

使得 $\mathring{B}_\delta(x_0)$ 内不含这样的有理数. 于是, 只要 $0<|x-x_0|<\delta$, 不论 x 是否为有理数, 都成立 $|f(x)|<\varepsilon$. 即证明了对于 $[0,1]$ 中的任意点 x_0, 都成立

$$f(x_0+0)=f(x-0)=0.$$

若 x_0 为无理数, 则 $f(x_0)=0$, 可见 $f(x)$ 在 x_0 处连续; 若 x_0 是有理数, 则 $f(x_0)\neq 0$, 点 x_0 即成为函数 $f(x)$ 的可去间断点. □

3. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$.

解. 我们先计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^n}{n!}\right)^{1/n}$, 取对数整理得到

$$\ln\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{n\ln n-(\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n)}{n}=:\frac{b_n}{n},$$

则有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}(b_{n+1}-b_n)=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{1/n}=\mathrm{e}$. ■

4. 设 $S_n=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\ln C_n^k$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

解. 注意到

$$\frac{C_{n+1}^1C_{n+1}^2\cdots C_{n+1}^n}{C_n^1C_n^2\cdots C_n^n}=\frac{1}{n!}(n+1)^n,$$

于是依 Stolz 定理

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\ln(n+1)-\ln(n!)}{((n+1)^2-n^2)}=\lim_{n\to+\infty}=\frac{n+1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$ ■

5. 当 $\alpha\in\mathbb{R}$ 为何值时, 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$ 存在?

解. ■

6. 设 $a>0,b>0$, 求证: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}$.

证明.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n&=\lim_{n\to+\infty}\exp\left(n\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}{2}-1\right)\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\exp\left(n\left(\frac{\ln a}{2n}+\frac{\ln b}{2n}\right)\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\exp\left(\ln\sqrt{ab}\right)=\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

□

7. 设 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=0$. 证明 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

证明. 依题设, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x| < \delta$ 时,

$$\left|\frac{f(x) - f(x/2)}{x}\right| < \varepsilon.$$

于是 (用 $x/2^{k-1}$ 代 x)

$$\left|\frac{f\left(x/2^{k-1}\right) - f\left(x/2^k\right)}{x/2^{k-1}}\right| < \varepsilon \qquad (k = 1, \cdots, n+1).$$

因为

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n+1}\left(f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right).$$

所以

$$\left|\frac{f(x) - f\left(x/2^{n+1}\right)}{x}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1}\left|\frac{f\left(x/2^{k-1}\right) - f\left(x/2^k\right)}{x}\right| = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k}\left|\frac{f\left(x/2^{k-1}\right) - f\left(x/2^k\right)}{x/2^k}\right|.$$

应用最初结果, 得到

$$\left|\frac{f(x) - f\left(x/2^{n+1}\right)}{x}\right| < \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k}\cdot 2\varepsilon = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\cdot 2\varepsilon < 2\varepsilon.$$

在此式中令 $n \to +\infty$, 注意 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, 即得

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$. □

8. 设实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_n^3 + \left(n^{1/n} + 2 + \frac{1}{n}\right)x_n^2 + \left(\frac{1}{n} + 2n^{1/n} + n^{(1-n)/n} + 1\right)x_n + n^{1/n} + n^{(1-n)/n} + \frac{1}{n^2} = 0.$$

证明: $\{x_n\}$ 极限存在, 并求其极限.

证明. 注意到

$$\begin{aligned}&x_n^3 + \left(n^{1/n} + 2 + \frac{1}{n}\right)x_n^2 + \left(\frac{1}{n} + 2n^{1/n} + n^{(1-n)/n} + 1\right)x_n + n^{1/n} + n^{(1-n)/n}\\&= (x_n + 1)(x_n + n^{1/n})(x_n + 1 + \frac{1}{n}),\end{aligned}$$

当 $n \geqslant 3$ 时有 $1 < 1 + \dfrac{1}{n} + n^{1/n}$, 因为

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + 1)(x_n + n^{1/n})(x_n + 1 + \frac{1}{n}) = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0,$$

考虑到函数的单调性以及三个零点的极限均为 -1, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$. □

9. 称 $\mathbb{R}$ 上函数 f 满足局部 Lipschitz 条件, 如果对于任何 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $\delta > 0$ 以及 $M > 0$ 使得

$$|f(y) - f(z)| \leqslant M|y - z|, \qquad \forall y, z \in (x - \delta, x + \delta).$$

证明: f 在 $\mathbb{R}$ 上满足局部 Lipschitz 条件等价于对任何 $A>0$, 存在 $M_A>0$ 使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M_A|x-y|,\qquad \forall x,y\in[-A,A].$$

10. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上函数. 对任何 $x\in\mathbb{R}$, 存在 $\delta>0$ 以及 $M>0$ 使得

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x|,\qquad \forall y\in(x-\delta,x+\delta).$$

问: f 是否一定满足局部 Lipschitz 条件?

11. 设 f 是 $[a,b]$ 上的单调连续函数, $\{a_n\}$ 是 $[a,b]$ 中的点列.

(1) 若 f 单增, 则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f\left(\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n\right)$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f\left(\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n\right)$.

(2) 若 f 单减, 则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f\left(\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n\right)$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f(\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n)$.

证明. (1)

(2) □

3.2 $\mathcal{B}$

1. 将习题 3.2 $\mathcal{A}$ 第 11 题推广到广义实数系情形.

解. ■

2. 证明区间 I 上的单调函数的间断点均为跳跃间断点, 且间断点的全体至多可列.

证明. 不妨设 f 是定义在区间 I 上的单调增加函数, 设 $x_0\in(a,b)\subset I$ 是 f 的间断点, 任取 x_0 两侧的点 $x,x'(x<x_0<x')$, 则成立

$$f(x)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x'),$$

令 $x\to x_0^-,x'\to x_0^+$, 应用单调函数的单侧极限存在定理, 得到

$$f(x_0^-)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0^+),$$

并且其中的两个单侧极限都是有限数. 因此 x_0 是第一类间断点, 进一步, x_0 是间断点故上式不可能同时取等号即 $f(x_0^-)<f(x_0^+)$, 从而 x_0 是一跳跃间断点.

我们称 $(f(x_0^-),f(x_0^+))$ 为与间断点 x_0 对应的一个跳跃区间. 对 f 的每一个间断点都可以得到一个跳跃区间. 下面我们证明, 任何两个不同简短点所对应的跳跃区间不交. 设 x_1 为另一间断点且 $x_0<x_1$, 即证明

$$(f(x_0^-),f(x_0^+))\cap(f(x_1^-),f(x_1^+))=\varnothing.$$

为此在 x_0 与 x_1 之间插入 x,x' 满足 $x_0<x<x'<x_1$, 则有不等式

$$f(x)\leqslant f(x'),$$

固定 x', 令 $x \to x_0^+$, 由单调函数的单侧极限存在定理和函数极限的比较定理, 得到

$$f(x_0^+) \leqslant f(x'),$$

在令 $x' \to x_1^-$, 又得到

$$f(x_0^+) \leqslant f(x_1^-),$$

于是有

$$f(x_0^-) < f(x_0^+) \leqslant f(x_1^-) \leqslant f(x_1^+),$$

即 $\big(f(x_0^-), f(x_0^+)\big) \cap \big(f(x_1^-), f(x_1^+)\big) = \varnothing$.

这样就得到了与无限多个间断点一一对应的跳跃区间, 且两两不交, 又在每个跳跃区间中取一个有理数, 从而得到一个有理数集, 它与全体跳跃区间一一对应. 由于有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数集, 它的无限子集也是可数集, 因此跳跃区间集合为可数集, 这就证明了单调函数的间断点至多可列. □

3. 设 $\{x_n\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的点列, 定义 $f(x) = \sum\limits_{x_k<x} \dfrac{1}{2^k}$. 证明: f 的间断点全体为 $\{x_k \,|k \geqslant 1\}$. 进一步, 若 $\{x_k\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 则 f 在 $\mathbb{R}$ 上严格单增.

证明. □

4. 将区间 $(0,1)$ 内的实数用十进制小数 $(0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots)$ 表示, 约定不将 9 作为循环节. 定义

$$f(0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots) = 0.a_10a_20a_30\cdots a_n0\cdots,$$

试问 f 在 $(0,1)$ 内的哪些点连续, 哪些点不连续?

解. ■

5. 设正数列 $\{a_n\}$ 满足 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 2$ 及 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k} = 1$. 证明:

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 1.$$

证明. 首先, 我们有

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant \varliminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{n=1}^{n} a_k} = 1.$$

另一方面, 有假设, $\{a_n\}$ 有上界 $M > 0$. 任取 $\varepsilon \in (0,1)$, 存在 $N > 0$, 使得当 $n \geqslant N$ 时, 成立 $a_n \geqslant 1-\varepsilon$ 且 $\sqrt[n]{\prod\limits_{n=1}^{n} a_k} \leqslant 1+\varepsilon$.

任取 $\delta > \varepsilon$, 我们来估计 $a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots, a_n$ 中大于 $1+\delta$ 的数的个数 $m_{n,\delta}$:

$$\ln(1+\varepsilon) \geqslant \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \ln a_k + \frac{n-N-m_{n,\delta}}{n}\ln(1-\varepsilon) + \frac{m_{n,\delta}}{n}\ln(1+\delta),$$

由此可得

$$\frac{m_{n,\delta}}{n} \leqslant \frac{\ln(1+\varepsilon)-\ln(1-\varepsilon)-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln a_k+\dfrac{N}{n}\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\delta)-\ln(1-\varepsilon)}.$$

因为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}a_k+(1+\delta)+\frac{m_{n,\delta}}{n}M,$$

所以

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k \leqslant 1+\delta+\frac{\ln(1+\varepsilon)-\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\delta)-\ln(1-\varepsilon)}M,$$

令 $\varepsilon\to 0^+$ 得 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\leqslant 1+\delta$. 在令 $\delta\to 0^+$ 得 $\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\leqslant 1$. 由此结论得证. □

6. 证明: $\mathbb{R}$ 上实连续函数全体的势是 $\aleph$.

证明. 我们先来证明这件事情: 若 f,g 是定义在 R 上的连续函数, 并且对 $x\in\mathbb{Q}$ 有 $f(x)=g(x)$, 则有 $f\equiv g$.

只要对 $\mathbb{R}$ 中每个无理数 x 证明 $f(x)=g(x)$ 成立即可. 取有理数序列 $\{r_n\}$, 使 $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=x$. 例如, 取无理数 x 的不足近似值 $r_n=\dfrac{[10^n x]}{10^n}$, 则有

$$r_n=\frac{[10^n x]}{10^n}=\frac{10^n x-\theta_{x,n}}{10^n},$$

其中 $0\leqslant\theta_{x,n}<1$. 因此 $r_n\to x(n\to+\infty)$.

由于 $f(r_n)=g(r_n), n\in\mathbb{N}_+, f,g$ 在点 x 连续, 由此知

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f(r_n)=\lim_{n\to+\infty}g(r_n)=g(x).$$

由此便得结论. 记所有连续函数构成的集合为 T. 易见所有常值函数 $f(x)\equiv c$ 与 $\mathbb{R}$ 等势, 由伯恩斯坦定理, 若能

□

3.3 连续函数的基本性质

Proposition 3.3.1

$\mathbb{R}$ 中的道路连通集必是空集, 单点集或区间.

3.3 $\mathcal{A}$

1. 设 f 为有界区间 (a,b) 上的连续函数, $f(a^+),f(b^-)$ 都存在且 $f(a^+)<0,f(b^-)>0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

证明. 由函数连续性以及 $f(a^+)<0,f(b^-)>0$, 必存在 $\eta>a$ 与 $\mu<b$ 使得 $f(\eta)<0$ 且

$f(\mu)>0$, 由函数的介值定理即得结论. 另外, 可以闭区间套. □

2. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 内连续, 且满足 $f(x^2)=f(x)(\forall x>0)$. 证明: f 在 $(0,+\infty)$ 内为常数.

证明. 对任意 $x\in(0,+\infty)$, 有

$$f(x)=f\left(\sqrt{x}\right)=f\left(x^{1/4}\right)=\cdots=f\left(x^{1/(2n)}\right),$$

令 $n\to\infty$, 即有 $f(x)=f(1)$, 从而 $f(x)$ 是常数. □

3. 设 f 为区间 $(a,+\infty)$ 上的连续函数, $f(a^+)$ 存在且为负数, $f(+\infty)=+\infty$. 证明: 存在 $\xi\in(a,+\infty)$ 使得 $f(\xi)=0$.

证明. 由 $f(+\infty)=+\infty$ 知, 对于任意大得正数 A, 存在 X 使 $x\geqslant X$ 时 $f(x)\geqslant A$, 即 $f(X)$ 为正, 于是 $f(a^+)f(X)<0$, 由零点存在定理可知有 $\xi\in(a,X)$ 使得 $f(\xi)=0$. □

4. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续周期函数. 若 f 不为常数, 证明它一定有最小正周期.

证明. □

5*. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为非空有界集. 证明: 连续函数 $\boldsymbol{f}:E\to\mathbb{R}^m$ 一致连续的充要条件是对任何 $\boldsymbol{x}_0\in E'$, $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in E}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 存在. 这等价于 $\boldsymbol{f}$ 是 $\overline{E}$ 上的一个连续函数在 E 上的限制.

证明. □

6. 证明命题 3.3.1.

证明. □

7. 试用闭区间套定理证明介值定理.

证明. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, $f(a)<f(b)$, 介值定理表明给定 μ 并且 $f(a)<\mu<f(b)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\mu$. 设 $F(x)=f(x)-\mu$, 则 $F(a)<0,F(b)>0$. 记 $I_1=[a,b]$. 于是若 $F\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$, 则定理证毕. 否则若 $F\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>0$, 则令 $I_2=\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$, 否则令 $I_2=\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$. 记 $a'=\dfrac{a+b}{2}$, 不妨设 I_1 为前者, 继续考察 $F\left(\dfrac{a+a'}{2}\right)$ 的符号, 重复上述步骤得到 $I_3,I_4,\cdots I_n,\cdots$. 设 I_n 区间的端点为 a_n,b_n, 则或者在有限步得到 $F\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)=0$, 则定理证毕. 否则由 I_n 的构造可以发现 $F(a_n)F(b_n)<0$. 并且

$$I_{n+1}\subset I_n,\quad a_n-b_n\to 0(n\to+\infty),$$

即 $\{I_n\}$ 形成闭区间套. 存在有 $\xi=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$, 并且

$$\lim_{n\to+\infty}F(a_n)\leqslant 0,\quad \lim_{n\to+\infty}F(b_n)\geqslant 0,$$

从而 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=\mu$. □

8. 证明道路连通集一定是连通集.

证明. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个道路连通集, 且 $E = A \cup B$, 其中 A, B 是两个互不相交的非空集. 在 A 中任取一点 $\boldsymbol{p}$, 在 B 中任取一点 $\boldsymbol{q}$, 则有一条连续曲线 $\mathit{\Gamma} \subset E$ 把 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ 两点连接. 令

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)), \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

为 $\mathit{\Gamma}$ 的参数方程, 并令

$$F = \{t \in [a,b] \big| \boldsymbol{\Phi}(t) \in A\}, \quad G = \{t \in [a,b] \big| \boldsymbol{\Phi}(t) \in B\}.$$

易见 F 与 G 是互不相交的非空集合, 且 $F \cup F = [a,b]$. 由于区间 $[a,b]$ 是连通集, $F' \cap G$ 与 $F \cap G'$ 这两个集合至少有一个非空. 不妨设 $c \in F \cup G'$, 从 $c \in G'$ 可知, 有数列 $\{t_n\} \subset G$ 使得 $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = c$. 由于 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 连续, 所以

$$\lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{\Phi}(t_n) = \boldsymbol{\Phi}(c).$$

一方面, 由 $\boldsymbol{\Phi}(t) \in B(i = 1, 2, \cdots)$, 可知 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{c}) \in B'$; 另一方面, 利用 $c \in F$ 又知 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{c}) \in A$. 由此得 $\boldsymbol{\Phi}(c) \in A \cap B'$, 它不是空集, 所以 E 是连通的. □

9. 证明在 $\mathbb{R}$ 中的连通集必为空集, 单点集或区间, 即必为道路连通集.

证明. □

10. 参考开集和闭集的性质, 建立相对开集和相对闭集的性质.

11. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 为连通集, $f: E \to \mathbb{R}$ 连续. 若 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E$, $f(\boldsymbol{x}_1) < \boldsymbol{\eta} < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$. 证明: 存在 $\boldsymbol{\xi} \in E$ 使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\eta}$.

12. 设 $a_n > -1 (n \geqslant 1)$. 下表罗列了级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛的各种情形. 试确定这些情形是否可能发生, 在可能发生的情况下, 讨论此时无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 的收敛性. 若无穷乘积在绝对收敛, 条件收敛和发散三种情形中, 有两种以上的情形可能发生, 请举出相应的例子; 同时, 若至少有一种情形不会发生, 给出证明.

情形	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 的收敛性	$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 的收敛性
1	绝对收敛	绝对收敛	
2	绝对收敛	条件收敛	
3	绝对收敛	发散	
4	条件收敛	绝对收敛	
5	条件收敛	条件收敛	
6	条件收敛	发散	
7	发散	绝对收敛	
8	发散	条件收敛	
9	发散	发散	

解. **情形 1.** 此时 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

情形 2.

情形 3.

情形 4.

情形 5.

情形 6.

情形 7.

情形 8.

情形 9.

■

13. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\sqrt{n})=0$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在的充要条件是 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

证明. □

3.3 $\mathcal{B}$

1. 证明区域是道路连通集.

证明. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个非空连通开集. 取点 $\boldsymbol{x}\in D$, 设 $U(\boldsymbol{x})$ 为 D 中所有与 $\boldsymbol{x}$ 有 D 中连续曲线相连结的点的集合. 容易看到 $U(\boldsymbol{x})$ 是一个道路连通集. 我们证明 $U(\boldsymbol{x})=D$.

设 $\boldsymbol{y}\in U(\boldsymbol{x})$, 并取 $\delta>0$ 使 $O_\delta(\boldsymbol{y})\subset D$. $\forall \boldsymbol{z}\in O_\delta(\boldsymbol{y})$ 存在 $O_\delta(\boldsymbol{y})$ 中的直线段连结 $\boldsymbol{z}$ 到 $\boldsymbol{y}$, 从而存在 D 中的连续曲线连结 $\boldsymbol{z}$ 到 $\boldsymbol{x}$, 所以 $O_\delta(\boldsymbol{y})\subset U(\boldsymbol{x})$. 因而 $U(\boldsymbol{x})$ 是包含 $\boldsymbol{x}$ 的开集. 如 $D\backslash U(\boldsymbol{x})\neq\varnothing$, 则 $D\backslash U(\boldsymbol{x})=\bigcup U(\boldsymbol{y}')$, 其中 $\boldsymbol{y}'$ 取遍 $D\backslash U(\boldsymbol{x})$ 的所有点. 按前面的证明, 每个 $U(\boldsymbol{y}')$ 都是开集, 因而 $D\backslash U(\boldsymbol{x})$ 也是开集. D 有开集分解式 $D=U(\boldsymbol{x})\cup(D-U(\boldsymbol{x}))$, 与 D 是

连通开集矛盾. 这就证明了 $D - U(\boldsymbol{x}) = \varnothing$, 所以 $D = U(\boldsymbol{x})$ 是道路连通集. □

2. 设 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集. 证明它可以表示为至多可列个两两不交的区域的并. 在一维情形, 这些两两不交的区域为两两不交的开区间, 即为 V 的构成区间.

证明. □

3. 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 且对任何 $a \in (0,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(na) = 0$. 证明:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

证明. 对于任意 $\varepsilon > 0$ 与 $a \in (0,+\infty)$ 存在 $N(a) \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $n > N$ 时有 $|f(na)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 结合 $f(x)$ 的连续性, 可知有 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 有 $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 由 a 的任意性可以取到 a 与 $n > N(a)$ 使得 $0 < |x - na| < \delta$ 此时

$$|f(x) - f(na)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon,$$

由此即得结论. □

4. 设 $a > 0$, $a^2 + 4b < 0$, 求证: 不存在 $\mathbb{R}$ 上具有介值性的函数 $f(f(x)) = af(x) + bx$.

证明. 若这样的函数存在, 注意到 $x = \dfrac{f(f(x)) - af(x)}{b}$. 所以 x 由 $f(x)$ 唯一确定, 即 f 是单射. 由介值性, f 必严格单调, 结合介值性和单调性, 可得 f 连续.

由上可得 $x \mapsto f(f(x))$ 严格增加, 即 $x \mapsto af(x) + bx$ 严格增加. 由于 $a > 0$, 因此 $b < -\dfrac{a^4}{4} \leqslant 0$. 而 $f(x) = \dfrac{af(x) + bx}{a} - \dfrac{bx}{a}$, 可知 f 是严格单曾函数. 特别地,

$$af(x) + bx > af(0), \quad \forall x > 0.$$

因此 $f(+\infty) = +\infty$. 进而当 $x \gg 1$ 时, $f(x) > 0$, 所以

$$\frac{f(f(x))}{f(x)} = a + b\frac{a}{f(x)}, \quad \forall x \gg 1.$$

记 $L = \varliminf\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, 则 $L \in [0,+\infty]$. 注意到 $b < 0$, 我们有

$$L = \varliminf_{x\to+\infty} \frac{f(f(x))}{f(x)} = a + b \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x)} = a + \frac{b}{L},$$

其中对应于 L 取 0 和 $+\infty$, 规定 $\dfrac{b}{L}$ 分别为 $-\infty$ 和 0. 则由上式可知 L 有限, 且 $L^2 - aL - b = 0$. 但 $a^2 + 4b < 0$, 上述方程无解, 矛盾. 因此满足题设条件的函数 f 不存在. □

5. 设 $\mathbb{R}$ 上连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 对于每一个 $x \in \mathbb{R}$ 都是有界的 (称为"逐点有界"), 证明: 存在区间 (a,b) 使得 $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b) 上一致有界, 即存在与 n 无关的常数 $M > 0$ 使得

$$|f_n(x)| \leqslant M, \qquad \forall n \geqslant 1, x \in (a,b).$$

证明. □

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, 且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 非奇异, 证明: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$.

证明. 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆时, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}$ 也都可逆, 注意到

$$\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}\right)^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1},$$
$$\left(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}\right)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1},$$

从而 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆时等式成立, 否则 $\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}(t)=\boldsymbol{B}+t\boldsymbol{E}$ 可逆, 令 $t\to 0$ 即得结论. □

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为半正定矩阵, 证明: 存在正定矩阵 $\boldsymbol{S}$ 使得 $\boldsymbol{ASB}=\boldsymbol{BSA}$.

提示: 存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $0\leqslant m\leqslant n$ 使得 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}^T=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{\Lambda}\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是 m 阶正交矩阵. 此时必有 $\boldsymbol{PAP}^T=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\tilde{\boldsymbol{A}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{PBP}^T=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\tilde{\boldsymbol{B}}\end{pmatrix}$, 其中 $\tilde{A},\tilde{B}$ 都是 m 阶半正定矩阵.

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵, 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 证明 $\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&-\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=\det\left(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2\right)$.

证明. 将分块矩阵的第二行乘以 i 加到第一行上, 再将第一列乘以 $-$i 加到第二列上, 可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}&\mathrm{i}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{B}\end{pmatrix},$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\det\left(\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}\right)\det\left(\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{B}\right),$$
$$=\det\left(\left(\boldsymbol{A}+\mathrm{i}\boldsymbol{B}\right)\left(\boldsymbol{A}-\mathrm{i}\boldsymbol{B}\right)\right)=\det\left(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2-\mathrm{i}\left(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\right)\right)=\det\left(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^3\right).$$ □

9. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, 证明 $\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=\det\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)\det\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\right)$.

证明. 将分块矩阵的第二行加到第一行上, 再将第二列减去第一列, 可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\end{pmatrix},$$

第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\det\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)\det\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\right).$$ □

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 证明:

(1) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正定矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正定矩阵.

(2) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是半正定矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 也是半正定矩阵.

证明. (1) 由于 $\boldsymbol{A}$ 正定, 则有非异阵 $\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{C}$, 这是因为 $\boldsymbol{A}$ 正定当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{I}_n$, 由于 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ 且 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是正定矩阵, 于是 $(\boldsymbol{AB})^\top = \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{AB}$, 从而 $\boldsymbol{AB}$ 是对称的. 另一方面

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{BC}^\top \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{CBC}^\top \boldsymbol{C},$$

从而 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{CBC}^\top$ 相似, 后者显然是正定的, 从而 $\boldsymbol{AB}$ 正定.

(2) 我们先证明, n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵的充分必要条件是对于任意正实数 t, $\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{I}_n$ 都是正定阵. □

11. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵, $\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{CBA}$. 证明:

(1) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 都是正定矩阵, 则 $\boldsymbol{ABC}$ 也是正定矩阵.

(2) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}$ 都是半正定矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵, 则 $\boldsymbol{ABC}$ 是半正定矩阵.

(3) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 都是半正定矩阵, 则 $\boldsymbol{ABC}$ 是半正定矩阵.

证明. (1)

(2)

(3) □

12. 编写若干与本节内容相关的习题.

3.4　方向极限与累次极限

3.4 $\mathcal{A}$

1. 考虑函数在一点的二重极限和二次极限. 分别以二重极限存在和不存在为前提, 讨论以下各条. 对必然成立或必然不成立的, 给出证明. 对于有时候成立, 有时候不成立的, 给出例子.

(1) 两个二次极限存在且相等.

(2) 两个二次极限都存在但不相等.

(3) 一个二次极限存在, 另一个不存在.

(4) 两个二次极限都不存在.

解. 首先考虑二重极限存在的情况.

(1) 不一定成立. 如考虑 $f(x,y) = y\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(x,y) \to (0,0)$ 时的形态, 其二重极限存在, 但二次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在.

(2) ■

2. 试就函数在一点的二重极限和方向极限, 仿第 1 题讨论相关问题.

3. 试就函数在一点的二次极限和方向极限, 仿第 1 题讨论相关问题.

4. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n, \boldsymbol{f}:E\to\mathbb{R}^m$, 且 E 包含 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个去心邻域. 证明: $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$ 当且仅当

$$\lim_{t\to0^+}\sup_{\boldsymbol{\tau}\in S^{n-1}}|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{\tau})-\boldsymbol{A}|=0.$$

3.4 $\mathcal{B}$

1. 设有 $[a,b]\times[c,d]$ 上的函数 f, 对固定的 $y\in[c,d]$, $f(x,y)$ 作为 x 的函数在 $[a,b]$ 上连续, 而 $f(x,y)$ 对 y 的连续性关于 $x\in[a,b]$ 是一致的, 即 $\forall y_0\in[c,d]$,

$$\lim_{y\to y_0}\sup_{x\in[a,b]}|f(x,y)-f(x,y_0)|=0.$$

证明: f 是 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的二元连续函数.

证明. □

第 4 章 导数与微分

4.1 导数与微分

4.1 $\mathcal{A}$

1. 设 $x_0 \in (a,b)$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 在点 x_0 连续.

(1) 证明: f 在点 x_0 可导当且仅当 $\lim\limits_{\substack{t,s\to 0\\ ts<0}} \dfrac{f(x_0+t)-f(x_0+s)}{t-s}$ 存在.

证明.

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{t,s\to 0\\ ts<0}} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+s)}{t-s} &= \lim_{t\to 0^+}\lim_{s\to 0^-} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+s)}{t-s}\\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} = f'_+(x_0).\end{aligned}$$

同理可证

$$\lim_{\substack{t,s\to 0\\ ts<0}} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+s)}{t-s} = f'_-(x_0).$$

□

(2) 试讨论 f 在点 x_0 的可导性与极限 $\lim\limits_{\substack{t,s\to 0\\ ts>0, t\neq s}} \dfrac{f(x_0+t)-f(x_0+s)}{t-s}$ 的存在性之间的关系.

若 f 在点 x_0 可导, 则其左右导数都存在且相等, 可以推出题设二次极限存在. 仿照上述过程, f 在点 x_0 可导可以推出 $\lim\limits_{\substack{t,s\to 0\\ ts>0, t\neq s}} \dfrac{f(x_0+t)-f(x_0+s)}{t-s}$ 存在, 反之不然.

2. 设 $x_0 \in (a,b)$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. 试讨论 $f'_+(x_0)$ 与 $f'(x_0^+)$ 之间的关系 (包括他们的存在性).

根据导数定义

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad f'(x_0^+) = \lim_{t\to x_0^+}\lim_{x\to t} \frac{f(x)-f(t)}{x-t}.$$

这样如果导数存在且连续, 则 $f'_+(x_0)$ 与 $f'(x_0^+)$ 存在且相等. 如果导数在 x_0 处不存在, 则二者可能不等, 如取 $f(x)=|x|, x=0$, 则前者为 1 而后者不存在.

3. 设 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^n$ 为常向量, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n)$. 试计算 $f_{\boldsymbol{x}}, \nabla f$.

解. $f_{\boldsymbol{x}} = (\nabla f)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\lambda}$. ■

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 常数矩阵, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(x\in\mathbb{R}^n)$. 试计算 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}$.

解. $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}$. ■

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶常数方阵, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(x\in\mathbb{R}^n)$. 试计算 $f_{\boldsymbol{x}}, \nabla f$.

解. $\nabla f=(f_{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$. ■

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times k$ 常数矩阵, $n=k+m$, $f(\boldsymbol{x})=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\boldsymbol{A}(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n)^T(x\in\mathbb{R}^n)$. 试计算 $f_{\boldsymbol{x}},\nabla f$.

解. $\nabla f=(f_{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{A}(x_{m+1},\cdots,x_n);\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(x_1,\cdots,x_m)]$. ■

7. 利用 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 求

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{3}{n^2}+\cdots+\sin\frac{2n-1}{n^2}\right).$$

解. 注意到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(\dfrac{k}{n}\right)-f(0)}{\dfrac{k}{n^2}}=f'(0),$$

其中 $f(x)=\sin x$, 于是 $\sin\dfrac{k}{n^2}=\dfrac{k}{n^2}+o\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$, 于是原极限为 1. ■

8. 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$, 且 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$, 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为常数. 求证: $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant1$.

证明. 由于

$$f'(x)=a_1+2a_2\cos 2x+\cdots+na_n\cos nx,$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\left|\dfrac{f(x)}{\sin x}\right|=|f'(0)|\leqslant1$. 从而得证. □

4.1 $\mathcal{B}$

1. 试构造 $\mathbb{R}$ 上的实函数 f 使得它仅在点 0 连续, 且在点 0 的导数为 1.

解. 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\text{是有理数},\\ x^2+x, & x\text{是无理数}.\end{cases}$$

容易验证 f 仅在 $x=0$ 处连续且可导, 并且 $f'(0)=1$. ■

2. 设 f 在区间 (a,b) 处处可导, 证明: 存在区间 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ 使得 f' 在 $[\alpha,\beta]$ 上有界.

证明. 取 $\delta=\dfrac{b-a}{6}$, 令 $a_1=a+\delta,b_1=b-\delta$, 若能证得存在区间 $[\alpha,\beta]\subset[a_1,b_1]$, 则题设结论得证. 下面我们证明这个结论.

令 $a_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$, 若 f' 在 $[a_1,a_2]$ 或 $[a_2,b_1]$ 任何一个区间内有界, 则结论得证, 否则令 $b_2=\dfrac{a_2+b_1}{2}$, 若 f' 在 $[a_2,b_2]$ 或 $[b_2,b_1]$ 任何一个区间有界, 则结论得证, 否则令 $a_3=\dfrac{a_2+b_2}{2}$, 若 f' 在 $[a_2,a_3]$ 或 $[a_3,b_2]$ 任何一个区间有界, 则结论得证, 否则重复这个操作, 即令 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}+b_n}{2}$. 我们断言: 在有限步内一定能找到区间使得 f' 在该区间内有界. 否

则, 这一系列操作中产生的任何区间都使 f' 无界, 特别地, f 在闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 上始终无界, 易见 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ 并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, 从而 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成闭区间套, 依闭区间套定理, $\exists \xi \in [a_n, b_n]$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \xi$. 并且 $f'(\xi) = \infty$ 与 f 处处可导矛盾. □

3. 设 n 元实函数 f 在点 0 的一个邻域内有定义, 满足 $f(\mathbf{0}) = 0$. 进一步, 对任何 $\boldsymbol{e} \in S^{n-1}$, 成立 $\lim\limits_{r\to0^+} \dfrac{f(r\boldsymbol{e})}{r} = 0$ 以及 $\lim\limits_{\substack{(r,\boldsymbol{\sigma})\to(0,\boldsymbol{e})\\ r>0,\boldsymbol{\sigma}\in S^{n-1}}} \dfrac{f(r\boldsymbol{\sigma}) - f(r\boldsymbol{e})}{r} = 0$. 证明: f 在点 $\mathbf{0}$ 可微.

证明. □

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实方阵, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |s| < \delta$ 时, 矩阵

$$\boldsymbol{A}(s) = \boldsymbol{A} + \begin{pmatrix} s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^n \end{pmatrix}$$

的特征值互不相同.

提示: 先证明对充分大的 s, $\boldsymbol{A}(s)$ 的特征值互不相同.

证明. 先证当 s 充分大时, $\boldsymbol{A}(s)$ 有 n 个不同的特征值. 不妨记 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, 由 Gerschgorin 圆盘第一定理, 可知 $\boldsymbol{A}(s)$ 的特征值落在下列圆盘中:

$$D_i = \left|z - a_{ii} - s^i\right| \leqslant R_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

取 s 充分大, 使得 $s^n \gg s^{n-1} \gg \cdots \gg s$. 注意到 R_i 的值固定, 故 D_i 的圆心之间的距离大于半径 R_i, 从而 D_i 互不相交, 各自构成了一个连通分支. 再由第二圆盘定理, 每个连通分支 D_i 中有且仅有一个特征值, 于是 $\boldsymbol{A}(s)$ 有 n 个不同的特征值.

设 $f_s(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}(s)|$ 是 $\boldsymbol{A}(s)$ 的特征多项式, 则其判别式 $\Delta(f_s(\lambda))$ 是关于 s 的多项式. 由前面的讨论可知, 当 s 充分大时, $f_s(\lambda)$ 无重根, 从而 $\Delta(f_s(\lambda)) \neq 0$, 即 $\Delta(f_s(\lambda))$ 是关于 s 的非零多项式.

若 $\Delta(f_s(\lambda))$ 的所有复根都是零, 则任取一个正数 δ; 若 $\Delta(f_s(\lambda))$ 的复根不全为零, 则可取 δ 为 $\Delta(f_s(\lambda))$ 的非零复根的模长的最小值. 于是对任意的 $s \in (0, \delta)$, s 都不是 $\Delta(f_s(\lambda))$ 的根, 即 $\Delta(f_s(\lambda)) \neq 0$, 从而 $f_s(\lambda)$ 都无重根, 即 $\boldsymbol{A}(s)$ 都有 n 个不同的特征值. □

5. 设 $D \subseteq \mathbb{C}$ 为开集, $f: D \to \mathbb{C}$ 可表示为 $f(x + \mathrm{i}y) = P(x, y) + \mathrm{i}Q(x, y)$, 其中 P, Q 均为实值函数. 设 $x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$, 试讨论 P, Q 满足什么充要条件时, 极限

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x + \mathrm{i}y) - f(x_0 + \mathrm{i}y_0)}{(x + \mathrm{i}y) - (x_0 + \mathrm{i}y_0)}$$

存在.

解. 参考一般的复变函数教材。 ■

6. 设 f 为 $[0,1]$ 上处处可导的实函数, 0 和 1 均为 f 的不动点, 且 $f'(0)>1, f'(1)>1$, 证明:

(1) f 在 $(0,1)$ 中也有不动点.

(2) 存在 f 的不动点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)\leqslant 1$.

证明. (1) 设 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(0)=F(1)=0$. 由于 $F'(0)=f'(0)-1>0$, 则有 $\varepsilon_1>0$ 使得 $F(\varepsilon_1)>F(0)=0$; 同理由 $F'(1)>0$, 有 $\varepsilon_2>0$ 使得 $F(1-\varepsilon_2)<F(1)=0$, 由连续函数的介值定理可知有 $\xi\in(\varepsilon_1,1-\varepsilon_2)$ 使得 $F(\xi)=0$, 即为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 中的不动点.

(2) 由 (1) 知 f 在 $(0,1)$ 上有不动点, 记 ξ 为这些不动点中最大的那一个. 若 $f'(\xi)>1$, 即 $F'(\xi)>0$, 则仿 (1) 可证有 $\xi'\in(\xi,1)$ 使得 $F(\xi')=0$, 即 ξ' 为比 ξ 更大的不动点, 矛盾. □

7. 试仿照习题 $\mathcal{A}$ 第 7 题和第 8 题编写一些习题.

4.2　反函数, 复合函数和隐函数的导数

4.2 $\mathcal{A}$

1. 证明对任何实数 x 成立 $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$ 以及 $\mathrm{e}^x\geqslant \mathrm{e}x$.

证明. 记 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x$, 由

$$f'(x)=\mathrm{e}^x-1\geqslant f'(0)=0,$$

易见 $x=0$ 是 $f(x)$ 的最小值, 即 $f(x)\geqslant f(0)=0$, 从而得证. 后者只需置 x 为 $x-1$ 带入即得 $\mathrm{e}^{x-1}\geqslant 1+(x-1)$ 即 $\mathrm{e}^x\geqslant \mathrm{e}x$. □

2. 试改进不等式 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x(x>0)$.

(1) 证明对于 $x>0$, 成立 $\ln(1+x)>\dfrac{x}{1+x/2}$.

进一步, 试求最小的 α, 使得对于任何 $x>0$ 成立 $\ln(1+x)>\dfrac{x}{1+\alpha x}$.

(2) 证明对于 $x>0$, 成立 $\ln(1+x)<\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2(1+x)}$.

进一步, 试求最小的 a, 使得对于任何 $x>0$, 成立 $\ln(1+x)<ax+(1-a)\dfrac{x}{1+x}$.

证明. (1) 记 $F(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+\alpha x}$, 则

$$F'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+\alpha x)^2}=\frac{x(\alpha^2x-(1-2a))}{(1+x)(1+\alpha x)^2},$$

由于 $F(0)=0$, 而当 $\alpha=\dfrac{1}{2}$ 时 $F'(x)>0$, 从而题设不等式成立. 进一步, α 的最小值便是 $\dfrac12$, 否则 $F(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1-2\alpha}{\alpha^2}\right)$ 单调递减.

(2) 记 $G(x)=\ln(1+x)-ax-(1-a)\dfrac{x}{1+x}$, 则

$$G'(x)=\frac{1}{1+x}-a-\frac{1-a}{(1+x)^2}=\frac{x-a(1+x^2+2a)+a}{(1+x)^2}=\frac{-x(ax-(1-2a))}{(1+x)^2},$$

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时, $G'(x)<0$ 而 $G(0)=0$, 从而不等式成立. 进一步, a 的最小值是 $\dfrac{1}{2}$, 否则 $G(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1-2a}{a}\right)$ 上单调递增. □

3. 试证明对于 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 成立 $x<\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.
进一步, 试求最小的 α, 使得对于任何 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 成立 $x<\dfrac{\sin x}{\cos^\alpha x}$.

证明. 设 $F(x)=x-\dfrac{\sin x}{\cos^\alpha x}$, 那么

$$F'(x)=1-\frac{\cos^{\alpha+1}x+\alpha\cos^{\alpha-1}x\sin^2 x}{\cos^{2\alpha}x}=\frac{\cos^{\alpha+1}x-(1-\alpha)\cos^2 x-\alpha}{\cos^{\alpha+1}x},$$

考虑 $f(t)=\cos^{\alpha+1}x-(1-\alpha)\cos^2 x-\alpha=(1-t)^{\alpha+1}-(1-\alpha)(1-t)^2-\alpha$, 其中 $t=1-\cos x$, 注意到 $F(0)=0$, 由于 $F(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上连续, 并且 $f(0)=0$, 考虑

$$f'(t)=2(1-\alpha)(1-t)-(\alpha+1)(1-t)^\alpha,$$

$f'(0)=1-3\alpha$, 若 $f'(0)>0$, 则存在 $\delta>0$ 使得 $F(x)$ 在 $(0,\delta)$ 上单调递增, 不符题设, 从而 $\alpha\geqslant\dfrac{1}{3}$. □

4. 试求以下双曲函数的导数与反函数, 并以此求得这些反函数的导数. 将结果与相应的三角函数比较:

$$\sinh x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2},\qquad \cosh x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2},\qquad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},$$

其中 $\cosh x$ 的反函数在 $x>0$ 的范围内考虑.

解. 对于 $\sinh x$, 其导数 $(\sinh x)'=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\cosh x$, 反函数记 $\sinh y=x$, 即 $\mathrm{e}^{2y}-2x\mathrm{e}^y-1=0$, 解得 $e^y=x+\sqrt{x^2+1}$, 即 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. 又有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(\sinh y)'}=\frac{2}{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}=\frac{2}{x+\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

对于 $\cosh x$, 其导数 $(\cosh x)'=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\sinh x$, 反函数记 $\cosh y=x$, 即 $\mathrm{e}^{2y}-2x\mathrm{e}^y+1=0$, 解得 $\mathrm{e}^y=x+\sqrt{x^2-1}$, 即 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$. 又有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(\cosh y)'}=\frac{2}{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

对于 $\tanh x$, 其导数 $(\tanh x)'=\dfrac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=\dfrac{1}{\cosh^2 x}$, 反函数即 $\tanh y=x$, 同理可以得到 $\mathrm{e}^y=\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$, 即 $y=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$. 又有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(\tanh y)'}=\cosh^2 y=\frac{1}{1-x^2}.$$

跟三角函数差不多. ■

5. 设某区间上的连续可微函数 $y=y(x), z=z(x)$ 由方程组

$$\begin{cases} x^2+3y^2+3z^2=1, \\ x^3+3y^3+9z^3=0 \end{cases}$$

确定. 试求 $y'(x), z'(x)$.

解. 对 x 求导可得

$$\begin{cases} 2x+6yy'+6zz'=0, \\ 3x^2+6y^2y'+27z^2z'=0, \end{cases}$$

解得 $y'(x)=\dfrac{x^2z-3xz^2}{9yz^2-2y^2z}$, $z'(x)=\dfrac{2xy^2-3x^2y}{27yz^2-6y^2z}$. ■

6. 设某区域内的连续可微函数 $u=u(x,w), v=v(x,w)$ 由方程组

$$\begin{cases} x^2+2u^2+3v^2+w^4=1, \\ x+u+v+w=0 \end{cases}$$

确定. 试求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial w}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial x}$.

解. 分别对 x, w 求偏导得到

$$\begin{cases} 2x+4u\dfrac{\partial u}{\partial x}+6v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \\ 1+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4u\dfrac{\partial u}{\partial w}+6v\dfrac{\partial v}{\partial w}+4w^3=0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial w}+\dfrac{\partial v}{\partial w}+1=0, \end{cases}$$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x-3v}{3v-2u}, \dfrac{\partial u}{\partial w}=\dfrac{3v-2w^3}{2u-3v}, \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2u-x}{3v-2u}, \dfrac{\partial v}{\partial w}=\dfrac{2w^3-2u}{2u-3v}$. 于是

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{\partial u/\partial w}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2u-3v}{3v-2w^3}\cdot\frac{x-3v}{3v-2u}=\frac{3v-x}{3v-2w^3}.$$ ■

7. 设某区域内的连续可微函数 $v=v(x,u), w=w(x,u)$ 由方程组

$$\begin{cases} x^2+2u^2+3v^2+w^4=1, \\ x+u+v+w=0 \end{cases}$$

确定. 试求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial u}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial x}$.

解. 分别对 x, u 求偏导得到

$$\begin{cases} 2x+6v\dfrac{\partial v}{\partial x}+4w^3\dfrac{\partial w}{\partial x}=0, \\ 1+\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial x}=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4u+6v\dfrac{\partial v}{\partial u}+4w^3\dfrac{\partial w}{\partial u}=0, \\ 1+\dfrac{\partial v}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial u}=0, \end{cases}$$

解得 $\dfrac{\partial v}{\partial u}=\dfrac{2w^3-2u}{3v-2w^3}, \dfrac{\partial w}{\partial u}=\dfrac{2u-3v}{3v-2w^3}, \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2w^3-x}{3v-2w^3}, \dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{x-3v}{3v-2w^3}$. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\partial w/\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{x-3v}{2u-3v}.$$ ■

8. 设某区间上的连续可微函数 $y=y(x)$ 由参数方程组

$$\begin{cases} x = 2\mathrm{e}^t - \cos t, \\ y = t - \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

确定. 试求 $y'(x)$.

解. 我们有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 - \cos t$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2\mathrm{e}^t + \sin t$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} = \frac{1-\cos t}{2\mathrm{e}^t + \sin t}.$$

■

4.2 $\mathcal{B}$

1. 若 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, $\boldsymbol{A}:\Omega\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 以及 $\boldsymbol{g}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 可微, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$. 试计算 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}$.

解. ■

2. 试构造一个在 $[0,1]$ 上处处可导的函数, 使得其导函数在 $[0,1]$ 上无界.

解. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. 可得 $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x^2} = 0$, 而 $x \neq 0$ 时

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$$

无界. ■

3. 试仿照习题 $\mathcal{A}$ 第 2 题编写一些习题.

4.3　高阶导数

4.3 $\mathcal{A}$

1. 计算以下函数在 $x=0$ 处的各阶导数, 或给出递推公式:

(1) $y = \tan^2 x$;　　(2) $y = \arctan x$;

(3) $y = \arcsin x$;　　(4) $y = \dfrac{x^2+3x+3}{x^2-3x+2}$.

(5) $y = \cos^3 x$;　　(6) $y = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

(7) $y = (1+x)^{2+x}$;　　(8) $y = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$.

解. (1) 我们有 $y'(x) = 2\tan x\sec^2 x$, $y''(x) = 2\sec^4 x + 4\tan^2 x \sec^2 x = 6y^2 + 8y + 2$, 于是

$y^{(n+2)}=6\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k y^{(k)}y^{(n-k)}+8y^{(n)}$.

(2) 此问使用 6.6 节相关内容解法十分容易, 因为有 $\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, 所以

$$y^{(2n+1)}(0)=\frac{(-1)^n(2n+1)!}{2n+1}=(-1)^n(2n)!,\quad y^{(2n)}=0.$$

然而, 我们也可以用 12 题的结论, 因为注意到

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}}-\frac{1}{x+\mathrm{i}}\right),$$

于是

$$y^{(n+1)}(0)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x-\mathrm{i})^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+\mathrm{i})^{n+1}}\right)\Bigg|_{x=0}=\frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{\mathrm{i}^{n+1}-(-\mathrm{i})^{n+1}}{\mathrm{i}}\right).$$

(3) 我们有 $\sin y=x$, 得 $y'\cos y=1$, 进一步有

$$y''\cos y-y'\sin y=0\Rightarrow y''=y'\tan y,$$

于是有 $y^{(n+2)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k y^{(k+1)}\left(\tan y\right)^{(n-k)}$.

(4) 我们有

$$f(x)=\frac{x^2+3x+3}{x^2-3x+2}=1+\frac{13}{x-2}-\frac{7}{x-1},$$

因此 $f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot n!\cdot\left(\frac{13}{(x-2)^{n+1}}-\frac{7}{(x-1)^{n+1}}\right)$, 于是 $f^{(n)}(0)=(7-\frac{13}{2^{n+1}})n!$.

(5)

(6)

(7)

(8) ∎

2. 设 $f(x)=\begin{cases}ax^2+b\cos x, & x<0,\\ \mathrm{e}^x+\ln(1+x)+cx, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 问当 a,b,c 取何值时, f 是 $\mathbb{R}$ 上的二阶连续可导函数.

解. 由于 f 连续, 有

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)\Rightarrow b=1,$$

由于 f 一阶导函数存在且连续, 即对于 $f'(x)=\begin{cases}2ax-b\sin x, & x<0\\ \mathrm{e}^x+\frac{1}{1+x}+c, & x\geqslant 0\end{cases}$, 有

$$\lim_{x\to0^-}f'(x)=\lim_{x\to0^+}f'(x)\Rightarrow c=-2,$$

并且 $f'(0)=0$. 最后, f 二阶导函数连续, 则

$$\lim_{x\to0}\frac{2ax-b\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{1+x}+c\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left((\mathrm{e}^x-1)+\left(\frac{1}{1+x}-1\right)\right)=0,$$

即 $2a-b=0$, 于是 $a=\frac{1}{2}$. ∎

3. 设某区间内的连续可微函数 $u=u(x,w), v=v(x,w)$ 由方程组

$$\begin{cases} x^2+2u^2+3v^2+w^4=1, \\ x+u+v+w=0. \end{cases}$$

确定, 试求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial w}$.

解. 结合 4.2 节 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 第 **6** 题, 我们得到

$$\begin{cases} 2+4\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+4u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+6v\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0, \end{cases}$$

解得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{3v-2u}\left(1+2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+3\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)=\dfrac{16u^2-12uv-12ux+27v^2-12vx+5x^2}{(3v-2u)^3}$.

又有

$$\begin{cases} 4\dfrac{\partial u}{\partial w}\dfrac{\partial u}{\partial x}+4u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial w}+6\dfrac{\partial v}{\partial w}\dfrac{\partial v}{\partial x}+6v\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial w}=0, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial w}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial w}=0, \end{cases}$$

解得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial w}=\dfrac{1}{3v-2u}\left(2\dfrac{\partial u}{\partial w}\dfrac{\partial u}{\partial x}+3\dfrac{\partial v}{\partial w}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)=\dfrac{6(u-w^3)(2u-x)+2(3v-2w^3)(3v-x)}{(3v-2u)^3}$. ■

4. 设某区间 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 内, n 阶方阵值函数 $\boldsymbol{A}(\cdot)=(a_{ij}(\cdot))$ 连续可微, 实函数 f 连续, 实函数 u 在 Ω 内二阶连续可微且满足方程

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\right)=f(x).$$

作变量代换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{s}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 为可逆常数矩阵, 试将上述方程化为关于 $v(\boldsymbol{s})=u(\boldsymbol{P}\boldsymbol{s})$ 的方程.

解. ■

5. 设 $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,((x,y)\neq(0,0))$. 试计算 $f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$.

解. 容易算得

$$f_x(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad f_{xx}(x,y)=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

考虑对称性易得 $f_{yy}(x,y)=\dfrac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, 从而 $f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)=\dfrac{2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$. ■

6. 设 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,((x,y,z)\neq(0,0,0))$. 试计算 $f_{xx}(x,y,z)+f_{yy}(x,y,z)+f_{zz}(x,y,z)$.

解. 容易算得

$$f_x(x,y,z)=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad f_{xx}(x,y,z)=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

结合 x,y,z 的对称性可得

$$f_{xx}(x,y,z)+f_{yy}(x,y,z)+f_{zz}(x,y,z)=0.$$ ■

7. 设二元实函数 f 在不包含原点的一个区域内有两阶的连续偏导数. 作变量代换 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ 其中 $r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$. 试用 f 关于 r, θ 的二阶偏导数表示 $f_{xx} + f_{yy}$.

解. 注意到

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x},$$

先对 x 微分有

$$\begin{aligned} 2r\frac{\partial r}{\partial x} &= 2x \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r - x(\partial r/\partial x)}{r^2} = \frac{y^2}{r^3}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{1-(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2} \Rightarrow \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{2y}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2xy}{r^4}, \end{aligned}$$

按照类似的过程, 对 y 微分可以得到

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{r^3}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{r^4},$$

从以上结果, 可以推出

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0.$$

利用复合函数求导链式法则有

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

再次对 x 微商得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \\ &= \left(\frac{\partial f^2}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial f^2}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

对于 y 有同样的结果

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}.$$

将以上两式相加, 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =& \frac{\partial f^2}{\partial r^2}\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial f^2}{\partial\theta^2}\left(\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{\partial f}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right) \\ =& \frac{\partial f^2}{\partial r^2}\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right), \end{aligned}$$

进一步得到

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f^2}{\partial r^2}\left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{x^2}{r^3} + \frac{y^2}{r^3}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\left(\frac{x^2}{r^4} + \frac{y^2}{r^4}\right),$$

利用 $r^2=x^2+y^2$, 我们便得

$$f_{xx}+f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$ ■

8. 设三元实函数 f 在不包含原点的一个区域内有两阶的连续偏导数. 作变量代换

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\varphi, \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, \\ z=r\cos\varphi, \end{cases}$$

其中 $r>0,\theta\in[0,2\pi),\varphi\in[0,2\pi]$. 试用 f 关于 r,θ,φ 的二阶偏导数表示 $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$.

解. ■

9. 设 $m\geqslant 1$, 证明: 复数 z_0 为非零多项式 P 的 m 重根当且仅当 $P(z_0)=P'(z_0)=\cdots=P^{(m-1)}(z_0)=0$, 但 $P^{(m)}(z_0)\neq 0$.

证明. □

10. 当 a 为何值时, $x^4-9x^2+ax+12=0$ 有重根?

解. 记 $f(x)=x^4-9x^2+ax+12$, 由于

$$f'(x)=4x^3-18x+a,\quad f''(x)=12x^2-18,\quad f^{(3)}(x)=24x,$$

现在来做这样一件事: 令 $f^{(3)}=0$ 得 $x=0$, 但 $f(0)\neq 0$, 从而 $f(x)$ 没有四重根; 令 $f''(x)=0$ 得 $x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, 在令 $f'\left(\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)=0$ 得 $a=\pm 6\sqrt{6}$, 将这 x 与对应的 a 代入 f, 得到 $f(x)\neq 0$, 从而 $f(x)$ 没有三重根. 即若 $f(x)$ 有重根, 必为二重根.

易见 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的根. 设 $g(x)=\dfrac{9x^2-x^4-12}{x}$, 则 $a=g(x)$ 的根即为 $f(x)=0$ 的解, 特别地, 当 a 等于 $g(x)$ 的极值时, $f(x)$ 有重根, 重根即为 $g(x)$ 的极值点.

由 $g'(x)=9-3x^2+\dfrac{12}{x^2}$ 可知 $x=\pm 2$ 为 $g(x)$ 的极值点, 代入 $a=g(x)$, 可知 $a=\pm 4$. 于是 $a=4$ 时, $x=2$ 为 $f(x)=0$ 的重根, $a=-4$ 时, $x=-2$ 为 $f(x)=0$ 的重根. ■

11. 设 $\alpha>1, M>0, [a,b]$ 上的实函数 f 满足

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha,\qquad \forall x,y\in[a,b].$$

证明: f 在 $[a,b]$ 上恒为常数.

解. 易见 f 在 $[a,b]$ 上连续, 给定 x, 取 $y=x+\Delta x$, 则有

$$\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|\leqslant M\left|\Delta x\right|^{\alpha-1}\to 0,\quad \Delta x\to 0,$$

从而 f 在 $[a,b]$ 上任一点得导数值为 0, 故而 f 为常数. ■

12. 设 $\alpha \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$, 证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+\alpha)^n = n(x+\alpha)^{n-1}, \qquad x \neq -\alpha.$$

证明. 先证 $(\ln(x+\alpha))' = \dfrac{1}{x+\alpha}$, 设 $y = \ln(x+\alpha)$, 则 $\mathrm{e}^y = x+\alpha$, 那么

$$(\ln(x+\alpha))' = \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \frac{1}{x+\alpha},$$

那么 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+\alpha)^n = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(n\ln(x+\alpha)) = \exp(n\ln(x+\alpha)) \cdot \dfrac{n}{x+\alpha} = n(x+\alpha)^{n-1}$. □

4.3 $\mathcal{B}$

1. 设 P_1, P_2, Q_1, Q_2 均为非零多项式, 满足 $\dfrac{1}{P(t)} = \dfrac{Q_1(t)}{P_1(t)} + \dfrac{Q_2(t)}{P_2(t)}$, 其中 $P(t) = P_1(t)P_2(t)$. 若 f, f_1, f_2 为 I 上的光滑函数, 满足 $P_1(\mathrm{D})f_1(x) = P_2(\mathrm{D})f_2(x) = f(x)$, 证明: $F(x) = Q_1(\mathrm{D})f_1(x) + Q_2(\mathrm{D})f_2(x)$ 满足 $P(\mathrm{D})F(x) = f(x)$.

证明. 由题设知 $Q_1(t)P_2(t) + Q_2(t)P_1(t) = 1$, 于是

$$\begin{aligned}
P(\mathrm{D})F(x) &= P_1(\mathrm{D})P_2(\mathrm{D})\left(Q_1(\mathrm{D})f_1(x) + Q_2(\mathrm{D})f_2(x)\right)\\
&= Q_1(\mathrm{D})P_2(\mathrm{D})P_1(\mathrm{D})f_1(x) + Q_2(\mathrm{D})P_1(\mathrm{D})P_2(\mathrm{D})f_2(x)\\
&= Q_1(\mathrm{D})P_2(\mathrm{D})f(x) + Q_2(\mathrm{D})P_1(\mathrm{D})f(x)\\
&= \left(Q_1(\mathrm{D})P_2(\mathrm{D}) + Q_2(\mathrm{D})P_1(\mathrm{D})\right)f(x) = f(x).
\end{aligned}$$ □

2. 设实函数 y 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导, 满足 $(1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 0$. 令 $z(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x}y(x)$. 试导出 z 的微分方程 (比较两种方法: 对等式 $y(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}z(x)$ 求导和对等式 $(1+x)z(x) = (1+x^2)y(x)$ 求导).

解. 记 $w(x) = \dfrac{1+x}{1+x^2}$, 则 $y(x) = w(x)\cdot z(x)$, 并且

$$y'(x) = w'(x)z(x) + w(x)z'(x), \quad y''(x) = w''(x)z(x) + 2w'(x)z'(x) + w(x)z''(x),$$

代入微分方程得到

$$(1+x^2)w(x)z''(x) + \left[2(1+x^2)w'(x) + 4xw(x)\right]z'(x) + \left[(1+x^2)w''(x) + 4xw'(x) + 2w(x)\right]z(x) = 0,$$

结合 $w'(x) = \dfrac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}, w''(x) = \dfrac{2x^3+6x^2-6x-2}{(1+x^2)^3}$, 带入方程即得

$$(1+x)z''(x) + 2z'(x) = 0.$$

另外, 由于 $(1+x)z(x) = (1+x^2)y(x)$, 于是有

$$\begin{aligned}
z(x) + (1+x)z'(x) &= 2xy(x) + (1+x^2)y'(x),\\
(1+x)z''(x) + 2z'(x) &= (1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 0,
\end{aligned}$$

显然后者计算量更小. ■

4.4　复指数函数, 正弦函数和余弦函数

4.4 $\mathcal{A}$

1. 计算 $\sin x, \cos x$ 在 $x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{4}$ 等点的值.

解. ■

2. 证明 $\pi > 2\sqrt{2}$.

证明. □

3. 证明: $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 成立 $\sin x < x < 4\sin\dfrac{x}{2} - \sin x$.

证明. □

4. 计算 $\left(x^3 \mathrm{e}^x \sin x\right)^{(100)}$.

解. 记 $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$, 由 Leibniz 公式有

$$\left(x^3 f(x)\right)^{(100)} = C_{100}^0 x^3 f^{(100)}(x) + C_{100}^1 3x^2 f^{(99)}(x) + C_{100}^2 6x f^{(98)}(x) + C_{100}^3 6 f^{(97)}(x),$$

我们依次计算

$$\left(\mathrm{e}^x \sin x\right)^{(100)} = \left(\operatorname{Re} \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}x}\right)^{(100)}$$

■

5. 证明: 不恒为零的 n 阶三角多项式 $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至多只有 $2n$ 个零点 (含重数).

证明. □

6. 利用上一题中的结论证明习题 2.7.$\mathcal{B}$ 第 5 题中的等式:

$$\sin \pi x = (2n+1)\sin\frac{\pi x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\dfrac{\pi x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right).$$

4.4 $\mathcal{B}$

1. 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n!}$.

解. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n!} = \operatorname{Im}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{n!} = \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} - 1\right) = \operatorname{Im}\mathrm{e}^{\cos x + \mathrm{i}\sin x} = \mathrm{e}^{\cos x}\sin(\sin x)$. ■

2. 设 $z \in \mathrm{C}$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^z$.

证明. □

3. 不借助复指数函数证明下列等式.

$$(\sin t)' = \cos t, \quad (\cos t)' = \sin t, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\sin(-t) = -\sin t, \quad \cos(-t) = \cos t, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

4. 考虑 Euler 公式 $\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$. 两端展开后, 形式上我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\frac{x^3}{\pi^2} + \cdots + \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=k_1+1}^{\infty}\frac{1}{k_1^2k_2^2}\frac{x^5}{\pi^5}$$
$$+ (-1)^n\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_n}^{\infty}\frac{1}{k_1^2k_2^2\cdots k_n^2}\frac{x^{2n+1}}{\pi^{2n}} + \cdots$$

比较系数得到

$$\sum_{1\leqslant k_1<k_2\cdots k_n}^{\infty}\frac{1}{k_1^2k_2^2\cdots k_n^2} = \frac{\pi^{2\pi}}{(2n+1)!}, \quad n \geqslant 1.$$

特别地,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{1\geqslant k_1<k_2}\frac{1}{k_1^2k_2^2} = \frac{\pi^4}{120}.$$

试严格证明上述关系式. 利用前述 Euler 公式, 形式上我有

$$x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n^2\pi^2}\right) = \frac{\sin \mathrm{i}x}{i} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}x}}{\mathrm{i}\cdot 2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

试严格证明

$$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. 证明

$$\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right), \forall x \in \mathbb{R}.$$

6. 仿习题 $\mathcal{A}$ 第 6 题给出一些新的形式

第 5 章　不定积分

5.1　不定积分

Theorem 5.1.1

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, $\boldsymbol{f}:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 在 Ω 中可微且微分恒为 $\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{f}$ 在 Ω 中恒为常量.

5.1 $\mathcal{A}$

1. 计算 $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\cos 2x+1}\,\mathrm{d}x$.

解. $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\cos 2x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\tan x-x)+C.$ ■

2. 对于复数 λ 以及实数 x, 定义 $x^\lambda=\mathrm{e}^{\lambda\ln x}$. 验证: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^\lambda=\lambda x^{\lambda-1}$.

解. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^\lambda=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\lambda\ln x}=\mathrm{e}^{\lambda\ln x}\cdot\dfrac{\lambda}{x}=\lambda x^{\lambda-1}.$ ■

3. 设 $a<c<b$, f 在 (a,b) 内连续, F 在 (a,c) 与 (c,b) 内均为 f 的原函数, 且 F 在 (a,b) 内连续. 证明: F 是 f 在 (a,b) 上的原函数.

证明. □

4. 试用有限覆盖定理证明定理 5.1.1.

5.1 $\mathcal{B}$

1. 考虑去心圆盘 $D=\{(x,y)|0<x^2+y^2<1\}$ 以及函数

$$P(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2},\qquad Q(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

证明在 D 内成立 $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, 但不存在在 D 内可微的二元函数 $f(x,y)$ 使得

$$\mathrm{d}f(x,y)=P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y,\qquad (x,y)\in D.$$

2. 在例子中, 在确定原函数 F 在 ±1 处的相关常数时, 我们只考虑了 F 的连续性, 而没有去考虑 F 在 ±1 上的可微性. 是说明这样做是合理的, 并把这种合理性抽象成一个习题.

5.2　变量代换法

5.2 $\mathcal{A}$

1. 分别用以下变量代换计算 $\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$:

(1)$x=2\sin t\left(t\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\right)$.　　　　(2)$x=2\cos t\,(t\in[0,\pi])$.

解. 内容... ■

2. 计算 $\int \frac{1-2\ln x}{x^3-x\ln x}\,\mathrm{d}x$.

解. 置 $x=1/t$, 则

$$\int \frac{1-2\ln x}{x^3-x\ln x}\,\mathrm{d}x=-\int \frac{t+2t\ln t}{1+t^2\ln t}\,\mathrm{d}t=-\int \frac{\mathrm{d}\left(1+t^2\ln t\right)}{1+t^2\ln t}=-\ln\left(1+t^2\ln t\right)+C.$$

即 $\int \frac{1-2\ln x}{x^3-x\ln x}\,\mathrm{d}x=-\ln\left(1-\frac{\ln x}{x^2}\right)+C.$ ■

3. 计算 $\int \frac{1}{x(x^2+4)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$.

解. 置 $x=2\tan x$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^2+4)^{3/2}}\,\mathrm{d}x&=\int \frac{\sec^2 t}{\tan x\left(4\tan^2+4\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{8}\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{8}\cos t+C\\&=-\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}(\cos t)}{1-\cos^2}+\frac{1}{8}\cos t+C\\&=-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right|+\frac{1}{8}\cos t+C.\end{aligned}$$

即 $\int \frac{1}{x(x^2+4)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}+2}{\sqrt{4+x^2}-2}\right|+\frac{1}{4\sqrt{4+x^2}}+C.$ ■

4. 计算 $\int \frac{\mathrm{e}^x-1}{x\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

解. $\int \frac{\mathrm{e}^x(x+1)-(x\mathrm{e}^x+1)}{x\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x\mathrm{e}^x+1)}{x\mathrm{e}^x+1}-x+C=\ln(x\mathrm{e}^x+1)-x+C.$ ■

5. 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的实连续函数, φ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续, 在 (α,β) 内可导且导数恒正, $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$. 记 ψ 为 φ 的反函数. 证明, 若在 (α,β) 上成立

$$\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=G(t)+C,$$

则 $G(\alpha^+)$ 与 $G(\beta^-)$ 存在. 进一步, 令 $G(\alpha)=G(\alpha^+),G(\beta)=G(\beta^-)$, 则在 $[a,b]$ 上有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=G(\psi(x))+C.$$

5.2 $\mathcal{B}$

1. 试给出 $\dfrac{1}{2+\cos x+\sin x}$ 的一个原函数.

解. 置 $t=\tan\dfrac{x}{2}$, 则 $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\begin{aligned}\int\frac{2}{2+\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{2}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)+C\\&=\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1+\tan(x/2)}{\sqrt{2}}\right)+C.\end{aligned}$$

■

5.3　分部积分法

5.3 $\mathcal{A}$

1. 计算以下不定积分:

(1) $\displaystyle\int x^3\ln^2 x\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int x^4\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int x^2\arcsin x\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int x^2\arcsin^2 x\,\mathrm{d}x$;　　(6) $\displaystyle\int x^3\arcsin^2 x\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int x^2\left(2\sec^2 x-3\sec^4 x\right)\,\mathrm{d}x$;　　(8) $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{3x}\cos 4x\,\mathrm{d}x$.

解. 前四个的计算量较小,

$$\begin{aligned}\int x^3\ln^2 x\,\mathrm{d}x&=\int\ln^2 x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{4}x^4\right)=\frac{x^4\ln^2 x}{4}-\frac{1}{2}\int x^3\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^4\ln^2 x}{4}-\frac{1}{2}\int\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{4}x^4\right)\\&=\frac{x^4\ln^2 x}{4}-\frac{x^4\ln x}{8}+\int\frac{x^3}{8}\,\mathrm{d}x=\frac{x^4\ln^2 x}{4}-\frac{x^4\ln x}{8}+\frac{x^4}{32}+C.\end{aligned}$$

容易验证这样一个事实

$$\begin{aligned}\int u\,\mathrm{d}\left(v^{(n)}\right)&=uv^{(n)}-\int u'\,\mathrm{d}\left(v^{(n-1)}\right)=uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+\int u''\,\mathrm{d}\left(v^{(n-2)}\right)\\&=\cdots=uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+u''v^{(n-2)}+\cdots+(-1)^k u^{(k)}v^{(n-k)}+\cdots,\end{aligned}$$

对于 (2), 由于

$$\left(x^4\right)'=4x^3,\quad\left(x^4\right)''=12x^2,\quad\left(x^4\right)^{3}=24x,\quad\left(x^4\right)^{(4)}=24,\quad\left(x^4\right)^{(5)}=0,$$

易见

$$\int x^4\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)\mathrm{e}^x+C.$$

容易得到

$$\begin{aligned}\int x\arctan x\,\mathrm{d}x&=\frac{x^2\arctan x}{2}-\frac{x-\arctan x}{2}+C,\\\int x^2\arcsin x\,\mathrm{d}x&=\frac{x^2\arcsin x}{3}-\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{9}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}+C.\end{aligned}$$

后四个的计算量稍大, 但是细心是不会出错的.

$$\int x^2\arcsin^2 x\,\mathrm{d}x=\int\arcsin^2 x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{x^3\arcsin^2 x}{3}-\frac{2}{3}\int\arcsin x\cdot\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

一个可行的方法是寻找一阶微分形式 $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ 的原函数, 于是置 $x=\sin t$, 从而

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\sin^3 t\,\mathrm{d}t=\int\left(\cos^2-1\right)\,\mathrm{d}\left(\cos t\right)=\frac{\cos^3 t}{3}-\cos t+C.$$

即有

$$\begin{aligned}\int\arcsin x\cdot\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x&=\int\arcsin x\,\mathrm{d}\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3}-\sqrt{1-x^2}\right)\\&=\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3}-\sqrt{1-x^2}\right)\arcsin x-\int\left(\frac{1-x^2}{3}-1\right)\,\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3}-\sqrt{1-x^2}\right)\arcsin x+\frac{2x}{3}+\frac{x^3}{9}+C.\end{aligned}$$

代回即得

$$\int x^2\arcsin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{x^3\arcsin^2 x}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3}-\sqrt{1-x^2}\right)\arcsin x-\frac{4x}{9}-\frac{2x^3}{27}+C.$$

(6) 与此十分相似:

$$\begin{aligned}\int x^3\arcsin^2 x\,\mathrm{d}x=&\frac{x^4\arcsin^2 x}{4}-\frac{3\arcsin^2 x}{16}+\frac{3x\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{16}+\\&\frac{x^3\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{2}+\frac{3x}{16}-\frac{3x^2}{32}-\frac{x^4}{8}+C.\end{aligned}$$ ■

2. 试用不同的方法推到 (5.3.3)–(5.3.6) 式子.

3. 给出积分 $\displaystyle\int\left(1+x^2\right)^{3/2}\,\mathrm{d}x,\int\left(1+x^2\right)^{-3/2}\,\mathrm{d}x$ 与积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ 的联系.

4. 给出积分 $\displaystyle\int\left(x^2-1\right)^{3/2}\,\mathrm{d}x,\int\left(x^2-1\right)^{-3/2}\,\mathrm{d}x$ 与积分 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$ 的联系.

5. 计算 $\displaystyle\int\left(\mathrm{e}^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)+\ln x+1\right)\mathrm{d}x.$

解. $\displaystyle\int\left(\mathrm{e}^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)+\ln x+1\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\ln x+x\ln x+C.$ ■

6. 设连续可微函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+y+x=1$ 确定.

(1) 计算 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(2) 计算 $\displaystyle\int y(x)\,\mathrm{d}x$.

(3) 任取 $x_0\in\mathbb{R}$, 定义 $x_{n+1}=y(x_n)(n\geqslant 0)$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

解. (1) 原式左右两侧对 x 求导得

$$\mathrm{e}^y y'+y'+1=0,$$

即得 $y'=-\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^y}$, 继续对上式求导得到

$$\mathrm{e}^y(y')^2+\mathrm{e}^y y''+y''=0,$$

带入 y' 得到 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{-\mathrm{e}^y}{(1+\mathrm{e}^y)^3}$.

(2) 由 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^y}$ 得到 $\mathrm{d}x=-(\mathrm{e}^y+1)\,\mathrm{d}y$ 代入 $\displaystyle\int y(x)\,\mathrm{d}x$ 得到

$$\int y(x)\,\mathrm{d}x=-\int y(\mathrm{e}^y+1)\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^y-y\mathrm{e}^y-\frac{1}{2}y^2+C.$$

(3) 由 $\mathrm{e}^y+y+x=1$ 知 $\mathrm{e}^y+y=1-x$, 易见若 $x>0$, 则 $y(x)<0$; 若 $x<0$, 则 $y(x)>0$. 并且易见 $y(0)=0$. 若 $x_n>0(n\geqslant 0)$, 则 $x_{n+1}=y(x_n)<0$, 于是

$$|x_{n+1}|-|x_n|=-y(x_n)-x_n=-y(x_n)-1+y(x_n)+\mathrm{e}^{y(x_n)}=\mathrm{e}^{y(x_n)}-1<0,$$

反之若 $x_n<0$ 同理可得 $|x_{n+1}|<|x_n|$. 这意味着如果 x_0 取定, 那么无论如何, x_n 都将落在 $[-|x_0|,|x_0|]$ 内, 注意到这时

$$\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|=\frac{1}{1+\mathrm{e}^y}\leqslant\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-|x_0|}}<1,$$

于是由 Lagrange 中值定理与压缩映射原理即得结论, 即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$. ■

5.3 $\mathcal{B}$

1. 考虑熟知的那些函数的两两组合, 试计算其乘积的不定积分.

2. 设 m,n 为整数, 讨论不同情形下, 什么方法是计算不定积分 $\displaystyle\int\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x$ 是最简单的.

5.4　有理函数不定积分

5.4 $\mathcal{A}$

1. 计算 $\displaystyle\int\frac{1}{3+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解. 设 $t=\tan\dfrac{x}{2}$, 则有

$$\int\frac{1}{3+\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C.$$ ■

2. 设 $Q(x,y)$ 为 x,y 的有理函数, $ad-bc\neq 0, m\geqslant 2$, 试验证变量代换 $t=\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ 将积分 $\displaystyle\int Q\Big(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\,\mathrm{d}x$ 转化为有理积分. 试利用这一变量代换计算以下积分.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int \sqrt{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$; $\left(\int \sqrt{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \int (x-2)\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\,\mathrm{d}x.\right)$

(4) $\int \sqrt{4-3x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解. 由题设

$$\int Q(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=\sqrt[m]{(ax+b)/(cx+d)}} \int Q(\frac{b-dt^m}{ct^m-a}, t)\cdot\frac{(ad-cb)mt^{m-1}}{(ct^m-a)^2}\,\mathrm{d}t.$$

(1) 利用上述变换, 有

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6t^2}{(1-t^2)(2+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}-\frac{4}{2+t^2}\right)\mathrm{d}t\\
&= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + 2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C.\\
&= \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}}{1-\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}}\right| + 2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x+2}{2x-2}} + C.
\end{aligned}$$

■

3. 设 $Q(x,y)$ 为 x,y 的有理函数, $a>0$, 试讨论变量代换 $t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x$ 与 $t=\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}x$ 在将积分 $\int Q(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ 转化为有理函数积分时的适用性. 进一步, 试利用上述变换计算第 2 题的 (1), (3).

解. ■

4. 设 $(Q(x,y))$ 为 x,y 的有理函数, $c>0, b^2-4ac\neq 0$. 试讨论变量代换 $t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c}}{x}$ 与 $t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$ 再将积分 $\int Q(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ 转化为有理函数积分时的适用性. 进一步, 试利用上述变换计算第 2 题的 (3), (4).

解. ■

5. 求 A,B 使得

$$3\cos x+4\sin x = A(2\cos x+\sin x)+B(2\cos x+\sin x)'.$$

由此计算积分 $\int \frac{3\cos x+4\sin x}{2\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解. 易见 $A=2, B=-1$. 由

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int \frac{2\cos x+\sin x}{2\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x = x+C,\\
I_2 &:= \int \frac{(2\cos x+\sin x)'}{2\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\,(2\cos x+\sin x)}{2\cos x+\sin x} = \ln|2\cos x+\sin x|+C
\end{aligned}$$

由线性性有

$$\int \frac{3\cos x+4\sin x}{2\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x = AI_1+BI_2 = 2x-\ln|2\cos x+\sin x|+C.$$

■

5.4 $\mathcal{B}$

1. 设 Q, Q_1, Q_2 为有理函数, 对于使得 $Q(x), Q_1(x), Q_2(x)$ 都有意义的实数 x, 成立 $Q_1(x)+Q_2(x)=Q(x)$. 证明: 对于使得 $Q(z), Q_1(z), Q_2(z)$ 都有意义的复数 z, 成立 $Q_1(z)+Q_2(z)=Q(z)$.

证明. □

2. 设 Q, Q_1, Q_2 为有理函数, 对于使得 $Q(x), Q_1(x), Q_2(x)$ 都有意义的实数 x, 成立 $Q_1(x)Q_2(x)=Q(x)$. 证明: 对于使得 $Q(z), Q_1(z), Q_2(z)$ 都有意义的复数 z, 成立 $Q_1(z)Q_2(z)=Q(z)$.

证明. □

3. 讨论在复平面 $\mathbb{C}$ 的什么子区域内, 可以连续地定义 $w=\ln z$ 使得 $\mathrm{e}^w=z$, 进一步,

(1) 考察对于复数 z_0, 等式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x+z_0}=\ln(x+z_0)+C$ 的合理性.

(2) 考察在不同区域内, 一阶微分形式 $\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\mathrm{d}y}{x+\mathrm{i}y}$ 的原函数的存在性.

(3) 设 $n\geqslant 2$, 考察在不同区域内, 一阶微分形式 $\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\mathrm{d}y}{(x+\mathrm{i}y)^n}$ 的原函数的存在性.

5.5　求解简单的微分方程

5.5 $\mathcal{A}$

1. 求解下列方程:

(1) $x(1+x^2)y'=(1-x^2)y$.

解. 分离变量有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{(1-x^2)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$, 得 $y=\dfrac{Cx}{1+x^2}$. ■

(2) $y(x^2-1)y'=x(1-y^2)$.

解. 即 $\dfrac{y}{1-y^2}\,\mathrm{d}y=\dfrac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$, 得 $y^2=1-C(x^2-1)$. ■

(3) $y'-\dfrac{y}{x+2}=\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

解. 对应得齐次方程为 $y'=\dfrac{y}{x+2}$, 即得 $y=c(x+2)$, 使用常数变易法, 令 $c=c(x)$, 代入原方程, 得

$$c'(x)\cdot(x+2)=\frac{1}{(x+2)^2},$$

得到 $c=-\dfrac{1}{2(x+2)^2}+C$, 代入 y 得到 $y=C(x+2)-\dfrac{1}{2(x+2)}$. ■

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x+y^3}$.

解. 原方程即为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{x+y^3}{y}$, 对应齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{x}{y}$, 得到 $x=cy$, 使用常数变易法, 令 $c=c(y)$ 代入前述方程得到 $c(y)=\dfrac{1}{2}y^2+C$, 从而 $x=\dfrac{1}{2}y^3+Cy$. ■

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}-y^2\ln x=0$.

解. 这正是 Bernoulli 方程, 令 $z=-y^{-1}$, 原方程变为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}-\ln x=0,$$

对于 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\dfrac{z}{x}=0$, 有 $z=cx$, 使用常数变易法, 令 $c=c(x)$ 代入前述方程得到 $c'(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 即 $c=\dfrac{\ln^2 x}{2}+C$, 代回得到原方程得解为

$$\frac{1}{y}=Cx-\frac{1}{2}x\ln^2 x.$$ ■

2. 试给出方程 $y'=y^{2/3}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的所有解.

解. 当 $y\neq 0$ 时, 分离变量得到 $y^{-2/3}y'=1$, 两边积分得到 $3y^{1/3}=x+C$, 因此 $y=\left(\dfrac{x+C}{3}\right)^3$. 易见此为该方程在 $\mathbb{R}$ 上的通解. 特解有 $y\equiv 0$ 不在这之中. ■

5.5 $\mathcal{B}$

1. 若 P,Q 是满足

$$P(tx,ty)=t^{\alpha}P(x,y),\qquad Q(tx,ty)=t^{\alpha}Q(x,y).\qquad \forall t>0,\alpha\in\mathbb{R}.$$

的可微函数, 证明 $\dfrac{1}{xP(x,y)+yQ(x,y)}$ 是方程 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ 的一个积分因子.

证明. 设 $y=ux$, 则 $\mathrm{d}y=x\,\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}x$, 于是

$$P(x,y)=P(x,ux)=x^{\alpha}P(1,u),$$
$$Q(x,y)=Q(x,ux)=x^{\alpha}Q(1,u),$$

方程 $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$ 两边乘 $\mu:=\dfrac{1}{xP+yQ}$ 得到

$$\frac{P}{xP+yQ}\mathrm{d}x+\frac{Q}{xP+yQ}\mathrm{d}y=0,$$

即 $\dfrac{P(x,ux)+uQ(x,ux)}{xP(x,ux)+yQ(x,ux)}\mathrm{d}x+\dfrac{xQ(x,ux)}{xP(x,ux)+yQ(x,ux)}\mathrm{d}u=0$, 即

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\frac{Q(1,u)}{P(1,u)+uQ(1,u)}\mathrm{d}u=0,$$

这是一个恰当方程, 这就证明了 μ 是题设方程的一个积分因子. □

2. 求解方程 $(x^3y-y^5)\,\mathrm{d}x+(-x^4+x^2y^3)\,\mathrm{d}y=0$.

解. 令 $y=tx$, 则 $\mathrm{d}y=t\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}t$, 原方程化为

$$\left(t^4-t^5\right)\,\mathrm{d}x+\left(t^3x-1\right)\,\mathrm{d}t=0, \tag{$\clubsuit$}$$

记上述方程的积分因子为 $\mu(t)$, 则有

$$\frac{\partial\left(\mu(t)\left(t^4-t^5\right)\right)}{\partial t}=\mu'(t)(t^4-t^5)+\mu(t)(4t^3-5t^4)=\frac{\partial\left(\mu(t)\left(t^3x-1\right)\right)}{\partial x}=\mu(t)t^3,$$

即

$$\mu'(t)(t-t^2)+\mu(t)(3-5t)=0,$$

容易解得 $\mu(t)=\dfrac{1}{t^3(1-t)^2}$. 方程($\clubsuit$)两侧乘以 μ, 得到恰当方程:

$$\frac{t}{1-t}\,\mathrm{d}x+\frac{t^3x-1}{t^3(1-t)^2}\,\mathrm{d}t=:P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}t=0.$$

则存在 $u(x,t)$ 使得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{t}{1-t},\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{t^3x-1}{t^3(1-t)^2},$$

对左侧公式积分得到 $u=\dfrac{tx}{1-t}+\varphi(t)$, 带入右式得到

$$\varphi'(t)=-\frac{1}{t^3(1-t)^2},$$

设

$$\frac{1}{t^3(1-t)^2}=\frac{t}{t^4(1-t)^2}=\left(\frac{At^2+Bt+C}{t^2(1-t)}\right)'+\frac{Dt^2+Et+F}{t^2(1-t)},$$

求得[a] $A=0,B=\dfrac{3}{2},C=-\dfrac{1}{2},D=E=0,F=3$, 即

$$\int\frac{1}{t^3(1-t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{3t-1}{2t^2(1-t)}+3\int\frac{1}{t^2(1-t)}\,\mathrm{d}t,$$

容易得到

$$\int\frac{1}{t^2(1-t)}\,\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{1-t}\right)\,\mathrm{d}t=\ln|t|-\frac{1}{t}-\ln|1-t|+C,$$

即 $\varphi(t)=\dfrac{1-3t}{2t^2(1-t)}+\dfrac{3}{t}-3\ln\left|\dfrac{t}{1-t}\right|+C$, 带回 $y=tx$ 与 $u(x,t)$, 得到原方程的解为

$$\frac{xy}{x-y}+\frac{(x-3y)x^2}{2y^2(x-y)}+\frac{3x}{y}-3\ln\left|\frac{x}{x-y}\right|=C.$$ ■

[a] 这里方程个数将少于未知数个数.

第 6 章 微分中值定理和 Taylor 展开式

6.1 微分中值定理

6.1 $\mathcal{A}$

1. 设一元实函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $f(a)=f(b)=0$. 证明:

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\xi^2 f(\xi)+f'(\xi)=0$.

证明. 令 $F(x)=f(x)\cdot\exp\left(\frac{1}{3}x^3\right)$, 则 $F(0)=F(1)$, 由 Rolle 定理知 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=\exp\left(\frac{1}{3}\xi^3\right)\left(\xi^2 f(\xi)+f'(\xi)\right)=0$, 结论得证. □

(2) 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f^2(\xi)\sin\xi+f'(\xi)=0$.

证明. 令 $F(x)=f(x)\cdot\exp\left(\int_a^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t\right)$. 仿 (1) 即可. □

2. 设实函数 f 在 $[a,b]$ 上可导, $f(a)=f(b)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f^3(\xi)+f'(\xi)=0.$$

证明. 令 $F(x)=f(x)\cdot\exp\left(\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)$, 则 $F(a)=F(b)=0$, 由 Rolle 定理知 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=\exp\left(\int_a^\xi f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(f^3(\xi)+f'(\xi)\right)=0,$$

从而得证. □

3. 设实函数 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导. 已知 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)=-2$.

证明. 令 $F(x)=f(x)+x^2$, 则 $F(0)=0, F(1)=1, F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, 则由 Lagrange 中值定理知 $\exists\xi_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\xi_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得

$$F'(\xi_1)=\frac{F(1/2)-F(0)}{1/2-0}=1,\quad F'(\xi_2)=\frac{F(1)-F(1/2)}{1-1/2}=1,$$

由 Rolle 定理知 $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $F''(\xi)=f''(\xi)+2=0$. 得证. □

4. 设实函数 f 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且

$$f(0)=1,\quad f(1)=3\mathrm{e},\quad f'(1)=5\mathrm{e}.$$

证明或证伪: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)-2f'(\xi)+f(\xi)=0.$$

证明. 令 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$. 则 $F(0)=1, F(1)=3$, 由 Lagrange 中值定理知 $\exists\xi_1$ 使得

$$F'(\xi_1)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=2,$$

而易见 $F'(1)=2$, 从由 Rolle 定理 $\exists\xi\in(\xi_1,1)$ 使得 $F''(\xi)=\mathrm{e}^{-\xi}\left(f''(\xi)-2f'(\xi)+f(\xi)\right)=0$. □

5. 设一元实函数 f 在 $[1,2]$ 上有二阶导数, 且 $f(2)=0$. 令 $F(x)=(x-1)^2f(x)$, 证明: 存在 $\xi\in(1,2)$ 使得 $F''(\xi)=0$.

证明. 易见 $F(1)=F(2)=0$, 由 Rolle 定理知 $\exists\xi_1\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi_1)=0$, 易见 $F'(1)=0$, 再次使用 Rolle 定理知 $\xi\in(\xi_1,1)$ 使得 $F''(\xi)=0$. □

6. 设 $\delta>0$. 在 $(-\delta,\delta)$ 内, 一元实函数 f 可微, 且满足

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)},\qquad \forall x,y,x+y\in(-\delta,\delta).$$

试求 f.

解. 易见 $f(0)=0$, 方程两侧对 y 求导得到

$$f'(x+y)=\frac{f'(y)\left(1-f(x)f(y)\right)+f(x)f'(y)\left(f(x)+f(y)\right)}{\left(1-f(x)f(y)\right)^2},$$

记 $a=f'(0)$, 同时令 $y=0$ 得到

$$f'(x)=a+af^2(x),$$

容易解得 $f(x)=\tan ax$. ■

7. 设 $a_1=2, a_2=3, a_{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{1}{\ln a_n}(n\geqslant 1)$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n\ln a_n}{n}$ 存在并求其值.

解. 易见 $\{a_n\}$ 单增且无界. 设可微函数 $f(x)$ 满足 $f(n)=a_n$, 且 $f(x)$ 单调递增. 同时设 $F(x)=f(x)\ln f(x)$. 对于原极限, 由 Stolz 定理与 Lagrange 中值定理可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n\ln a_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}a_{n+1}\ln a_{n+1}-a_n\ln a_n=\lim_{n\to+\infty}F(n+1)-F(n)=\lim_{n\to+\infty}F'(\xi_n),$$

其中 $\xi_n\in(n,n+1)$, 而 $F'(x)=f'(x)\left(\ln f(x)+1\right)$, 结合 $f(x)$ 单调性, 有

$$f'(\xi_n)\left(\ln a_n+1\right)\leqslant f'(\xi_n)\left(\ln\xi_n+1\right)\leqslant f'(\xi_n)\left(\ln a_{n+1}+1\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n\ln a_n}{n}=1.$ ■

8. 设 ψ 是 $(0,+\infty)$ 上局部有界的实值函数, 满足

$$\psi(xy)=\psi(x)+\psi(y),\qquad \forall x,y\in(0,+\infty).$$

试证明:

(1) ψ 在 $(0,+\infty)$ 上某一点连续, 进而在 $(0,+\infty)$ 每一点连续.

(2) 对任何 $x>0$ 以及有理数 q, $\psi(x^q)=q\psi(x)$.

(3) 对任何 $x>0$ 以及实数 y, $\psi(x^y)=y\psi(x)$.

特别的, 对任何 $x>0$ 成立 $\psi(x)=\psi(\mathrm{e})\ln x$.

9. 若对任何 $x,y\in\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$ 上不恒为零的一元实函数 f 满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$. 进一步, f 在 $\mathbb{R}$ 上局部有界, 证明: 存在常数 a 使得

$$f(x)=a^x,\qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

10. 举例说明中值定理对于复值函数不成立.

11. 设 $f,g\in C[a,b],g$ 严格单调. 证明: 存在 $[a_1,b_1]\subset[a,b]$ 使得 $b_1-a_1=\dfrac{b-a}{2}$, 且

$$\frac{f(b_1)-f(a_1)}{g(b_1)-g(a_1)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

证明. 记 $m=\dfrac{a+b}{2},c=\dfrac{b-a}{2}$, 设

$$F(x)=\frac{f(x+c)-f(x)}{g(x+c)-g(x)}-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},\quad x\in[a,m],$$

注意到

$$\frac{f(m)-f(a)}{g(m)-g(a)}\cdot\frac{g(m)-g(a)}{g(b)-g(a)}+\frac{f(b)-f(m)}{g(b)-g(m)}\cdot\frac{g(b)-g(m)}{g(b)-g(a)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

并且 $\dfrac{g(m)-g(a)}{g(b)-g(a)}+\dfrac{g(b)-g(m)}{g(b)-g(a)}=1$, 结合题设可知 $F(a)$ 与 $F(c)$ 异号, 从而有结论得证. □

6.1 $\mathcal{B}$

1. 若对任何 $x,y\in\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$ 上的一元复值函数 f 满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$. 进一步, f 在 $\mathbb{R}$ 上局部有界. 试问, f 的解具有什么形式?

2. 在上一题中, 假设 f 的取值为 n 阶方阵, 结论又如何?

3. 设 f 在 (a,b) 内连续且右导数为 $f'_+(x)=x\arctan x$. 证明: f 在 (a,b) 内可导.

4. 设实函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上有二阶的连续导数, 满足 $f(0)=f'(0)=0$ 以及 $f''(x)+3f'(x)+2f(x)\geqslant 0$. 证明: $f(x)\geqslant 0\,(\forall x\in[0,+\infty))$.

5. 设实函数 f 在区间 $[-1,1]$ 上连续, 在 $(-1,1)$ 内三阶可导. 证明: $\xi\in(-1,1)$ 使得 $f'''(\xi)=3\,(f(1)-f(-1)-2f'(0))$.

证明. 令

$$F(x)=f(x)-\left(\frac{f(1)-f(-1)-2f'(0)}{2}\right)x^3+\left(f(0)-\frac{f(-1)+f(1)}{2}\right)x^2-f'(0)x$$

于是有

$$F(-1)=F(0)=F(1)=f(0),$$

由 Rolle 定理可知 $\exists\xi_1\in(-1,0),\exists\xi_2\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$, 又有 $F'(0)=0$, 再次使用 Rolle 定理, 即 $\exists\xi_3\in(\xi_1,0)$ 与 $\xi_4\in(0,\xi_2)$ 使得 $F''(\xi_3)=F''(\xi_4)=0$, 依 Rolle 定理 $\exists\xi\in(\xi_3,\xi_4)$ 使得 $F'''(\xi)=0$. 结论得证. □

6. 设实函数 f 为 $\mathbb{R}$ 上的有界可微函数, 且对任何 x 均有 $|f'(x)|<1$. 证明: 存在 $M<1$ 使得对任何 $x\in\mathbb{R}$ 成立 $|f(x)-f(0)|\leqslant M|x|$.

进一步, 是否存在常数 $K<1$, 使得对任何 $x,y\in\mathbb{R}$, 均有 $|f(x)-f(y)|<K|x-y|$?

证明. 由 Lagrange 中值定理, 有

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=|f'(\xi)|<M<1,\quad \xi\text{介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间},$$

由此知 $|f(x)-f(0)|<M|x|$. 同理可知后者部分结论也成立. □

7. 设实函数 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续可导函数, 且 $\forall x\in\mathbb{R},f'(x)>f\left(f(x)\right)$. 证明: $\forall x\geqslant 0,f\left(f\left(f(x)\right)\right)\leqslant 0$.

证明. 我们先证明 **(A)** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq+\infty$. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, 则 $\exists X_1,\forall x>X_1$ 有 $f(x)>2$, 也有 X_2 使得 $\forall x>X_2$ 有 $f(x)>X_1$, 这样就有

$$f'(x)>f\left(f(x)\right)>f(X_1)>2,\quad \forall x>X_2,$$

因此有 X_3 使 $x>X_3-1$ 时有 $f(x)>x$ 成立, 也即 $f'(x)>f\left(f(x)\right)>f(x)$, 有 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}>1$, 即有

$$\int_{X_3}^{x}\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\ln f(x)-\ln f(X_3)>t-X_3\Rightarrow f(x)>f(X_3)\mathrm{e}^{x-X_3}>X_3\mathrm{e}^{x-X_3},$$

于是有

$$f'(x)>f\left(f(x)\right)>X_3\mathrm{e}^{f(x)-X_3}\Rightarrow f'(x)\mathrm{e}^{-f(x)}>X_3\mathrm{e}^{-X_3},$$

由此得出

$$\int_{X_3}^{x}f'(x)\mathrm{e}^{-f(x)}\,\mathrm{d}x>\int_{X_3}^{x}X_3\mathrm{e}^{-X_3}\Rightarrow \mathrm{e}^{-f(X_3)}-\mathrm{e}^{-f(x)}>(x-X_3)X_3\mathrm{e}^{-X_3},$$

矛盾 (左侧有界而右侧可以无界), 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq+\infty$.

由此可得存在一些 $x>0$ 使得 $f(x)<x$, 下面我们证明, 不可能有 $x_0>0$ 使得 $f(x_0)=x_0$, 从而 **(B)**$\forall x>0$ 都有 $f(x)<x$. 如若这样的 x_0 存在, 我们先证明 $\forall x\geqslant x_0$, 有 $f(x)\geqslant x_0$, 事实上这也是不可能的, 因为此时有

$$f'(x)>f\left(f(x)\right)\geqslant f(x_0)=x_0>0,\quad \forall x\geqslant x_0,$$

这与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq+\infty$ 矛盾. 下面我们证明前述结论, 事实上如果存在 $x\geqslant x_0$ 而 $f(x)<x_0$, 我们考虑 $T=\inf\{x\geqslant x_0\big|f(x)<x_0\}$, 则由 f 的连续性可知 $f(T)=x_0$, 于是

$$f'(T)>f\left(f(T)\right)=f(x_0)=x_0>0,$$

这意味着如果 $T > x_0$ 则存在 δ_0 使得 $x \in (T-\delta_0, T)$ 时有 $f(x) < f(T) = x_0$, 这与 T 的定义矛盾. 如果 $T = x_0$, 则有 $\delta_2 > 0$ 使得 $x \in (T, T+\delta_0)$ 时有 $f(x) > f(T) = x_0$, 亦矛盾.

下面我们证明:**(C)** 若 $f(x_1) > 0$ 且 $f(x_2) \geqslant x_1$, 那么 $\forall x > x_2$ 都有 $f(x) > x_1$. 特别的, 如果 $x_1 \leqslant 0$ 且 $f(x_1) > 0$, 那么 $\forall x > x_1$ 有 $f(x) > x_1$.

若存在 $x > x_2$ 但 $f(x) \leqslant x_1$, 我们考虑 $S = \inf\{x > x_2 \big| f(x) \leqslant x_1\}$, 由 f 的连续性可知 $f(S) = x_1$, 类似于前面的证明, 我们有

$$f'(S) > f\left(f(S)\right) = f(x_1) > 0,$$

如果 $S > x_2$, 则有 $\delta_1 > 0$ 使得 $x \in (S-\delta_1, S)$ 时有 $f(x) < f(S) = x_1$ 与 S 的定义矛盾, 如果 $S = x_2$, 则有 $\delta_2 > 0$ 使得 $x \in (S, S+\delta_2)$ 有 $f(x) > s_1$, 仍矛盾. 而后者只需考虑 $x_1 = x_2$.

现在我们回到问题本身, 假设有 $x_0 > 0$ 使得 $f\left(f\left(f(x_0)\right)\right) > 0$. 记

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2) > 0.$$

下面我们证明 $0 < x_3 < x_2 < x_1 < x_0$. 由 **(B)** 可见 $x_0 > x_1$, 如果 $x_1 < 0$, 则 $f(x_1) \leqslant 0$, 否则 $f(x_1) > 0$, 则由 **(C)** 可得 $\forall x > x_1$ 有 $f(x) > x_1$ 有 $f(x_0) > x_1$, 矛盾. 若 $x_1 = 0$ 则由 **(B)** 与 f 的连续性可得 $f(x_1) \leqslant 0$. 即从 $x_1 \leqslant 0$ 出发一定能推得 $x_2 \leqslant 0$. 若 $x_2 = 0$, 同理可得 $f(x_2) \leqslant 0$, 但 $f(x_2) = x_3 > 0$, 矛盾. 若 $x_2 < 0$, 结合 $f(x_2) > 0$ 与 $x_0 > 0 > x_2$ 则由 **(C)** 知 $f(x_0) > x_2$, 即 $x_1 > x_2$, 进一步, 由于 $f(x_2) > 0 > x_2$, 由 **(C)** 知 $\forall x > x_2$ 有 $f(x) > x_2$, 得到 $f(x_1) > x_2$ 矛盾. 从而有 $0 < x_3 < x_2 < x_1 < x_0$.

由 $f(x_1) > 0, f(x_0) \geqslant x_1$, 我们得到 $\forall x > x_0$ 有 $f(x) > x_1$, 同理得到 $\forall x > x_1$ 有 $f(x) > x_2$. 由此对于 $x > x_0$ 有

$$f'(x) > f\left(f(x)\right) > t_2 > 0,$$

这意味着 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq +\infty$. 这与 **(A)** 矛盾. 于是不可能有 $x_0 > 0$ 使得 $f\left(f\left(f(x_0)\right)\right) > 0$, 即 $\forall x \geqslant 0, f\left(f\left(f(x)\right)\right) \leqslant 0$. □

6.2 L'Hôpital 法则

6.2 $\mathcal{A}$

1. 设 $x_0 \in (0,\pi), x_{n+1} = \sin x_n (n \geqslant 0)$. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\sin x_n$.

解. 易见 $\{x_n\}$ 大于零单调递减有下界, 取极限得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sin^2 x_n} &\xlongequal{\text{Stolz}} \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2 x_n - \sin^2 x_{n+1}}{\sin^2 x_n \sin^2 x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2 - \sin^2 x_{n+1}}{x_{n+1}^2 \sin^2 x_{n+1}}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to0}\frac{1/6\cdot x^3\cdot 2x}{x^4} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\sin x_n = \sqrt{3}$. ■

2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

解. 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}=\exp\left(\dfrac{1}{6}\right)$. ■

3. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{1/x}-\sqrt{x^6+x}\right)$.

解. 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则原极限变为

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^t\left(1-t+\dfrac{1}{2}t^2\right)-\sqrt{1+t^5}}{t^3}\xlongequal{\text{L'Hôpital}}\lim_{t\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{2}t^2\mathrm{e}^t-\dfrac{5t^4}{2\sqrt{1+t^5}}}{3t^2}=\frac{1}{6}.$$ ■

4. 计算:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan(\sin x)-\arctan(\ln(1+x))}{x^2}$.

解. 注意到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\ln(1+x)}{x^2}\xlongequal{\text{L'Hôpital}}\dfrac{1}{2}$, 于是有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(\sin x)-\arctan(\ln(1+x))}{x^2}\\=&\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(\sin x)-\arctan(\ln(1+x))}{\sin x-\ln(1+x)}\cdot\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x^2}\\=&\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(\arctan x)'=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$ ■

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan x)^{3/2}-(1+x)^{3/2}}{x^3}$.

解. 注意到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}\xlongequal{\text{L'Hôpital}}\dfrac{1}{3}$, 于是有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan x)^{3/2}-(1+x)^{3/2}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan x)^{3/2}-(1+x)^{3/2}}{\tan x-x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}\\=&\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{3/2}\right)'=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$ ■

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

解. 记 $F(x)=\ln(1+x),\varphi(x)=x,\psi(x)=x+\sqrt{1+x^2}-1$, 注意到

$$\lim_{x\to 0}F'(x)=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\psi(x)}{x}=1,$$

以及

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\psi(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2}\xlongequal{\text{L'Hôpital}}-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)\psi(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\psi(x)}{x}=1.$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdot\ln(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$ ■

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+\frac{x}{x+1}\right)^{(1+x)/x}-(1+\tan x)^{1/\tan x}}{x^2}$.

解. 设 $F(x)=(1+x)^{1/x}$, 注意到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x+1}-\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\tan x}{x^2}\xlongequal{\text{L'Hôpital}}-1,$$

以及

$$\lim_{x\to 0}F'(x)=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\xlongequal{\text{L'Hôpital}}-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{x+1}\right)^{(1+x)/x}-(1+\tan x)^{1/\tan x}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{x+1}\right)^{(1+x)/x}-(1+\tan x)^{1/\tan x}}{\frac{x}{x+1}-\tan x}\cdot\frac{\frac{x}{x+1}-\tan x}{x^2}=\frac{\mathrm{e}}{2}.$$ ■

5. 设 f 在 $[a,b]$ 上两阶可导, 且满足 $|f''(x)|\leqslant M|f(x)|, f(a)=f'(a)=0$, 其中 M 是一个常数, 证明 $f(x)\equiv 0$.

证明. 97 页

反证法. 若 $\exists x_0\in(a,b]$ 使得 $f(x_0)\neq 0$, 不妨设 $f(x_0)>0$, 记

$$c=\sup\{x\in[a,x_0]\big|f(x)\leqslant 0\},$$

则 c 适定, 且 $c\in[a,x_0)\,, f(c)=0$,

$$f(x)>0,\qquad \forall x\in(c,x_0).$$

在 (c,x_0) 内, 有

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\leqslant M,$$

即

$$(\ln f(x))'\leqslant M,\forall x\in(c,x_0),$$

所以由中值定理可得

$$\frac{\ln f(x_0)-\ln f(x)}{x_0-c}\leqslant M,\quad \forall x\in(c,x_0).$$

在上式中令 $x\to c^+$, 并注意到 $f(c)=0$ 得到 $+\infty\leqslant M$. 矛盾, 所以 $f(x)\equiv 0$. □

6. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 可导, 且 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

证明. □

7. 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微, 且 $f(x+1)-f(x)=f'(x)(\forall x\in\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=c$. 证明 $f'(x)\equiv c$.

证明. 反证法. 设有 ξ_0 使得 $f'(\xi_0)\neq c$, 则

$$f(\xi_0+1)-f(\xi_0)=f'(\xi_0),$$

由 Lagrange 中值定理可知 $\exists\xi_1\in(\xi_0,\xi_0+1)$ 使得

$$f'(\xi_0)=f(\xi_0+1)-f(\xi_0)=f'(\xi_1),$$

则 $f(\xi_1+1)-f(\xi_1)=f'(\xi_1)$ 又由 Lagrange 中值定理知 $\exists\xi_2\in(\xi_1,\xi_1+1)$ 使得

$$f'(\xi_0)=f(\xi_1+1)-f(\xi_1)=f'(\xi_2),$$

重复这个操作得到 $\{\xi_n\}$ 使得 $f'(\xi_n)=f'(\xi_0)(n=0,1,2\cdots)$, 设集合 E 为全体导数值等于 $f'(\xi_0)$ 的坐标全体, 即

$$E=\{\xi\big|f'(\xi)=f'(\xi_0)\},$$

由上面的信息可见 E 为无限集。

若 E 无界, 则与题设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=c$. 矛盾. 下证 E 必无界.

事实上, 若 E 有界, 则必有上确界, 记 $\sup\limits_{\xi\in E}\xi=M$, 从 E 中选取一子列 $\{\xi_n'\}$ 使其收敛于 M, 结合 $f(x)$ 的连续性有

$$f'(\xi_0)=\lim_{n\to\infty}[f(\xi_n'+1)-f(\xi_n')]=f(M+1)-f(M),$$

由 Lagrange 中值定理可知 $\exists\xi'\in(M,M+1)$ 使得 $f'(\xi')=f'(\xi_0)$, 即 $\xi'\in E$ 并且 $\xi'>M$, 矛盾. 进而 E 无界. □

6.2 $\mathcal{B}$

1. 设 $x\in(0,1),p>0$, 试考察级数

$$(\sin x)^p-(\sin(\sin x))^p+(\sin(\sin(\sin x)))^p-(\sin(\sin(\sin(\sin x))))^p+\cdots$$

的收敛性 (含绝对收敛性).

解. 记 $a_0=x$, $a_{n+1}=\sin a_n(n\geqslant1)$, 于是原级数即为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, 参考 6.2$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 可知 $\{a_n^p\}$ 单调递减趋于零, 由 Leibniz 判别法可知原级数收敛.

并且由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\sin a_n=\sqrt{3}$ 可知 $a_n\sim\sqrt{\dfrac{3}{n}}$, 即 $a_n^p\sim\left(\dfrac{3}{n}\right)^{p/2}$, 从而 $p>2$ 时原级数绝对收敛. ■

2. 设 $n \geqslant 1, P$ 为 n 阶实系数多项式, 则对于 $\mathbb{R}$ 上任何 n 次可导的实函数 f, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(\mathrm{D})f(x)=0$ 均蕴涵 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 的充要条件是 P 的所有零点都有负实部.

证明. 必要性.

充分性. □

3. 设 f 在 $[1,+\infty)$ 上连续, 在 $(1,+\infty)$ 上可导, 且 $\mathrm{e}^{x^2}f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界, 则在什么条件下可得 $x\mathrm{e}^{x^2}f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界?

解. ■

4. 设实函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上有界, 可导且 $|f'(x)|<1(\forall x\in\mathbb{R})$, 又设 $x_0\in\mathbb{R}, x_{n+1}=f(x_n)(n\geqslant 0)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛.

证明. 设 $\max\{|f(x)|,|x_0|\}\leqslant M$. 考虑 $F(x)=x-f(x)$, 由于 $F(-M)=-M-f(-M)\leqslant 0$, 而 $F(M)=M-f(M)\geqslant 0$, 从而有 $x^*\in[-M,M]$ 使得 $F(x^*)=0$. 下面说明, 这样的 x^* 是唯一的, 事实上由于 $|f'(x)|<1$, 由 Lagrange 中值定理, 对任意 $x<y$, 存在 $\xi\in(x,y)$ 使得

$$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)||x-y|<|x-y|,$$

若还有 $x'\neq x^*$ 使得 $F(x')=0$, 则有 $|f(x^*)-f(x')|=|x^*-x'|$ 矛盾.

再证 $\{x_n\}$ 收敛到 x^*, 由于

$$|x_{n+1}-x^*|=|f(x_n)-f(x^*)|<|x_n-x^*|,$$

从而 $\{|x_n-x^*|\}$ 单调递减, 设其极限为 A, 则 $\{x_n\}$ 必存在子列收敛到 $x^*\pm A$. 不妨设 $\{x_n\}$ 本身收敛到 x^*+A, 则 $x_{n+1}=f(x_n)$ 收敛到 $f(x^*+A)$, 也即 $x^*+A=f(x^*+A)$, 则 $F(x^*+A)=0$, 由上述知 A 只能为 0. 从而 $\{x_n\}$ 收敛. □

5. 设实函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导且 $|f'(x)|<1(\forall x\in\mathbb{R})$, 又设 $x_0\in\mathbb{R}, x_{n+1}=f(x_n)(n\geqslant 0)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛或举例说明 $\{x_n\}$ 可能发散.

解. $\{x_n\}$ 可能发散. 设

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1,\\ 2, & -1<x<1,\\ -x-\dfrac{1}{x}, & x\leqslant -1\end{cases}$$

取 $x_0=1$ 易见 $\{x_n\}$ 发散. ■

6. 设 $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是可微的有界函数, $\|\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\|<1(\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n)$, 又设 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)(k\geqslant 0)$, 证明 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛.

证明. 设 $\max\{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\|,\|\boldsymbol{x}\|\}\leqslant M$. 考虑 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 在 $[-M,M]^n$ 上的结果. 对于 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, 我们称 $\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{0}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的所有分量小于等于 0; $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的所有分量大于等于 0. 记 $\boldsymbol{M}$ 为所有分量均为 M 的向量, 则 $\boldsymbol{G}(-\boldsymbol{M})\leqslant 0$ 而 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{M})\geqslant 0$, 由于 $[-M,M]^n$ 道路连通并且 $\boldsymbol{G}$ 连续, 从而有 $\boldsymbol{x}^*\in[-M,M]^n$ 使得 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{0}$.

下面说明这样的 $\boldsymbol{x}^*$ 是唯一的, 事实上由于 $\|\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\|<1$, 由中值定理, 对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$, 存在 $\boldsymbol{\xi}$ 使得

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})\|=\|\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,$$

若还有 $\boldsymbol{x}'\neq\boldsymbol{x}^*$ 使得 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{0}$, 则有 $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}')\|=\|\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{x}*\|$ 矛盾. 其余部分参考第 4 题. □

6.3　凸函数

Definition 6.3.1

设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 为凸集, 称 $f:E\to\mathbb{R}$ 为 E 上的凸函数, 如果对于任何 $\alpha\in(0,1)$ 以及 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E$, 成立

$$f(\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y})\leqslant\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y}).$$

若当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ 时上式中的严格不等式成立, 则称 f 为严格凸函数. 称 f 为 (严格) 凹函数如果 $-f$ 是 (严格) 凸函数.

Definition 6.3.2

设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 为凸集, 称 $f:E\to\mathbb{R}$ 为 E 上的凸函数, 如果对于任何 $m\geqslant 2,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m\in E$ 以及满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=1$ 的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\geqslant 0$ 成立

$$f\left(\sum_{k=1}^m\alpha_k\boldsymbol{x}_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^m\alpha_k f\left(\boldsymbol{x}_k\right).$$

Theorem 6.3.1

设 f 为区间 (a,b) 内的实连续函数. 则有

(i) f(严格) 凸当且仅当 f'_+ 在 (a,b) 内存在且 (严格) 单增.

(ii) f 凸当且仅当 f'_+ 在 (a,b) 内存在, 且对任何 $x_0\in(a,b)$, 成立

$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'_+(x_0)(x-x_0),\quad\forall x\in(a,b).$$

而 f 严格凸当且仅当 f'_+ 在 (a,b) 内存在, 且对任何 $x_0\in(a,b)$ 以及 $x\neq x_0$, 上式中严格不等式成立.

(iii) f(严格) 凸当且仅当 f'_- 在 (a,b) 内存在, 且 f'_-(严格) 单增.

(iv) f 凸当且仅当 f'_- 在 (a,b) 内存在, 且对任何 $x_0 \in (a,b)$, 成立

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'_-(x_0)(x-x_0), \quad \forall x \in (a,b).$$

而 f 严格凸当且仅当 f'_- 在 (a,b) 内存在, 且对任何 $x_0 \in (a,b)$ 以及 $x \neq x_0$, 上式中严格不等式成立.

(v) 若 f 可导, 则 f(严格) 凸当且仅当 f'(严格) 单增.

(vi) 若 f 可导, 则 f 凸当且仅当曲线在切线之上, 即对任何 $x_0 \in (a,b)$, 成立

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'_-(x_0)(x-x_0), \quad \forall x \in (a,b).$$

而 f 严格凸当且仅当对任何 $x_0 \in (a,b)$ 以及 $x \neq x_0$, 上式中严格不等式成立.

Theorem 6.3.2

设 f 为区间 (a,b) 内二阶可导函数, 则 f 为凸函数当且仅当 f'' 非负, 进一步, 若 f'' 恒正, 则 f 严格凸.

6.3 $\mathcal{A}$

1. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 为凸集. 证明 $f: E \to \mathbb{R}$ 为凸函数当且仅当集合 $\{(\boldsymbol{x}, y) | y \geqslant f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in E)\}$ 为凸集.

证明. □

2. 证明: 凸函数的定义 **6.3.1** 与定义 **6.3.2** 等价.

证明. content... □

3. 设区间 I 上的实函数 f 在某一点 $x_0 \in I$ 的附近有界, 且 f 为 I 上的中点凸函数. 尝试按以下步骤证明 f 为 I 上的凸函数:

(1) 证明 f 在 I 上的任何有界闭子区间上有界.

(2) 证明 f 在 I 的内点连续.

(3) 证明 f 为 I 上的凸函数.

证明. □

4. 直接利用中值定理, 证明定理 **6.3.1** 的 (v)—(vi) 以及定理 **6.4.1**.

5. 设 $0 < a < b, f$ 在 $[0,b]$ 上连续可导, 在 $[0,a]$ 上为凸函数, 在 $[a,b]$ 上为凸函数, $f'(0) > f'(b)$. 证明: 存在正整数 n_0, 使得对任何 $n \geqslant n_0$, 以及满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b$ 的非负数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 成立 $f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n) \leqslant nf\left(\dfrac{b}{n}\right)$.

6. 设 a, b, c 为满足 $a+b+c=1$ 的非负实数, 求证:

(1) $\dfrac{a}{1+a^3}+\dfrac{b}{1+b^3}+\dfrac{c}{1+c^3}\leqslant\dfrac{27}{28}$.

证明. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}(x\in[0,1])$, 由 $f''(x)<0$ 克制 $f(x)$ 在给定定义域内是凹函数, 从而 $\dfrac{1}{3}(f(a)+f(b)+f(c))\leqslant f\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$, 即为题设不等式. □

(2) $\dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{b}{1+b^2}+\dfrac{c}{1+c^2}\leqslant\dfrac{9}{10}$.

证明. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, 同 (1) 可证. □

(3) $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{1}{1+c^2}\leqslant\dfrac{27}{10}$.

证明. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 同 (2) 可证. □

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\leqslant\dfrac{9}{\sqrt{10}}$.

证明. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, 同 (3) 可证. □

7. 设 $a<b<c<d, f$ 在 $[a,c]$ 和 $[b,d]$ 上为凸函数, 证明 f 在 $[a,d]$ 上为凸函数.

证明. 由于去除凸函数在端点处的值不会影响函数的凸性, 我们下证 f 在 (a,c) 和 (b,d) 上为凸函数, 则 f 在 (a,d) 上也为凸函数.

首先, f 在 (a,c) 与 (b,d) 上的凸性蕴含其连续性, 因此 f 在 (a,b) 内连续.

我们只需证明对任何 $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{b-c}{4}\right)$, f 在 $(a+\varepsilon,d-\varepsilon)$ 内为凸函数. 任取 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\varepsilon}{4}\right)$, 定义

$$f_\alpha=\frac{1}{\alpha^2}\int_x^{x+\alpha}\mathrm{d}t\int_t^{t+\alpha}f(s)\,\mathrm{d}s,\qquad x\in(a+\varepsilon,d-\varepsilon).$$

则 f_α 有连续的二阶导数, 且 $\lim\limits_{\alpha\to0^+}f_\alpha(x)=f(x)$.

进一步, f_α 在 $(a+\varepsilon,c-\varepsilon)$ 和 $(b+\varepsilon,d-\varepsilon)$ 内分别为凸函数. 因此, 注意到 $c-\varepsilon>b+\varepsilon$,

$$f''_\alpha(x)\geqslant0,\forall x\in(a+\varepsilon,d-\varepsilon).$$

所以 $f_\alpha(x)$ 是 $(a+\varepsilon,d-\varepsilon)$ 内的凸函数. 从而

$$f_\alpha(x)\,(sx+(1-s)y)\leqslant sf_\alpha(x)+(1-s)f_\alpha(y),\quad\forall s\in(0,1),\ x,y\in(a+\varepsilon,d-\varepsilon).$$

令 $\alpha\to0^+$ 即得

$$f(x)\,(sx+(1-s)y)\leqslant sf(x)+(1-s)f(y),\quad\forall s\in(0,1),\ x,y\in(a+\varepsilon,d-\varepsilon).$$

所以 f 是 $(a+\varepsilon,d-\varepsilon)$ 内的凸函数, 即是 (a,d) 上的凸函数, 进一步, f 是 $[a.d]$ 上的凸函数. □

8. 设 f 为区间 I 上的凸函数. 若 $x, y, s, t \in I$ 满足 $x < s$ 且 $y < t$, 进一步, $x \leqslant y$ 且 $s \leqslant t$, 证明: $\dfrac{f(s)-f(x)}{s-x} \leqslant \dfrac{f(t)-f(y)}{t-y}$(如图 **6.1**).

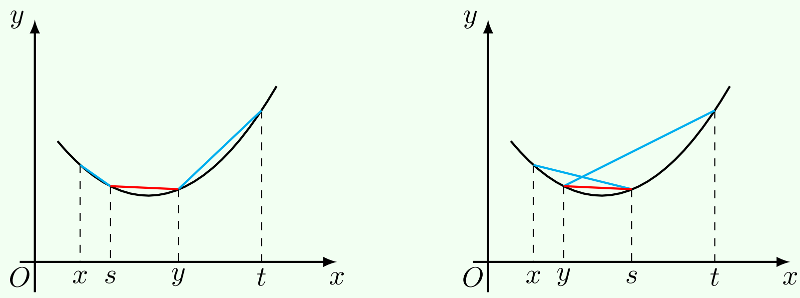


图 6.1

证明. □

6.3 $\mathcal{B}$

1. 设 $\alpha < 1$, 且正项级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} M_\alpha\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)$ 收敛.

证明. □

2. 设凸区域 Ω 内的凸函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的偏导数都存在, 证明 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 可微.

证明. □

3. 设 $E \in \mathbb{R}^n$ 为非空凸闭集, $\boldsymbol{x}_0 \notin E$. 证明存在唯一的 $\boldsymbol{x} \in E$ 使得 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| = \inf\limits_{\boldsymbol{y} \in E} |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}_0|$(如图). 进一步, 对任何 $\boldsymbol{y} \in E$, $[0,1]$ 上的函数 $F(\alpha) = |\boldsymbol{x}+\alpha(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}_0|^2$ 在点 0 取得最小值, 以此证明 $\boldsymbol{x}$ 是如下不等式的唯一解:

$$\langle \boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\rangle \leqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{y} \in E.$$

证明. □

4. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为非空凸闭集, $\boldsymbol{x}_0 \in \partial E$. 证明存在一列 E 外的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{x}_0$.

证明. □

5. 设 $E \subset \mathbb{R}$ 为非空凸闭集, $\boldsymbol{x}_0 \in \partial E$. 证明存在非零向量 $\boldsymbol{\mu}$ 使得

$$\langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\rangle \leqslant 0, \forall \boldsymbol{x}_0 \in E,$$

平面 $\langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\rangle$ 称为 E 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的支撑面.

6. 设 f 是区域 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 中的凸函数. 证明 f 的上镜集$E = \{(\boldsymbol{x}, y) \big| y \geqslant f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \Omega\}$ 为凸集. 进一步, 证明 $\overline{E}$ 也是凸集.

任取 $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, 设 $\langle \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle + \langle \gamma, y - f(\boldsymbol{x}_0) \rangle = 0$ 为 $\overline{E}$ 在点 $(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0))$ 处的支撑面. 证明 $\gamma < 0$ 且

$$f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}_0) - \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\mu} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

7. 试构造严格凸函数 $f \in C^2(\mathbb{R})$ 使得 $|f(x)| < |x| + 1\ (\forall x \in \mathbb{R})$.

8. 设 φ 为区间 I 上值域为 I 的严格单调函数, $n \geqslant 2$. 对于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 定义

$$F(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(a_k)\right).$$

试对一些具体的 φ 考察 F 的性质.

9. 设 $f_n(x) = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$, 证明:

(1) 当 n 为偶数时, $f_n(x)$ 在实轴上有正的最小值.

(2) 当 n 为奇数时, $f_n(x)$ 有且仅有一个实根.

证明. 由 e^x 的 Taylor 展开知

$$\mathrm{e}^x = f_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

(1) 当 n 为偶数时, $n+1$ 为奇数. 由 $\mathrm{e}^x > 0$ 知, $f_n(x) > -R_n(x)$. 当 $x \geqslant 0$ 时, $f_n(x) \geqslant 1 > 0$, 当 $x < 0$ 时, 有

$$f_n(x) > -R_n(x) = -\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}(-x)^{n+1} > 0,$$

因此, n 为偶数时, 对任何 x, $f_n(x) > 0$, 即 $f_n(x)$ 有下界, 则必有下确界, 即为最小值.

(2) 当 n 为奇数时, $n-1$ 为偶数, 由 (1) 知 $f_n'(x) = f_{n-1}(x) > 0$. $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增, 由于 $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$, $f_n(0) = 1 > 0$, 知 $f_n(x)$ 由唯一的实零点. □

10. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上实函数, E 为 f 的左连续但不连续点的全体. 证明 E 至多可列.

11. 设 f 为区间 (a,b) 上的实函数, 满足 $\forall x \in (a,b)$, $\lim\limits_{y \to x} f(y)$ 存在. 设 E 为 f 的不连续点全体. 证明 E 至多可列.

12. 设 $a_m > 0, a_0, a_1, \cdots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

定义 $G(x) = (g(x))^2 - g'(x)$. 证明: 若 g 有 m 个不相同的实零点, 则

(1) 当 m 为正奇数时, G 有且仅有 $m+1$ 个实零点.

(2) 当 m 为正偶数时, G 有且仅有 m 个实零点.

证明. 设 g 的 m 个实零点分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_m$, 并且 $x_i < x_{i+1} (i = 1, 2, \cdots, m-1)$. 于是

$$g = a_m(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m),$$

易得 $g'(x)=a_m\sum\limits_{k=1}^{m}\prod\limits_{i=1,i\neq k}^{m}(x-x_i)$. 于是

$$G(x)=a_m^2\prod_{k=1}^{m}(x-x_k)^2-a_m\sum_{k=1}^{m}\prod_{i=1,i\neq k}^{m}(x-x_i)=a_m^2x^{2m}+P(x),$$

其中 $P(x)$ 是一次数低于 $2m$ 的实系数多项式.

(1) 若 m 为正奇数, 易见

$$G(x_1)<0,G(x_2)>0,G(x_3)<0,\cdots,G(x_m)<0,$$

即 $(-1)^kG(x_k)>0$. $G(x)$ 连续, 由介值定理知存在 $\xi_k\in(x_k,x_{k+1})(k=1,2,\cdots m-1)$ 使得 $G(\xi_k)=0$. 注意到

$$G(x)\to+\infty,\quad x\to\infty,$$

故存在充分大的正数 A 满足 $A>x_m$ 且 $-A<x_1$ 使得 $|x|>A-1$ 时 $G(x)>0$. 于是 $G(A)>0,G(-A)>0$. 从而有 $\xi_0\in(-A,x_1),\xi_m\in(x_m,A)$ 使得 $G(\xi_0)=G(\xi_m)=0$. 这便得到了 $G(x)$ 的 $m+1$ 个实零点. 若除诸 $\xi_k(k=0,1,\cdots m)$ 之外, $G(x)$ 还有其他实零点.

(2) 若 m 为正偶数, 同理可得

$$G(x_1)>0,G(x_2)>0,\cdots,G(x_m)>0,$$

即 $(-1)^kG(x_k)<0$. 同理有 $\xi_k\in(x_k,x_{k+1})(k=1,2,\cdots,m-1)$ 使得 $G(\xi_k)=0$, 也存在 $A>x_m$ 使得 $G(A)>0$, 从而有 $\xi_m\in(x_m,A)$ 使得 $G(\xi_m)=0$, 这便得到了 $G(x)$ 的 m 个实零点. 若除诸 $\xi_k(k=1,2,\cdots,m)$ 之外, $G(x)$ 还有其他实零点. □

13. 对于区间 (a,b) 内的实函数 f, 定义

$$F(x)=\varliminf_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

这里 $F(x)$ 的取值可以是 $\pm\infty$. 依次证明:

(1) 若 $F(x)>0(\forall x\in(a,b))$, 则 f 在 (a,b) 内严格单调增加.

(2) 若 $F(x)\geqslant 0(\forall x\in(a,b))$, 则 f 在 (a,b) 内单调增加.

14. 计算 $\inf\limits_{x\in(0,\pi/2)}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$.

提示: 求使得以下不等式成立的 α:

$$\tan x+\alpha\sin x\geqslant(1+\alpha)x,\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

解. $\alpha=2$. ■

15. 设 f 在 (a,b) 内连续, 且对任何 $x\in(a,b)$,

$$F(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

存在. 证明: f 在 (a,b) 内凸当且仅当 $F \geqslant 0$.

16. 设 f 在 (a,b) 内连续. 定义

$$F(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

证明或证伪: f 在 (a,b) 内凸当且仅当 $F \geqslant 0$, 这里 F 取值也有可能为 $+\infty$.

17. 试在上述练习基础上, 进一步考察各种"广义"导数, "广义"两阶导数 (包括左导数右导数等) 与函数单调性, 凹凸性之间的关系.

6.4 微分 Darboux 定理与比较定理

Theorem 6.4.1

设 y 在 $[a,b]$ 上二阶可导, g 为 $[a,b]$ 上的非负函数, f 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 满足 $y(a)\leqslant 0, y(b)\leqslant 0$,

$$y''(x)=f(y(x))+g(x), \qquad \forall x\in[a,b],$$
$$yf(y)\geqslant 0, \qquad \forall y\in\mathbb{R}.$$

则 $y(x)\leqslant 0, (\forall x\in[a,b])$.

6.4 $\mathcal{A}$

1. 设 f 是 $(a,+\infty)$ 中的实函数, $f(a^+)$ 与 $f(+\infty)$ 存在且相等. 证明: 若 f 有三阶导数, 则存在 $\xi\in(a,+\infty)$ 使得 $f'''(\xi)=0$.

证明. □

2. 设实函数 f 是 $[a,+\infty)$ 上有界的可微函数, $|f'|$ 单调. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=0$.

证明. 由 Darboux 定理可知 $|f'|$ 的单调性蕴涵 f' 的保号性. 不妨设 f' 非负, 此时 f' 必然单调减少. 否则 f' 单调增加, 且有 $x_2>x_1\geqslant a$ 使得 $f'(x_2)>f'(x_1)\geqslant 0$. 由中值定理, 当 $x>x_2$ 时,

$$f(x)-f(x_2)=f'\left(x_2+\theta(x-x_2)\right)(x-x_2)\geqslant f'(x_2)(x-x_2),$$

其中 $\theta\in(0,1)$ 与 x 有关. 从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. 这与题设矛盾. 于是 f' 非负且单调减少. 由中值定理,

$$2\left(f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right)=f'\left(\frac{x}{2}+\alpha\frac{x}{2}\right)x\geqslant f'(x)x\geqslant 0,$$

其中 $\alpha\in(0,1)$ 为与 x 有关的一个数. 由于 f 有界, 而由 f' 非负知 f 单调增加, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 于是由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=0$. □

3. 设一元实函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $ab>0$. 证明 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$.

4. 设一元实函数 f 在 $[a,b]$ 可微, $f'(a)=f'(b)$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$.

证明. 不妨设 $a=0, f(a)=0$, 若结论不真, 则成立

$$f'(x)>\frac{f(x)}{x},\quad x\in(0,b)$$

或

$$f'(x)<\frac{f(x)}{x},\quad x\in(0,b).$$

不妨设前者成立, 于是

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0,$$

取 $0<\alpha<\beta<b$, 则对任意 $x\in(0,b), y\in(\beta,b)$ 有

$$\frac{f(x)}{x}<\frac{f(\alpha)}{\alpha}<\frac{f(\beta)}{\beta}<\frac{f(y)}{y}<f'(y),$$

于是令 $x\to0^+, y\to b^-$ 有 $f'(a)\neq f'(b)$ 矛盾. □

5. 设一元实函数 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $f(0)=0, f(1)=1$. 证明存在两两不同的 $\alpha,\beta,\gamma\in(0,1)$ 使得

$$\frac{1}{f'(\alpha)}+\frac{1}{f'(\beta)}+\frac{1}{f'(\gamma)}=3.$$

证明. 由中值定理, $\exists\alpha\in(0,1)$ 使得 $f'(\alpha)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$.

情形 I $f(\alpha)=\alpha$, 则由中值定理, 存在 $\beta\in(0,\alpha),\gamma\in(\alpha,1)$ 使得

$$f'(\beta)=\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=1,\quad f'(\gamma)=\frac{f(1)-f(\alpha)}{1-\alpha}=1.$$

此时结论成立.

情形 II $f(\alpha)<\alpha$, 则存在 $\eta\in(0,\alpha),\zeta\in(\alpha,1)$ 使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}<1,\quad f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\alpha)}{1-\alpha}>1.$$

于是有 $\varepsilon>0$ 使得

$$f'(\eta)<\frac{1}{1+\varepsilon}<1<\frac{1}{1-\varepsilon}<f'(\zeta).$$

由 Darboux 定理, $\exists\beta\in(\eta,\alpha)$ 以及 $\gamma\in(\alpha,\zeta)$ 使得

$$f'(\beta)=\frac{1}{1+\varepsilon},\quad f'(\gamma)=\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

立即得到此时结论也成立.

情形 III $f(\alpha)>\alpha$. 类似情形 II 可证. □

6. 设 $\mu>0$, 一元实函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $c\in(a,b)$ 且 $f'(c)=0$. 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\mu\left(f(\xi)-f(a)\right)$.

证明. 由于

$$\left(f(x)-\int_a^x \mu\left(f(t)-f(a)\right)\,\mathrm{d}t\right)'=f'(x)-\mu\left(f(x)-f(a)\right),$$

因此由 Darboux 定理, $f'-\mu\left(f-f(a)\right)$ 在 (a,b) 内满足介值性.

于是若结论不成立, 则 $f'-\mu\left(f-f(a)\right)$ 在 (a,b) 内恒正或恒负. 不妨设

$$f'(x)-\mu\left(f(x)-f(a)\right)>0,\quad x\in(a,b), \tag{$\circledast$}$$

则

$$\left(\mathrm{e}^{-\mu x}\left(f(x)-f(a)\right)\right)'=\mathrm{e}^{-\mu x}\left(f'(x)-\mu\left(f(x)-f(a)\right)\right)>0,\quad \forall x\in(a,b).$$

所以

$$\mathrm{e}^{-\mu x}\left(f(x)-f(a)\right)>\mathrm{e}^{-\mu a}\left(f(a)-f(a)\right)=0,\quad \forall x\in(a,b],$$

即

$$f(x)-f(a)>0,\quad \forall x\in(a,b].$$

于是, 由式($\circledast$)有

$$f'(c)>\mu\left(f(c)-f(a)\right)>0,$$

与 $f'(c)=0$ 矛盾, 证毕. □

7. 设实函数 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导, $f(0)=0, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}, f(1)=\dfrac{\pi}{2}$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)=\dfrac{\xi}{1-\xi^2}f'(\xi)$.

证明. 令 $F(x)=\sqrt{1-x^2}f(x), G(x)=f(x)-\arcsin x$, 于是 $G(0)=G\left(\dfrac{1}{2}\right)=G(1)=0$, 由 Rolle 定理知 $\exists\xi_1\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right), \xi_2\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 使得

$$G'(\xi_1)=G'(\xi_2)=0,$$

此时 $f'(\xi_1)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi_1^2}}, f'(\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi_2^2}}$ 有

$$F(\xi_1)=f'(\xi_1)\sqrt{1-\xi_1^2}=1=f'(\xi_2)\sqrt{1-\xi_2^2}=F'(\xi_2),$$

故 $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $F'(\xi)=0$, 即得结论. □

8. 设 $f.g$ 均为有界闭区间上的单调增加函数, $F=f-g$ 在 $[a,b]$ 上有介值性. 证明 $F\in C[a,b]$.

9. 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 的单位开球 $B_1(\mathbf{0})$ 内二阶连续可微, 在 $\overline{B_1(\mathbf{0})}$ 上连续, 满足 $\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_k^2}=1-2|\boldsymbol{x}|^2$. 且对任何 $\boldsymbol{x}\in\partial B_1(\mathbf{0}), f(\boldsymbol{x})=0$. 试求 f 并说明理由.

6.4 $\mathcal{B}$

1. 试根据定理6.4.1的证明写出比定理6.4.1更一般的结果.

2. 给定区间 I, 试选取其上的一元实函数 (记为 g), 求其一阶, 二阶导数, 找出其满足某个二阶微分方程 (记为 (E)), 选取该函数或导函数在某三点的值, 构造三组数据. 考察一个二阶可导的函数 f, 若 f 对应的三组数据与 g 对应的一样, 是否存在某个 $\xi \in I$ 使得 f 在 ξ 满足方程 (E)?

例如, 选取 $I = [0,1], g(x) = x^3$, 则 $g'(x) = 3x^2, g''(x) = 6x$. 我们有 $3g(x)g''(x) = 2\left(g'(x)\right)^2, g''(x)g'(x) = 18g(x), g(0) = 0, g(1) = 1, g'(1) = 3$. 我们可以提出以下问题:

设 f 在 $[0,1]$ 可导, 在 $(0,1)$ 上两阶可导, $f(0) = 0, f(1) = 1, f'(1) = 3$. 问是否一定存在 $\xi, \eta \in (0,1)$ 使得 $2f(\xi)f''(\xi) = 2\left(f'(\xi)\right)^2, f''(\eta)f'(\eta) = 18f(\eta)$?

3. 设实函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内有二阶导数, 满足 $f(a) = f(b) = 0$. 证明: 若在 (a,b) 内成立以下条件之一, 则在 $[a,b]$ 上恒有 $f(x) \leqslant 0$:

(1) $f''(x) - f(x) \geqslant 0$;

(2) $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) \geqslant 0$;

(3) $f''(x) + 4f'(x) + f(x) \geqslant 0$.

证明. 我们证明这样一个结果: 设 f 为题设函数, 若 f 满足条件 $f'' + \alpha f' + \beta f \geqslant 0$, 其中实数 α, β 满足 $\alpha^2 - 4\beta \geqslant 0$, 则 f 在 $[a,b]$ 上恒有 $f \leqslant 0$.

我们有

$$f''(x) + \alpha f'(x) + \beta f(x) = \left((\mathrm{D} - \delta)^2 - \gamma\right) f(x) = \mathrm{e}^{-\delta x}(\mathrm{D}^2 - \gamma)\left(\mathrm{e}^{\delta x} f(x)\right),$$

其中 $\delta = \dfrac{\alpha}{2}, \gamma = \dfrac{\alpha^2 - 4\beta}{4} \geqslant 0$.

置 $F(x) = \mathrm{e}^{\delta x} f(x)$, 设 F 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内有二阶导数, 且

$$F''(x) - \gamma F(x) = \mathrm{e}^{\delta x}\left(f''(x) + \alpha f'(x) + \beta f(x)\right) \geqslant 0, \quad \forall x \in (a,b).$$

(i) 若 $\gamma = 0$, 则 F 为凸函数, 立即得到 $F(x) \leqslant 0 (\forall x \in [a,b])$, 即 $f(x) \leqslant 0 (\forall x \in [a,b])$.

(ii) 若 $\gamma > 0$. 此时, 若结论不真, 则有 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F(\xi) = \max\limits_{x \in [a,b]} F(x) > 0$. 我们有 $F''(x) < 0$. 另一方面, 由假设条件, $F''(\xi) \geqslant \gamma F(\xi) > 0$. 矛盾, 因此必有 $f(x) \leqslant 0 (\forall x \in [a,b])$.

利用上述结论即证. □

4. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的非负连续可微函数, 满足: $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $f'(x) \geqslant 6 + f(x) - f^2(x)$. 证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $f(x) \geqslant 3$.

证明. 考虑函数 $g(x) = \dfrac{f(x) - 3}{f(x) + 2}\mathrm{e}^{5x}$, 则

$$g'(x) = \frac{5\mathrm{e}^{5x}\left(f'(x) - 6 - f(x) + f^2(x)\right)}{\left(f(x) + 2\right)^2} \geqslant 0,$$

从而 $g(x)$ 单调增, 如果存在 x_0 使得 $f(x_0) < 3$, 则 $g(x_0) < 0$ 并且 $\forall x < x_0$ 都有 $g(x) \leqslant g(x_0) < 0$, 从而 $0 \leqslant f(x) < 3$, 于是有

$$-\frac{3}{2} \leqslant \frac{f(x) - 3}{f(x) + 2} < 0, \quad x < x_0,$$

这表示 $-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{5x} < g(x) < 0$, 令 $x \to -\infty$ 得 $g(x) \to 0$, 这与任何 $x < x_0$, $g(x) \leqslant g(x_0) < 0$ 矛盾. □

5. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的非负连续可微函数, 满足: $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $f'(x) \leqslant 6 + f(x) - f^2(x)$. 证明: $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $f(x) \leqslant 3$.

证明. 考虑函数 $g(x) = \frac{3 - f(x)}{f(x) + 2}\mathrm{e}^{5x}$, 则

$$g'(x) = \frac{5\mathrm{e}^{5x}\left(6 + f(x) - f^2(x) - f'(x)\right)}{\left(f(x)+2\right)^2} \geqslant 0,$$

从而 $g(x)$ 单调增, 如果存在 x_0 使得 $f(x_0) > 3$, 则 $g(x_0) < 0$ 并且 $\forall x < x_0$ 都有 $g(x) \leqslant g(x_0) < 0$, 从而 $f(x) > 3$, 于是有

$$-1 \leqslant \frac{3 - f(x)}{f(x) + 2} < 0, \quad x < x_0,$$

这表示 $-\mathrm{e}^{5x} < g(x) < 0$, 令 $x \to -\infty$ 得 $g(x) \to 0$, 这与任何 $x < x_0$, $g(x) < g(x_0) < 0$ 矛盾. □

6. 设 f 在 $[a,b]$ 上可导, g 在 $[a,b]$ 上连续. 证明 $F = f'g$ 在 $[a,b]$ 上有介值性质.

证明. 不失一般性, 只要证明 $F[a,b]$ 为区间或单点集. 进一步, 不妨设 $F(a) < \eta < F(b)$, 我们只需要证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $F(\xi) = \eta$.

情形 **I** $\eta = 0$. 此时 $f'(a)f'(b)g(a)g(b) < 0$. 从而

$$f'(a)f'(b) < 0 \quad 或 \quad g(a)g(b) < 0.$$

若前者成立, 则由微分 Darboux 定理, 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$. 若后者成立, 则由连续函数的介值定理, 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $g(\xi) = 0$. 无论哪种情形, 都有 $f'(\xi)g(\xi) = \eta$.

情形 **II** $\eta > 0$. 此时不妨设 $g(b) > 0$.

(i) g 在 $[a,b]$ 上恒正. 则

$$f'(a) - \frac{\eta}{g(a)} < 0 < f'(b) - \frac{\eta}{g(b)},$$

而由于函数 $f' - \frac{\eta}{g}$ 具有介值性, 因此存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) - \frac{\eta}{g(\xi)} = 0$, 即 $f'(\xi)g(\xi) = \eta$.

(ii) g 在 $[a,b]$ 上不恒正. 则 g 在 $[a,b]$ 上有最大零点 $s \in [a,b)$. 由微分 Darboux 定理, 有 (s,b) 中趋于 s 的点列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(x_n) = f'(s)$. 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(x_n)g(x_n) = 0$. 于是有 $k \geqslant 1$ 使得 $f'(x_k)g(x_k) < \eta$. 由于 g 在 $[x_k, b]$ 上恒正, 由 (i) 可得结论.

情形 **III** $\eta < 0$. 与情形 II 同理可证. □

6.5　Taylor 多项式与插值多项式

6.5 $\mathcal{A}$

1. 设 $n \geqslant 2, \delta > 0$, 实函数 f 在 $(x_0-\delta, x+\delta)$ 内有定义, 且满足

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right), \qquad x\to x_0.$$

(1) 函数 f 在点 x_0 是否连续?

(2) 若 f 在点 x_0 连续, f 在点 x_0 是否可导?

(3) 若 f 在点 x_0 可导, f 在点 x_0 是否二阶可导?

解. ■

2. 对于例 6.5.4, 记 $k=\dfrac{6\left(f'(a)+f'(b)\right)}{(b-a)^2}-\dfrac{12(f(b)-f(a))}{(b-a)^3}$. 尝试通过微分不等式 $f'''>k$ 推出矛盾.

3. 对于例 6.5.6, 记 $k=\dfrac{480\left(f'(a)+4'\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'(b)\right)}{(b-a)^4}-\dfrac{2880\left(f(b)-f(a)\right)}{(b-a)^5}$. 尝试通过微分不等式 $f^{(5)}>k$ 推出矛盾.

4. 设 f 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(1)+2f\left(\dfrac{1}{2}\right)-3f(0)}{2}$$

.

证明. 注意到

$$\frac{f(1)+2f\left(\dfrac{1}{2}\right)-3f(0)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{f(1)-f(0)}{1-0}+\frac{f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f(0)}{1/2-0}\right)=\frac{f'(\xi)+f'(\xi_2)}{2},$$

其中 $\xi_1\in(0,1), \xi_2\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, 并且有

$$f'(\xi_1)\wedge f'(\xi_2)\leqslant\frac{f'(\xi_1)+f'(\xi_2)}{2}\leqslant f'(\xi_1)\vee f'(\xi_2),$$

由微分 Darboux 定理可知有 ξ 介于 ξ_1 与 ξ_2 之间满足 $f'(\xi)=\dfrac{f'(\xi_1)+f'(\xi_2)}{2}$. 从而结论成立. □

5. 设 f 在 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ 上连续, 在 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 上五阶可导. 证明存在 $\xi\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 使得

$$f^{(5)}=5\sqrt{3}\left(f(\sqrt{3})-f(\sqrt{-3})\right)-15\left(f'(-1)+f'(1)\right).$$

证明. 我们建立更一般的结果. 设 $\alpha>1, f$ 在 $[-\alpha,\alpha]$ 上连续, 在 $(-\alpha,\alpha)$ 内五阶可导, 考虑满足下列条件的五次多项式 P:

$$\begin{cases} P(-\alpha)=f(-\alpha), P(-1)=f(-1), P'(-1)=f'(-1), \\ P(1)=f(1), P'(1)=f'(1), P(\alpha)=f(\alpha). \end{cases}$$

则 P 由下式唯一确定:

$$\begin{vmatrix} P(x) & 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ f(-\alpha) & 1 & -\alpha & \alpha^2 & -\alpha^3 & \alpha^4 & -\alpha^5 \\ f(-1) & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ f(1) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ f(\alpha) & 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 \\ f'(-1) & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ f'(1) & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

求得

$$P^{(5)} = \frac{60\,(f(\alpha)-f(-\alpha))}{\alpha(\alpha^2-1)^2} + \frac{(\alpha^2-3)\,(f(1)-f(-1))}{(a^2-1)^2} - \frac{30\,(f'(1)+f'(-1))}{\alpha^2-1}.$$

考虑 $F = f - P$, 则 F 在 $[-\alpha,\alpha]$ 上连续, 在 $(-\alpha,\alpha)$ 内五阶可导, 且

$$F(-\alpha) = F(\alpha) = F(-1) = F(1) = F'(-1) = F'(1) = 0.$$

从而存在 $\xi \in (-\alpha,\alpha)$ 使得 $F^{(5)(\xi)} = 0$, 即

$$f^5(\xi) = \frac{60\,(f(\alpha)-f(-\alpha))}{\alpha(\alpha^2-1)^2} + \frac{(\alpha^2-3)\,(f(1)-f(-1))}{(a^2-1)^2} - \frac{30\,(f'(1)+f'(-1))}{\alpha^2-1}.$$

令 $\alpha = \sqrt{3}$, 即得待证明之式. □

6. 设实函数 f 在点 x_0 有直到 $n+1$ 阶的导数,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta_h h),$$

其中 $\theta_h \in (0,1)$ 与 h 的选取有关. $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. 证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta_h = \dfrac{1}{n+1}$.

进一步, 若 $f^{(n+2)}(x_0)$ 存在, 试计算 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\theta_h - \frac{1}{n+1}}{h}$.

证明. 由带 Peano 余项的 Taylor 公式:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + o(h^{n+1}),$$

于是有

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta_h h) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + o(h^{n+1}),$$

即有

$$\theta_h\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_h h) - f^{(n)}(x_0)}{\theta_h h} = \frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x_0) + o(h),$$

由此易见 $\lim\limits_{h\to 0}\theta_h = \dfrac{1}{n+1}$.

进一步, 由所给条件

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + \frac{h^{n+2}}{(n+2)!}f^{(n+2)}(x_0) + o(h^{n+2}),$$

于是有

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta_h h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)+\frac{h^{n+2}}{(n+2)!}f^{(n+2)}(x_0)+o(h^{n+2}),$$

即

$$f^{(n)}(x_0+\theta_h h)=f^{(n)}(x_0)+\frac{h}{(n+1)}f^{(n+1)}(x_0)+\frac{h^2}{(n+1)(n+2)}f^{(n+2)}(x_0)+o(h^2),$$

上式两侧减去 $\theta_h hf^{(n+1)}(x_0)$, 得到

$$\theta_h^2\frac{f^{(n)}(x+\theta_h h)-f^{(n)}(x_0)-\theta_h hf^{(n+1)}(x_0)}{\theta_h^2h^2}=\frac{\dfrac{1}{n+1}-\theta_h}{h}f^{(n+1)}(x_0)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}f^{(n+2)}(x_0).$$

值得一提的是对于 f 有这样的现象

$$\lim_{t\to 0}\frac{f^{(n)}(x_0+t)-f^{(n)}(x_0)-tf^{(n+1)}(x_0)}{h^2}\overset{\text{L'Hôpital}}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{2}f^{(n+2)}(x_0).$$

结合上方两式得到

$$\frac{\theta_h-\dfrac{1}{n+1}}{h}\to\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{2(n+1)^2}\right)\frac{f^{(n+2)}(x_0)}{f^{(n+1)}(x_0)},\qquad h\to 0.$$ □

7. 设 $a<c<b$. 试确定常数 α,β,γ, 使得对任何在 $[a,b]$ 内连续, 在 (a,b) 内二阶可导的实函数 f, 总有 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=\alpha f(a)+\beta f(c)+\gamma f(b)$.

解. ■

8. 设 $a<c<b$. 试确定常数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, 使得对任何在 $[a,b]$ 内连续, 在点 a 两阶可导, 在 (a,b) 内三阶可导的实函数 f, 总有 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'''(\xi)=\alpha f(a)+\beta f(c)+\gamma f(b)+\delta f''(a)$.

6.5 $\mathcal{B}$

1. 对于 $\alpha\in(1,2)$, 尝试构造在 $[-\alpha,\alpha]$ 上的三阶连续可微的函数 F 使得 $F(-\alpha)=F(\alpha)=F'(-1)=F'(1)=0$, 且在 $[-\alpha,\alpha]$ 上成立 $F'''>0$.

解. ■

2. 设 $a_n\neq -1(n\geqslant 1)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, 试在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$(绝对) 收敛与否的各种情形下, 讨论无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 的收敛性 (含绝对收敛性).

解. ■

3. 证明方程 $x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+(2n+1)=0$ 无实根.

证明. 设 $S(x)=x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}-\cdots-2nx+(2n+1)$, 显然 $S(-1)\neq 0$, 注意到

$$xS(x)=x^{2n+1}-2x^{2n}+3x^{2n-1}-\cdots-2nx^2+(2n+1)x,$$

于是

$$S(x)+xS(x)=x-x^2+x^3-\cdots-x^{2n}+x^{2n+1}+(2n+1)=\frac{x\left(1+x^{2n+1}\right)}{1+x}+(2n+1),$$

于是 $S(x)=\dfrac{x(1+x^{2n+1})+(1+x)(2n+1)}{(1+x)^2}$, 即证 $f(x):=x(1+x^{2n+1})+(1+x)(2n+1)$ 无除 $x=-1$ 外的实根. 由 $f'(x)=0$ 可知 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的唯一极小值点, 并且 $f(-1)=0$, 从而结论得证. □

4. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上无限次可微, $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{n^2}{n^2+1}(\forall n\geqslant 1)$, 问以上条件可否确定 $f^{(k)}(0)(\forall k\geqslant 0)$?

解. ■

5. 设 $-\infty<x_1<x_2<\cdots<x_n<+\infty(n\geqslant 2)$, $P_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为满足 $P_k(x_j)=\begin{cases}1, & j=k,\\ 0, & j\neq k\end{cases}$ 的 $n-1$ 次插值多项式. 证明: $\forall x\in[x_k,x_{k+1}]$, 成立 $P_k(x)+P_{k+1}(x)\geqslant 1(1\leqslant k\leqslant n-1)$.

证明. □

6.6 Taylor 展开式的计算及应用

6.6 $\mathcal{A}$

1. 计算函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{7+\cos x}\right)^{1/3}$ 的带 Peano 型余项的三阶 Maclaurin 展开式.

解. ■

2. 将 $\sqrt[3]{1+\sin^3 x}$ 在点 0 附近展开到 x^9.

解. ■

3. 设函数 f 在 $x=1$ 处有三阶导数, 并满足 $f'(x)=f\left(f(x)\right)$ 以及 $f(1)=1$. 试求 f 在 $x=1$ 处的带 Peano 余项的三阶 Taylor 公式.

解. $\left(f(x)=1+(x-1)+\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{3}(x-1)^3+o((x-1)^4).\right)$ ■

4. 设定义在点 0 附近的光滑函数 $y=y(x)$ 满足 $y(0)=0$ 以及 $x=\tan y-2y$. 计算 $y(x)$ 在 $x=0$ 处的带 Peano 型余项的五阶 Taylor 公式.

解. $\left(y=-x-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{2}{27}x^5+o(x^5).\right)$ ■

5. 设光滑函数 $y=y(x)$ 满足 $x=\sqrt{y-\ln(1+y)}\operatorname{sgn}(y)$. 试求 $y(x)$ 的带 Peano 型余项的二阶 Maclaurin 展开式.

解. ■

6. 设函数 $y=y(x)$ 在 $x=1$ 处有五阶导数, $y(0)=0$, 其反函数 $x=x(y)$ 满足: $x=1+y+3y^2-4y^3+o(y^5)(y\to 0)$. 试求 $y(x)$ 的带 Peano 型余项的五阶 Maclaurin 展开式.

解. ■

7. 设函数 $y=y(x)$ 在 $x=1$ 处有三阶导数, $y(1)=0$, 其反函数 $x=x(y)$ 满足:$x=1+y+3y^2-4y^3+o(y^3)(y\to 0)$. 试求 $y(x)$ 在 $x=1$ 处的带 Peano 型余项的三阶 Taylor 展开式.

解. ■

8. 设实数 a,A,B 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[A\left(\cos\frac{1}{x}+a\sin\frac{1}{x^2}+2\cos\frac{1}{x^3}+\sin\frac{1}{x^4}\right)\right]^{x^4}=B$. 试求 a,A,B.

解. 置 $t=\frac{1}{x}$, 那么原极限即为

$$\lim_{t\to 0}\left[A\left(\cos t+a\sin t^2+2\cos t^3+\sin t^4\right)\right]^{1/t^4},$$

该极限存在, 必有 $\lim\limits_{t\to 0}A\left(\cos t+a\sin t^2+2\cos t^3+\sin t^4\right)=3A=1$, 于是 $A=\frac{1}{3}$. 另一方面, 我们有

$$\cos t+a\sin t^2+2\cos t^3+\sin t^4=3+\left(a-\frac{1}{2}\right)t^2+\frac{25}{24}t^4+o(t^4),$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\left[A\left(\cos t+a\sin t^2+2\cos t^3+\sin t^4\right)\right]^{1/t^4}\\ =&\lim_{t\to 0}\exp\left(\frac{\ln\left[A\left(\cos t+a\sin t^2+2\cos t^3+\sin t^4\right)\right]}{t^4}\right)\\ =&\lim_{t\to 0}\exp\left(\frac{\frac{1}{3}\left(a-\frac{1}{2}\right)t^2+\frac{1}{3}\cdot\frac{25}{24}t^4+o(t^4)}{t^4}\right)=\exp\left(\frac{25}{72}\right).\end{aligned}$$

由此推得 $a=\frac{1}{2}, B=\mathrm{e}^{25/72}$. ■

9. 设 f 在原点有二阶导数, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=0$. 试求:

(1) $f(0),f'(0),f''(0)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x^2}$.

解. 由假设,

$$\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}=o(1),\quad x\to 0.$$

所以

$$f(x)=-\frac{\sin 3x}{x}+o(x^2)=-3+\frac{9}{2}x^2+o(x^2),\qquad x\to 0.$$

另外由 $f(x)$ 的 Taylor 展开式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(x)x^2+o(x^2),\quad x\to 0$$

的唯一性得到

$$f(0)=-3,\quad f(0)=0,\quad f''(0)=9.$$

于是又有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{9x^2/2+o(x^2)}{x^2}=\frac{9}{2}.$$ ■

10. 设 $n\geqslant 1$, 一元实函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上有 $n+1$ 阶导数, 且 $M_0,M_{n+1}<+\infty$, 其中 $M_m=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f^{(m)}(x)|(m=0,1,\cdots,n+1)$. 证明: 对于 $1\leqslant m\leqslant n$, 存在与 f 无关的常数 $C_m>0$ 使得 $M_m<C_mM_0^{1-m/(n+1)}M_{n+1}^{m/(n+1)}$.

证明. $\forall x\in\mathbb{R},h>0$, 存在 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 使得

$$f(x+mh)=f(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{m^kh^kf^{(k)}(x)}{k!}+\frac{m^{n+1}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi_m)}{(n+1)!},\quad m=1,2,\cdots,n,$$

把上式看成 $hf'(x),h^2f''(x),\cdots,h^nf^{(n)}(x)$ 的线性方程组, 且方程组的系数矩阵与 h,f 无关, 则易见存在与 f 和 h 无关的常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 使得

$$M_mh^m\leqslant\frac{1}{2}C_m\left(M_0+M_{n+1}h^{n+1}\right),\quad m=1,2,\cdots,n,$$

由此利用 $h>0$ 的任意性, 取 $h=(M_0/M_{n+1})^{1/(n+1)}$, 得到 $M_m<C_mM_0^{1-m/(n+1)}M_{n+1}^{m/(n+1)}$. □

11. 设 f 是 $[0,+\infty)$ 上的有界函数, 有三阶导数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'''(x)=\alpha$, 其中 $\alpha\in\mathbb{R}$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$.

证明. 由题设, $\forall\varepsilon>0$, $\exists X$ 使得 $x_1,x_2>X$ 时有

$$|f'''(x_1)-f'''(x_2)|<\frac{6\varepsilon}{h^3},$$

其中 h 是给定的正数. 设 $x>X+h$ 由 Taylor 公式

$$f(x+h)=f(x)+f(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2+\frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3,\quad \xi_1\in(x,x+h),$$
$$f(x-h)=f(x)-f(x)h+\frac{f''(x)}{2}h^2-\frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3,\quad \xi_2\in(x-h,x),$$

设 M 是 $|f(x)|$ 的一个上界, 即有

$$\begin{aligned}|f''(x)|&=\left|\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)-h^3\left(f'''(\xi_1)-f'''(\xi_2)\right)/6}{h^2}\right|\\&\leqslant\frac{4M+\varepsilon}{h^2}\to 0,\quad h\to+\infty.\end{aligned}$$ □

12. 设有界数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n)=0$, 问是否有 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$?

解. 结论是成立的. 由题设 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N'\in\mathbb{N}$ 使得 $n>N'$ 时有

$$|a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n|<\frac{\varepsilon}{2N},$$

其中 $N\in\mathbb{N}_+$, 设

$$a_{n+k+1}-2a_{n+k}+a_{n+k-1}=\varepsilon_k,\quad k=1,2,\cdots N,$$

其中 $|\varepsilon_k|<\dfrac{\varepsilon}{2N}$, 我们记上述方程组为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\varepsilon}$, 也即

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}_{N\times N}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \\ a_{n+N-1} \\ a_{n+N} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1-a_n \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{N-1} \\ \varepsilon_N-a_{n+N+1} \end{pmatrix},$$

立即可以得到 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}$, 可以算的

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} -\dfrac{N}{N+1} & -\dfrac{N-1}{N+1} & \cdots & -\dfrac{1}{N+1} \\ -\dfrac{N-1}{N+1} & -\dfrac{2(N-1)}{N+1} & \cdots & -\dfrac{2}{N+1} \\ -\dfrac{N-2}{N+1} & -\dfrac{2(N-2)}{N+1} & \cdots & -\dfrac{3}{N+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\dfrac{2}{N+1} & \dfrac{4}{N+1} & \cdots & -\dfrac{N-1}{N+1} \\ -\dfrac{1}{N+1} & -\dfrac{2}{N+1} & \cdots & -\dfrac{N}{N+1} \end{pmatrix}_{N\times N},$$

实际上我们只关心 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的前两行, 这样得到

$$a_{n+1}=-\left(\frac{N}{N+1}(\varepsilon_1-a_n)+\frac{N-1}{N+1}\varepsilon_2+\frac{N-2}{N+1}\varepsilon_3+\cdots+\frac{\varepsilon_N-a_{n+N+1}}{N+1}\right),$$
$$a_{n+2}=-\left(\frac{N-1}{N+1}(\varepsilon_1-a_n)+\frac{2(N-1)}{N+1}\varepsilon_2+\frac{2(N-2)}{N+1}\varepsilon_3+\cdots+\frac{2(\varepsilon_N-a_{n+N+1})}{N+1}\right),$$

从而

$$\begin{aligned} |a_{n+2}-a_{n+1}| &= \left|\frac{\varepsilon_1-a_n}{N+1}-\frac{N-1}{N+1}\varepsilon_2-\frac{N-2}{N+1}\varepsilon_3-\cdots-\frac{\varepsilon_N-a_{n+N+1}}{N+1}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{\varepsilon_1}{N+1}\right|+\left|\frac{N-1}{N+1}\varepsilon_1\right|+\left|\frac{N-2}{N+1}\varepsilon_3\right|+\cdots+\left|\frac{\varepsilon_N}{N+1}\right|+\frac{|a_n|+|a_{n+N-1}|}{N+1} \\ &\leqslant |\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+\cdots+|\varepsilon_N|+\frac{|a_n|+|a_{n+N-1}|}{N+1}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{N+1}, \end{aligned}$$

其中 M 为 $\{|a_n|\}$ 的一个上界. 对于 ε, 有充分大得 N 使得 $\dfrac{2M}{N+1}<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 即有 $|a_{n+2}-a_{n+1}|<\varepsilon$, 从而结论成立. ■

6.6 $\mathcal{B}$

1. 考察如何求 $\sec x$ 的 Maclaurin 展开式.

解. 1 ■

2. 考察含参变量的 Taylor 展开式. 具体的, 设 $m \geqslant 1$, 在区域 $\Omega \times D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 内, $n+m$ 元实函数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 作为 $\boldsymbol{x}$ 的函数, 所有不高于 m 阶的偏导数均存在. 记

$$r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \sum_{k=0}^{m}\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^k f}{\partial \boldsymbol{x}^\alpha}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^\alpha.$$

问什么条件下成立 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\sup\limits_{\boldsymbol{y}\in D}\dfrac{r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^m} = 0$?

解. ■

3. 对于数列 $\{a_n\}$, 定义该数列的各阶差分如下:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \qquad n \geqslant 1,$$
$$\Delta^{j+1} a_n = \Delta^j a_{n+1} - \Delta^j a_n, \qquad n \geqslant 1, j \geqslant 1.$$

(1) 证明: 存在常数 C 使得对任何数列 $\{a_n\}$, 整数 $k \geqslant 2$, 成立

$$k\sup_{n\geqslant 1}|\Delta a_n| \leqslant C\left(\sup_{n\geqslant 1}|a_n| + k^2\sup_{n\geqslant 1}|\Delta^2 a_n|\right).$$

(2) 证明: 存在常数 C_1, C_2 使得对任何数列 $\{a_n\}$, 整数 $k \geqslant 3$, 成立

$$k\sup_{n\geqslant 1}|\Delta a_n| \leqslant C_1\left(\sup_{n\geqslant 1}|a_n| + k^3\sup_{n\geqslant 1}|\Delta^3 a_n|\right)$$

以及

$$k^2\sup_{n\geqslant 1}|\Delta^2 a_n| \leqslant C_2\left(\sup_{n\geqslant 1}|a_n| + k^3\sup_{n\geqslant 1}|\Delta^3 a_n|\right).$$

(3) 试考察更高阶差分的结果.

证明. (1) 对于任何 $k \geqslant 2$, 我们有

$$a_{n+k} - a_n = \sum_{\ell=0}^{k-1}\Delta a_{n+\ell} = k\Delta a_n + \sum_{\ell=1}^{k-1}(\Delta a_{n+\ell} - \Delta a_n) = k\Delta a_n + \sum_{\ell=1}^{k-1}\sum_{m=0}^{\ell-1}\Delta^2 a_{n+m},$$

因此,

$$k\sup_{n\geqslant 1}|\Delta a_n| \leqslant 2\sup_{n\geqslant 1}|a_n| + \frac{k^2}{2}\sup_{n\geqslant 1}|\Delta^2 a_n|,$$

取 $C \geqslant 2$ 即得结论.

(2) 对于任何 $k \geqslant 3$, 我们有

$$a_{n+k} - a_n = k\Delta a_n + \frac{k(k-1)}{2}\Delta^2 a_n + \sum_{\ell=2}^{k-1}\sum_{m=1}^{\ell-1}\sum_{p=0}^{m-1}\Delta^3 a_{n+p},$$
$$a_{n+2k} - a_n = 2k\Delta a_n + k(2k-1)\Delta^2 a_n + \sum_{\ell=2}^{2k-1}\sum_{m=1}^{\ell-1}\sum_{p=0}^{m-1}\Delta^3 a_{n+p},$$

于是

$$\begin{pmatrix} k\Delta a_n \\ k^2\Delta^2 a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{k-1}{2k} \\ 2 & 2-\dfrac{1}{k} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{n+k}-a_n-\sum\limits_{\ell=2}^{k-1}\sum\limits_{m=1}^{\ell-1}\sum\limits_{p=0}^{m-1}\Delta^3 a_{n+p} \\ a_{n+2k}-a_n-\sum\limits_{\ell=2}^{2k-1}\sum\limits_{m=1}^{\ell-1}\sum\limits_{p=0}^{m-1}\Delta^3 a_{n+p} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-\dfrac{1}{k} & \dfrac{1-k}{2k} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+k}-a_n-\sum\limits_{\ell=2}^{k-1}\sum\limits_{m=1}^{\ell-1}\sum\limits_{p=0}^{m-1}\Delta^3 a_{n+p} \\ a_{n+2k}-a_n-\sum\limits_{\ell=2}^{2k-1}\sum\limits_{m=1}^{\ell-1}\sum\limits_{p=0}^{m-1}\Delta^3 a_{n+p} \end{pmatrix},$$

由此立即得到

$$k\sup_{n\geqslant 1}|\Delta a_n| \leqslant \frac{5}{2}\left(2\sup_{n\geqslant 1}|a_n| + \frac{k^3}{6}\sup_{n\geqslant 1}|\Delta^3 a_n|\right)$$

以及

$$k^2\sup_{n\geqslant 1}|\Delta^2 a_n| \leqslant 3\left(2\sup_{n\geqslant 1}|a_n| + \frac{k^3}{6}\sup_{n\geqslant 1}|\Delta^3 a_n|\right),$$

结论得证.

(3) 我们猜测对于 $p,q\in\mathbb{N}$ 且 $p<q$ 有常数 C 使得

$$k^p\sup_{n\geqslant 1}|\Delta^p a_n| \leqslant C\left(\sup_{n\geqslant 1}|a_n| + k^q\sup_{n\geqslant 1}|\Delta^q a_n|\right),$$

我们以后再来验证结论的正确性. □

4. 在习题 $\mathcal{A}$ 第 10 题中, 若函数的定义域是有界区间, 是否有类似的结果?

解. ■

5. 试构造实数列 $\{a_n\}$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan a_n$ 发散.

解. 取 $a_n=\dfrac{\cos(2\pi n/3)}{n^{1/3}}$, 由 Dirichlet 判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 但

$$a_n^3=\frac{\cos^3(2\pi n/3)}{n}=\frac{1}{n}+\frac{3\cos(2\pi n/3)}{n},$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 发散, 又 $\arctan a_n\sim a_n-\dfrac{a_n^3}{3}(a_n\to 0)$, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^k(k>3)$ 收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan a_n$ 发散. ■

6. 设实函数 f 在点 0 附近有定义, $f(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛蕴含 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(a_n)$ 收敛, 证明或证伪: 存在 $\delta>0$ 使得对任何 $x\in(-\delta,\delta)$, 有 $f(x)=x$.

证明. □

7. 设 $x_0>1, x_1>0, x_{n+2}=x_{n+1}+\dfrac{x_n}{\ln x_n}(n\geqslant 0)$.

(1) 计算 $c \equiv \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln^2 x_n}{n}$ 以及 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln^2 x_n - cn}{\sqrt{n}}$.

(2) 尝试给出比上述结果更精细的结果.

解. (1)

(2) ∎

8. 仿第 7 题编写一些习题.

第 7 章　微分问题

7.1　隐函数存在定理

7.1 $\mathcal{A}$

1. 证明方程 $\mathrm{e}^z+\sin z+\mathrm{e}^y+y-\sin x+x=2$ 在点 $(0,0,0)$ 附近确定一个隐函数 $z=z(x,y)$, 并计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解. 记 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z+\sin z+\mathrm{e}^y+y-\sin x+x-2$, 由隐函数定理可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{\cos x-1}{\mathrm{e}^z+\cos z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{\mathrm{e}^y+1}{\mathrm{e}^z+\cos z}$$

进一步得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{(1-\cos x)(\mathrm{e}^z+\cos z)}{(\mathrm{e}^z+\cos z)^2}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(\cos x-1)(\mathrm{e}^z+\cos z)(1+\mathrm{e}^y)}{(\mathrm{e}^z+\cos z)^3}.$$ ■

2. 证明方程组

$$\begin{cases}x+y+u+v=0,\\ x^2+y^2+u^4+v^4=2\end{cases}$$

在 $(-1,0,1,0)$ 附近确定一个隐函数 $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix}$. 进一步, 计算 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

证明. □

3. 证明方程组

$$\begin{cases}x+y+u+v=0,\\ x^2+y^2+u^4+v^4=2\end{cases}$$

在 $(-1,0,1,0)$ 附近确定一个隐函数 $\begin{pmatrix}y\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y(x,u)\\u(x,v)\end{pmatrix}$. 进一步, 计算 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

证明. □

7.1 $\mathcal{B}$

1. 设 $n\geqslant 2$, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, $F:\Omega\to\mathbb{R}$ 连续可微, 且 $F_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\neq\mathbf{0}(\forall\boldsymbol{x}\in\Omega)$. 又设 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$ 使得 $F(\boldsymbol{x}_0)=0$. 证明存在 $\delta>0$, 使得对于任何满足 $F(\boldsymbol{x}_1)=0$ 的 $\boldsymbol{x}_1\in B_\delta(\boldsymbol{x}_0)$, 均存在曲面 $F(\boldsymbol{x})=0$ 上连接 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1$ 的 C^1 曲线 $\boldsymbol{\tau}$. 即存在 $\boldsymbol{\tau}\in C^1([0,1];\mathbb{R}^n)$ 满足 $F(\boldsymbol{\tau}(t))=0(\forall t\in[0,1])$ 以及 $\boldsymbol{\tau}(0)=\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\tau}(1)=\boldsymbol{x}_1$.

证明. □

7.2 极值问题

7.2 $\mathcal{A}$

1. 设 $n \geqslant 2$, $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n$. 试计算 $\max\limits_{x \in S^{n-1}} \{\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} \rangle, \langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{x} \rangle\}$.

解. ■

2. 设 $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$, 对 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 定义 $\|\boldsymbol{A}\|_{p,q} = \max\limits_{\|x\|_q = 1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_p$. 证明: $\|\cdot\|_{p,q}$ 定义了一个范数.

证明. 我们只需验证由此法的定义满足非负性, 齐次性与三角不等式. 显然满足前两者, 下面证明 □

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵, 证明 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 定义了 $\mathbb{R}^n$ 中的一个内积.

证明. 由于

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}\right)^\top = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle_{\boldsymbol{A}},$$

也有 $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle_{\boldsymbol{A}} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle_{\boldsymbol{A}} + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle_{\boldsymbol{A}}$, $\langle c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{A}} = c\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_{\boldsymbol{A}}$, 其中 c 为一常数. 结合 $\boldsymbol{A}$ 正定可知对于任意 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 有 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0$, 从而上述的运算定义了一个内积. □

4. 设 $n \geqslant 2$, $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{\xi}_1 \in S^{n-1}$ 满足 $\lambda_1 \equiv \boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\xi}_1 = \max\limits_{x \in S^{n-1}} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$. 考虑在 $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ 以及 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi}_1 = 0$ 的约束条件下最大化 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 的最大值问题, 证明存在 $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$ 以及 $\boldsymbol{\xi}_2 \in S^{n-1}$, 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_2 \cdot \boldsymbol{\xi}_1 = 0$. 一般地, 证明存在 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ 以及两两正交的 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n \in S^{n-1}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_k = \lambda_k \boldsymbol{\xi}_k (1 \leqslant k \leqslant n)$.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}$ 实对称, 故存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A} \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1' & & & \\ & \lambda_2' & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n' \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_i' (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. □

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵, 证明 $\|\boldsymbol{A}\| = \max\limits_{\substack{|\boldsymbol{z}|=1 \\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n}} |\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}|$.

证明. □

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实方阵, λ 是它的 (复) 特征值. 证明: $|\lambda| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|$.

证明. □

7. 设 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, 证明 $|\boldsymbol{x}| = \max\limits_{\substack{\|\boldsymbol{A}\| \\ \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}}} |\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|$.

证明. □

8. 是推导两空间直线
$$\frac{x-x_i}{l_i}=\frac{y-y_i}{m_i}=\frac{z-z_i}{n_i},\quad i=1,2$$
间的距离公式, 其中
$$(l_1m_2-l_2m_1)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2>0.$$

解. 记题设直线分别为 L_1,L_2, 取 $\boldsymbol{x_1}\in L_1$, $\boldsymbol{x_2}\in L_2$, 则 L_1 于 L_2 之间的距离 $d=\min|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$, 不妨设
$$\boldsymbol{a}_i=(x_i,y_i,z_i)^\top,\quad \boldsymbol{d}_i=(l_i,m_i,n_i)^\top,\quad i=1,2,$$
于是 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{a}_1+t_1\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{a}_2+t_2\boldsymbol{d}_2$, 从而设
$$\begin{aligned}D(t_1,t_2)&=|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|^2=|\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+t_1\boldsymbol{d}_1-t_2\boldsymbol{d}_2|^2=\langle\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+t_1\boldsymbol{d}_1-t_2\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+t_1\boldsymbol{d}_1-t_2\boldsymbol{d}_2\rangle\\&=|\boldsymbol{d}_1|^2t_1^2-2\langle\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2\rangle t_1t_2+|\boldsymbol{d}_2|^2t_2^2+2\langle\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{d}_1\rangle t_1-2\langle\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{d}_2\rangle t_2+|\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2|^2,\end{aligned}$$
分别记 $A_i=|\boldsymbol{d}_i|^2,B=\langle\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2\rangle,C_i=\langle\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{d}_i\rangle(i=1,2)$, 这样就有
$$D(t_1,t_2)=A_1t_1^2-2Bt_1t_2+A_2t_2^2+2C_1t_1-2C_2t_2+|\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2|^2,$$
分别对 t_1,t_2 求偏导有
$$\frac{\partial D}{\partial t_1}=2A_1t_1-2Bt_2+2C_1,\quad \frac{\partial D}{\partial t_2}=2A_2t_2-2Bt_1-2C_2,$$
令 $\dfrac{\partial D}{\partial t_1}=\dfrac{\partial D}{\partial t_2}=0$, 并且注意到
$$A_1A_2-B_2^2=(l_1m_2-l_2m_1)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2>0,$$
由 Cramer 法则可得
$$t_1'=\frac{BC_2-A_2C_1}{A_1A_2-B^2},\quad t_2'=\frac{A_1C_2-BC_1}{A_1A_2-B^2},$$
代入 $D(t1,t2)$ 开方即得结果. ■

9. 计算两空间直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-5}{3},\dfrac{x-7}{4}=\dfrac{y-9}{5}=\dfrac{z-11}{6}$ 的公垂线.

解. ■

10. 试推导点 (x_0,y_0,z_0) 与平面 $Ax+By+Cz+D=0(A^2+B^2+C^2\neq0)$ 的距离公式.

解. 我们先用条件极值的方法. 设
$$f(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha-x_0)^2+(\beta-y_0)^2+(\gamma-z_0)^2,$$
即求 f 在约束条件 $A\alpha+B\beta+C\gamma+D=0$ 下的极值. 设
$$F(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=(\alpha-x_0)^2+(\beta-y_0)^2+(\gamma-z_0)^2+\lambda\left(A\alpha+B\beta+C\gamma+D\right),$$

则令

$$\begin{cases} F_\alpha = 2(\alpha - x_0) + A\lambda = 0, \\ F_\beta = 2(\beta - y_0) + B\lambda = 0, \\ F_\gamma = 2(\gamma - z_0) + C\lambda = 0, \\ F_\lambda = A\alpha + B\beta + C\gamma + D = 0, \end{cases}$$

可以解得

$$\lambda = \frac{2(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}, \alpha = x_0 - \frac{A\lambda}{2}, \beta = y_0 - \frac{B\lambda}{2}, \gamma = z_0 - \frac{C\lambda}{2},$$

此时得到

$$f_{\min} = \frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

即得点 $(x_0.y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为 $\sqrt{f_{\min}} = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

令一种简单的方法是考虑几何关系, 记 (x_0, y_0, z_0) 为 P_1, 取平面上一点 $P_2(a, b, c)$, 则考虑向量 $\overrightarrow{P_1P_2} = (a - x_0.b - y_0, c - z_0)$ 与平面法向量 (A, B, C) 夹角的余弦值 (记较小的那个角为 θ) 可得点到平面距离

$$d = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| \cos\theta = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (A, B, C)\right|}{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad \blacksquare$$

11. 设 $f(x, y) = xy - x\ln x + x - \mathrm{e}^y (x > 0, y \in \mathbb{R})$. 证明: $f(x, y) \leqslant 0 (\forall x > 0, y \in \mathbb{R})$.

证明. □

7.2 $\mathcal{B}$

1. 试构造 $\mathbb{R}^2$ 上的二元实函数 f 使得点 $\mathbf{0}$ 不是它的极小值点, 但对任何 $\alpha \in [0, 2\pi], g(t) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$ 在 $t = 0$ 取得严格极小值. 进一步, 能否取到这样的一个 f 使得它在 $\mathbb{R}^2$ 上连续? 请证明你的结论.

解. ■

2. 举例说明存在 n 阶方阵, 使得其所有特征值的绝对值都严格小于 $\|\boldsymbol{A}\|$.

解. ■

3. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $\|\boldsymbol{A}\| < 1$. 证明: $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k$.

证明. □

4. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, 取 $\alpha > 0$ 足够小使得 $\boldsymbol{I} - \alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 正定. 令

$$\boldsymbol{B}_0 = \alpha\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{B}_{k+1} = \boldsymbol{B}_k (2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_k) (k \geqslant 0).$$

证明: $\{\boldsymbol{AB}_k\}$ 是单调增加的正定矩阵, 其极限为 $\boldsymbol{I}$. 特别地, $\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{B}_k=\boldsymbol{A}^{-1}$.

证明. □

5. 试对于 $\boldsymbol{A}$ 为复矩阵的情形, 定义诱导范数并建立相关性质.

6. 试改编以往遇到过的一个习题, 将一维情形的结果推广到矩阵情形.

7.3　常系数线性微分方程

7.3 $\mathcal{A}$

1. 求以下方程的通解:

(1) $y''(x)-3y'(x)+2y(x)=0$;　　(2) $y''(x)-3y'(x)+2y(x)=x$;

(3) $y''(x)-3y'(x)+2y(x)=x\mathrm{e}^{3x}$;　　(4) $y''(x)-3y'(x)+2y(x)=x\mathrm{e}^{2x}$;

(5) $y''(x)-3y'(x)+2y(x)=x^2\mathrm{e}^{x}\cos x$;　　(6) $y''(x)-3y'(x)+2y(x)=x^2\mathrm{e}^{x}\sin 2x$.

解. 由特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$ 得 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$, 从而齐次方程 (1) 的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x},$$

根据线性方程得通解结构, 为得到后续方程得通解, 只需要得到这些方程得特解. 使用算子法, 即得各个特解如下:

(2) $y^*=\dfrac{1}{(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-2)}x=\left(\dfrac{1}{\mathrm{D}-2}-\dfrac{1}{\mathrm{D}-1}\right)x=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\mathrm{D}\right)x=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$.

(3)$y^*=\dfrac{1}{(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-2)}x\mathrm{e}^{3x}=\mathrm{e}^{3x}\dfrac{1}{(\mathrm{D}+2)(\mathrm{D}+1)}x=\mathrm{e}^{3x}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}\mathrm{D}\right)x=\mathrm{e}^{3x}\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}\right)$.

(4)$y^*=\dfrac{1}{(\mathrm{D}-1)(\mathrm{D}-2)}x\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x}\dfrac{1}{\mathrm{D}(\mathrm{D}+1)}x=\mathrm{e}^{2x}\dfrac{1}{\mathrm{D}}(1-\mathrm{D})\,x=\mathrm{e}^{2x}\left(\dfrac{1}{2}x^2-x\right)$. ■

2. 求以下方程的通解:

(1) $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=0$;　　(2) $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=x$;

(3) $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=x\mathrm{e}^{3x}$;　　(4) $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=x\mathrm{e}^{2x}$;

(5) $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=x^2\mathrm{e}^{2x}\cos x$;　　(6) $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=x^2\mathrm{e}^{x}\sin x$.

解. 由特征方程 $\lambda^2-4\lambda+4=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=2$, 从而齐次方程 (1) 的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2x\mathrm{e}^{2x},$$

根据线性方程得通解结构, 为得到后续方程得通解, 只需要得到这些方程得特解. 使用算子法, 即得各个特解如下:

(2)$y^* = \left(\dfrac{1}{\mathrm{D}-2}\right)^2 x = \dfrac{1}{4}(1+\mathrm{D})x = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}.$

(3)$y^* = \left(\dfrac{1}{\mathrm{D}-2}\right)^2 x\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}\left(\dfrac{1}{\mathrm{D}+1}\right)^2 x = \mathrm{e}^{3x}(1-2\mathrm{D})x = (x-2)\,\mathrm{e}^{3x}.$

(4)$y^* = \left(\dfrac{1}{\mathrm{D}-2}\right)^2 x\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}\dfrac{1}{\mathrm{D}^2}x = \dfrac{1}{6}x^3\mathrm{e}^{2x}.$ ■

3. 求以下方程的通解:

(1) $y''(x)+y'(x)+2y(x)=0$;　　(2) $y''(x)+y'(x)+2y(x)=x^3+1$;

(3) $y''(x)+y'(x)+2y(x)=x\mathrm{e}^{3x}$;　　(4) $y''(x)+y'(x)+2y(x)=x\sin 2x$;

(5) $y''(x)+y'(x)+2y(x)=x^2\mathrm{e}^{2x}\cos x$;　　(6) $y''(x)+y'(x)+2y(x)=x^2\mathrm{e}^{x}\sin 2x$.

解. 由特征方程 $\lambda^2+\lambda+2=0$ 得 $\lambda_1=$ ■

4. 求以下方程的通解:

(1) $y^{(5)}(x)+2y'''(x)+y'(x)=0$;　　(2) $y^{(5)}(x)+2y'''(x)+y'(x)=(x+1)^2$;

(3) $y^{(5)}(x)+2y'''(x)+y'(x)=x\sin 2x$;　　(4) $y^{(5)}(x)+2y'''(x)+y'(x)=x\sin x$;

(5) $y^{(5)}(x)+2y'''(x)+y'(x)=x^2\mathrm{e}^{2x}\cos x$;　　(6) $y^{(5)}(x)+2y'''(x)+y'(x)=x^2\mathrm{e}^{x}\sin x$.

解. 由特征方程 $\lambda^5+2\lambda^3+\lambda=0$ 得 $\lambda_1=0,\lambda_2=\mathrm{i},\lambda_3=-\mathrm{i}$, λ_2,λ_3 均为二重根. 于是齐次方程 (1) 的通解为

$$y = C_1 + C_2\cos x + C_3 x\cos x + C_4\sin x + C_5 x\sin x,$$

■

5. 求方程 $y''(x)-y(x)=1$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=2$ 的特解.

6. 试研究当 b 为何值时, 对所有 $y_0,y_1\in\mathbb{R}$, 方程 $y''(x)+y(x)=0$ 满足 $y(0)=y_0, y(b)=y_1$ 的特解总是存在.

7. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换, 证明: $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$.

8. 设 $n\geqslant 2,\lambda\in\mathbb{C}, n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

试计算 $\mathrm{e}^{x\boldsymbol{A}}$.

7.3 $\mathcal{B}$

1. 设 P_1, P_2 是次数依次为 $m, n \geqslant 1$ 的多项式, Q_1, Q_2 是次数小于 m, n 的非零多项式, 满足 $\dfrac{1}{P(t)} = \dfrac{Q_1(t)}{P_1(t)} + \dfrac{Q_2(t)}{P_2(t)}$, 其中 $P(t) = P_1(t)P_2(t)$. 若 f 为 I 上的连续函数, f_1, f_2 依次为区间 I 上的 m, n 次连续可微函数, 满足 $P_1(\mathrm{D})f_1(x) = P_2(\mathrm{D})f_2(x) = f(x)$. 令 $F(x) = P_1(\mathrm{D})f_1(x) + P_2(\mathrm{D})f_2(x)$. 证明: F 是 $m+n$ 阶连续可导函数, 进而 $P(\mathrm{D})F(x) = f(x)$.

2. 举例说明上题中, $P_1(\mathrm{D})f_1$ 可以不是 $m+n$ 阶连续可导的.

7.4　导数的其他应用

7.4 $\mathcal{A}$

1. 设 $a > 0$, 用 Newton 法通过求解 $f(x) = \mathrm{e}^x - a$ 的零点计算 $\ln a$. 若取初值为 1, 试讨论 Newton 迭代法的收敛性, 并讨论误差估计.

解. ■

2. 对于 $n \geqslant 2$ 以及 $a > 0$, 讨论通过 Newton 法计算 $f(x) = x^{10} - a$ 的零点的可行性与误差估计.

解. ■

3. 计算椭圆 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. 上各点的曲率.

解. 我们先推到由参数方程确定的平面曲线的曲率计算公式. 对于 $y_0 = f(x_0)$, 当 $f''(x_0) \neq 0$ 时曲率为 $K = \dfrac{|f''(x_0)|}{\left(1 + |f''(x_0)|^2\right)^{3/2}}$. 先设平面曲线有如下的参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t) \end{cases}$, 则有

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)},$$

进一步有

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \cdot \frac{1}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} = \frac{\phi''(t)\varphi'(t) - \phi'(x)\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^3},$$

将其代入 K 得到

$$K = \frac{|\phi''(t)\varphi'(t) - \phi'(x)\varphi''(x)|}{\left((\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2\right)^{3/2}}.$$

一般地, 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程可设为 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$, 代入上述公式即得

$$K = \sqrt{\frac{a^2b^2}{\left(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)\right)^3}}.$$ ■

4. 设 $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^4}{x+1}}$, 试讨论函数的单调性, 极值, 凸性, 拐点, 求出它的渐近线, 并画出它的简图.

解. 首先在 $x=-1$ 处 $y(x)$ 无定义, 易见其为铅直渐近线. 直接计算得到

$$y'(x)=\frac{x^3(3x+4)}{3(1+x)^2}\cdot\left(\frac{x^4}{x+1}\right)^{-2/3},\quad x\neq-1,$$

于是 $y(x)$ 有驻点 $-\frac{4}{3},0$. 关于函数的单调性与极值等信息如下表:

	$\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)$	$-\frac{3}{4}$	$\left(-\frac{4}{3},-1\right)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
f'	$+$	0	$-$	不存在	$-$	0	$+$
f	严格单增	极大值点	严格单减	渐近线	严格单减	极小值点	严格单增

又有

$$y''(x)=\frac{4x^2}{9(1+x)^3}\cdot\left(\frac{x^4}{x+1}\right)^{-2/3},\quad x\neq-1,$$

可见 $y(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上凹而在 $(-1,+\infty)$ 上凸. 并且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}(y(x)-x)=\frac{1}{3},$$

即 y 有渐近线 $f(x)=x-\frac{1}{3}$ 其简图如下: ■

5. 设 $y=\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, 试讨论函数的单调性, 极值, 凸性, 拐点, 求出它的渐近线, 并画出它的简图.

解. 先设 $g(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, 有 $g(0)=1>0$, 当 $x\neq0$ 时,

$$g(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=1+\frac{2x}{x^2-x+1}=1\frac{2}{x+1/x-1},$$

$x>0$ 时 $x+\frac{1}{x}>2$, 从而 $g(x)>0$; $x<0$ 时 $x+\frac{1}{x}\leqslant-2$, $\frac{2}{x+1/x-1}<-1$, 也有 $g(x)>0$. 从而 $y(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$. 直接计算得到

$$y'(x)=\frac{-2x^2+2}{x^4+x^2+1},$$

于是 $y(x)$ 有驻点 ±1. 关于函数的单调性与极值等信息如下表:

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	严格单减	极小值点	严格单增	极大值点	严格单减

又有

$$y''(x)=\frac{4x(x^4-2x^2-2)}{(x^4+x^2+1)^2},$$

令 $y''(x)=0$, 得到三个实根分别为 $0,\pm\sqrt{1+\sqrt{3}}$. 关于函数凹凸性有下表:

	$\left(-\infty,-\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)$	$\left(-\sqrt{1+\sqrt{3}},0\right)$	$\left(0,\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)$	$\left(\sqrt{1+\sqrt{3}},+\infty\right)$
f''	$-$	$+$	$-$	$+$
f	严格凹	严格凸	严格凹	严格凸

又有

$$\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=0,$$

从而 $y(x)$ 有水平渐近线 $y=0$, 其简图如下.

?

■

7.4 $\mathcal{B}$

1. 试给出由参数方程确定的平面曲线曲率的计算公式.

解. 参见本节 $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 中的第 **3** 小题. ■

2. 设 φ 为 $(0,+\infty)$ 内的凹函数, 证明:

$$\lim_{x\to+\infty}(\varphi(2x)-2\varphi(x))=-\infty$$

当且仅当 $y=\varphi(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时没有渐近线.

第 8 章 积分

8.1 Riemann 积分

Theorem 8.1.1

设 f 是 Jordan 可测的有界集 E 上的有界函数, 则 f 在 E 上 Riemann 可积当且仅当对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 E 的划分 P, 使得 $U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$.

8.1 $\mathcal{A}$

1. 说明 **Dirichlet** 函数$D(\cdot) = \chi_{\mathbb{Q}}(\cdot)$ 在 $[0,1]$ 上不 Riemann 可积.

证明. 任取划分 $P: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$, 总能在区间 (x_i, x_{i+1}) 找到一无理数或有理数, 这意味着

$$\underline{\int_0^1} D(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \overline{\int_0^1} D(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

从而不 Riemann 可积. □

2. 在 $\mathbb{R}$ 上定义 **Riemann** 函数:

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, & x = \dfrac{q}{p}, p \in \mathbb{Z}_+, q \in \mathbb{Z} - \{0\}, p, q\text{既约}, \\ 1, & x = 0, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

证明 Riemann 函数在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积.

证明. 由 Riemann 函数的性质, 对任意给定的 $0 < \varepsilon < 2$, 在 $[0,1]$ 上使得 $R(x) > \dfrac{\varepsilon}{2}$ 的点至多只有有限个, 不妨设是 k 个, 记为 $0 = p_1' < p_2' < \cdots < p_k' = 1$. 作 $[0,1]$ 的划分

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k-1} = 1,$$

使得满足

$$\begin{aligned} &p_1' \in [x_0, x_1), x_1 - x_0 < \frac{\varepsilon}{2k}, \\ &p_i' \in (x_{2i-2}, x_{2i-1}), x_{2i-1} - x_{2i-2} < \frac{\varepsilon}{2k}, i = 2, 3, \cdots, k-1, \\ &p_k' \in (x_{2k-2}, x_{2k-1}), x_{2k-1} - x_{2k-2} < \frac{\varepsilon}{2k}, \end{aligned}$$

设 ω_i 为区间 (x_{i-1}, x_i) 上的振幅, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 由于

$$\sum_{i=1}^{2k-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{2j+1} \Delta x_{2j+1} + \sum_{j=1}^{k-1} \omega_{2j} \Delta x_{2j},$$

上式右侧第一个和式中, 有 $\Delta x_{2j+1} < \dfrac{\varepsilon}{2k}$ 且 $\omega_{2j+1} \leqslant 1$, 在第二个和式中, 有 $\omega_{2j} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{k-1} \Delta x_{2j} < 1$, 因此得到 $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < k\dfrac{\varepsilon}{2k} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. 从而 Riemann 可积. □

3. 设 $E \in \mathbb{R}^n$ 为 Jordan 可测的有界闭集, f 为 E 上的有界函数, 则 f 在 E 上 Riemann 可积当且仅当 f 在 E° 上 Riemann 可积. 进一步, 当 f 在 E 上 Riemann 可积时,

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{E^\circ} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x.$$

证明. □

4. 设 $E \in \mathbb{R}^n$ 为 Jordan 可测的有界闭集, f 为 E 上的连续函数. 试用定理8.1.1证明 f 在 E 上 Riemann 可积.

证明. □

5. 设 $E \in \mathbb{R}^n$ 为 Jordan 可测的有界闭集, f, g 在 E 上 Riemann 可积, 且 $\int_E f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \neq 0$. 证明: 存在矩形 $R_0 \subset E$ 使得 $|f|$ 在 R_0 上有正下界.

证明. □

6. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个轴平行矩形, 试构造 E 上的一个有界恒正函数 f, 使得 $\underline{\int}_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$.

解. ■

8.1 $\mathcal{B}$

1. 设 f 是 $[a,b]$ 上的有界实函数, 对于 $[a,b]$ 的划分 $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$, 定义 $W(f;P) = \sum\limits_{k=1}^{m} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$. 证明: f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积当且仅当 $\lim\limits_{\|P\|\to 0^+} W(f;P)$ 存在.

证明. □

8.2 Lebesgue 测度与 Lebesgue 可测函数

Theorem 8.2.1

设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 可测, 则

(1) 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supseteq E$, 使得 $m(G \backslash E) < \varepsilon$.

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subseteq E$, 使得 $m(E \backslash F) < \varepsilon$.

(3) 存在一列开集 $\{G_k\}$ 使得 $G = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k \supseteq E$ 且 $G \backslash E$ 为零测集.

(4) 存在一列闭集 $\{F_k\}$ 使得 $F=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k\subseteq E$ 且 $E\backslash F$ 为零测度集.

8.2 $\mathcal{A}$

1. 设 $\mathscr{M}$ 为非空集 X 上的代数, 即 $\mathscr{M}$ 满足以下条件:

(i) $\varnothing, X\in\mathscr{M}$.

(ii) 若 $E\in\mathscr{M}$, 则 $X\backslash E\in\mathscr{M}$.

(iii) 对任何 $K\geqslant 1$, 若 $E_k\in\mathscr{M}(1\leqslant k\leqslant K)$, 则 $\bigcup\limits_{k=1}^{K}E_k\in\mathscr{M}$.

证明: $E_k\in\mathscr{M}(1\leqslant k\leqslant K)$ 蕴涵 $E_1\backslash E_2, \bigcap\limits_{k=1}^{K}E_k\in\mathscr{M}$.

证明. 需要使用 De Morgan(德摩根) 定律: 设有集合 X, 以及集族 $\{A_\alpha|\alpha\in I\}$, 则成立

$$X\backslash\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in I}(X\backslash A_\alpha),\qquad X\backslash\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in I}(X\backslash A_\alpha).$$

由于 $E_1\in\mathscr{M}$, 则 $X\backslash E_1\in\mathscr{M}$, 于是 $(X\backslash E_1)\cup E_2\in\mathscr{M}$, 注意到

$$E_1\backslash E_2=E_1\cap(X\backslash E_2)\,X\backslash((X\backslash E_1)\cup E_2)\in\mathscr{M}.$$

诸 $E_k\in\mathscr{M}$, 有 $X\backslash E_k\in\mathscr{M}(1\leqslant k\leqslant K)$, 有 $\bigcup\limits_{k=1}^{K}(X\backslash E_k)\in\mathscr{M}$, 于是 $X\backslash\left(\bigcup\limits_{k=1}^{K}(X\backslash E_k)\right)\in\mathscr{M}$, 也即 $\bigcap\limits_{k=1}^{K}E_k\in\mathscr{M}$. □

2. 设 $\mathscr{M}$ 为非空集 X 上的 σ 代数. 证明: $E_k\in\mathscr{M}(k\geqslant 1)$ 蕴涵 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k\in\mathscr{M}$.

证明. 参考上一题. □

3. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$. 把定理8.2.1的结果一般化为如下结果:

(1) 对于任何 $\varepsilon>0$, 存在开集 $G\supseteq E$, 使得 $mG\leqslant m^*E+\varepsilon$.

(2) 对于任何 $\varepsilon>0$, 存在闭集 $F\subseteq E$, 使得 $mF\geqslant m_*E<\varepsilon$.

(3) 存在一列开集 $\{G_k\}$ 使得 $G=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k\supseteq E$ 且 $mG=m^*E$.

(4) 存在一列闭集 $\{F_k\}$ 使得 $F=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k\subseteq E$ 且 $mF=m_*E$.

4. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 为 Lebesgue 可测集, $f:E\to[-\infty,+\infty]$Lebesgue 可测. 证明: $\{f=+\infty\}$ 可测.

证明. □

5. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 有界, 则对任何开集 $G\supseteq E$, 有 $m_*E=mG-m^*(G\backslash E)$.

证明. □

6. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$, 则 E 可测等价于以下任一条件.

(1) 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supseteq E$, 使得 $m^*(G \backslash E) < \varepsilon$.

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在可测集 $G \supseteq E$, 使得 $m^*(G \backslash E) < \varepsilon$.

(3) 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在闭集 $F \subseteq E$, 使得 $m^*(E \backslash F) < \varepsilon$.

(4) 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在可测集 $F \subseteq E$, 使得 $m^*(E \backslash F) < \varepsilon$.

证明. □

7. 证明: 对于任意 $\varepsilon \in (0,1)$, 存在 $[0,1]$ 的测度不小于 $1-\varepsilon$ 的子集为疏朗集.

证明. □

8. 证明: 存在 $f \in C[0,1]$, 使得 $\{f=0\}$ 为正测度的疏朗集.

证明. □

9. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 可测, $|E| = +\infty$. 举例说明, 有 E 上的可测函数列 $\{f_k\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f, 但 $\{f_k\}$ 并非依测度收敛于 f.

证明. □

10. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 和 $F \subseteq \mathbb{R}^m$ 可测, 证明: $E \times F \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ 可测.

证明. □

11. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 和 $F \subseteq \mathbb{R}^m$Borel 可测, 证明: $E \times F \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$Borel 可测.

证明. □

12. 证明:

(1) $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ 是由全体以有理点为心, 正有理数为半径的开球生成的 σ 代数.

证明. □

(2) $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ 是由

$$2^k\left((j_1, j_2, \cdots, j_n)^{\mathrm{T}} + [0,1)^n\right), \quad j_1, j_2, \cdots, j_n, k \in \mathbb{Z},$$

定义的全体半开半闭的二进方体 $\mathscr{G}_{DQ}$ 生成的 σ 代数.

证明. □

13. 证明: $\mathbb{R}^n$ 中所有开集组成的集族的势是 $\aleph$.

证明. □

8.2 $\mathcal{B}$

1. 设 B 为 $\mathbb{R}^{n+m}$ 中的 Borel 集. 证明对任何 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$, 截集 $E_{\boldsymbol{y}}=\{\boldsymbol{x}\big|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in B\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中得 Borel 集.

2. 阅读文献 [20], 并按照文献提供的方法证明 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ 的势是 $\aleph$.

3. 考察已经得到的结果中, 相关集合的测度由有限改为无限, 以及函数的取值由实数变为广义实数时, 相应的结果十分仍然成立.

8.3　Lebesgue 积分及其性质

8.3 $\mathcal{A}$

1. 对于可测集 E 上的函数列 $\{f_k\}$, 说明以下两者等价:

(i) $f_k(\boldsymbol{x})\geqslant 0, \text{a.e.}\boldsymbol{x}\in E$, $\forall k\geqslant 1$.

(ii) $f_k(\boldsymbol{x})\geqslant 0$, $\forall k\geqslant 1\text{a.e.}\boldsymbol{x}\in E.$.

2. 设 $f:\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}$, 说明以下两者不等价:

(i) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0, \text{a.e.}\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, $\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^k$.

(ii) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0, \forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^k, \text{a.e.}\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$.

3. 设 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^k$ 可积. 证明: 存在可积的简单函数列 $\{\boldsymbol{f}_j\}$ 使得 $\{\boldsymbol{f}_j\}$ 逐点收敛于 $\boldsymbol{f}$, 且 $|\boldsymbol{f_k}|\leqslant|\boldsymbol{f}|$.

4. 设 $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to[0,+\infty]$ 可测. 证明: 存在可积得简单函数列 $\{f_j\}$ 使得 $\{f_j\}$ 单调增加, 且逐点收敛于 f.

5. 试用离散型 Hölder 不等式证明连续型 Hölder 不等式.

6. 试用连续型 Hölder 不等式证明离散型 Hölder 不等式.

7. 证明: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0.$

证明. 对任给 $0<\varepsilon<1, 0<\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)<1$, 故有

$$\lim_{n\to+\infty}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=0.$$

于是存在 n_0, 当 $n>n_0$ 时, 有 $\sin^n\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)<\varepsilon$. 因而当 $n>n_0$ 时,

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2-\varepsilon}\sin^n x\,\mathrm{d}x+\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi/2-\varepsilon}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^{\pi/2-\varepsilon}\varepsilon\,\mathrm{d}x+\varepsilon\leqslant\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0.$ □

8. 设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测集, $\varphi:E\to\mathbb{R}^k$ 可测. 证明: $\{(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))\big|\boldsymbol{x}\in E\}$ 是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的零测度集.

9. 试构造非 Jordan 可测得有界区域.

8.3 $\mathcal{B}$

1. 在例 8.3.2 中, 当 $|E|=+\infty$ 或 (及)$\|f\|_{\infty}=+\infty$ 时, 结论会如何?

2. 设 $1\leqslant p<+\infty, E\supseteq\mathbb{R}^n$ 为测度非零的可测集. 举例说明在 $L^p(E)$ 中

(1) 致密性定理不成立.

(2) 聚点原则不成立.

(3) 有限覆盖定理不成立.

3. 试构造区间 $[0,1]$ 上的连续实函数 f, 使得 $\{f>0\}$ 为可列个两两不交的开区间 $\{\alpha_k,\beta_k\}$ 的并, 且若 f 在两个不同区间 (α_k,β_k) 和 (α_j,β_j) 上恒为正, $\beta_k<\alpha_j$, 总存在 $\xi\in(\beta_k,\alpha_j)$ 满足 $f(\xi)<0$.

4. 试构造区间 $[a,b]$ 上的连续函数 f, 以及 $[c,d]$ 上的 Riemann 可积函数 g, 使得 $g\circ f$ 在 $[a,b]$ 上不 Riemann 可积, 其中 f 的值域包含于 $[c,d]$.

5. 试构造区间 $[a,b]$ 上的连续函数 f, 使得 g 在 $[a,b]$ 上不 Riemann 可积, 其中

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant 1,\\ 0, & f(x)<1.\end{cases}$$

6. 试构造非 Jordan 可测的有界闭区域.

7. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为 Jordan 可测的有界集, 非负函数 f 在 E 上 Riemann 可积, 且 $\displaystyle\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$. 证明: $\{f\neq 0\}$ 是零测度集. 举例说明 $\{f\neq 0\}$ 可以不是 Jordan 可测集.

8.4　Newton-Lebibiniz 公式

8.4 $\mathcal{A}$

1. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{x}+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

前两个题较简单, 结果分别 1 与 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{e}^{2\pi}}{2}$, 这里略去过程.

对于 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{x}+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, 易见 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$, 我们仅需计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, 置 $\sqrt{x}=t$, 于是

有 $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$, 因为

$$1+t^4 = (t^2+1)^2 - \left(\sqrt{2}t\right)^2 = \left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)\left(t^2-\sqrt{2}t+1\right),$$

所以

$$\frac{2t^2}{1+t^4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1},$$

从而

$$\int \frac{2t^2}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\sqrt{2}x+1\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\sqrt{2}x-1\right) + C.$$

于是

$$\int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(3-2\sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

于是 $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(\pi+\sqrt{2}\left(\pi+\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)\right)$.

对于 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2-x}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

对于 $\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$, 易见

$$\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\pi-x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x,$$

对于右侧的积分, 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{2\tan^2 x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{2t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

从而 $\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$.

2. 采用恰当的方法计算下列积分:

(1) $\int_0^1 (1-x)^6 x^2\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^\pi \sin^4 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{-1}^1 x e^{x^4}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解. (1) $\int_0^1 (1-x)^6 x^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^6(1-x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^6 - 2x^7 + x^8\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{252}$.

(2) 我们有必要计算 $I_n := \int_0^\pi \sin^n x \,\mathrm{d}x$. 它有如下递推公式

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^n x \,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sin^{n-1} x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}\left(-\cos x\right) \\ &= \int_0^\pi \left(\sin^{n-1} x\right)' \cos x \,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^1 \sin^{n-2} x \left(1 - \sin^2 x\right) \mathrm{d}x \\ &= (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^1 \sin^n x \,\mathrm{d}x \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.\end{aligned}$$

于是 $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, 又 $I_2 = \int_0^\pi \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\sin^2 x + \cos^2 x) \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, 有

$$\int_0^\pi \sin^4 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \left(\sin^4 x - \sin^6 x\right) \mathrm{d}x = I_4 - I_6 = \frac{\pi}{16}.$$

(3) 易见 $\int_{-1}^1 x\mathrm{e}^{x^4} \,\mathrm{d}x = 0$.

(4) 易见

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

(5) 我们有 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2(\sin x + \cos x)} \,\mathrm{d}x$, 于是

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2(\sin x + \cos x)} \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x + \cos x} \,\mathrm{d}x \\ =& 1 - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \csc\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc x \,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

■

3. 对于 $[a,b]$ 上连续可微函数 f, 若 $f(a) = f(b) = 0$, 证明:

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2} \left|\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x\right|.$$

证明. 令 $t = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{4}$, 于是

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}(x-t)\right| = \left|f(x)(x-t)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)(x-t) \,\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_a^b f'(x) \,\mathrm{d}t\right| \leqslant \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)| \int_a^b (x-t) \,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{4} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|.\end{aligned}$$

□

4. 证明对任何 $x > 0$ 成立 $\int_0^x \mathrm{e}^{-x^2} \sin x \,\mathrm{d}x > 0$.

证明. 只需证明对于任何自然数 n, 有

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \mathrm{e}^{-x^2} \sin x \,\mathrm{d}x + \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \mathrm{e}^{-x^2} \sin x \,\mathrm{d}x > 0,$$

注意上述不等式加号左侧的积分大于零而右侧积分小于零. 只有有上述结果, 那么 $\forall x>0$, 都存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ 或 $(2k+1)\pi\leqslant x\leqslant(2k+2)\pi$, 对于前者, 我们有

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\sin t\,\mathrm{d}t=\sum_{j=0}^{k-1}\left(\int_{2j\pi}^{(2j+1)\pi}\mathrm{e}^{-t^2}\sin t\,\mathrm{d}t+\int_{(2j+1)\pi}^{2(j+1)\pi}\mathrm{e}^{-t^2}\sin t\,\mathrm{d}t\right)+\int_{2k\pi}^{x}\mathrm{e}^{-t^2}\sin t\,\mathrm{d}t>0,$$

对于后者有

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\sin t\,\mathrm{d}t=&\sum_{j=0}^{k-1}\left(\int_{2j\pi}^{(2j+1)\pi}\mathrm{e}^{-t^2}\sin t\,\mathrm{d}t+\int_{(2j+1)\pi}^{2(j+1)\pi}\mathrm{e}^{-t^2}\sin t\,\mathrm{d}t\right)\\&+\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\mathrm{e}^{-t^2}\sin t\,\mathrm{d}t+\int_{(2k+1)\pi}^{x}\mathrm{e}^{-t^2}\sin t\,\mathrm{d}t>0.\end{aligned}$$

事实上,

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\sin x\,\mathrm{d}x=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin t\left(\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-(x+\pi)^2}\right)>0.$$

结论即证. □

5. 设 f 在 $[a,b]$ 上有二阶导数, $f(a)=f(b)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{f''(\xi)}{12}(a-b)^3$.

证明. 一方面, 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x-a)=-\int_a^b f'(x)(x-a)\,\mathrm{d}(x-b)\\&=\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x=\frac{f''(\xi_1)}{6}(a-b)^3.\end{aligned}\tag{$\blacklozenge$}$$

其中 $\xi_1\in(a,b)$. 另一方面

$$\begin{aligned}\int_a^{(a+b)/2}f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_a^{(a+b)/2}f(x)\,\mathrm{d}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)=-\int_a^{(a+b)/2}f'(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}(x-a)\\&=\int_a^{(a+b)/2}f''(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-a)\,\mathrm{d}x=\frac{f''(\xi_2)}{48}(a-b)^3.\end{aligned}$$

其中 $\xi_2\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$, 同理不难得到

$$\int_{(a+b)/2}^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{f''(\xi_3)}{48}(a-b)^3.$$

其中 $\xi_3\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$. 值得一提的是

$$\min\{f''(\xi_2),f''(\xi_3)\}\leqslant\frac{f''(\xi_2)+f''(\xi_3)}{2}\leqslant\max\{f''(\xi_2),f''(\xi_3)\},$$

于是依微分 Darboux 定理有 $f''(\xi_4)=\dfrac{f''(\xi_2)+f''(\xi_3)}{2}$, 于是有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{f''(\xi_4)}{24}(a-b)^3,$$

于是有 $\dfrac{f''(\xi_1)}{6}=\dfrac{f''(\xi_4)}{24}$, 易见 $f''(\xi_1),f''(\xi_4)$ 同号, 不妨设均非负, 于是有

$$f''(\xi_1)\leqslant 2f''(\xi_1)\leqslant 4f''(\xi_1)=f''(\xi_4),$$

依微分 Darboux 定理有 ξ 使得 $f(\xi)=2f''(\xi_1)$, 代入即式(♦)即得结论. □

6. 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数. 证明 $f(0)=0$ 时, $f(y)=\displaystyle\int_0^1\frac{y^3f(x)}{x^4+y^4}\,\mathrm{d}x$ 在 $y=0$ 处连续.

证明. 若 $f(0)=0$, 则记

$$M=\max_{x\in[0,1]}|f(x)|,\quad \omega(r)=\sup_{0\leqslant x\leqslant r}|f(x)|,\quad r\geqslant 0.$$

$\forall y\neq 0$, 我们有

$$\begin{aligned}|F(y)-F(0)|=|F(y)|=&\left|\int_0^1\frac{y^3f(x)}{x^4+y^4}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1\frac{|y^3||f(x)|}{x^4+y^4}\,\mathrm{d}x\\ \leqslant&\omega(r)\int_0^r\frac{|y^3|}{x^4+y^4}\,\mathrm{d}x+M\int_r^1\frac{|y^3|}{x^4+y^4}\,\mathrm{d}x\\ =&\omega(r)\int_0^{r/|y|}\frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x+M\int_{r/|y|}^{1/|y|}\frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

上式令 $y\to 0$ 得到

$$\varlimsup_{y\to 0}|F(y)-F(0)|\leqslant\omega(r)\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4},\quad \forall r\in(0,1),$$

令 $r\to 0^+$, 则有

$$\varlimsup_{y\to 0}|F(y)-F(0)|\leqslant 0,$$

即 $\lim\limits_{y\to 0}F(y)=F(0)$.

事实上, 在上述我们证明了

$$\lim_{y\to 0}\left|\int_0^1\frac{y^3f(x)}{x^4+y^4}\,\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{y^3f(0)}{x^4+y^4}\,\mathrm{d}x\right|=0,$$

即

$$\lim_{y\to 0^+}\int_0^1\frac{y^3f(x)}{x^4+y^4}\,\mathrm{d}x=\lim_{y\to 0^+}\int_0^1\frac{y^3f(0)}{x^4+y^4}\,\mathrm{d}x=\lim_{y\to 0^+}\int_0^{1/y}\frac{f(0)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{f(0)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x,$$

这样就有 $\lim\limits_{y\to 0^-}\displaystyle\int_0^1\frac{y^3f(x)}{x^4+y^4}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{f(0)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}f(0)$. 由 $F(0)=0$, 我们得到 F 在 0 处连续当且仅当 $f(0)=0$. □

7. 已知 $f\in C^1[0,+\infty)$, 且存在 $c>0$ 使得 $|f'(x)|\leqslant\dfrac{c}{x}(\forall x>0)$, $\lim\limits_{R\to+\infty}\dfrac{1}{R}\displaystyle\int_0^R|f(x)|\,\mathrm{d}x=0$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明. 由题设易见 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 于是对于 $\forall A>0$, 对于充分大的 x, 有

$$f(x+A)-f(x)=f'(\xi)A,\quad \xi\in(x,x+A),$$

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|$ 存在, 记为 a. 于是对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 R' 使得 $x\geqslant R'$ 使得

$$||f(x)|-a|<\varepsilon,\quad \text{即}\quad a-\varepsilon\leqslant|f(x)|\leqslant a+\varepsilon,$$

由于 $\frac{1}{R}\int_0^R|f(x)|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{R}\int_0^{R'}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\frac{1}{R}\int_{R'}^R|f(x)|\,\mathrm{d}x$, 于是

$$\frac{1}{R}\int_0^{R'}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\frac{1}{R}\int_{R'}^R(a-\varepsilon)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{R}\int_0^R|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{R}\int_0^{R'}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\frac{1}{R}\int_{R'}^R(a+\varepsilon)\,\mathrm{d}x,$$

令 $R\to+\infty$ 得到 $\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^R|f(x)|\,\mathrm{d}x=a$, 结合题设得 $a=0$. □

8. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$. 证明: $f:E\to[-\infty,+\infty]$ 为下半连续函数当且仅当对任何 $\alpha\in\mathbb{R},\{f>\alpha\}$ 是 E 中的相对开集.

9. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$.

(1) 若 $\varphi,\psi:E\to(-\infty,+\infty]$ 均为下半连续函数, 证明: $\varphi+\psi$ 也是下半连续函数.

(2) 若 $\varphi,\psi:E\to[-\infty,+\infty)$ 均为上半连续函数, 证明: $\varphi+\psi$ 也是上半连续函数.

10. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$.

(1) 若 $\varphi_k:E\to[-\infty,+\infty](k\geqslant1)$ 为一列下半连续函数, 证明: $\varphi=\sup\limits_{k\geqslant1}\varphi_k$ 也是下半连续函数.

(2) 若 $\varphi_k:E\to[-\infty,+\infty](k\geqslant1)$ 为一列上半连续函数, 证明: $\varphi=\inf\limits_{k\geqslant1}\varphi_k$ 也是上半连续函数.

11. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$. 证明: $f:E\to\mathbb{R}$ 连续当且仅当它既是下半连续的, 又是上半连续的.

12. 证明: 紧集上有下界的下半连续函数有最小值.

8.4 $\mathcal{B}$

1. 试构造区间 $[a,b]$ 上处处可导且导函数有界的实函数 f, 使得 f' 在 $[a,b]$ 上不是 Riemann 可积的.

解. ■

2. 试构造 $[0,1]$ 上的可积函数 f, 使得对任何有理数 $q\in[0,1]$, 都有 $\lim\limits_{x\to q}f(x)=+\infty$.

解. ■

3. 试构造 $\mathbb{R}$ 上严格单调的连续可微函数 f, 使得 $\{f'=0\}$ 具有正测度.

4. 设 $n\geqslant1, f\in C[0,1]$ 且满足 $\int_0^1x^kf(x)\,\mathrm{d}x=0, k=0,1,\cdots,n-1, \int_0^1f(x)x^n\,\mathrm{d}x=1$. 证明: $\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|>2^n(n+1)$.

证明. 由题意知对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, 有

$$\int_0^1 (x-\alpha)^n f(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

若对于 $f(x)$ 恒有 $|f(x)| < 2^n(n+1)$, 则

$$\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|^n |f(x)|\,\mathrm{d}x < 2^n(n+1)\int_0^1 \left|x-\frac{1}{2}\right|^n = 1,$$

与题设矛盾, 即必有使得 $|f(x)| \geqslant 2^n(n+1)$ 的点, 即 $\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \geqslant 2^n(n+1)$. 若 $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 2^n(n+1)$, 则依上式取等的条件必有 $|f(x)| \equiv 2^n(n+1)$, 这与题设矛盾. □

5. 设 $f \in C[0,\pi]$, 且对 $1 \leqslant k \leqslant n$ 成立 $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = 0$. 证明: f 在 $(0,\pi)$ 内至少有 $2n$ 个零点.

证明. 假设 f 在 $(0,\pi)$ 上发生变号的零点为 $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < a_{2m-1}(1 \leqslant m \leqslant n)$, 若为偶数个零点, 则记为 $\alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < a_{2m-1}$, 令

$$h(x) = \prod_{i=1}^{2m-1} \sin\frac{x-\alpha_i}{2} = \sum_{k=0}^{2m-1} C_k \sin\frac{kx-\beta_k}{2},$$

取 $g(x) = h(x)\cos\dfrac{x-\beta_1}{2}$, 则 $g(x)$ 是 $\sin x, \cos x, \cdots, \sin mx, \cos mx$ 的线性组合.

如果 $\beta_1 \in [0,\pi]$, 即 $\cos\dfrac{x-\beta}{2}$ 在 $(0,\pi)$ 上恒大与 0, 则由题设可知

$$\int_0^\pi f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

但此时 $f(x)g(x)$ 恒大于 (小于) 零. 矛盾, 从而 $m > n$, 这便证明了结论.

如此只需证 $\beta_1 \in [0,\pi]$.

□

6. 设 $f \in C[a,b]$ 非负, 且在 $c \in [a,b]$ 处取得唯一的最大值 $f(c) > 0, \varphi$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且在点 c 连续, 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_a^b f^n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x} = \varphi(c).$$

证明. 由于 φ 在 c 点连续, 则 $\forall\varepsilon > 0$ 使得 $|x-c| < \delta$ 时, $|\varphi(x)-\varphi(c)| < \varepsilon$, 并且 δ 也满足 $|x-c| \geqslant \delta$ 时有 $0 \leqslant f(x) < f(c)-\varepsilon$. 即 $f(c)$ 与 $|\varphi|$ 的最大值为 M 与 m. 又存在 η 使得

$|x-c|\leqslant\eta$ 时, $|f(x)-f(c)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 记 E 为区间 $[a,b]$ 去除 $[c-\delta,c+\delta]$ 的部分. 于是有

$$\begin{aligned}\left|\frac{\displaystyle\int_a^b f^n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x}\right| &\leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b f^n(x)|\varphi(x)-\varphi(c)|\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x}\\ &\leqslant \frac{\displaystyle\int_{c-\delta}^{c+\delta} f^n(x)|\varphi(x)-\varphi(c)|\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{c-\delta}^{c+\delta} f^n(x)\,\mathrm{d}x}+\frac{\displaystyle\int_E f^n(x)|\varphi(x)-\varphi(c)|\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{c-\eta}^{c+\eta} f^n(x)\,\mathrm{d}x}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon\displaystyle\int_{c-\delta}^{c+\delta} f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{c-\delta}^{c+\delta} f^n(x)\,\mathrm{d}x}+\frac{2(b-a-2\delta)m(M-\varepsilon)^n}{2\eta(M-\varepsilon/2)^2}\to\varepsilon,\quad n\to 0.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0^+$, 原命题得证. □

7. 计算 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^n\cos x\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^n\sin x\,\mathrm{d}x}$.

解. 注意到

$$\int_0^{\pi/2} x^n\sin x\,\mathrm{d}x=-x^n\cos x\Big|_0^{\pi/2}+n\int_0^{\pi/2} x^{n-1}\cos x\,\mathrm{d}x,$$

即有 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^n\cos x\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^n\sin x\,\mathrm{d}x}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^n\cos x\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^{n-1}\cos x\,\mathrm{d}x}=\frac{\pi}{2}$. ■

我们来证明这样一个命题: 设 $f,\varphi\in C[a,b]$, 且 $f,\varphi>0$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_a^b \varphi(x)f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \varphi(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}=\max_{x\in[a,b]} f(x).$$

证明. 记 $M=\displaystyle\max_{x\in[a,b]} f(x)=f(x_0)$, 则 $\forall\varepsilon\in\left(0,\dfrac{M}{2}\right)$, $\exists\delta>0$, 使得当 $x\in J_\varepsilon:=(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$ 时, 有 $f(x)>M-\varepsilon$. 令

$$g(x)=\max\{f(x,M-2\varepsilon)\},\quad x\in[a,b].$$

则 g 连续且

$$|g^k(x)-f^k(x)|\leqslant(M-2\varepsilon)^k,\quad\forall x\in[a,b],k=1,2,\cdots.$$

于是我们有

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\left|\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\left(f^{n+1}(x)-g^{n+1}(x)\right)\,\mathrm{d}x\right|}{\displaystyle\int_a^b \varphi(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{(M-2\varepsilon)^{n+1}\displaystyle\int_a^b\varphi(x)\,\mathrm{d}x}{(M-\varepsilon)^n\displaystyle\int_{J_\varepsilon}\varphi(x)\,\mathrm{d}x}=0.$$

从而可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)g^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}\geqslant M-2\varepsilon.$$

这样, 由 ε 的任意性得到 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}\geqslant M$, 另一方面

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b\varphi(x)f^n(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant M,$$

从而上述命题成立. □

8. 求极限: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\mathrm{d}x}$.

解. 注意到

$$\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\mathrm{d}x=\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\sim\frac{2}{n+1},\quad n\to+\infty,$$

对于 $\displaystyle\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x$, 置 $t=nx$ 得

$$\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x=n\int_0^n\left(1-\frac{t}{2n}\right)^n\left(1-\frac{1}{4n}\right)^n\mathrm{d}t,$$

于是由 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\left(1-\frac{x}{4}\right)^n\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)^n\mathrm{d}x}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t}{2n}\right)^n\left(1-\frac{1}{4n}\right)^n\chi_{[0,n]}(t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3t/4}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

■

9. 试将一些微分中值定理型的问题转化成积分中值定理型的结果, 并考察其异同.

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 有连续的导函数, 且 $f(0)=0$, 求证:

$$\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立当且仅当 $f(x)\equiv cx$, 其中 c 为常数.

证明. 由 $f(0)=0$ 可知 $f(x)=\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t, x\in[0,1]$, 由 Cauchy 不等式可得

$$f^2(x)=\left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_0^x(f'(t))^2\,\mathrm{d}t\cdot\int_0^x 1^2\,\mathrm{d}t=x\int_0^x(f'(t))^2\,\mathrm{d}t,$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^1 \left(x\int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\left(-\frac{1-x^2}{2}\right)\\ &= -\frac{1-x^2}{2}\int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1-x^2}{2}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)(f'(x))^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

其中等号成立当且仅当 $\left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\cdot\int_0^x 1^2\,\mathrm{d}t$ 恒成立, 故此时有 $f'(t)=c$, 结合 $f(0)=0$ 即得 $f(x)=cx$. □

8.5　累次积分

Theorem 8.5.1: Young 不等式

设 φ 是 $[,+\infty]$ 上的严格单增的连续函数, $\varphi(0)=0,\varphi(+\infty)=+\infty,\psi$ 是 φ 的反函数, 令

$$\Phi(x)=\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t,\qquad \Psi(y)=\int_0^y \psi(t)\,\mathrm{d}t,\quad x,y\geqslant 0,$$

则对任何 $a,b\geqslant 0$ 成立

$$ab\leqslant \Phi(a)+\Psi(b),$$

且等号当且仅当 $b=\varphi(a)$, 即 $a=\psi(b)$ 时取到.

8.5 $\mathcal{A}$

1. 计算积分 $\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 Ω 为平面 $x=0,y=0,z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的有界区域.

解. 将重积分化为累次积分, 即有

$$\begin{aligned}&\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\,\mathrm{d}z\\ =&\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{2(1+x+y)^2}-\frac{1}{8}\right)\mathrm{d}y = \int_0^1\left(\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1-x}{8}-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}.\end{aligned}$$

■

2. 计算积分 $\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 与 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$ 相交的部分.

解. 注意到被积函数仅含 z, 于是有

$$\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{1/2}\pi z^2(2z-z^2)\,\mathrm{d}z + \int_{1/2}^1 \pi z^2(1-z^2) = \frac{29\pi}{480}.$$

■

3. 设 $R>0$, 计算牟合方盖 $\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant R^2, y^2+z^2\leqslant R^2\}$ 的体积.

解. 记 $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant R^2,y^2+z^2\leqslant R^2\}$, 考虑到对称性, 我们只计算图形第一象限部分的体积. 注意到该区域边界当 y 确定时, 总有 $x^2=z^2=R^2-y^2$, 记 D_{xz} 为 y 确定后代表的区

域, 于是

$$\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^R \left(\iint_{D_{xz}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y = \int_0^R \left(R^2 - y^2\right) \mathrm{d}y = \frac{2}{3}R^3.$$

从而牟合方盖的体积 $V = 8 \cdot \frac{2}{3}R^3 = \frac{16}{3}R^3$. ■

4. 当 φ 连续可导时, 利用求导得到单调性来证明定理 **8.5.1**.

证明. □

5. 设 f, g 在 $[0,1]$ 上单调. 若 f, g 均单增或均单减, 证明: $\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. 若 f, g 之一单增, 另一个单减, 则上述不等式的不等号反向.

证明. 若

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x,$$

则有

$$\int_0^1\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

即有

$$\int_0^1\int_0^1 (f(x)g(x) - f(x)g(y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 (f(y)g(y) - f(y)g(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant 0.$$

即证

$$\int_0^1\int_0^1 (f(x)g(x) + f(y)g(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) \geqslant 0.$$

结合 f, g 的单调性与排序不等式可知上式成立, 另外的情况同理可以得到. □

6. 求证 $\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{\ln(1+x)}{x}}\,\mathrm{d}x \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{\ln^2(1+x)}{x^2}}\,\mathrm{d}x < \frac{\pi^2}{12}$.

证明. 利用基本不等式, 有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{\ln(1+x)}{x}}\,\mathrm{d}x \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{\ln^2(1+x)}{x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{\ln(1+x)}{x}} \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{\ln^2(1+y)}{y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&< \frac{1}{3}\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+y)}{y} + \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

□

7. 令 Σ 为平面直角坐标系中以点 $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$ 为顶点的正方形区域. 证明: $\left(\iint_\Sigma \mathrm{e}^{|x|+|y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/2} < 2\int_0^{\sqrt{2}/2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

证明. 记 Σ_1 为 Σ 与第一象限的交, 则由对称性有

$$\iint_\Sigma \mathrm{e}^{|x|+|y|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_{\Sigma_1} \mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

记 $\Sigma_2=\left\{(x,y)\big|0\leqslant x,y\leqslant\sqrt{2}/2\right\}$ 注意到

$$2\int_0^{\sqrt{2}/2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{2}/2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{2}/2}\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y\geqslant 2\sqrt{\iint_{\Sigma_2}\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\geqslant 2\sqrt{\iint_{\Sigma_1}\mathrm{e}^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y},$$

从而结论成立. 最右侧不等号成立的原因为 Σ_2 与 Σ_1 面积相同, 但 $x+y$ 在 Σ_2 中的值不小于在 Σ_1 中的值. □

8. 设函数 $f\in C[a,b]$, 且 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M(\forall x\in[a,b])$. 证明:

$$(b-a)^2\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(m+M)^2}{4Mm}(b-a)^2.$$

证明. 左侧由 Cauchy 不等式有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\,\mathrm{d}x\right)^2=(b-a)^2.$$

注意到

$$0\geqslant\frac{(f(x)-M)(f(x)-m)}{f(x)}=f(x)+\frac{Mm}{f(x)}-(M+m),$$

即有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b\frac{Mm}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant(M+m)(b-a),$$

又

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b\frac{Mm}{f(x)}\,\mathrm{d}x\geqslant 2\sqrt{Mn}\sqrt{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x},$$

从而结论成立. □

9. 对以下闭区域 W, 计算 $E=\{(x,y)\big|\exists x\in\mathbb{R},\text{ s.t. }(x,y,z)\in W\}$, 以及 $F_{y,z}=\{x\big|(x,y,z)\in W\}(\forall(y,z)\in E)$. 进而化 $\iiint_W f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 为先对 x 积分再对 (y,z) 积分的累次积分:

(1) $W=\{(x,y,z)\big|x,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant xy\}$;

(2) $W=\{(x,y,z)\big|x,y\geqslant 0,0\leqslant z\leqslant x+y\leqslant 1\}$.

解. (1)

(2) ■

8.5 $\mathcal{B}$

1. 设 $f\in C(\mathbb{R})$ 是双射, 有不动点, 又满足 $f(2x-f(x))=x(\forall x\in\mathbb{R})$. 证明 $f(x)\equiv x$.

证明. 由题设有

$$f(x)+f^{-1}(x)=2x,\quad\forall x\in\mathbb{R}.$$

设 $g(x)=f(x)-x$, 首先, 归纳证明

$$f\left(x+kg(x)\right)=x+(k+1)\,g(x),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

根据定义, 对 $k=0$ 成立. 假设

$$f\left(x \pm (k-1)g(x)\right) = x + \pm kg(x), \quad k \in \mathbb{Z},$$

那么

$$f(x \pm kg(x)) = 2\left(x \pm kg(x)\right) - f^{-1}\left(x + \pm kg(x)\right)$$
$$=2\left(x \pm kg(x)\right) - x\left(x \pm (k-1)g(x)\right) = x \pm (k+1)\, g(x),$$

归纳完成.

假设 $g(x) < g(y)$ 对于某些 $x, y \in \mathbb{R}$ 成立, 那么可以选择 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $x - kg(x) > y - kg(y)$. 注意 f 是增函数, 否则 f 与 f^{-1} 是减函数, 这与 $2x = f(x) + f^{-1}(x)$ 矛盾. 因此, f 的 n 次迭代 $f^{(n)}$ 也是一个增函数. 由此可见

$$f^{(n)}\left(x - kg(x)\right) \geqslant f^{(n)}\left(y - kg(y)\right),$$

由于 $f^{(n)}(x)\left(x - kg(x)\right) = f^{(n-1)}\left(x + (1-k)kg(x)\right) = \cdots = x + (n-k)g(x)$, 类似的

$$f^{(n)}\left(x - kg(x)\right) = y + (n-k)g(y),$$

得到

$$x + (n-k)g(x) \geqslant y + (n-k)g(y),$$

但这并不适用于所有 n 足够大的情况, 否则

$$\frac{x}{n-k} + g(x) \geqslant \frac{y}{n-k} + g(y),$$

令 $n \to +\infty$, 得到 $g(x) \geqslant g(y)$ 矛盾. 所以 $g(x)$ 是常数, 因此 $f(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$, 又因 $f(x)$ 有不动点, 从而 $f(x) \equiv x$. □

2. 如果 φ 是 $[0, +\infty)$ 上单调增加的非负函数, 特别的, $\varphi(0)$ 不一定为零, φ 不一定严格单调, 且 $\varphi(+\infty)$ 不一定为 $+\infty$. 尝试建立相应的 Young 不等式.

证明. □

3. 设 $f \in C^1[0, h]$, $f(0) = f(h) = 0$, 证明: $\displaystyle\int_0^h |f(x)f'(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{h}{4}\int_0^h |f'(x)|^2\, \mathrm{d}x$, 且系数 $\dfrac{h}{4}$ 不可改进.

证明. 由 $f(0) = 0$ 有

$$|f(x)| = \left|\int_a^x f'(t)\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |f'(t)|\, \mathrm{d}t =: F(x),$$

同理由 $f(h)=0$ 得到 $|f(x)|=\left|\int_h^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_h^x|f'(t)|\,\mathrm{d}t=:G(x)$. 于是有

$$\begin{aligned}\int_0^h|f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x&=\int_0^{h/2}|f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x+\int_{h/2}^h|f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^{h/2}F(x)F'(x)\,\mathrm{d}x+\int_{h/2}^h G(x)G'(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}F^2\left(\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{2}G^2\left(\frac{h}{2}\right),\end{aligned}$$

而

$$F^2\left(\frac{h}{2}\right)=\left(\int_0^{h/2}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2,\quad G^2\left(\frac{h}{2}\right)=\left(\int_{h/2}^h|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2,$$

再由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\int_0^{h/2}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_0^{h/2}1^2\,\mathrm{d}x\int_0^{h/2}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{h}{2}\int_0^{h/2}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

同理 $\left(\int_{h/2}^h|f'(x)|\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\frac{h}{2}\int_{h/2}^h|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x$, 即证原不等式.

等号成立当且仅当

$$f(x)=\begin{cases}cx, & 0\leqslant x\leqslant h/2,\\ -c(x-h), & h/2\leqslant x\leqslant h,\end{cases}$$

上述函数满足 $f(0)=f(h)=0$, 若还要求 $f(x)$ 导数连续, 只有取 $f(x)\equiv 0$, 若不然, $f(x)$ 在 $x=\frac{h}{2}$ 处不可微, 即知 $\frac{h}{4}$ 不能再小. 实际上, 这正是华罗庚-Opial 不等式. □

4. 设 F 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上有连续的四阶偏导数, 满足 $\left|\frac{\partial^4F(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\right|\leqslant M$, $F(x,0)=F(x,1)=0=F(0,y)=F(1,y)=0(\forall x,y\in[0,1])$. 证明: $\left|\int_{[0,1]\times[0,1]}F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{M}{144}$.

证明. 先记 $D=\{(x,y)|0\leqslant x,y\leqslant 1\}$, 考虑积分 $\iint_D x(1-x)y(1-y)\frac{\partial^4F}{\partial x^2\partial y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 一方面, 有

$$\left|\iint_D x(1-x)y(1-y)\frac{\partial^4F}{\partial x^2\partial y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\left|M\int_0^1x(1-x)\,\mathrm{d}x\int_0^1y(1-y)\,\mathrm{d}y\right|=\frac{M}{36}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&\iint_D x(1-x)y(1-y)\frac{\partial^4F}{\partial x^2\partial y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1x(1-x)y(1-y)\frac{\partial^4F}{\partial x^2\partial y^2}\,\mathrm{d}y\\=&\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1x(1-x)y(1-y)\,\mathrm{d}\left(\frac{\partial^3F}{\partial x^2\partial y}\right)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1x(1-x)(2y-1)\frac{\partial^3F}{\partial x^2\partial y}\,\mathrm{d}y\\=&\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1x(1-x)(2y-1)\,\mathrm{d}\left(\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 2x(1-x)\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\,\mathrm{d}y\\=&2\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1x(1-x)\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x=4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1F(x,y)\,\mathrm{d}y=4\iint_D F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

从而有 $4\left|\int_{[0,1]\times[0,1]}F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{M}{36}$. 即得结论. □

8.6　重积分变量代换

8.6 $\mathcal{A}$

1. 计算 $\displaystyle\iiint\limits_{4x^2+4y^2+z^2\leqslant 4x+4y+z}\left(4x^2+4y^2+z^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$

解. 记原积分为 I, 于是

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{4(x-1/2)^2+4(y-1/2)^2+(z-1/2)^2\leqslant 9/4}\left(4x^2+4y^2+z^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z && \text{(整理)}\\
&= \iiint\limits_{4x^2+4y^2+z^2\leqslant 9/4}\left(4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z && \text{(平移变换)}\\
&= \iiint\limits_{4x^2+4y^2+z^2\leqslant 9/4}\left(4x^2+4y^2+z^2+\frac{9}{4}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z && \text{(奇数次项积分为 0)}\\
&= \frac{27}{32}\cdot\frac{9}{4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\left(x^2+y^2+z^2+1\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z && \text{(伸缩变换)}
\end{aligned}$$

最后利用球坐标变换有

$$I=\frac{27}{32}\cdot\frac{9}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left(r^2+1\right)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{81\pi}{20}.$$

■

2. 计算由 $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$ 所围成的有界区域 D 的面积 (其中 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$).

解. 即计算 $\displaystyle\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 令 $u=a_1x+b_1y+c_1, v=a_2x+b_2y+c_2$, 则

$$\left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right|=\left|\frac{1}{\det\left(\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)}\right|=\left|\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}\right|,$$

于是 $\displaystyle\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}\frac{1}{|a_1b_2-a_2b_1|}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}.$ ■

3. 计算积分 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{e}^{y/(x+y)}\,\mathrm{d}y.$

解. 置 $x+y=u, y=v$, 不难得到

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{e}^{y/(x+y)}\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^u\mathrm{e}^{v/u}\,\mathrm{d}v=\int_0^1(\mathrm{e}-1)u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).$$

■

4. 设 f 在点 0 处可导,$f(0)=0, \varOmega_t=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 2tz\}$. 求 $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^5}\iiint_{\varOmega_t}f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$

解. 记原极限为 I. 做变量代换

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z=t+r\cos\varphi,\end{cases}\qquad\theta\in[0,2\pi],\varphi\in[0,\pi],r\geqslant 0.$$

则当 $t>0$ 时,

$$\frac{1}{t^5}\iiint_{\Omega_t} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{t^5}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2+t^2+2tr\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$
$$=\frac{2\pi}{t^2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f(t^2r^2+t^2+2t^2r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r,$$

对于任何 $t\in(0,1]$, 我们有

$$\frac{2\pi}{t^2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left|f(t^2r^2+t^2+2t^2r\cos\varphi)-f'(0)(t^2r^2+t^2+2t^2r\cos\varphi)\right|r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$
$$\leqslant\frac{2\pi}{t^2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(t^2r^2+t^2+2t^2r\cos\varphi)\omega(t^2r^2+t^2+2t^2r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$
$$\leqslant 2\pi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 4\omega\left(4t^2\right)\,\mathrm{d}r=8\pi^2\omega\left(4t^2\right),$$

其中 $\omega(r)=\sup\limits_{0<|x|\leqslant r}\left|\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)\right|$ 满足 $\lim\limits_{r\to0+}\omega(r)=0$. 所以

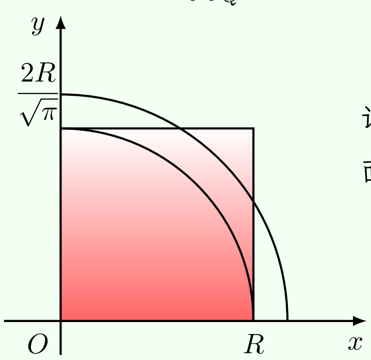
$$I=\lim_{t\to0+}\frac{2\pi}{t^2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 f'(0)\left(t^2r^2+t^2+2t^2r\cos\varphi\right)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{32\pi}{15}f'(0).$$ ■

5. 设 $R>0$, 证明: $\sqrt{\dfrac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-R^2})}\leqslant\displaystyle\int_0^R\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{\dfrac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-4R^2/\pi})}$.

证明. 记 $P=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant R^2,x,y\geqslant0\}$, $Q=\{(x,y)|0\leqslant x,y\leqslant R\}$, 易见 $P\subset Q$, 并且

$$\iint_P\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^R\mathrm{e}^{-r^2}r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-R^2}\right),$$

故 $\dfrac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-R^2}\right)\leqslant\displaystyle\iint_Q\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left(\int_0^R\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$.



记 $C=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant4R^2/\pi,x,y\geqslant0\right\}$, 易见 $C\backslash Q$ 与 $Q\backslash C$ 面积相等, 但

$$\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\geqslant\mathrm{e}^{-4R^2/\pi},\quad(x,y)\in C\backslash Q,$$

而 $(x,y)\in Q\backslash C$ 时上述不等式反向, 故有

$$\left(\int_0^R\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2=\iint_Q\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant\iint_C\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R/\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-r^2}r\,\mathrm{d}r$$
$$=\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{4R^2/\pi}\right),$$

从而原不等式成立. □

8.6 $\mathcal{B}$

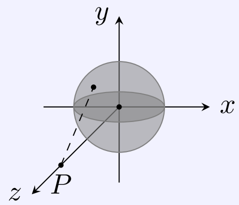
1. 试求半径为 R 密度为常值 ρ 的球体对于质量为 m 的质点 P 的万有引力.

解. 首先, 两质量分别为 m_1, m_2, 相距为 r 的质点之间的引力为

$$\boldsymbol{F}=\frac{Gm_1m_2}{r^2},$$

其中 G 为引力常数, 约为 $6.67\times10^{-11}N\cdot m^2/kg^2$.

现在, 我们不妨记题设球体为 $D=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$, 质点 P 坐标为 $(0,0,p)$.



在球中任取一点 $Q(x,y,z)$, 环绕 Q 取一体积微元 $\mathrm{d}V$, $\mathrm{d}V$ 与 P 之间的引力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(x,y,z)=\frac{Gm\rho\,\mathrm{d}V}{x^2+y^2+(z-p)^2},$$

方向由 P 指向 Q, 我们记 $\angle QPO=\alpha$, 则 $\boldsymbol{F}$ 沿 z 轴方向与垂直 z 轴方向的分量为

$$\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}\cos\alpha,\quad \boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{F}\sin\alpha,$$

注意到 $\cos\alpha=\dfrac{p-z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-p)^2}}$, 于是

$$\boldsymbol{F}=\iiint_D\frac{Gm\rho(p-z)}{(x^2+y^2+(z-l)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}V,$$

■

2. 设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 为区域, $\psi:\Omega\to\mathbb{R}^m$ 连续可微. 若 E 为 Ω 的紧子集, 证明: 存在连续模 ω 使得

$$\|\psi(\boldsymbol{y})-\psi(\boldsymbol{x})-\psi_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\|\leqslant\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|\,\omega\left(\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|\right)$$

8.7　函数的光滑逼近

8.7 $\mathcal{A}$

1. 证明函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-1/x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

任意次可导.

证明. 易见 $x\neq 0$ 时 φ 任意次可导. $x=0$ 时有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x}=0=\lim_{x\to 0^-}\frac{0-0}{x},$$

则

$$\varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x^2}, & , \quad x>0\\ 0 & x\leqslant 0.\end{cases}$$

归纳可证

$$\varphi^{(n)}(x)=\begin{cases}P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

其中 $P_n(x)$ 为一 $2n$ 次多项式. $n=1$ 已经满足, 设 $\varphi^{(n)}(x)$ 如上式所示, 那么

$$\lim_{x\to 0^+}=\frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{tP(t)}{\mathrm{e}^t}=0,$$

且有

$$\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}\right)'=P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x}+\frac{1}{x^2}P_n(x)\mathrm{e}^{-1/x}=P_{n+1}(x)\mathrm{e}^{-1/x},$$

从而 $\varphi(x)$ 任意次可导. □

2. 设 $b>a, n>\dfrac{4}{b-a}$. 证明: 存在 $g_n\in C_c^\infty\left((a,b);[0,1]\right)$ 满足 $\operatorname{supp} g_n=\left[a+\dfrac{1}{n}, b-\dfrac{1}{n}\right]$, $g_n\big|_{[a+2/n,b-2/n]}\equiv 1$ 以及 $|g'|\leqslant nM$, 其中 M 是一个与 n 无关的一个常数.

证明. □

3. 设 $\alpha>0, f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. 定义 $F(x)=\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_x^{x+\alpha}f(t)\,\mathrm{d}t(\forall x\in\mathbb{R})$. 证明:

(1) 若 f 是单调函数, 则 F 也是单调函数.

(2) 若 f 是凸函数, 则 F 也是凸函数.

(3) 若 f 有连续的 n 阶导数, 且 $f^{(n)}\geqslant 0$, 则 $F^{(n)}\geqslant 0$.

证明. (1) 不妨设有连续单增的函数 $g(x)$, 记 $G(x)=\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_x^{x+\alpha}g(t)\,\mathrm{d}t$, 于是有

$$G'(x)=\frac{1}{\alpha}\left(g(x+\alpha)-g(\alpha)\right)\geqslant 0,$$

从而对于连续函数, 上述结论成立. 而一般的 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, 我们知道对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $g(x)\in C_c(\mathbb{R})$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}}|g(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon,$$

从而 $\forall x_1>x_2$, 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha}\left|\int_{x_1}^{x_1+\alpha}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{x_2}^{x_2+\alpha}f(t)\,\mathrm{d}t-\left(\int_{x_1}^{x_1+\alpha}g(t)\,\mathrm{d}x-\int_{x_2}^{x_2+\alpha}g(t)\,\mathrm{d}t\right)\right|\\ =&\frac{1}{\alpha}\left|\int_{x_1}^{x_1+\alpha}\left(f(t)-g(t)\right)\,\mathrm{d}t-\int_{x_2}^{x_2+\alpha}\left(f(t)-g(t)\right)\,\mathrm{d}t\right|\\ \leqslant&\frac{1}{\alpha}\left(\int_{x_1}^{x_1+\alpha}|g(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{x_2}^{x_2+\alpha}|g(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{2}{\alpha}\varepsilon.\end{aligned}$$

有 ε 的任意性可知原命题成立. □

4. 设 $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}), \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 非负且恒不为零. 定义 $F = f * \varphi$. 证明对于这样定义的函数 F, 也具有第 3 题中所列的性质.

5. 若对任何 $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 上的一元实函数 f 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 进一步, f 在一个区间内有界. 证明: 存在常数 c 使得 $f(x) = cx (\forall x \in \mathbb{R})$.

8.7 $\mathcal{B}$

1. 试利用 Weierstrass 第一逼近定理证明 Weierstrass 第二逼近定理.

证明. 若 $g(x)$ 是以周期为 2π 的连续偶函数, 则由 Weierstrass 第一逼近定理, 存在定义在 $[-1,1]$ 上的多项式 $P(x)$ 使得

$$|g(\arccos x) - P(x)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \in [-1,1],$$

从而

$$|g(x) - P(\cos x)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \in [0,\pi].$$

注意到 $g(x)$ 为偶函数, 可得

$$|g(x) - P(\cos x)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \mathbb{R}.$$

于是存在周期为 2π 的三角多项式 $Q_1(x), R_1(x)$ 使得

$$\left|\frac{f(x)+f(-x)}{2} - Q_1(x)\right| \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
$$\left|\frac{f(x)-f(-x)}{2}\sin x - R_1(x)\right| \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

进而令 $P_1(x) = Q_1(x)\sin^2 x + R_1(x)|\sin x|$, 得

$$|f(x)\sin^2 x - P_1(x)| \leqslant \varepsilon \sin^2 x + \varepsilon|\sin x| \leqslant 2\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

类似地, 存在周期为 2π 的三角多项式 $P_2(x)$ 使得

$$\left|f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\sin^2 x - P_2(x)\right| \leqslant 2\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

从而

$$\left|f(x)\cos^2 x - P_2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 2\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

最后, 取 $P(x) = P_1(x) + P_2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, 得到

$$|f(x) - P(x)| \leqslant 4\varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

从而得到 Wererstrass 第二逼近定理. □

2. 试利用 Weierstrass 第二逼近定理证明 Weierstrass 第一逼近定理.

证明. 设 $f(x) \in C[0,1]$. 定义

$$F(x) = f(|\cos x|), \quad x \in \mathbb{R},$$

则 F 是 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数. 由 Weierstrass 第二逼近定理. $\forall \varepsilon > 0$, 存在三角多项式 $S_n(x)$ 使得 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - F(x)| \leqslant \varepsilon$. 令 $T_n(x) = \dfrac{S_n(x) + S_n(-x)}{2}$ 并注意到 F 为偶函数, 得 $\sup\limits_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} |T_n(x) - F(x)| \leqslant \varepsilon$. 由于三角多项式 T_n 可表示为 $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}\cos^k x, x \in \mathbb{R}$, 从而

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k - f(x) \right| \leqslant \varepsilon,$$

即 Weierstrass 第一逼近定理成立. □

3. 将习题 8.7.$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 中的第 2 题推广到高维情形: 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域. 对于 $\delta > 0$, 取区域 Ω 使得 $D \subset\subset \Omega$, $\inf\limits_{\boldsymbol{x}\in D, \boldsymbol{y}\in\partial\Omega} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \geqslant \delta$. 证明: 存在 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, 满足 $0 \leqslant \varphi \leqslant 1, \varphi\big|_D \equiv 1$ 以及 $|\nabla\varphi| \leqslant \dfrac{M}{\delta}$, 其中 M 是与 δ 无关的一个常数.

4. 设 $\mathbb{R}$ 上可测实函数 f 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 证明: 存在常数 c 使得 $f(x) = cx (\forall x \in \mathbb{R})$.

提示: 存在闭集 $E \subset [0,1]$, 使得 $|E| > \dfrac{3}{4}$ 且 f 限制在 E 上连续. 证明: $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \subset E - E$.

5. 设 $\mathbb{R}$ 上可测实函数 f 中点凸. 证明: f 是凸函数.

6. 在 Weierstrass 逼近定理的证明中, 一个重要的思想是利用 **Bernstein(伯恩斯坦)** 多项式, 设 f 是 $[0,1]$ 上的函数, 其 Bernstein 多项式定义为

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1].$$

试证明:

(1) 对任何 $x \in [0,1]$, 有 $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$.

(2) 设 $f \in C[0,1]$, 证明: $\{B_n(f;x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 $f(x)$.

7. 设 $T : C[a,b] \to C[a,b]$ 是线性算子, 若对任何非负的 $f \in [a,b]$, 都有 Tf 非负, 则称 T 是正线性算子. 试证明如下的 **Korovkin(科罗夫金)** 定理: 设 $\{T_n\}$ 是 $C[a,b] \to C[a,b]$ 的一列正线性算子, 若对于 $f(x) = 1, x, x^2$, $\{T_n f\}$ 均在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 则对任何 $f \in C[a,b]$, $\{T_n f\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.

8. 验证第 5 题给出的 B_n 是 $C[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的正线性算子, 且对于 $f(x) = 1, x, x^2$, $\{T_n f\}$ 均在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f.

8.8　光滑逼近的应用

Theorem 8.8.1

设 q, r 为对偶数, 函数 g 以 $T>0$ 为周期, $g\big|_{[0,T]} \in L^r[0,T], f \in L^q[a,b]$, 则

$$\lim_{p\to+\infty} \int_a^b f(x)g(px)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Theorem 8.8.2

设 f 在 $[0,1]$ 上 Riemma 可积, s 是无理数, 则

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\{ks\}) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

8.8 $\mathcal{A}$

1. 计算极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^2|\sin nx|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解. 由定理 8.8.1, 立即可得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^2|\sin nx|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}.$$ ■

2. 设 $[0,+\infty)$ 上的非负连续函数 f 单调递减, $F(x)=\displaystyle\int_0^x (x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t(\forall x\geqslant 0)$, 证明 F 是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数.

证明. 我们只需证明 $F'(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - xf(x)$ 单增, 任取 $0<x_1<x_2$, 则 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$, 又

$$\begin{aligned}
F(x_2)-F(x_1) &= \int_0^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t - x_2 f(x_2) - \int_0^{x_1} f(x_1)\,\mathrm{d}t + x_1 f(x_1)\\
&= \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t + x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)\\
&\geqslant (x_2-x_1)f(x_2) + x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2) = x_1\left(f(x_1)-f(x_2)\right)\geqslant 0.
\end{aligned}$$

从而 F 为凸函数. □

3. 设 g 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 证明存在 $[a,b]$ 上连续可导的单调函数列 $\{g_n\}$ 使得 $g_n(a)=g(a), g_n(b)=g(b)$, $\displaystyle\max_{x\in[a,b]}|g_n(x)|\leqslant M_g=\max_{x\in[a,b]}|g(x)|$ 以及 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b |g_n(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=0$.

证明. □

4. 将定理 8.8.1 推广到高维情形. 设 p,q 为对偶数, $E\in\mathbb{R}^n$ 为有界可测集, $f\in L^p(E)$. Q 为矩形 $[0,a_1]\times[0,a_2]\times\cdots\times[0,a_n]$, 函数 g 以 Q 为周期, 即对任何 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 以及 $1\leqslant k\leqslant n$ 成立 $g(\boldsymbol{x}+a_k\boldsymbol{e}_k)=g(\boldsymbol{x})$. 证明: 若 $g\big|_Q\in L^q(Q)$, 则

$$\lim_{p\to\infty}\int_E f(\boldsymbol{x})g(p\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{|Q|}\int_E g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\int_E f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

5. 设 $f\in C(a,b)$, 证明:

(1) 若对任何 $a<x_1<x_2<b$, 成立 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{x_2-x_1}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,\mathrm{d}x$, 则 f 为凸函数.

(2) 若对任何 $a<x_1<x_2<b$, 成立 $\dfrac{1}{x_2-x_1}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则 f 为凸函数.

证明. (1) 我们分两步证明:

(i) 设 f 有连续的二阶导数. 固定 x 并令 $\delta>0$ 充分小. 则由题设,

$$f(x)\leqslant\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

即

$$0\leqslant\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\left(f(t+x)-f(x)\right)\,\mathrm{d}t.$$

于是

$$0\leqslant\lim_{\delta\to0^+}\frac{3}{\delta^3}\int_{-\delta}^{\delta}\left(f(t+x)-f(x)\right)\,\mathrm{d}t=\lim_{\delta\to0^+}\frac{f(\delta+x)+f(x-\delta)-2f(x)}{\delta^2}=f''(x).$$

因此 f 是区间 (a,b) 内的凸函数.

(ii) 任取 $\delta\in\left(0,\dfrac{b-a}{4}\right)$. 令 $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{\delta}{2}\right)$,

$$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_x^{x+\varepsilon}\mathrm{d}t\int_t^{t+\varepsilon}f(s)\,\mathrm{d}s,\qquad\forall\in(a+\delta,b-\delta).$$

则 f_ε 有连续的二阶导数, 且易见对任何 $a+\delta<x_1<x_2<b-\delta$ 成立

$$f_\varepsilon\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x.$$

所以由 (i) 的结论. f_ε 是 $(a+\delta,a-\delta)$ 内的凸函数. 即

$$f_\varepsilon(\alpha x+\beta y)\leqslant\alpha f_\varepsilon(x)+\beta f_\varepsilon(y),\quad\forall x,y\in(a+\delta,b-\delta);\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1.$$

令 $\varepsilon\to0^+$, 注意到

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}f_\varepsilon(x)=f(x),$$

即得

$$f(\alpha x+\beta y)\leqslant\alpha f(x)+\beta f(y),\quad\forall x,y\in(a+\delta,b-\delta);\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1.$$

由 δ 的任意性, 即得 f 是 (a,b) 内的凸函数.

(2) 类似于 (1), 我们不妨假设 f 有连续的二阶导数. 此时, 固定 x 并令 $\delta>0$ 充分小, 则由题设,

$$\frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{f(x+\delta)+f(x)}{2},$$

即

$$0\leqslant\delta f(x+\delta)+\delta f(x)-2\int_x^{x+\delta}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

于是

$$0\leqslant\lim_{\delta\to0^+}\frac{\delta f(x+\delta)+\delta f(x)-2\int_x^{x+\delta}f(t)\,\mathrm{d}t}{\delta^3/6}=\lim_{\delta\to0^+}\frac{\delta f'(x+\delta)+f(x)-f(x+\delta)}{\delta^2/2}=f''(x),$$

因此 f 是凸函数. □

6. 设 $f \in C[0,1]$, 且对任何 $n \geqslant 0$, 成立 $\int_0^1 f(x)x^{2n}\,\mathrm{d}x = 0$. 证明 $f \equiv 0$.

7. 设 $f \in L^1[a,b], N \geqslant 0$, 且对任何 $n \geqslant N$, 成立 $\int_a^b f(x)x^n\,\mathrm{d}x$. 证明: f 在 $[a,b]$ 上几乎处处等于零.

证明. □

8. 设 $f \in L^1[a,b]$, 且对 $n = 1,2,\cdots$ 成立 $\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0$. 证明: f 在 $[0,\pi]$ 上几乎处处等于某个函数.

9. 对于 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 及 $k \in \mathbb{N}$, 记 $M_k(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} t^k\varphi(t)\,\mathrm{d}t$. 设 $\eta \in C_c^\infty$ 满足 $M_0(\eta) = 1$. 证明:

(1) $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 是某个 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 的导函数的充要条件是 $M_0(\varphi) = 0$.

(2) 对任何 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \varphi - M_0(\varphi)\eta$ 是某个 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 的导函数.

(3) $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 是某个 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 的二阶导数的充要条件是 $M_0(\varphi) = M_1(\varphi) = 0$.

(4) 对任何 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \varphi - M_0(\varphi)\eta + (M_1(\varphi) - M_0(\varphi)M_1(\eta))\,\eta'$ 是某个 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 的二阶导数.

10. 设 $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}), g \in C(\mathbb{R})$, 且对任何 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 成立

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi''(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: f 几乎处处等于某个二阶连续可微的函数 G, 其中 $G'' = g$.

证明. □

8.8 $\mathscr{B}$

1. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ 两两不同, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m \in \mathbb{C}$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^m \alpha_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\lambda_k} = 0$. 试用多种方法证明: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$.

2. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 证明: 对任何 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, 方程 $\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ 满足初值 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ 的解 $\boldsymbol{x}(\cdot;\boldsymbol{x}_0)$ 均满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值具有负实部.

3. 对于 $k \geqslant 2$, 仿习题 8.8.$\mathscr{A}$ 第 9 题给出 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 是某个 $\psi \in C_c^\infty$ 的 k 阶导数的充要条件, 并计算 $c_0,c_1,\cdots,c_k$ 使得 $\varphi - \sum\limits_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!}c_j\eta^{(j)}$ 是某个 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 的 k 阶导数, 其中 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $\int_{\mathbb{R}} \eta(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

4. 设 $f,g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}), k \geqslant 1$, 且对任何 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^k\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

试仿习题 8.8.$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ 第 4 题和第 10 题给出 f 与 g 的关系并给出证明.

5. 推广定理 8.8.2: 设 f 在 $[0,1]^m$ 上 Riemann 可积, 又对任何不全为零的整数 $n_1,n_2,\cdots,n_m$,

$\sum\limits_{k=1}^{m} n_k s_k$ 均为无理数, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\{ks_1\},\{ks_2\},\cdots,\{k_{s_n}\}\right)=\int_{[0,1]^n} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

6. 证明: 在第一题中, 将条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\lambda_k}=0$ 减弱为 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\in\mathbb{Q}}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\lambda_k}=0$, 结论仍然成立.

7. 试进一步减弱第 1 题或它的一些特例的条件.

8.9　附录

8.9 $\mathcal{A}$

1.
(1) 试构造 $\mathbb{R}$ 上严格单增的 C^{∞} 函数 f, 使得 $E=\{f'=0\}$ 具有正测度.

(2) 证明: $f(E)$ 是闭零测度集.

(3) 令 $F=\mathbb{R}\backslash f(E), g=\chi_F$. 证明: g 在 $\mathbb{R}$ 上局部 Riemann 可积, 当有界闭区间 $[a,b]$ 与 E 的交集测度非零时, $g\circ f$ 在 $[a,b]$ 上不是 Riemann 可积的.

8.9 $\mathcal{B}$

1. 设 f 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续可微函数, $\{f'=0\}$ 是零测度集, $f([a,b])=[c,d]$. 证明: 对于 $[c,d]$ 上的 Riemann 可积函数 g, 复合函数 $g\circ f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

证明. □

第 9 章　函数列与函数项级数

9.1　函数列与函数项级数的一致收敛及其性质

9.1 $\mathcal{A}$

1. 利用有限覆盖定理证明 Dini 定理.

证明. 由于 $f_n(x) \to f(x)(n \to +\infty)$, 则对于 $\forall \varepsilon > 0, x_0 \in [a,b], \exists N_{(x_0)} \in \mathbb{N}$ 使得

$$\left|f_{N_{(x_0)}}(x) - f(x)\right| < \frac{1}{3}\varepsilon,$$

则

$$\left|f_{N_{x_0}}(x) - f(x)\right| \leqslant \left|f_{N_{x_0}}(x) - f(x)\right| + \left|f_{N_{x_0}}(x) - f_{N_{x_0}}(x_0)\right| + |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

又因为对于固定的 $x_0 \in [a,b]$, 当 $n > N_{x_0}$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \left|f_{N_{x_0}}(x) - f(x)\right| < \varepsilon,$$

取区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖

$$H = \{U(x_i, \delta_{x_i}) \big| x_i \in [a,b], i \in \Lambda\},$$

其中 δ_{x_i} 满足 $\exists N_{x_i}$, 当 $n > N_{x_i}$, $x \in U(x_i, \delta_{x_i})$ 时有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

利用有限覆盖定理选取有限覆盖即证结论. □

2. 试考察本节例题中那些函数列 (函数项级数) 的一致收敛性可用 Dini 定理解决.

3. 设函数 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, 而且 $\forall x \in \mathbb{R}, n \geqslant 1$, 有 $\left|f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)\right| < \dfrac{1}{n^2}$. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{(n)}(x) = C\mathrm{e}^x$, 其中 C 为一常数.

证明. 由题设可知对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)\right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)\right|$ 收敛. 于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} \left|f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x)\right|\right| < \varepsilon,$$

任取 $k > j > N$, 则有

$$\begin{aligned}\left|f^{(k)}(x) - f^{(j)}(x)\right| &= \left|f^{(k)}(x) - f^{(k-1)}(x) + f^{(k-1)}(x) - \cdots + f^{(j+1)}(x) - f^{(j)}(x)\right| \\ &\leqslant \left|f^{(k)}(x) - f^{(k-1)}(x)\right| + \left|f^{(k-1)}(x) - f^{(k-2)}(x)\right| + \cdots + \left|f^{(j+1)}(x) - f^{(j)}(x)\right| < \varepsilon,\end{aligned}$$

从而 $\{f^{(n)}(x)\}$ 一致收敛, 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{(n)}(x)=F(x)$, 则有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{(n+1)}(x)=F'(x)$, 从而 $F(x)=F'(x)$, 容易解得 $F(x)=C\mathrm{e}^x$. □

4. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1^2}{n^3}\right)\left(1+\dfrac{2^2}{n^3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^2}{n^3}\right)$.

解. 取对数. 注意到 $-\dfrac{1}{2}x^2<\ln(1+x)-x<0(\forall x\in(0,1))$, 所以

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^6}<\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)-\frac{k^2}{n^3}\right]<0,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^6}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x=0.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k^2}{n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n^3}=\dfrac{1}{3}$, 即

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1^2}{n^3}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^3}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^3}\right)=\mathrm{e}^{1/3}.$$ ■

还有另一种行之有效的方法, 使用不等式

$$\frac{k}{n+k}<\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)<\frac{k}{n},$$

我们有

$$\frac{k}{n^3+k}<\ln\left(1+\frac{k}{n^3}\right)<\frac{k}{n^3},$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+n^2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2}<\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3},$$

而 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, 代入即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k^2}{n^3}\right)=\dfrac{1}{3}$.

5. 设 $\{g_n\}$ 是 $[a,b]$ 上一致有界的可测函数列, $f_n(x)=\alpha_n+\displaystyle\int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t(x\in[a,b];n\geqslant1)$, $\{\alpha_n\}$ 收敛. 进一步, 以下条件之一成立:

(i) $\{g_n\}$ 在 $[a.b]$ 上一致收敛到 g, 且对每个 $n\geqslant1$, $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x g_n(x)\,\mathrm{d}t=g_n(a)$.

(ii) g_n 在 $[a.b]$ 上几乎处处收敛到 g, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t=g(a)$.

证明: $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到某个函数 f, 且 f 在点 a 的右导数等于 $g(a)$.

证明. □

9.1 $\mathcal{B}$

1. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上收敛. 若对任何 $\varepsilon>0$ 及 $N\geqslant1$, 存在区间 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_k,b_k)$

以及 $n_1, n_2, \cdots, n_k \geqslant N$ 使得 $\bigcup\limits_{j=1}^{k}(a_j, b_j) \supset [a,b]$, 且

$$\left|\sum_{l=n_j}^{\infty} u_l(x)\right| \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \in (a_j, b_j) \cap [a,b]; j = 1, 2, \cdots, k,$$

则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(\cdot)$ 在 $[a,b]$ 上拟一致收敛.

证明: 若 u_n 都在 $[a,b]$ 上连续 $(n \geqslant 0)$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 在 $[a,b]$ 上连续当且仅当它在 $[a,b]$ 上拟一致收敛.

证明. □

2. 试将上一题的结果推广到 $\mathbb{R}^n$ 中.

3. 设 $\{f_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的实连续函数列, 它在 $\mathbb{R}^n$ 上逐点收敛于 f. 试证明以下结论:

(i) $F = \bigcup\limits_{\substack{p<q \\ p,q\in\mathbb{Q}}} \left[f^{-1}(p,q) \backslash \left(f^{-1}(p,q)\right)^{\circ}\right]$ 是 f 上不连续点全体.

(ii) 对于 $p < q$,

$$\begin{aligned} f^{-1}\left((p,q)\right) &= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \exists m, k \geqslant 1, \text{s.t.}\, p + \frac{1}{m} \leqslant f_j(\boldsymbol{x}) \leqslant q - \frac{1}{m}, \forall j \geqslant k\right\} \\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \middle| p + \frac{1}{m} \leqslant f_j(\boldsymbol{x}) \leqslant q - \frac{1}{m}\right\}. \end{aligned}$$

(iii) 集合 F 是一列无处稠密集的并.

(iv) 函数 f 一定有连续点.

4. 设 f 在区间 (a,b) 处处可导, 证明: f' 必有连续点.

5. 设 $\{a_n\}$ 是递增数列, $a_1 > 1$. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛的充要条件是 $\{a_n\}$ 有界. 又问级数通项中的 a_n 能不能换成 a_{n+1}?

证明. 充分性. 若 $\{a_n\}$ 有界, 设 $a_n \leqslant M$, 则

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}} \leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1 \ln a_1} = \frac{a_{m+1} - a_1}{a_1 \ln a_1} \leqslant \frac{M}{a_1 \ln a_1},$$

由此可知 $\sum\limits_{n=1}^{m} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛.

必要性. 若 $\sum\limits_{n=1}^{m} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛, 由于

$$\ln a_{n+1} - \ln a_n = \ln\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}\right) \leqslant \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n},$$

所以 $\dfrac{b_{n+1} - b_n}{b_{n+1}} \leqslant \dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$, 其中 $b_n = \ln a_n$, 因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{b_{n+1} - b_n}{b_{n+1}}$ 收敛.

有 Cauchy 收敛准则, 存在自然数 m, 使得对一切自然数 p, 有

$$\frac{1}{2} > \sum_{n=m}^{m+p} \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}} \geqslant \sum_{n=m}^{m+p} \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{m+p+1}} = 1 - \frac{b_m}{b_{m+p+1}}.$$

由此可知 $\{b_n\}$ 有界, 因为 p 是任意的, 所以 $\{a_n\}$ 有界.

题中级数的分母 a_n 不能换成 a_{n+1}. 如取 $a_n = \mathrm{e}^{n^2}$ 无界, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛. □

6. 对于二元函数 f, 考虑以下各种情形中两种运算的次序交换问题. 利用已学的结果, 你可以给出那些情形的结果:

	关于 y 的极限	关于 y 的积分	关于 y 的导数
关于 x 的极限	$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$	$\lim\limits_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\,\mathrm{d}y$	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$
关于 x 的积分		$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$	$\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$
关于 x 的导数			$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)$

7. 设 $a_n > 0$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛.

证明. 只需指出 $n = 2m (m \in \mathbb{N})$ 时有 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k} \leqslant 4\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ 即可. 为此, 对 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 作重新排列为 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, 则对正整数 $p \geqslant 1$, 我们有

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2p} \geqslant a_1+a_2+\cdots+a_{2p-1} \geqslant b_1+b_2+\cdots+b_{2p-1} \geqslant pb_p,$$
$$\frac{2p-1}{a_1+\cdots+a_{2p-1}} \leqslant \frac{2p-1}{pb_p} < \frac{2}{b_p}, \qquad \frac{2p}{a_1+\cdots+a_{2p}} \leqslant \frac{2}{b_p},$$
$$\frac{2p-1}{a_1+\cdots+a_{2p-1}} + \frac{2p}{a_1+\cdots+a_{2p}} < \frac{4}{b_p}.$$

由此可得

$$\sum_{p=1}^{N}\left(\frac{2p-1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2p-1}} + \frac{2p}{a_1+\cdots+a_{2p}}\right) < \sum_{p=1}^{N}\frac{4}{b_p},$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_1+\cdots+a_k} \leqslant \sum_{p=1}^{n}\frac{4}{b_p} = 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}.$$

令 $n \to \infty$ 即证. □

8. 推广第 5 题. 比如考察单调增加趋于无穷的函数 f 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f(S_n) - f(S_{n-1}))$; 又或者考察在 $(0, M)$ 内单调下降且 $F(0^+) = +\infty$ 的函数 F 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(F(S_n^{-1}) - F(S_{n-1}^{-1})\right)$.

9.2　函数项级数一致收敛性的判别法

Theorem 9.2.1

考虑 $E \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的函数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(\cdot)v_k(\cdot)$. 设 $\{v_k(\cdot)\}$ 在 E 上一致有界, 对每个 $\boldsymbol{x} \in E$, 数列 $\{v_k(\boldsymbol{x})\}$ 单调.

(i) **(Abel 判别法)** 若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(\cdot)$ 在 E 上一致收敛, 则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(\cdot)v_k(\cdot)$ 在 E 上一致收敛.

(ii) **(Dirichlet 判别法)** 若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(\cdot)$ 的部分和函数列 $\left\{\sum\limits_{j=1}^{k} u_j(\cdot)\right\}$ 在 E 上一致有界, $\{v_k(\boldsymbol{x})\}$ 在 E 上一致收敛到零, 则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(\cdot)v_k(\cdot)$ 在 E 上一致收敛.

9.2 $\mathcal{A}$

1. 考察 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ 的连续性, 可微性.

解. 易见 $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, 由 Weierstrass 判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛, 因而和函数在 $\mathbb{R}$ 上连续.

考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ 形式求导后的级数 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$, 对于 $x \in (0, 2\pi)$, 有

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin nx\right| = \left|\frac{\cos(x/2) - \cos(N+1/2)x}{2\sin(x/2)}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}, \quad x \neq 2k\pi,$$

由 Dirichlet 判别法易见 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ 关于 $x \in (0, 2\pi)$ 内闭一致收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上连续可导.

记 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$, $S'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$. 下面考察 $S(x)$ 在 $x = 2k\pi$ 处得可微性, 只需讨论 $x = 0$ 的情况即可. 由于

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{x - \pi}{2}, \quad 0 < x < 2\pi,$$

事实上, 由 Dirichlet 判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{n}$ 收敛, 于是由 Abel 定理,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{n} &= \lim_{t\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} t^n}{n} = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1 - t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - t}{(t - \cos x)^2 + \sin^2 x}\,\mathrm{d}t = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) + \frac{\mathrm{i}(\pi - x)}{2},\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right), \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

则有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\pi}{2}=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to 2\pi^-}\frac{x-\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

这意味着

$$\lim_{x\to 0^+}S'(x)=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to 0^-}S(x)=\frac{\pi}{2},$$

而由 Lagrange 中值定理有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{S(x)-S(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}S'(\xi),\quad (0<\xi<x),$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}S'(x)=-\frac{\pi}{2}$, 从而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{S(x)-S(x)}{x}=-\frac{\pi}{2}$, 同理可知 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{S(x)-S(x)}{x}=\frac{\pi}{2}$. 即 $S(x)$ 在 $x=0$ 处单侧导数不等, 从而和函数在 $x=2k\pi$ 处不可微. ■

2. 求实数 a 的取值范围, 使得 $\sum\limits_{n=20}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n^{ax}+(-1)^n x}$ 关于 $x\in[1,+\infty)$ 一致收敛.

解. 当 $a\leqslant 0$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n x}{n^{ax}+(-1)^n x}\neq 0$, 从而 $a>0$.

考虑级数 $\sum\limits_{n=20}^{+\infty}\frac{(-1)^n x}{n^{ax}}$, 由 Dirichlet 判别法可知其在题设范围内一致收敛. 于是

$$\frac{(-1)^n x}{n^{ax}}-\frac{(-1)^n x}{n^{ax}+(-1)^n x}=\frac{x}{n^{ax}\left(n^{ax}+(-1)^n x\right)}\sim\frac{x}{n^{2ax}},$$

由此知 $a>\frac{1}{2}$ 时原级数关于 $x\in[1,+\infty)$ 一致收敛. ■

3. 求实数 a 的取值范围, 使得函数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{ax}+\sin nx}$ 关于 $x\in[\pi,+\infty)$ 一致收敛.

解. 当 $a\leqslant 0$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin nx}{n^{ax}+\sin nx}\neq 0$, 从而 $a>0$.

■

4. 证明定理 **9.2.1**, 即 Abel 判别法和 Dirichlet 判别法.

证明. 我们先证明这样一件事: 设 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$ 或 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$, 记 $A_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$, 如果 $|A_k|\leqslant M(k=1,2,\cdots,n)$, 那么 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k b_k\right|\leqslant M(|b_1|+2|b_n|)$.

由 Abel 变换, 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right|&=\left|A_n b_n-\sum_{k=1}^{m-1}A_k(b_{k+1}-b_k)\right|\leqslant|A_n|\,|b_n|+\sum_{k=1}^{n-1}|A_k|\,|b_{k+1}-b_k|\\&\leqslant M\left(\sum_{k=1}^{n-1}|b_k-b_{k+1}|+|b_n|\right)=M\left(|b_1-b_n|+|b_n|\right)\leqslant M(|b_1|+2|b_n|).\end{aligned}$$

这正是 Abel 引理.

Abel 判别法. 设对任意 $\boldsymbol{x} \in E$ 与 $n \in \mathbb{N}_+$ 有 $|v_n(\boldsymbol{x})| \leqslant M$. 因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(\boldsymbol{x})$ 在 E 上一致收敛, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N 使得 $n > N$ 时有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(\boldsymbol{x})\right| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in E$ 与 $p \in \mathbb{N}_+$ 成立, 于是由 Abel 引理, 即得

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(\boldsymbol{x}) v_k(\boldsymbol{x})\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}\left(|v_{n+1}(\boldsymbol{x})| + 2|v_{n+p}(\boldsymbol{x})|\right) < \varepsilon,$$

因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k(\boldsymbol{x}) v_k(\boldsymbol{x})$ 在 E 上一致收敛.

Dirichlet 判别法. 设对任意 $\boldsymbol{x} \in E$ 与 $n \in \mathbb{N}_+$ 有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(\boldsymbol{x})\right| \leqslant M$. 则对 $n+1 \leqslant m \leqslant n+p$, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(\boldsymbol{x})\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} u_k(\boldsymbol{x}) - \sum_{k=1}^{n} u_k(\boldsymbol{x})\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{m} u_k(\boldsymbol{x})\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(\boldsymbol{x})\right| \leqslant 2M,$$

另外, 由于 $\{v_k(\boldsymbol{x})\}$ 在 E 上一致收敛到零, 则对任意 ε, 有 N 使 $n > N$ 时有 $|v_n(\boldsymbol{x})| < \dfrac{\varepsilon}{6M}$, 于是结合 Abel 引理有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(\boldsymbol{x}) v_k(\boldsymbol{x})\right| \leqslant 2M\left(|v_{n+1}(\boldsymbol{x})| + 2|v_{n+p}(\boldsymbol{x})|\right) < \varepsilon,$$

因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k(\boldsymbol{x}) v_k(\boldsymbol{x})$ 在 E 上一致收敛. □

5. 设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin 2^n x}{2^n}$. 证明: 对任意 $j, k \in \mathbb{Z}$, S 在点 $\dfrac{j}{2^k}$ 不可导.

证明. 易见 $S(x)$ 的一般项 $\dfrac{\sin 2^n x}{2^n}$ 都是可导的, 对于任意 $k \in \mathbb{Z}$, 置 $x = \dfrac{t}{2^k}$, 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n x}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n-k} t}{2^n} = \frac{1}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n-k} t}{2^{n-k}} = \frac{1}{2^k}\left(\sum_{n=1}^{k} \frac{\sin 2^{n-k} t}{2^{n-k}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n t}{2^n}\right),$$

这意味着, 我们只需证 $S(x)$ 在点 j 处不可导.

记 $u_k(x) = \dfrac{\sin 2^k x}{2^k}$, 取序列 $j_n = j + \dfrac{\pi}{2^n}$, 则 $\lim\limits_{n \to +\infty} j_n = j$. 若

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S(j_n) - S(j)}{j_n - j}$$

不存在, 则 $S(x)$ 在 j 处不可导, 注意到 $u_k(x)$ 以 $\dfrac{\pi}{2^{k-1}}$ 为周期, 于是有

$$u_k(j_n) = \frac{\sin\left(2^k j + 2^{k-n}\pi\right)}{2^k} = u_k(j), \quad k = n+1, n+2, \cdots,$$

则

$$\frac{u_k(j_n) - u_k(j)}{j_k - j} = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(2^k j + 2^{k-n}\pi\right) - \sin 2^k j}{2^{k-n}\pi}, & k = 1, 2, \cdots, n \\ 0, & k = n+1, n+2, \cdots \end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}\frac{S(j_n)-S(j)}{j_n-j}&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(j_n)-u_k(j)}{j_n-j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k(j_n)-u_k(j)}{j_n-j}\\&=\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}\pi\left(\sin\left(2^kj+2^{k-n}\pi\right)-\sin 2^kj\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\pi^2\cos\left(2^kj+\xi_k\right),\quad \xi_k\in\left(0,2^{k-n}\pi\right)\subset(0,\pi),\end{aligned}$$

下证 $\lim\limits_{k\to+\infty}\cos\left(2^kj+\xi_k\right)\neq 0$. 否则对于充分大的 k, 存在 $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$ 以及任意小的 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 使得

$$2^kj+\xi_k=k_1\pi+\frac{\pi}{2}+\varepsilon_1,\quad 2^{k-1}j+\xi_{k-1}=k_2\pi+\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2,$$

二倍右式减去左式得

$$2\xi_{k-1}-\xi_k=(2k_2-k_1)\pi+\frac{\pi}{2}+2\varepsilon_2-\varepsilon_1,$$

进一步有

$$\frac{2\xi_{k-1}-\xi_k-\pi/2}{\pi}=2k_2-k_1+\frac{2\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\pi},$$

注意 $\dfrac{2\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\pi}$ 可以任意小, 而

$$-\frac{3}{2}-\frac{2\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\pi}<\frac{2\xi_{k-1}-\xi_k-\pi/2}{\pi}<\frac{3}{2}-\frac{2\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\pi},$$

这意味着 $2k_2-k_1$ 只能取 $-1,0,1$ 这三个值, □

9.2 $\mathcal{B}$

1. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-nx}$, 求 S 的定义域并讨论其连续性, 可微性.

解. 我们先证明这样一个命题, 事实证明, 该命题对于今后证明某函数项级数非一致收敛是十分方便的:

只要 $x\geqslant\delta>0$, 结合

$$\mathrm{e}^{nx}\geqslant 1+nx+\frac{1}{2}(nx)^2\geqslant\frac{(nx)^2}{2}\Rightarrow \mathrm{e}^{-nx}\leqslant\frac{2}{(nx)^2},$$

有

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-nx}\leqslant\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2}{n^2x^2}=\frac{2}{n^{5/2}x^{3/2}}\leqslant\frac{2}{n^{5/2}\delta^{3/2}},$$

由 Weierstrass 判别法可知 $S(x)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛.

另一方面, 记 $u_n=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{-nx}$, 取 $x_n=\dfrac{1}{n}$, 则 $u_n(x_n)=\dfrac{1}{\mathrm{e}n}$, 易见 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_n)$ 发散, 从而 $S(x)$ 在 $(0,\delta)$ 上不一致收敛. ■

2. 设 $x=-a_n$ 是方程 $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=0$ 的实数解, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^p\mathrm{e}^{-a_nx}$, 其中 $p\in\mathbb{R}$ 为常数, 证明:

(1) 存在正常数 C_1, C_2 使得 $C_1 n \leqslant a_n \leqslant C_2 n (n = 1, 2, \cdots)$;

(2) f 在 $(0, +\infty)$ 内连续.

证明. (1) 原方程有且仅有一实根 x_n(可见 6.3 $\mathcal{B}$ 第 **9** 题), 且 $x_n < 0$, 否则 $x_n \geqslant 0$, 此时

$$1 + x_n + \frac{x_n^2}{2!} + \frac{x_n^3}{3!} + \cdots + \frac{x_n^{2n-1}}{(2n-1)!} > 0$$

由于 $a_n = -x_n$, 故 $a_n > 0$. 由 Taylor 公式

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{\mathrm{e}^{\xi} x^{2n}}{(2n)!}, \quad \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 于 } x \text{ 之间},$$

将 $x = -a_n$ 代入上式, 得到

$$\mathrm{e}^{-a_n} = \frac{\mathrm{e}^{\xi} a_n^{2n}}{(2n)!}, \quad \xi \in (-a_n, 0)$$

注意到 $\dfrac{\mathrm{e}^{-a_n} a_n^{2n}}{(2n)!} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{\xi} a_n^{2n}}{(2n)!} \leqslant \dfrac{a_n^{2n}}{(2n)!}$, 于是

$$\frac{\mathrm{e}^{-a_n} a_n^{2n}}{(2n)!} \leqslant \mathrm{e}^{-a_n} \Rightarrow a_n \leqslant \sqrt[2n]{(2n)!},$$

下面我们证明一个有用的不等式

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

由 $\sqrt{k(n-k)} \leqslant \dfrac{n}{2}$, 则 $\dfrac{1}{2}(\ln k + \ln(n-k)) \leqslant \ln \dfrac{n}{2}$, 从而

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k \leqslant (n-1) \ln \frac{n}{2} \Rightarrow (n-1)! \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

即有 $\dfrac{n}{2} \cdot (n-1)! \leqslant \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$, 于是 $n! \leqslant 2\left(\dfrac{n}{2}\right)^n < \mathrm{e}\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$. 另外, 令 $x_n = \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, 于是有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}\mathrm{e}} = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} n}{\mathrm{e}} < n,$$

并且 $x_1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$, 于是 $x_n = x_1 \cdot \dfrac{x_2}{x_1} \cdot \cdots \cdot \dfrac{x_n}{x_{n-1}} < n!$, 即得 $\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n!$.

利用上述不等式, 有

$$a_n \leqslant \sqrt[2n]{(2n)!} < \sqrt[2n]{\mathrm{e}\left(\frac{2n}{2}\right)^{2n}} = \sqrt[2n]{\mathrm{e}} \cdot n < \sqrt{\mathrm{e}} \cdot n,$$

另一方面,

$$\mathrm{e}^{-a_n} \leqslant \frac{a_n^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow a_n \geqslant \sqrt[2n]{\mathrm{e}^{-a_n}(2n)!} > \sqrt[2n]{\mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{e}} n}} \cdot \frac{2n}{\mathrm{e}} = 2\mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{e}}/2-1} n,$$

即得 $2\mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{e}}/2-1} n \leqslant a_n \leqslant \sqrt{\mathrm{e}} \cdot n$.

(2)$\{a_n\}$ 为正并且严格单调递增. □

设 $u_n(x)(n = 1, 2, \cdots)$ 是定义在区间 I 上的函数, 且满足下列条件之一, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上不一致收敛.

(1) 存在数列 $\{x_n\}\subset I$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_n)$ 发散.

(2) $\forall x\in I$, 有 $u_n(x)>0(n=1,2,\cdots)$, 且存在数列 $\{x_n\}\subset I$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty}n^{\lambda}u_n(x_n)>0,\quad \lambda\leqslant 1.$$

(3) $u_n(x)=\dfrac{a_n(x)}{b_n(x)}(x\in I,n=1,2,\cdots)$, 对于每个 $x\in I$, $a_n(x)$ 与 $b_n(x)$ 均为关于 n 的单调增加的正值函数, 且存在数列 $\{x_n\}\subset I$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{na_n(x_n)}{b_{2n}(x_n)}>0.$$

证明. □

9.3　幂级数与函数的幂级数展开

9.3 $\mathcal{A}$

1. 举例说明存在幂级数使得其收敛域分别为

$$\{0\},\quad (-1,1)\,,\quad [-1,1)\,,\quad (-1,1]\,,\quad [-1,1]\,,\quad (-\infty,+\infty)\,.$$

解. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$ 仅在 $x=0$ 处收敛, 因为除此之外的任何 x 都使级数的一般项不趋于零.

容易验证其他题设的收敛域可以对应以下级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

■

2. 考虑收敛半径为 1 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 举例或说明:

(1) 是否存在例子使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 及其形式求导后的级数在 $[-1,1]$ 上收敛?

(2) 是否存在例子使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[-1,1]$ 上收敛, 而其形式求导后的级数的收敛域是 $(-1,1]$?

(3) 当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域是 $(-1,1]$ 时, 使得级数形式求导 k 次后的级数的收敛域依然为 $(-1,1]$, 这样的 k 可以用多大?

解. (1) 易见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^3}$ 的收敛半径为 1, 形式求导后得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n^2}$ 其收敛域为 $[-1,1]$.

(2)

(3)

■

3. 试将以下函数展开成 Maclaurin 级数, 并求其收敛域:

(1) $\dfrac{x^2+x+4}{x^2+3x+2}$;　　(2) $\dfrac{x}{x^2+2x+2}$;

(3) $\dfrac{1}{x^4+4x^2+4}$;　　(4) $\mathrm{e}^x\cos x$;

(5) $\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$;　　(6) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解. (1) 由

$$\frac{x^2+x+4}{x^2+3x+2}=1+\frac{3}{1+x}-\frac{4}{2+x}=1+3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

级数的收敛域为 $(-1,1)$.

(2) 由

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2+2x+2}=\frac{x}{(x+1+\mathrm{i})(x+1-\mathrm{i})}&=\frac{\mathrm{i}x}{2}\left(\frac{1}{x+1+\mathrm{i}}-\frac{1}{x+1-\mathrm{i}}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}}\right)^{n+1}\right)x^n\end{aligned}$$

■

4. 试给出 $\arctan x$ 在点 1 处的 Taylor 展开式及其收敛域.

解. 由于 $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, 于是

$$\arctan x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2n+1},$$

■

5. 设 f 的 Maclaurin 展开式在点 $x=1$ 处绝对收敛, 证明 f^2 的 Maclaurin 展开式在点 $x=-1$ 处绝对收敛.

证明. 记 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, 有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty$, 则

$$f^2(x)\big|_{x=-1}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\right)^2\leqslant\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\right)^2<+\infty.$$

□

6. 证明: 对任何 $n\geqslant 1$, $(1-x)^n\mathrm{e}^{1/(1-x)}$ 的 Maclaurin 展开式的收敛半径为 1, 但在点 $x=1$ 处发散.

证明.

□

7. 考虑 $\dfrac{1}{1-x}$ 的 Maclaurin 展开式的余项, 可得

$$\int_0^x\frac{(n+1)(x-t)^n}{(1-t)^{n+2}}\,\mathrm{d}t=\frac{x^{n+1}}{1-x},\quad x\in[0,1).$$

试利用上式估计 $(1+x)^\alpha$ 的 n 阶 Maclaurin 展开式的余项

$$r_n(x)=\int_0^x(n+1)(x-t)^n\binom{\alpha}{n+1}(1+t)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}t,\quad x\in(-1,1).$$

进而, 证明 $(1+x)^\alpha$ 在 $(-1,1)$ 可展开成 Maclaurin 级数.

8. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径大于 1, 其和函数为 f, 满足 $\min\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)|\geqslant 1$. 设 $g=\dfrac{1}{f}$. 依次证明:

(1) 存在常数 $C > 0$ 使得

$$\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right| \leqslant \frac{C^n}{(1-|x|)^n}, \quad n \geqslant 0, |x| \leqslant 1.$$

(2) 记 $A = C + 1$, 则

$$\left|\frac{g^{(n)}(x)}{n!}\right| \leqslant \frac{A^{n+1}}{(1-|x|)^n}, \quad n \geqslant 0, |x| \leqslant 1.$$

(3) g 在点 0 处可以展开成幂级数.

证明. □

9. 设 R 为正实数, 若 f 在 $(-R, R)$ 内实解析, 其 Maclaurin 展开式的收敛半径是 $r \in (0, R]$. 问: 在收敛域内, f 的 Maclaurin 展开式是否等于 f.

解. ■

9.3 $\mathcal{B}$

1. 举例说明存在收敛半径为 1 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 它任意次逐项求导后的级数均在点 $x = 1$ 处收敛. 进一步, 证明: 此类级数也一定在点 -1 处收敛.

证明. □

2. 举例说明存在收敛半径为 1 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 它任意次逐项积分后得到的级数均在点 $x = 1$ 处发散. 进一步, 证明: 此类级数也一定在点 -1 处发散.

证明. □

3. 设 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 试考察 $\tan x$ 在点 x_0 处的 Taylor 展开式的收敛半径.

解. ■

4. 对于 Riemann ζ 函数 $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. 证明: ζ 在 $(1, +\infty)$ 上实解析.

5. 考察是否存在 $n \geqslant 1$, 使得 $(1-x)^n \sin \frac{1}{1-x}$ 的 Maclaurin 展开式在点 $x = 1$ 处收敛.

6. 证明: (a, b) 上的实解析函数是一个复区域 D 上的复解析函数在 (a, b) 上的限制.

7. 设 $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ 满足 $\operatorname{supp} \varphi \subseteq [-2, 2]$ 以及 $\varphi\big|_{[-1,1]} = 1$. 对于实数列 $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, 定义

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \varphi(a_n x) x^n, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明: $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, 且 $f^{(n)}(0) = a_n (\forall n \geqslant 0)$. 此结果表明任何幂级数都是某个函数的 Taylor 展开式.

9.4 幂级数的应用

9.4 $\mathcal{A}$

1. 利用幂级数计算级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$.

解. 由于

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{8}\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{8}\frac{1}{2n+3},$$

考虑幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^4}{8}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}-\frac{x^2}{4}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\frac{1}{8}\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right),$$

设 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, 则 $S'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$, 由此可得

$$S(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=S(x)-x,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{2n+3}=S(x)-x-\frac{x^3}{3},$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^4}{8}S(x)-\frac{x^2}{4}\left(S(x)-x\right)+\frac{1}{8}\left(S(x)-x-\frac{x^3}{3}\right)=\frac{1}{12}.\quad\blacksquare$$

2. 计算 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}$.

解. 由于 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}=\frac{1}{1+x^4}$, 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{4\sqrt{2}}.\quad\blacksquare$$

3. 计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

解. 在 2.7$\mathcal{B}$ 第 **5** 题中, 我们得到了

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

即有 $\displaystyle\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$, 注意到

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x}=1-\frac{\pi^2x^2}{6}+\frac{\pi^4x^4}{120}-o\left(x^5\right),\quad x\to0,$$

而根据根与系数的关系, 对右侧的无穷乘积有

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=1-x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+x^4\sum_{i\neq j}\frac{1}{i^2\cdot j^2}+o\left(x^5\right),\quad x\to0,$$

于是有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\sum\limits_{i\neq j}\frac{1}{i^2\cdot j^2}=\frac{\pi^4}{120}$, 而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^2-2\sum_{i\neq j}\frac{1}{i^2\cdot j^2}=\frac{\pi^4}{36}-\frac{\pi^4}{60}=\frac{\pi^4}{90}.$$ ■

4. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)H_n}{2^n},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2^n},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2^n(n+1)}$, 其中 $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

解. 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k+1}{2^k},$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k+1}{2^k}&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{2^k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{2^k}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}x^{k+1}\right)'\Bigg|_{x=1/2}\\&=\left(\frac{x^2}{1-x}-\frac{x^2(1-x^{n-1})}{1-x}\right)'\Bigg|_{x=1/2}=\frac{2+n}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k+1}{2^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n}{n2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\\&=2+4\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/2}x^{n-1}\,\mathrm{d}x=2+4\int_0^{1/2}\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=2+4\ln 2.\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2^n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}\\&=2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/2}x^{n-1}\,\mathrm{d}x\right)=2\int_0^{1/2}\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=2\ln 2.\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2^n(n+1)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k(k+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k(k+1)}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k(k+1)}\right)\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\int_0^{1/2}\frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x-\int_0^{1/2}\frac{x-x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{1/2}\frac{1}{1-x}\int_0^{x}\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=2\int_0^{1/2}\frac{\ln(1-x)}{x-1}\,\mathrm{d}x=(\ln 2)^2.\end{aligned}$$ ■

5. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ Cesáro 可和, 则 $\left\{\frac{a_n}{n+1}\right\}$ 有界.

证明. 记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{N}a_k,\ \sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}S_k$, 由题设 $\sigma=\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n$. 由于

$$\frac{S_n}{n+1}=\frac{(n+1)\sigma_n-n\sigma_{n-1}}{n+1}=\sigma_n-\frac{n}{n+1}\sigma_{n-1}\to 0,\quad n\to+\infty,$$

于是
$$\frac{a_n}{n+1}=\frac{S_n-S_{n-1}}{n+1}=\frac{S_n}{n+1}-\frac{n}{n+1}\frac{S_{n-1}}{n}\to 0,\quad n\to+\infty,$$
从而 $\left\{\dfrac{a_n}{n+1}\right\}$ 有界. □

6. 举例说明存在 Abel 可和但不 Cesáro 可和的级数.

解. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$. 容易验证该级数 Abel 可和, 但不 Cesáro 可和. ■

7. 证明:
$$\pi=\frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1024^n}\left(-\frac{32}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}+\frac{256}{10n+1}-\frac{64}{10n+3}-\right.$$
$$\left.\frac{4}{10n+5}-\frac{4}{10n+7}+\frac{1}{10n+9}\right).$$

证明. 我们将上式从左到右分拆成七个级数, 分别记为 $a_1,a_2,\cdots a_7$.

我们先计算 $a_1=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}32}{1024^n(4n+1)}$, 令
$$f(x):=2^{5/2}\cdot 32\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{4n+1}}{4n+1},\quad x\in(0,1),$$
则 $f\left(2^{-5/2}\right)=a$, 并且有 $f'(x)=-\dfrac{2^{5/2}\cdot 32}{1+x^4}$, 即有
$$-2^{5/2}\cdot 32\int_0^{2^{-5/2}}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=a,$$
同理可得
$$a_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{1024^n(4n+3)}=\int_0^{2^{-5/2}}\frac{-(2^{5/2})^3x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x,$$
以及
$$a_k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+i_k}q_k}{1024^n\left(10n+(2k-5)\right)}=(-1)^{i_k}2^{2k-5}q_k\int_0^{1/2}\frac{x^{2k-6}}{1+x^{10}}\,\mathrm{d}x,\quad k=3,4,5,6,7,$$
上式中的 i_k,q_k 由题设公式给定. 则有 $64\pi=\sum\limits_{k=1}^{7}a_k$. □

9.4 $\mathcal{B}$

1. 计算积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 由 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开,
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+\cdots,$$

有

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n x^n}{n}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2},$$

我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$. ■

2. 试讨论级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ 在各种收敛情况下 (绝对收敛, 条件收敛, 发散), 它们的 Cauchy 乘积的收敛情况. 并给出证明或反例.

解. ■

3. (小 o Tauber 定理) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 的 Abel 和为 A. 证明:

(1) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=0$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛当且仅当 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$.

证明. (1) 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=0$, 可设 $\delta_n=\sup\limits_{k\geqslant n}\{|ka_k|\}$, 则 $\{\delta_n\}$ 单调递减趋于 0. 令

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad (0\leqslant x<1).$$

对于任何正整数 N, 都有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}a_n-A&=\sum_{n=0}^{N}a_n-S(x)+S(x)-A=\sum_{n=1}^{N}a_n(1-x^n)-\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nx^n+(S(x)-A)\\&=:I_1(x)+I_2(x)+I_3(x),\end{aligned}$$

对 $x\in[0,1)$, 有

$$|I_1(x)|\leqslant(1-x)\sum_{n=1}^{N}|a_n|(1+x+\cdots+x^{n-1})\leqslant(1-x)\sum_{n=1}^{N}n|a_n|\leqslant(1-x)N\delta_1,$$

$$|I_2(x)|\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}|na_n|\frac{x^n}{n}\leqslant\frac{\delta_N}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n=\frac{\delta_N}{N}\frac{x^{N+1}}{1-x}\leqslant\frac{\delta_N}{N(1-x)}.$$

令 $x_N=1-\frac{\sqrt{\delta_N}}{N}$, 即 $N(1-x_N)=\sqrt{\delta_N}$. 易见当 $N\to+\infty$, $x_N\to1$. 可得

$$|I_1(x_N)|\leqslant\delta_1\sqrt{\delta_N},\quad |I_2(x_N)|\leqslant\frac{\delta_N}{\sqrt{\delta_N}}=\sqrt{\delta_N},\quad I_3(x_N)=S(x_N)-A,$$

结合

$$\left|\sum_{n=0}^{N}a_n-A\right|\leqslant|I_1(x_N)|+|I_2(x_N)|+|I_3(x_N)|\leqslant(\delta_1+1)\sqrt{\delta_N}+|S(x_N)-A|,$$

令 $N\to+\infty$ 结论即证.

(2) 必要性. 记 $A_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$, 由题设 $\{A_n\}$ 收敛到 A. 由 Abel 变换得到

$$\sum_{k=1}^{n}ka_k=nA_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k,\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(nA_k-\sum_{k=1}^{n-1}A_k\right),$$

由 Stolz 公式 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(nA_k-\sum\limits_{k=1}^{n-1}A_k\right)=A-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{A_n}{(n+1)-n}=A-A=0$. 从而必要性成立.

充分性. 记 $b_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k, b_0=0$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$, 由于

$$na_n=nb_n-(n-1)b_{n-1}\Rightarrow a_n=b_n-b_{n-1}+\frac{b_{n-1}}{n},$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_{n-1}}{n}$, 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}n\cdot\frac{b_{n-1}}{n}=0$ 结合 (1) 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. □

4. Hardy-Littlewood(哈代-利特尔伍德) 定理: 设 $S_n\geqslant 0$, $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_nx^n=A$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}S_k=A.$$

请按以下步骤证明该定理.

(1) 当 f 为多项式时, 成立

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^nf(x^n)=A\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{♣}$$

(2) 对任何 $f\in C[0,1]$, (♣)式成立.

(3) 对任何分段常值函数, (♣)式成立.

(4) 取 $f(x)=\frac{1}{x}\chi_{[1/\mathrm{e},1]}(x), x_n=1-\frac{1}{n}$, 证明 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}S_k=(1-x_n)\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_kx_n^kf(x_n^k)$ 并结束定理的证明.

证明. 不妨设 $A=1$.

(1) 对于任何 $k\in\mathbb{N}_+$, 由于 $1-x^{k+1}=(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^k)$, 我们有

$$\lim_{x\to1^-}(1-x^{k+1})\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^{n(k+1)}=\lim_{x\to1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n=1,$$

从而

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^nx^{nk}=\frac{1}{k+1}=\int_0^1x^k\,\mathrm{d}x,$$

由此对于任何多项式 $f(x)$, 成立 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty}S_nx^nf(x^n)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2) 现任取 $f\in C[0,1]$, 则有多项式 P_k 使得

$$\varepsilon_k\equiv\max_{x\in[0,1]}|P_k(x)-f(x)|\to0,\quad k\to+\infty,$$

则对于 $x\in(0,1)$, 有

$$\begin{aligned}&\left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^nf(x^n)-\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n\left|f(x^n)-P_k(x^n)\right|\\&+\left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^nP_k(x^n)-\int_0^1P_k(x)\,\mathrm{d}x\right|+\int_0^1|f(x)-P_k(x)|\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\varepsilon_k(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n+\left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^nP_k(x^n)-\int_0^1P_k(x)\,\mathrm{d}x\right|+\varepsilon_k,\quad\forall k\geqslant0,\end{aligned}$$

令 $x \to 1^-$ 得到

$$\overline{\lim_{x\to 1^-}} \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n P_k(x^n) - \int_0^1 P_k(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\varepsilon_k, \quad \forall k \geqslant 0.$$

在令 $k \to +\infty$ 得到

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n f(x^n) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3) 现对分段常值函数证明上式. 任取 $0 < a < b < 1$, 我们先证 $f = \chi_{[a,b]}$ 的情况. 取 $\varepsilon \in \left(0, \min\left\{a, 1-b, \dfrac{b-a}{3}\right\}\right)$. 做分段连续函数 f^ε 与 f_ε, 使得 f^ε 在 $[0, a-\varepsilon]$ 和 $[b+\varepsilon, 1]$ 上的取值为 0, 在 $[a,b]$ 上为 1, 在余下的区间 $[a-\varepsilon, a]$ 和 $[b, b+\varepsilon]$ 上用直线连接. 而 f_ε 在 $[0,a]$ 与 $[b,1]$ 上为 0, 在 $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ 上为 1, 在余下的区间 $[a, a+\varepsilon]$ 和 $[b-\varepsilon, b]$ 上用直线连接.

$$f^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b], \\ \dfrac{x-a+\varepsilon}{\varepsilon}, & x \in [a-\varepsilon, a], \\ \dfrac{b+\varepsilon-x}{\varepsilon}, & x \in [b, b+\varepsilon], \\ 0, & x \in [0, a-\varepsilon] \cup [b+\varepsilon, 1], \end{cases} \qquad f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon], \\ \dfrac{x-a}{\varepsilon}, & x \in [a, a+\varepsilon], \\ \dfrac{b-x}{\varepsilon}, & x \in [b-\varepsilon, b], \\ 0, & x \in [0,a] \cup [b,1], \end{cases}$$

则 $f^\varepsilon, f_\varepsilon$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\forall x \in (0,1)$,

$$f_\varepsilon(x) \leqslant f(x) \leqslant f^\varepsilon(x).$$

从而

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n f_\varepsilon(x^n) \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n f(x^n) \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n f^\varepsilon(x^n),$$

令 $x \to 1^-$ 得到

$$\int_0^1 f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \underline{\lim_{x\to 1^-}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n f(x^n) \leqslant \overline{\lim_{x\to 1^-}}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n f(x^n) \leqslant \int_0^1 f^\varepsilon\,\mathrm{d}x.$$

在令 $\varepsilon \to 0^+$ 即得(♣)式对于 $f = \chi_{[a,b]}$ 成立. 同理或者利用已证结果可以证明当 f 为 $\chi_{[0,a]}, \chi_{[b,1]}, \chi_{(a,b)}, \chi_{[a,b)}$ 这样的区间时, (♣)式也成立, 从而当 f 为分段常值函数时, (♣)式成立.

(4) 取 $f(x) = \dfrac{1}{x}\chi_{[1/\mathrm{e},1]}(x), x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, 即 $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in [1/\mathrm{e}, 1], \\ 0, & x \in [0, 1/\mathrm{e}) \end{cases}$, 便有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} S_k \left(1-\frac{1}{n}\right)^k f\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1,$$

注意到 $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n < \dfrac{1}{\mathrm{e}} < \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}, (n \geqslant 2)$ 我们有 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} S_k = 1$, 结论得证. □

5. 利用 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_{2k}^k C_{2(n-k)}^{n-k} = 4^n$ 证明: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{C_{2k}^k C_{2n-2k}^{n-k}}{(2k+1)(2n-2k+1)} = \frac{4^{2(n+1)}}{8(n+1)^2 C_{2n+2}^{n+1}}$. 进一步, 计算 $\arcsin^2 x$ 和 $\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$ 的 Maclaurin 级数.

证明. □

6. 试计算级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2}$.

解. 记级数一般项为 u_n, 则

$$\begin{aligned}u_n&=\frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2}=\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\int_0^x\cos t\cdot\sin^{2n}t\;\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}u_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\int_0^x\cos t\sum_{n=0}^{\infty}\sin^{2n}t\;\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\int_0^x\cos t\cdot\frac{1}{1-\sin^2 t}\;\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\csc x\int_0^x\sec t\;\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec t\,\mathrm{d}t\int_t^{\frac{\pi}{2}}\csc x\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)}{\cos t}\,\mathrm{d}t\xlongequal{\tan\frac{t}{2}=x}-\frac{4}{\pi}\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

■

7. 设 $|x|<1$, 考虑第一类完全椭圆积分 $K(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-x^2\cos^2\theta}}$. 依次证明:

(1) 对任何 $x\in(-1,1)$, 成立 $K(x)=\dfrac{\pi}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(\mathrm{C}_{2n}^n\right)^2x^{2n}}{4^{2n}}$.

(2) 对任何 $x\in(-1,1)$, $\theta\in[0,2\pi)$, 有 $\dfrac{1}{|1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\mathrm{C}_{2k}^kx^k}{4^k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{\mathrm{C}_{2j}^jx^j}{4^j}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\theta}$.

提示: 可以证明两边平方后的等式相等.

(3) 对任何 $x\in[0,1)$, 有 $\dfrac{1}{1+x}K\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)=\dfrac{\pi}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(\mathrm{C}_{2n}^n\right)^2x^{2n}}{4^{2n}}=K(x)$.

证明. (1) 由

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2\cos^2\theta}}=\frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n}x^{2n}\cos^{2n}\theta,$$

又由之前结果

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}=\frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n}\frac{\pi}{2},$$

于是 $K(x)=\dfrac{\pi}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(\mathrm{C}_{2n}^n\right)^2x^{2n}}{4^{2n}}$.

(2)

(3) □

8. 对于 $a,b>0$, 令 $M(a,b)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}$. 另一方面, 令 $a_0=a,b_0=b$, 并归纳定义 $a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}(n\geqslant 0)$. 依次证明:

(1) $\{a_n\},\{b_n\}$ 收敛到同一值, 记为 $AGM(a,b)$, 我们称之为 a,b 的算术几何平均.

(2) $AGM\left(\sqrt{ab},\dfrac{a+b}{2}\right)=AGM(a,b),M\left(\sqrt{ab},\dfrac{a+b}{2}\right)=M(a,b)$.

(3) 成立如下的 **Gauss(高斯)** 公式: $AGM(a,b)=\dfrac{\pi}{2M(a,b)}$.

证明. (1)

(2)

(3)

□

9. 设 b_k 和 $B_k(k\geqslant 0)$ 为 Bernoulli 数与 Bernoulli 多项式, ζ 为 Riemann ζ 函数.

(1) 利用 $\dfrac{t\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t-1}=t+\dfrac{t}{\mathrm{e}^t-1}$, 证明: 当 $k\neq 1$ 时, $B_k(1)=b_k$. 另一方面, 有 $b_0=1, b_1=-\dfrac{1}{2}, B_k(1)=\dfrac{1}{2}$.

(2) 利用 $\dfrac{t\mathrm{e}^{(1-x)t}}{\mathrm{e}^t-1}=\dfrac{-t\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^{-t}-1}$ 证明对任何 $k\geqslant 0$, 成立 $B_k(1-x)=(-1)^kB_k(x)$.

(3) 利用 $\dfrac{-t\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^{-t}-1}=t\mathrm{e}^{xt}+\dfrac{t\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t-1}$ 证明对任何 $k\geqslant 1$, 成立 $B_k(-x)=(-1)^kB_k(x)+(-1)^kkx^{k-1}$.

(4) 证明对任何 $k\geqslant 1$, 成立 $b_{2k+1}=0$.

(5) 证明对任何 $k\geqslant 0$, $B_k\left(\dfrac{1}{2}-x\right)=(-1)^k\left(\dfrac{1}{2^{k-1}}B_k(2x)-B_k(x)\right)$.

(6) 证明对任何 $k\geqslant 0$, $B'_{k+1}(x)=(k+1)B_k(x)$, 进而 $\displaystyle\int_0^x B_k(s)\,\mathrm{d}s=\frac{B_{k+1}(x)-B_{k+1}}{k+1}$.

(7) 设 $n\geqslant 1$, 证明 Euler 公式:$\zeta(2n)=(-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n-1}b_{2n}}{(2n)!}\pi^{2n}$.

提示: 对于 $x\in[0,1]$, 令 $T_0(x)=0$,

$$T_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{2(2n)!}B_{2n}(x)-\frac{1}{(2\pi)^{2n}}H_n(2\pi x),\quad \forall n\geqslant 1,$$

其中

$$H_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^{2n}},\qquad x\in[0,2\pi],$$

特别地,

$$H_1(x)=\zeta(2)-\frac{\pi x}{2}+\frac{x^2}{4},\quad x\in[0,2\pi].$$

验证 $T''_n(x)=-T_{n-1}(x)$.

证明.

□

10. 利用 Bernoulli 数与 Bernoulli 多项式求以下函数的 Maclaurin 级数:

(1) $\tan x$,　(2) $\sec x$,　(3) $\tanh x$,　(4)$x\cot x$(在$x=0$处定义为1).

11. 对于 n 阶正定矩阵 $\boldsymbol{A}$, 证明存在唯一的正定矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{A}$.

证明.

□

12. 是否有 $\delta>0$ 以及 $(0,\delta)$ 上的 n 阶正定矩阵值函数 $\boldsymbol{Y}(\cdot)$, 在 $(0,\delta)$ 上满足 $\boldsymbol{Y}(t)<\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{Y}'(t)=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Y}^2(t))^{1/2}$ 以及 $\lim\limits_{t\to 0+}\boldsymbol{Y}(t)=0$?

13. 考察各基本初等函数, 思考可以把它们的定义推广到什么样的 n 阶方阵?

9.5　常微分方程初值问题的存在性

9.5 $\mathcal{A}$

1. 设 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 连续可微. 证明:

(1) 设 $a<b<c$. 若在 $[a,b]$ 上, $\boldsymbol{\varphi}'(t)=f(t,\boldsymbol{\varphi}(t))$ 且 $\boldsymbol{\varphi}(a)=\boldsymbol{x}_0$, 而在 $[b,c]$ 上, $\boldsymbol{\psi}'(t)=f(t,\boldsymbol{\psi}(t))$ 且 $\boldsymbol{\psi}(b)=\boldsymbol{\varphi}(b)$, 若 $\boldsymbol{x}(t)=\begin{cases}\boldsymbol{\varphi}(t), & t\in[a,b],\\ \boldsymbol{\psi}(t) & t\in[b,c]\end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases}\boldsymbol{x}'(t)=f(t,\boldsymbol{x}(t)),\\ \boldsymbol{x}(a)=\boldsymbol{x}_0,\end{cases}$ $,t\in[a,c]$ 的解.

(2) 方程组 (9.5.2) 的解的最大存在区间存在, 且为开区间.

2. 证明方程 $x'(t)=\left(1-x^2(t)\right)\left(\cos t^2+\sin x(t)\right)$ 的满足初值条件 $x(0)=0$ 的解的最大存在区间是 $(-\infty,+\infty)$.

3. 证明 **Gronwall-Bellman(格朗沃尔-贝尔曼)** 不等式:

设 $\alpha\in\mathbb{R}$, 而 $\varphi\in C[t_0,T],\psi,\beta\in L^1[t_0,T],\psi$ 非负, 满足

$$\varphi(t)\leqslant\alpha+\int_{t_0}^t(\psi(s)\varphi(s)+\beta(s))\,\mathrm{d}s,\quad\forall t\in[t_0,T].$$

证明:

$$\varphi(t)\leqslant\alpha\exp\left(\int_{t_0}^t\psi(s)\,\mathrm{d}s\right)+\int_{t_0}^t\exp\left(\int_s^t\psi(r)\,\mathrm{d}r\right)\beta(s)\,\mathrm{d}s,\quad\forall t\in[t_0,T].$$

提示: 考虑满足以下等式的函数 $\varPhi$:

$$\varPhi(t)=\alpha+\int_{t_0}^t(\psi(s)\varphi(s)+\beta(s))\,\mathrm{d}s,\quad\forall t\in[t_0,T].$$

证明. 考虑满足以下等式的函数 $\varPhi$:

$$\varPhi(t)=\alpha+\int_{t_0}^t(\psi(s)\varphi(s)+\beta(s))\,\mathrm{d}s,\quad\forall t\in[t_0,T],$$

即 $\varphi(t)\leqslant\varPhi(t)$, 又有

$$\varPhi'(t)=\psi(t)\varphi(t)+\beta(t)\leqslant\psi(t)\varPhi(t)+\beta(t)\Rightarrow(\varPhi'(t)-\psi(t)\varPhi(t))<\beta(t),$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varPhi(t)\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^t\psi(s)\,\mathrm{d}s\right)\right)\leqslant\exp\left(-\int_{t_0}^t\psi(s)\,\mathrm{d}s\right)\beta(t),$$

积分得到

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varPhi(t)\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^t\psi(s)\,\mathrm{d}s\right)\right)\mathrm{d}t&=\varPhi(t)\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^t\psi(s)\,\mathrm{d}s\right)-\alpha\\&\leqslant\int_{t_0}^t\exp\left(-\int_{t_0}^s\psi(r)\,\mathrm{d}r\right)\beta(s)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

于是

$$\varPhi(t)\leqslant\alpha\exp\left(\int_{t_0}^t\psi(s)\,\mathrm{d}s\right)+\int_{t_0}^t\exp\left(\int_s^t\psi(r)\,\mathrm{d}r\right)\beta(s)\,\mathrm{d}s,\quad\forall t\in[t_0,T].$$

由 $\varphi(t)\leqslant\varPhi(t)$ 即得结论. □

4. 设 $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 连续可微, 且 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 满足线性增长条件, 即存在常数 $K>0$ 使得

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})|\leqslant K\left(|x|+1\right),\quad \forall(t,\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

证明: 对于任何初值条件, 方程 $\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))$ 的解的最大存在区间是 $(-\infty,+\infty)$.

证明. □

5. 设 $\delta>0,f$ 是 $(-\delta,\delta)$ 内的连续可微函数, 满足 $f'(x)=f^4(x)-x^8$ 以及 $f(0)=0$, 试证明 $f\in C^\infty(-\delta,\delta)$, 并讨论 f 取正负的情况. 进一步, 讨论 f 的解析性.

9.5 $\mathcal{B}$

1. 构造函数 f 使得方程 $\begin{cases}x'(t)=f\left(t,x(t)\right),\\ x(0)=0\end{cases}$ 的解的最大存在区间为 $-\infty,1$, 且其解 x 满足 $\lim\limits_{x\to1^-}x(t)=-\infty$, $\overline{\lim\limits_{x\to1^1}}\,x(t)=+\infty$.

2. 设 $\{f_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集 E 上的一列一致有界且等度连续的函数列, $f\in C(E)$. 证明: 若以下条件之一成立, 则 $\{f_k\}$ 本身在 E 上一致收敛到 f.

(i) $\{f_k\}$ 的任何在 E 上逐点收敛的子列均收敛到 f.

(ii) 对于 $\{f_k\}$ 的满足

$$\lim_{j\to+\infty}\int_E f_{k_j}\left(\boldsymbol{x}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_E g\left(\boldsymbol{x}\right)h\left(\boldsymbol{x}\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},\forall h\in C(E)$$

的子列 $\{f_{k_j}\}$ 和相应的 $g\in C(E)$, 均成立 $g=f$.

3. 设 $T>0,\boldsymbol{f}:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 连续, 且 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}\left(t,\boldsymbol{x}\right)$ 也在 $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ 上连续且一致有界. 设 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$, 记 $\boldsymbol{x}(\cdot;\boldsymbol{x}_0)$ 为方程

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{f}\left(t,\boldsymbol{x}(t)\right),\quad t\in[0,T],\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}$$

的解. 任取 $\boldsymbol{e}\in S^{n-1}$, 证明: 当 $\varepsilon\to0^+$ 时, $\boldsymbol{X}_\varepsilon(\cdot;\boldsymbol{e})=\dfrac{\boldsymbol{x}(\cdot;\boldsymbol{x}_0+\varepsilon\boldsymbol{e})-\boldsymbol{x}(\cdot;\boldsymbol{x}_0)}{\varepsilon}$ 在 $[0,T]$ 上一致收敛到方程

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}'(t)=\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}\left(t,\boldsymbol{x}\left(t;\boldsymbol{x}_0\right)\boldsymbol{X}(t)\right),\quad t\in[0,T],\\ \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{e}\end{cases}$$

的解 $\boldsymbol{X}(\cdot)$.

4. 设 $T>0,\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{f}:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 连续, 且 $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}\left(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right),\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{u}}\left(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}\right)$ 也在 $[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 上连续且一致有界. 设 $\boldsymbol{\varphi}\in C\left([0,T];\mathbb{R}^n\right)$, 记 $\boldsymbol{x}\left(\cdot;\boldsymbol{\varphi}\right)$ 为方程

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}'(t)=f\left(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\varphi}(t)\right),\quad t\in[0,T],\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}$$

的解. 任取 $\boldsymbol{\psi} \in C([0,T];\mathbb{R}^m)$, 证明: 当 $\varepsilon \to 0^+$ 时, $\boldsymbol{Y}_\varepsilon(\cdot) = \dfrac{\boldsymbol{x}(\cdot;\boldsymbol{\varphi}+\varepsilon\boldsymbol{\psi}) - \boldsymbol{x}(\cdot;\boldsymbol{\varphi})}{\varepsilon}$ 在 $[0,T]$ 上一致收敛到方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}'(t) = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}\left(t, \boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi}(t)\right)\boldsymbol{Y}(t) + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{u}}\left(t, \boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi}(t)\right)\boldsymbol{\psi}(t), \quad t \in [0,T], \\ \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

的解 $\boldsymbol{Y}(\cdot)$.

5. 试讨论方程 $f'(x) = f^4(x) - x^8$ 在任何初值条件下解的最大存在区间为整个 $\mathbb{R}$.

第 10 章 反常积分与含参变量积分

10.1 基于 Riemann 积分的反常积分

10.1 $\mathcal{A}$

1. 设 f 在 $(0,1]$ 上非负单调, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 这里右端的积分可能是 $+\infty$.

证明. 不妨设 f 单调递减, 则有

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\,\mathrm{d}x,\quad k=1,2,\cdots,n-1,$$

于是有

$$\int_{1/n}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{0}^{1-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

令 $n\to+\infty$ 即得结论. □

2. 讨论以下积分的敛散性[a]:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^a(x-1)^{2b}}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin\big(x^p+\frac{1}{x^q}\big)\,\mathrm{d}x,\quad p,q>0$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\pi x}{x^\alpha|x-1|^\beta}\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\sqrt[3]{\sin^2 x}}$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}(\ln x)\sin(x^p)\,\mathrm{d}x$.

解. (1) 当 $a>0$ 时, $x=0$ 是瑕点, $b>0$ 时, $x=1$ 可能是瑕点. 为此不妨设 $0<\delta<1$, 有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^a(x-1)^{2b}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\delta}\frac{\ln x}{x^a(x-1)^{2b}}\,\mathrm{d}x+\int_\delta^{1}\frac{\ln x}{x^a(x-1)^{2b}}+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^a(x-1)^{2b}}=:I_1+I_2+I_3,$$

先考察 I_1 得敛散性, 易见 I_1 的敛散性于 $\displaystyle\int_0^\delta\frac{\ln x}{x^a}\,\mathrm{d}x$ 相同, 由于

$$\int_0^\delta\frac{\ln x}{x^a}\,\mathrm{d}x=-\int_{1/\delta}^{+\infty}\frac{\ln t}{t^{2-a}}\,\mathrm{d}t,$$

易见后者在 $a<1$ 时收敛. 从而 $a<1$ 时 I_1 收敛.

对于 I_2, 其敛散性与 $\displaystyle\int_\delta^1\frac{\ln x}{(x-1)^{2b}}$ 同, 注意到当 $b\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时有

$$\frac{\ln x}{(x-1)^{2b}}\to 0\left(b<\frac{1}{2}\right),1\left(b=\frac{1}{2}\right),\quad x\to1,$$

此时 $x=1$ 不是瑕点, 故 I_2 收敛. 否则 $b>\dfrac{1}{2}$ 时, $\dfrac{\ln x}{(x-1)^{2b}}\sim\dfrac{1}{(x-1)^{2b-1}}(x\to1)$, 于是 $b<1$ 时 I_2 收敛.

对于 I_3, 有 $\dfrac{\ln x}{x^a(x-1)^{2b}} \sim \dfrac{\ln x}{x^{a+2b}}(x \to +\infty)$, 从而 $a+2b>1$ 时 I_3 收敛.

综上, 当 $a<1, b<1$ 且 $a+2b>1$ 时原积分收敛.

(2)

(3)

(4) 易见 $x=k\pi(k \in \mathbb{Z}_+)$ 都是瑕点, 由于 $\sin x \sim$

(5) ∎

3. 说明以下积分收敛并求其值:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\ln\sin x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1-2r\cos x+r^2\right)\,\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(x^2+1/x^2\right)}\,\mathrm{d}x$;

解. (1) 易见无论 α 为何值, 都有 $\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$, 而 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 从而原积分收敛. 置 $x=\dfrac{1}{t}$, 得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\,\mathrm{d}t,$$

于是 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \frac{\pi}{4}$.

(2) 注意到 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln\sin x = 0$, 故 0 不是瑕点, 而

$$\lim_{x\to\pi^-} \sqrt{\pi-x}\cdot x\ln\sin x = 0,$$

可知 $\displaystyle\int_0^{\pi} x\ln\sin x\,\mathrm{d}x$ 收敛. 置 $x=\pi-t$, 有

$$I := \int_0^{\pi} x\ln\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (\pi-t)\ln\sin t\,\mathrm{d}t = \pi\int_0^{\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x - I,$$

从而 $\displaystyle\int_0^{\pi} x\ln\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$.

(3) 先考虑 $|r|<1$ 的情形. 把 r 看成参变量, 记 $I(r) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1-2r\cos x+r^2\right)\,\mathrm{d}x$ 并对 r 求导, 得到

$$I'(r) = \int_0^{\pi} \frac{-2\cos x+2r}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x,$$

由此可得 $I'(0) = -2\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 0$. 现设 $r \neq 0$, 则

$$I'(r) = \frac{1}{r}\int_0^{\pi} \left(1 - \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{r}\left(\pi - (1-r^2)\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-2r\cos x+r^2}\right),$$

做变换 $t=\tan(x/2)$, 可得

$$(1-r^2)\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1-2r\cos x+r^2} = \frac{1+r}{1-r}\int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+\left(\dfrac{1+r}{1-r}\right)^2} = 2\arctan\frac{1+r}{1-r}t\,\bigg|_0^{+\infty} = \pi.$$

这里用到了 $|r|<1$ 的条件, 从而 $I'(r)\equiv 0$, 易见 $I(0)=0$, 从而 $I(r)\equiv 0$.

在考虑 $|r|>1$ 的情形. 令 $\rho=1/r$, 则 $|\rho|<1$. 于是

$$I(r)=I\left(\frac{1}{\rho}\right)=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\rho\cos x+\rho^2\right)\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\ln\rho^2\,\mathrm{d}x=-2\pi\ln|\rho|=2\pi\ln|r|.$$

当 $r=\pm 1$ 时, 利用上题结果可知

$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

可以得到 $I(\pm 1)=0$. 即得 $I(r)=\begin{cases}0, & |r|\leqslant 1,\\ 2\pi\ln|r|, & |r|>1.\end{cases}$

(4) 易见 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+1/x^2)}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 置 $x=\dfrac{1}{t}$ 得到

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+1/x^2)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-(t^2+1/t^2)}\,\mathrm{d}t,$$

于是有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+1/x^2)}&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left((x-\frac{1}{x})^2+2\right)}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left((x-\frac{1}{x})^2+2\right)}\,\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2-2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2\mathrm{e}^2}.\end{aligned}$$

■

4. 利用 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right), x\in(0,2\pi)$ 说明 $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=-\pi\ln 2$.

5. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 非负, 严格单调下降, 证明: $\displaystyle\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t>0$. 特别地, 对于任何 $x>0$ 成立 $\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t>0$.

证明. □

6. 若 $f(0^+)$ 存在, $\forall A>0$, $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 试计算 Frullani 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a,b>0$.

解. 我们先回顾该积分的计算方法.

设 $f(0^+)$ 与 $f(+\infty)$ 都存在, 且对任何 $0<\delta<\Delta<+\infty$, $\displaystyle\int_\delta^\Delta\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 存在. 则

$$\begin{aligned}\int_\delta^\Delta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_\delta^\Delta\frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_\delta^\Delta\frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{a\delta}^{a\Delta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t-\int_{b\delta}^{b\Delta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t-\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

我们记 $J_1=\displaystyle\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, $J_2=\displaystyle\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. 于是由积分第一中值定理

$$\begin{aligned}J_1&=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=f(\xi_1)\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=f(\xi_1)\ln\frac{b}{a}, && a\delta\leqslant\xi_1\leqslant b\delta,\\J_2&=\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=f(\xi_2)\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=f(\xi_1)\ln\frac{b}{a}, && a\Delta\leqslant\xi_2\leqslant b\Delta.\end{aligned}$$

这时当 $\delta \to 0^+$, $\varDelta \to +\infty$ 时, 得到 $\xi_1 \to 0^+, \xi_2 \to +\infty$, 即得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \big(f(0^+)-f(+\infty)\big)\ln\frac{b}{a}.$$

由题设 $f(0^+)$ 存在, $\forall A>0$, $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则

$$J_2 = \int_{a\varDelta}^{b\varDelta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_A^{b\varDelta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t - \int_A^{a\varDelta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \to 0, \quad \varDelta \to +\infty,$$

从而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(0^+)\ln\frac{b}{a}$.

同理若 $f(+\infty)$ 存在, $\forall \varepsilon>0$, $\displaystyle\int_0^{\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则

$$J_1 = \int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_{a\delta}^{\varepsilon}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t - \int_{b\delta}^{\varepsilon}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \to 0, \quad \delta \to 0^+.$$

从而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(+\infty)\ln\frac{a}{b}$. ■

7. 若 $f(+\infty)$ 存在, $\forall\varepsilon>0$, $\displaystyle\int_0^{\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 试计算 Frullani 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a,b>0$.

解. 参见上一题的解答. ■

8. 设 $f\in C\,[0,+\infty)\,, f>0$. 若 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 证明: $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A^2}\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$.

证明. 首先, 对于任意 $A>0$, 总存在 $a>0$ 使得 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在区间 $(a,a+1)$ 上满足 $\dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{1}{A^3}$, 否则

$$\int_a^{a+N} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=a}^{a+N-1}\int_n^{n+1}\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{N}{A^3} \to +\infty, \quad N\to+\infty,$$

与积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ 收敛矛盾. 从而对任意 A, 存在区间 $(a,a+1)$ 使得 $f(x)>A^3$, 进而

$$\frac{1}{A^2}\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{A^2}\int_a^{a+1} f(x)\,\mathrm{d}x > A \to +\infty, \quad A\to+\infty.$$

□

9. 证明: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\left(nx+1/x\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

证明. 由于 $\cos\left(nx+1/x\right) = \cos(nx)\cos\left(1/x\right) - \sin(nx)\sin(1/x)$, 记

$$I_n = \int_0^{+\infty}\frac{\cos(1/x)}{1+x^2}\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}x, \quad J_n = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(1/x)}{1+x^2}\cdot\sin(nx)\,\mathrm{d}x,$$

易见对于任何 $n\in\mathbb{N}^+$, I_n, J_n 都收敛. 我们只需要证明 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(I_n-J_n)=0$, 由分部积分公式

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(1/x)}{1+x^2}\cdot\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{\sin nx}{n}\frac{\cos(1/x)}{1+x}\bigg|_0^{+\infty} - \frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\cos(1/x)}{1+x^2}\right)'\sin nx\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1/x)\cdot\frac{1+x^2}{x^2} - 2x\cdot\cos(1/x)}{(1+x^2)^2}\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

10. 推广习题 8.3$\mathcal{A}$ 第 6 题如下：设 $f \in C[a.b]$ 非负, 且在 $c \in [a,b]$ 取得唯一的最大值 $f(c) > 0$, φ 在 $[a,b]$ 上绝对可积, 并在点 c 连续. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\displaystyle\int_a^b f^n(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x} = \varphi(c)$.

[a]注: 在讨论含参数的问题时, 一开始不妨对参数的分类分得细一点, 最后再作适当的合并.

10.1 $\mathcal{B}$

1. 尝试给出比习题 $\mathcal{A}$ 第 1 题的题设更弱的条件, 使得结论仍然成立.

2. 试讨论更一般的反常重积分的定义. 特别的, 考虑在定义反常重积分时, 瑕点集可以一般到什么程度.

3. 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$ 当 $x \to 1^-$ 的阶.

解. 易见 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$, 由单调性, 当 $0<x<1$ 时, 我们有

$$x^{n^2} < \int_{(n-1)}^{n} x^{t^2}\,\mathrm{d}t < x^{(n-1)^2}, \quad (n \geqslant 1),$$

因此

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

而

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 \ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}}.$$

当 $x \to 1^-$ 时, $\ln x \sim x-1$, 因此 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$. ■

4. (1) 举例说明, 存在恒正的 f 使得 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在.

(2) 举例说明, 存在恒正的无穷次可导函数 f 使得 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 但 $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在.

(3) 若 f 一致连续, 且 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. 证明: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \sin x^n\,\mathrm{d}x = 0$.

证明. 由于

$$\int_0^{\pi/2} \sin x^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin x^n\,\mathrm{d}x + \int_1^{\pi/2} \sin x^n\,\mathrm{d}x,$$

而

$$0 \leqslant \int_0^1 \sin x^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

$$-\frac{2}{n} \leqslant \int_1^{\pi/2} \frac{1}{nx^{n-1}} \cdot nx^{n-1}\sin x^n\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{积分第二中值定理}} \frac{1}{n}\int_1^{\xi} \mathrm{d}\left(-\cos x^n\right) \leqslant \frac{2}{n}$$

依夹逼准则有 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \sin x^n\,\mathrm{d}x = 0$. □

6. 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\cos x^n\,\mathrm{d}x=1$.

证明. 仿上法, 我们有

$$1\geqslant\int_0^1\cos x^n\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x^{2n}\right)=1-\frac{1}{2(2n+1)}.$$

$$-\frac{2}{n}\leqslant\int_1^{\pi/2}\frac{1}{nx^{n-1}}\cdot nx^{n-1}\cos x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_1^{\xi}\mathrm{d}\left(\sin x^n\right)\leqslant\frac{2}{n}$$

依夹逼准则便得结论. □

7. 设函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 连续且严格单调, 证明: "g 在 $[0,1]$ 上非负可积蕴含 $f\circ g$ 在 $[0,1]$ 上非负可积" 等价于 $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\dfrac{f(x)}{x}<+\infty$.

8. 证明: $f(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\sin t\,\mathrm{d}t$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界.

证明. 记 $F(x,\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\sin\alpha t\,\mathrm{d}t$, 原问题即证 $F(x,1)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上有界. 由于

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}=\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-xt^2}\cos\alpha t\,\mathrm{d}t,$$

对任意的 $\alpha\in\mathbb{R}$ 成立, 事实上, 由于

$$\left|t\mathrm{e}^{-xt^2}\cos\alpha t\right|\leqslant t\mathrm{e}^{-xt^2},$$

而 $\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法可知 $\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-xt^2}\cos\alpha t\,\mathrm{d}t$ 对 $b\in\mathbb{R}$ 一致收敛, 因而等式成立, 又有

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}=\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-xt^2}\cos\alpha t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2x}-\frac{\alpha}{2x}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{xt^2}\sin\alpha t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2x}-\frac{\alpha}{2x}F(x,\alpha),$$

并且有 $F(x,0)=0$, 得到

$$F(x,\alpha)=\exp\left(-\frac{\alpha^2}{4x}\right)\int_0^{\alpha}\frac{1}{2x}\exp\left(\frac{\alpha^2}{4x}\right)\,\mathrm{d}\alpha,$$

于是 $F(x,1)=\exp\left(-\dfrac{1}{4x}\right)\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2x}\exp\left(\frac{\alpha^2}{4x}\right)\,\mathrm{d}x$, 而

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2x}\int_0^1\exp\left(\frac{\alpha^2}{4x}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{1/(2\sqrt{x})}\exp\left(u^2\right)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int_0^2\exp\left(u^2\right)\,\mathrm{d}u+\int_1^{1/(2\sqrt{x})}\left(2-\frac{1}{u^2}\right)\exp\left(u^2\right)\,\mathrm{d}u\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int_0^1\exp\left(u^2\right)\,\mathrm{d}u+\int_1^{1/(2\sqrt{x})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\exp(u^2)}{u}\,\mathrm{d}u\right)\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}\left(C+2\sqrt{x}\exp\left(\frac{1}{4x}\right)\right),\end{aligned}$$

其中 $C=\int_0^1\mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u$. 于是 $F(x,1)\leqslant\dfrac{C}{\sqrt{x}}\exp\left(-\dfrac{1}{4x}\right)+2$, 右侧当 $x\to0^+$ 时有有限极限, 并且结合 **8.4$\mathcal{A}$** 第 **4** 题可知 $f(x)>0$. 结论即证. □

9. 设 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x}$.

证明. 记 $I=\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 下证

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t=I.$$

由于 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 可以找到 $x_0>0$, 使得对 $\forall\varepsilon>0, x\geqslant x_0$ 有 $|F(x)-I|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是当 $x>x_0$, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t-I&=\frac{1}{x}\int_0^x(F(t)-I)\ \mathrm{d}t\\&=\frac{1}{x}\int_0^{x_0}(F(t)-I)\ \mathrm{d}t+\left(1-\frac{x_0}{x}\right)\cdot\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x(F(t)-I)\ \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

因此

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t-I\right|<\frac{1}{x}\left|\int_0^{x_0}(F(t)-I)\ \mathrm{d}t\right|+\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x|F(t)-I|\ \mathrm{d}t.$$

右端第二项 $<\frac{\varepsilon}{2}$; 当 x 充分大时, 第一项同样也小于 $\frac{\varepsilon}{2}$, 于是有

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t-I\right|<\varepsilon.$$

另一方面

$$\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x tF'(t)\,\mathrm{d}t=xF(x)-\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xF(x)-\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t}{x}=0.$$ □

10. 设 f 是 $[0,+\infty)$ 上非负可导函数. $f(0)=0, f'(x)\leqslant\frac{1}{2}, \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 求证: 对任何 $p>1$, $\int_0^{+\infty} f^p(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛, 且 $\int_0^{+\infty} f^p(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{(p+1)/2}$.

证明. 令 $g(t)=\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{(p+1)/2}-\int_0^t f^p(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $g(t)$ 可导,

$$g'(t)=f(t)\left(\frac{p+1}{2}\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{(p-1)/2}-f^{p-1}(t)\right).$$

令 $h(t)=\left(\frac{p+1}{2}\right)^{2/(p-1)}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x-f^2(t)$, 则有 $h'(t)=f(t)\left(\left(\frac{p+1}{2}\right)^{2/(p-1)}-2f'(t)\right)$.

由于 $\beta>1, f'(x)\leqslant\frac{1}{2}$, 我们有 $h'(t)\geqslant 0$. 这说明 $h(t)$ 单调递增, 从 $h(0)=0$ 得 $h(t)\geqslant 0$, 因此 $g'(t)\geqslant 0$, 从 $g(0)=0$ 得 $g(t)\geqslant 0$, 即

$$\int_0^t f^p(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{(p+1)/2},$$

令 $t\to+\infty$ 即得结论. □

11. 设 $\alpha\in(0,1),\beta\in(0,1]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n^{\alpha}}{n^{\beta}}$ 的收敛性如何?

解. ■

12. 设 $\alpha>1,\beta\in(0,1]$, 对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n^{\alpha}}{n^{\beta}}$ 的收敛性, 你能够说些什么?

13. 设 $\alpha>0,\beta>0$, 对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\beta}\sin n^{\alpha}}$ 的的收敛性, 你能够说些什么?

14. 设 $f\in C^1[0,1], f(0)=f(1)=0$. 证明: $\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\dfrac{1}{12}\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x$. 进一步, 如何把条件放宽到 $f\in C_0^1(0,1)$? 其中 $C_0^1(0,1)=\left\{f\in C[0,1]\cap C^1(0,1)\big|f(0)=f(1)=0\right\}$.

证明. 由分部积分可知

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=xf(x)\big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x,$$

同理 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1(x-1)f'(x)\,\mathrm{d}x$. 从而

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2&=\left(\frac{1}{2}\int_0^1(2x-1)f'(x)\right)^2\\&\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1(2x-1)^2\,\mathrm{d}x\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{12}\int_0^1|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

10.2　含参变量反常积分的一致收敛性及判别法

10.2 $\mathcal{A}$

1. 证明以下含参变量积分关于所考虑的参数内闭一致收敛, 但非一致收敛:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,\ \alpha>0$;　　(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\ln^3x\,\mathrm{d}x,\ \alpha>0$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x,\ p,q>0$;　　(4) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}(\ln x)\ln^2(1-x)\,\mathrm{d}x,\ p,q>0$;

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x,\ \alpha>0$;　　(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2},\ \alpha>0$.

证明. (1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6) □

2. 考察以下含参变量积分关于所考虑的参数的一致收敛性[a]:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)\mathrm{d}x,\ \alpha\in\mathbb{R}$;　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \sin\frac{1}{x^\beta}\,\mathrm{d}x,\ \alpha>-2,\beta>0$;

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x,\ y\in\mathbb{R}$;　　(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x,\ y>0$;

解. (1)

(2)

(3)

(4) ■

3. 设 $f\in C(0,+\infty)$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)\,\mathrm{d}t$ 当 $\lambda=a,\lambda=b$ 时都收敛. 证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)\,\mathrm{d}t$ 关于 $\lambda\in[a,b]$ 一致收敛.

证明. □

[a] 习题中讨论一致收敛性需包括内闭一致收敛性, 或者说需要讨论关于一致收敛性能够得到的最好结果.

10.2 $\mathcal{B}$

1. 考察使得以下积分收敛的参数 α,p,q 以及积分一致收敛的范围:

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\sin\left(x^p+\frac{1}{x^q}\right)\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha\sin\left(x^p+\frac{1}{x^q}\right)$.

解. 内容... ■

2. 试讨论变量代换对于反常积分收敛性与一致收敛性的影响.

10.3　含参变量积分的性质

Theorem 10.3.1

设 $f:[a,+\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}$ 其中 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 为区域, 且存在 $\boldsymbol{y}_0\in\Omega$, 使得 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y}_0)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 对几乎所有的 $x\in[a,+\infty)$, $f(x,\cdot)$ 在 Ω 内 (连续) 可微. 对任何 $A>a$, 存在 $g_A\in L[a,A]$ 使得

$$|f_{\boldsymbol{y}}(x,\boldsymbol{y})|\leqslant g_A(x),\qquad \forall \boldsymbol{y}\in\Omega,\text{a.e.}x\in[a,A].$$

进一步, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f_{\boldsymbol{y}}(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 关于 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 一致收敛, 则对任何 $\boldsymbol{y}\in\Omega$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $\varphi(\boldsymbol{y})=\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 在 Ω 内 (连续) 可微且

$$\varphi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y})=\int_a^{+\infty} f_{\boldsymbol{y}}(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x,\qquad \forall\boldsymbol{y}\in\Omega.$$

另外, 当 Ω 为有界凸区域时, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}x$ 关于 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 一致收敛.

10.3 $\mathcal{A}$

1. 求极限: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^{n+1}x+\cos^{n+1}x}\,\mathrm{d}x$.

解. 因为有

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^{n+1}x+\cos^{n+1}x}\,\mathrm{d}x\xlongequal{\tan x=t}\int_0^{+\infty}\frac{t^n+1}{(t^{n+1}+1)\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$$

同时有 $\dfrac{t^n+1}{(t^{n+1}+1)\sqrt{t^2+1}}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{1+t^2}}$, 依 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{t^n+1}{(t^{n+1}+1)\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t=2\ln(\sqrt{2}+1).$$

或者, 注意到 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$, 有 $0\leqslant\sin x\leqslant\cos x\leqslant 1,\sec x\geqslant 1$, 于是

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^{n+1}x+\cos^{n+1}x}\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^n x\cos x+\cos^{n+1}x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x,$$

另一方面,

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^{n+1}x+\cos^{n+1}x}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^n x+\cos^n x}{\cos^{n+1}x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/4}\tan^n x\sec x\,\mathrm{d}x,$$

而

$$\int_0^{\pi/4}\tan^n x\sec x\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\pi/4}\tan^n x\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}.$$

依夹逼准则可知

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^{n+1}x+\cos^{n+1}x}=\int_0^{\pi/4}\sec x\,\mathrm{d}x=\ln(\sqrt{2}+1).$$

注意到被积函数关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称, 这就证明了结论. ■

2. 通过引入参数并利用积分号下求导计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解. 记 $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, 则有 $I(0)=0,I(1)=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. 显然含参积分关于 α 一致收敛, 于是有

$$I'(\alpha)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\frac{x}{1+\alpha x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}\alpha-\ln(1+\alpha)\right),$$

于是

$$I(1)=\int_0^1 I'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha=\int_0^1\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}\alpha\right)\mathrm{d}\alpha-I(1),$$

于是 $I(1)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}\alpha\right)\mathrm{d}\alpha=\frac{\pi}{8}\ln 2$. ■

3. 对应于定理 **10.3.1**, 给出并证明含参变量无穷积分被积函数关于参数仅在单点可微时的结果.

4. 对应于定理 **10.3.1**, 给出可能含有瑕点的含参变量积分可微性的结果并证明.

5. 证明 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-\alpha)^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}x$ 是区间 $(0,2)$ 内关于 α 的无界, 连续函数.

证明. □

6. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^2\frac{x^n\ln x}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$ 并说明计算过程合理.

解. 由 Weierstrass 判别法可知原积分关于参数 n 一致收敛, 从而

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\int_0^2\frac{x^n\ln x}{1+x^n}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1\frac{x^n\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{x^n\ln x}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\right)\\&=\int_0^1\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n\ln x}{1+x^n}\,\mathrm{d}x+\int_1^2\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n\ln x}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\\&=\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}x=2\ln 2-1.\end{aligned}$$

■

7. 设 $a,b>0$, 利用 Frullani 积分计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$.

解. 置 $\ln x=-t$, 于是

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t(a+1)}-\mathrm{e}^{-t(b+1)}}{t}\,\mathrm{d}t=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

■

8. 考察下列积分与例 10.3.5 的联系, 并尝试以各种方法计算这些积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(a^2-\sin^2x)\,\mathrm{d}x,\quad a\geqslant 1.$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1+a\cos x)\,\mathrm{d}x\quad |a|\leqslant 1.$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)\,\mathrm{d}x, a^2+b^2>0.$

解. 依靠例 10.3.5 可以知道 $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\left(2-2\cos x\right)\,\mathrm{d}x=0$. 于是也有 $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(2+2\cos x)\,\mathrm{d}x=0$, 从而

$$\int_0^{\pi}\ln\left(1-\cos x\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\ln\left(1+\cos x\right)=-\pi\ln 2,$$

于是有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\ln\left(1-\cos x\right)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\ln\left(1+\cos x\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\ln\left(1-\cos^2x\right)\,\mathrm{d}x\\=&2\int_0^{\pi/2}\ln\left(1-\sin^2x\right)\,\mathrm{d}x=-2\pi\ln 2.\end{aligned}$$

(1) 记 $F(a)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\left(a^2-\sin^2x\right)\,\mathrm{d}x$, 则有

$$\begin{aligned}F'(a)&=\int_0^{\pi/2}\frac{2a}{a^2-\sin^2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{2a}{(a^2-1)\sin^2x+a^2\cos^2x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi/2}\frac{2a\sec^2x}{(a^2-1)\tan^2x+a^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\frac{2a}{(a^2-1)\tan^2x+a^2}\,\mathrm{d}\left(\tan x\right)=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},\end{aligned}$$

于是

$$F(a)=\int\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,\mathrm{d}a=\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})+C,$$

由前述分析知 $F(1)=-\pi\ln 2$, 从而 $C=-\pi\ln 2$, 即 $F(a)=\pi\ln\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)-\pi\ln 2$.

(2) 记 $G(x)=\int_0^{\pi}\ln(1+a\cos x)\,\mathrm{d}x$, 有 $G(x)=\int_0^{\pi}\ln(1-a\cos x)\,\mathrm{d}x$, 这意味着我们可以只讨论 $a>0$ 的情况, 同时它也带给我们了另一个便利. 这在之后的不久便能体会到. 易见 $F(a)=\int_0^{\pi/2}\ln\left(a^2-\cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x$, 当 $0<a\leqslant 1$ 时, $\frac{1}{a}\geqslant 1$, 于是

$$
\begin{aligned}
F\left(\frac{1}{a}\right)&=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{1-a^2\cos^2 x}{a^2}\right)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\ln(1+a\cos x)+\ln(1-a\cos x)-\ln a^2\right)\,\mathrm{d}x=G(x)-\pi\ln a,
\end{aligned}
$$

由 (1) 的结果可得

$$G(x)=\pi\ln\left(1+\sqrt{1-a^2}\right).$$

(3) 由于

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\ln(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)\,\mathrm{d}x+\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

不妨记 $I(a,b)=\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$. 若 $a=b>0$, 则有

$$I(a,a)=\int_0^{\pi/2}\ln a^2\,\mathrm{d}x=\pi\ln a,$$

当 $a,b>0$ 时有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I(a,b)}{\partial a}&=\int_0^{\pi/2}\frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=2a\int_0^{\pi/2}\frac{\tan^2 x}{a^2\tan^2 x+b^2}\,\mathrm{d}x\\
&=2a\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(a^2t^2+b^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t=\frac{2a}{a^2-b^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{b^2}{a^2t^2+b^2}\right)\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{2a}{a^2-b^2}\left(\arctan t-\frac{b}{a}\arctan\frac{a}{b}t\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{a+b},
\end{aligned}
$$

于是 $I(a,b)=\pi\ln(a+b)+C(b)$, 令 $a=b$ 带入可得

$$C(a)=I(a,a)-\pi\ln(2a)=\pi\ln a-\pi\left(\ln 2+\ln a\right)=-\pi\ln 2,$$

即 $C(b)=-\pi\ln 2$, 得到 $I(a,b)=\pi\ln\frac{a+b}{2}$.

当 $a>0,b=0$ 时, 有

$$I(a,0)=\int_0^{\pi/2}\ln\left(a^2\sin^2 x\right)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi/2}\left(\ln a+\ln\sin x\right)\,\mathrm{d}x=2\left(\frac{\pi}{2}\ln a+\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)\right)=\pi\ln\frac{a}{2},$$

同理 $a=0,b>0$ 时 $I(0,b)=\pi\ln\frac{b}{2}$. 综上所述当 $a^2+b^2>0$ 时有 $I(a,b)=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$, 显然对于 $\int_0^{\pi/2}\ln\left(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x\right)\,\mathrm{d}x$ 有同样的结果, 故

$$\int_0^{\pi}\ln\left(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x\right)\,\mathrm{d}x=2\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}.$$

■

例 10.3.5 设 $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. 计算 $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)\,\mathrm{d}x$.

解. 首先, 从含参积分的瑕点定义来看, 当 α 取值于整个 $\mathbb{R}$ 时, $[0,\pi]$ 上所有点都是积分的瑕点. 但当我们把 α 限制在 $\mathbb{R}$ 上的有界集上时, 积分可能的瑕点只有 0 和 π. 我们有

$$\sin^2 x \leqslant 1-2\alpha\cos x+\alpha^2 \leqslant 2+2\alpha^2,$$

因此,

$$\left|\ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)\right| \leqslant \left|\ln\sin^2 x\right| + \ln\left(2+2\alpha^2\right), \quad \forall x \in (0,\pi),$$

于是由 Weierstrass 判别法, $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)\,\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha \in (-\infty,+\infty)$ 内闭一致收敛. 于是利用一致收敛性或 Lebesgue 控制收敛定理,

$$F(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln\left(1-2\alpha\cos x+\alpha^2\right)\,\mathrm{d}x$$

在 $-\infty, +\infty$ 上连续. 我们有

$$\begin{aligned}
F(\alpha) = F(-\alpha) = \frac{1}{2}\left(F(\alpha)+F(-\alpha)\right) &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\left((1+\alpha^2)-4\alpha^2\cos^2 x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\left((1+\alpha^2)^2-2\alpha^2\cos 2x-2\alpha^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \ln\left(1+\alpha^4-2\alpha^2\cos x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\left(1+\alpha^4-2\alpha^2\cos x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}F(\alpha^2).
\end{aligned}$$

因此, $F(\pm 1)=0$. 更一般地, 反复利用上式可得

$$F(\alpha) = \frac{1}{2^n}F\left(\alpha^{2^n}\right), \quad \forall |\alpha|<1, n \geqslant 1.$$

所以

$$F(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}F\left(\alpha^{2^n}\right) = 0, \quad F(0)=0, \quad \forall |\alpha|<1.$$

最后, 结合 $F\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = -2\pi\ln|\alpha| + F(\alpha)$ 可得 $F(\alpha) = \begin{cases} 2\pi\ln|\alpha|, & |\alpha|>1, \\ 0, & |\alpha|<1. \end{cases}$ ■

9. 证明 $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = 0$.

证明. □

10. 计算 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\cos(\pi x)-\mathrm{e}^{-n^2x^2}}{n\arcsin x}\frac{\mathrm{d}x}{\ln(1+x)}$ 并说明计算过程成立的理由.

解. ■

11. 计算 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$ 并说明计算过程的正确性.

解. ■

12. 证明或证伪: 当 $n \to +\infty$ 时, $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{xt}\left(\frac{\cos(n+1/2)t}{\ln(1+t)} - \frac{\cos nt}{t}\right) \mathrm{d}t$ 关于 $x \in [0,1]$ 一致收敛于零.

13. 设 f 是 $[0,1)$ 上的连续可微函数, $f(0)=0, f' \in L^2(0,1)$. 证明:

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

证明. 记 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \in (0,1), \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$, 那么原不等式等价于

$$\int_0^1 (g(x))^2\,\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 \left(g(x)+xg'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x,$$

即

$$0 \leqslant \int_0^1 \left(3g^2+8xgg'+4x^2(g')^2\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \left(g^2+2xgg'\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(g+2xg'\right)^2\,\mathrm{d}x,$$

而 $\displaystyle\int_0^1 \left(g^2+2xgg'\right)\mathrm{d}x = \left(xg^2\right)\Big|_0^1 = g^2(1) \geqslant 0$, 原不等式得证. □

14. 设 f 为以 π 为周期且在 $[0,\pi]$ 上可积的偶函数. 证明:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x.$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x.$

证明. (1) 我们分三步证明.

(i) 收敛性. 首先, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f(x)\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 是一个定积分. 其次, 由题设, 可见

$$\int_{2\pi}^{2k\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall k \geqslant 1.$$

由此不难得到对任何 $A > 2\pi$, 成立

$$\left|\int_{2\pi}^{A} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^\pi |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

于是由 Dirichlet 判别法, $\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{f(x)\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 即原积分收敛.

(ii) f 为三角多项式情形. 若 $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^m a_k\cos(2kx)$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{f(x)\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^m \frac{a_k\cos(2kx)\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^m a_k \frac{\sin((2k+1)x) - \sin((2k-1)x)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^m a_k\left(\operatorname{sgn}(2k+1) - \operatorname{sgn}(2k-1)\right) = \frac{\pi a_0}{2} = \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(iii) 一般情形．一般地, 由于 f 是以 2π 为周期的连续函数, 根据 Weierstrass 逼近定理, 存在一列三角多项式 T_n 使得

$$\int_0^{2\pi}|f(x)-T_n|\,\mathrm{d}x\to 0,\quad n\to+\infty.$$

令

$$g_n(x)=\frac{T(x)+T(-x)}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t)-T_n(t))\,\mathrm{d}t.$$

则 g_n 具有形式 $g_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{m_n}a_{n,k}\cos(2kx)$, 满足

$$\int_0^{2\pi}(g_n(x)-f(x))\,\mathrm{d}x=0,$$

且

$$\varepsilon_n\equiv\int_0^{\pi}|f(x)-g_n(x)|\,\mathrm{d}x\to 0,\quad n\to+\infty.$$

记

$$G_n(x)=\int_0^x(f(t)-g_n(t))\sin t\,\mathrm{d}t,\quad x\geqslant 0.$$

则

$$G_n(2k\pi)=0,\quad |G_n(x)|\leqslant\int_0^{\pi}|f(t)-g_n(t)|\,\mathrm{d}t=\varepsilon_n.$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{2\pi}\frac{(f(x)-g_n(x))\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|\int_0^{2\pi}|f(x)-g_n(x)|\,\mathrm{d}x=2\varepsilon_n,\\
&\left|\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{(f(x)-g_n(x))\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{G_n(x)}{x}\Big|_{2\pi}^{+\infty}+\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{G_n(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right|\\
=&\left|\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{G_n(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon_n\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon_n.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{+\infty}\frac{f(x)\sin x}{x}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi/2}f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^{+\infty}\frac{(f(x)-g_n(x))\sin x}{x}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi/2}(f(x)-g_n(x))\,\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\left|\int_0^{2\pi}\frac{(f(x)-g_n(x))\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{(f(x)-g_n(x))\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_0^{\pi/2}(f(x)-g_n(x))\,\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&2\varepsilon_n+\varepsilon_n+\varepsilon_n.
\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty$ 即得结论.

(2) 情况类似.

(i) 收敛性．易见 $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$ 是一个定积分, 而 $\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty}f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 因此, 原积分收敛.

(ii) f 为三角多项式情形. 设 $f=\sum_{k=0}^{m} a_k\cos(2k\pi x)$. 注意到

$$\int_0^{+\infty}\cos(2kx)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(2kx)\sin 2x-2k\sin(2kx)\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(2(k+1)x\right)-\sin(2(k-1)x)-2k\sin(2kx)+k\sin\left(2(k+1)x\right)+k\sin\left(2(k-1)x\right)}{2x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}(k+1)-\operatorname{sgn}(k-1)-2k\operatorname{sgn}(k)+k\operatorname{sgn}(k+1)+k\operatorname{sgn}(k-1)\right)=\begin{cases}\pi/2, & k=0,\\ 0, & k\geqslant 1.\end{cases}$$

此时 $\int_0^{+\infty} f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$ 成立.

(iii) 一般情形. 一般地, 对于满足题意的函数 f, 存在一列三角多项式 $g_n(x)=\sum_{k=0}^{m_n} a_{n,k}\cos(2kx)$, 使得

$$\max_{x\in[0,\pi]}|g_n(x)|\leqslant M_f:=\sup_{x\in[0,\pi]}|f(x)|,$$

且

$$\varepsilon_n\equiv\int_0^{\pi}|f(x)-g_n(x)|\,\mathrm{d}x\to 0,\quad n\to+\infty.$$

取自然数列 $\{k_n\}$ 使得 $k_n\to+\infty$, 且 $k_n^2\varepsilon_n\leqslant 1$. 我们有

$$\left|\int_0^{+\infty}(f(x)-g_n(x))\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{k_n\pi}|f(x)-g_n(x)|\,\mathrm{d}x+2M_f\int_{k_n\pi}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=k_n\varepsilon_n+\frac{2M_f}{k_n\pi}.$$

于是

$$\int_0^{+\infty} f(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} g_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此即得结论. □

本题还有其他方法. 直接利用换元法与 $\csc x$ 的展开式, 简述步骤如下.

15. 设 f 为以 2π 为周期在 $[0,2\pi]$ 上可积的偶函数. 证明:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(x)(1+\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

证明. □

16. 证明 $\int_0^1\frac{1}{x^x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

证明. 由 $\int_0^1\frac{1}{x^x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\mathrm{e}^{x\ln x}}\mathrm{d}x$, 并且 $\int_0^1\frac{1}{\mathrm{e}^{x\ln x}}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x\ln x)^n}{n!}\right)\mathrm{d}x$, 设

$$f(x)=|x\ln x|,\quad x\in[0,1],$$

即 $f(x)=-x\ln x$, 易见 $f(x)$ 有最大值 $\frac{1}{\mathrm{e}}$, 从而上述的被积函数中的级数有优级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^n}{n!}$, 由 Weierstrass 判别法可知该级数一致收敛, 从而可逐项积分, 即

$$\int_0^1\frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n\ln^n x\,\mathrm{d}x,$$

现在来计算 $\int_0^1 x^n\ln^n x\,\mathrm{d}x$, 置 $x^{n+1}=\mathrm{e}^{-y}$ 得到

$$\int_0^1 x^n\ln^n x\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty}y^n\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y,$$

将右侧的积分记为 $\Gamma(n)$, 有

$$\Gamma(n)=\int_0^{+\infty}y^n\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=-y^n\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}y^{n-1}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=n\Gamma(n-1),$$

于是 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$. □

17. 对于 $E\subseteq\mathbb{R}^n$, 用 $L\ln L(E)$ 表示满足 $\int_E|f(\boldsymbol{x})|\ln(1+|f(\boldsymbol{x})|)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}<+\infty$ 的函数 f 的全体. 现设 $a>0, f:[0,1]\to[a,+\infty), f\in L\ln L[0,1]$. 证明:

$$\int_0^1 f(x)\ln f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\ln f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明. □

18. 试利用 $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}$ 证明:

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)x}{x}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

证明. □

10.3 $\mathcal{B}$

1. 设 $\alpha>0$, 求 $n\to+\infty$ 时 $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ 的阶.

解. 我们记

$$I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{x+n\pi}{1+(x+n\pi)^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}x,$$

一方面

$$\begin{aligned}I_n&\geqslant 2\int_0^{\pi/2}\frac{n\pi}{1+(n+1)^\alpha\pi^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\geqslant 2\int_0^{\pi/2}\frac{n\pi}{1+(n+1)^\alpha\pi^\alpha x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2n\pi}{(n+1)^{\alpha/2}\pi^{\alpha/2}}\arctan\left(\frac{(n+1)^{\alpha/2}\pi^{\alpha/2+1}}{2}\right)=O(n^{1-\alpha/2}).\end{aligned}$$

另一方面

$$I_n \leqslant 2\int_0^{\pi/2} \frac{(n+1)\pi}{1+n^\alpha\pi^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^{\pi/2} \frac{(n+1)\pi}{1+n^\alpha\pi^\alpha(2x/\pi)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{(n+1)\pi}{n^{\alpha/2}\pi^{\alpha/2-1}}\arctan(n^{\alpha/2}\pi^{\alpha/2}) = O(n^{1-\alpha/2}).$$

故 $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x}{1+x^\alpha\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = O(n^{1-\alpha/2}).$ ■

2. 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1-x^2)\arctan x^2}{x^4+4x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

解. 注意到 $\arctan x^2 = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$, 于是有

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1-x^2)\arctan x^2}{x^4+4x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{x^4+4x^2+1}\left(\int_0^{x^2}\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{+\infty}\int_{\sqrt{y}}^{+\infty} \frac{1-x^2}{x^4+4x^2+1}\cdot\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

先处理 $\displaystyle\int_{\sqrt{y}}^{+\infty}\frac{1-x^2}{x^4+4x^2+1}\,\mathrm{d}x$, 有

$$\frac{1-x^2}{x^4+4x^2+1} = \frac{A}{x^2+2-\sqrt{3}} - \frac{B}{x^2+2+\sqrt{3}},$$

其中 $A = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, B = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, 于是有

$$\int_{\sqrt{y}}^{+\infty}\frac{1-x^2}{x^4+4x^2+1}\mathrm{d}\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{y}}^{+\infty}\frac{A}{x^2+2-\sqrt{3}} - \frac{B}{x^2+2+\sqrt{3}}\mathrm{d}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{A}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} - \frac{B}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\Bigg|_{\sqrt{y}}^{+\infty}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arctan\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{y}\right) - \arctan\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{y}\right)\right).$$

我们记 $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(\alpha\sqrt{y})}{1+y^2}\mathrm{d}y(\alpha\geqslant 0)$, 易见其关于参数 α 一致收敛, 于是

$$\int_0^{+\infty}\int_{\sqrt{y}}^{+\infty}\frac{1-x^2}{x^4+4x^2+1}\cdot\frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(I\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) - I\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\right).$$

另一方面, 易见 $I(0)=0$,

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{y}}{(1+y^2)(1+\alpha^2 y)}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\frac{2y^2}{(1+y^4)(1+\alpha^2y^2)}\,\mathrm{d}y,$$

记 $f(z) = \dfrac{2z^2}{(1+z^4)(1+\alpha^2z^2)}$, 其在上半平面内有三个极点,

$$a_1 = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4},\quad a_2 = \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4},\quad a_3 = \frac{\mathrm{i}}{\alpha},$$

容易计算 $\operatorname*{Res}\limits_{z=a_k} f(z) = \dfrac{2z^2}{4z^3(1+\alpha^2z^2)+2\alpha^2z(1+z^4)}\Bigg|_{z=a_k}$ 分别为

$$r_1 := -\frac{\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4}}{2\left(1+\alpha^2\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2}\right)},\quad r_2 := -\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/4}}{2\left(1+\alpha^2\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/2}\right)},\quad r_3 := \frac{\mathrm{i}\alpha}{1+\alpha^4},$$

于是 $I'(\alpha)=\pi\mathrm{i}\sum\limits_{k=1}^{3}r_k=\dfrac{(\sqrt{2}\alpha^2-2\alpha+\sqrt{2})\,\pi}{2(1+\alpha^4)}$, 注意到

$$\int\frac{\alpha}{1+\alpha^4}\,\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{2}\arctan\alpha^2+C,$$

以及

$$\int\frac{\alpha^2+1}{1+\alpha^4}\,\mathrm{d}\alpha=\int\frac{1+1/\alpha^2}{(\alpha-1/\alpha)^2+2}\,\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\alpha-1/\alpha}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

于是

$$\begin{aligned}&I\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)-I\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=\int_{\sqrt{2+\sqrt{3}}}^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}I'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\\=&\frac{\pi}{2}\left(\arctan\left(\frac{\alpha-1/\alpha}{\sqrt{2}}\right)-\arctan\alpha^2\right)\Big|_{\sqrt{2+\sqrt{3}}}^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\\=&\frac{\pi}{2}\left(2\arctan\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}-\left(\arctan\sqrt{2-\sqrt{3}}-\arctan\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\right)\\=&\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(1-x^2)\arctan x^2}{x^4+4x^2+1}\,\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi^2}{12}=-\frac{\sqrt{2}\pi^2}{24}$. ■

3. 设 $\alpha\in[0,1]$, 计算 $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln|a^2-\sin^2x|\,\mathrm{d}x$.

解. ■

4. 试寻求一些线性算子的积分不等式, 给出与之对偶的不等式.

5. 构造 $[0,1]$ 上的线性函数 f, 使得 $\overline{\{(x,f(x))\,|x\in[0,1]\}}=[0,1]\times[0,1]$.

6. 设 $p>1, f\in L^p(0,+\infty)$ 且 f 非负, 证明 **Hardy** 不等式:

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^{+\infty}f^p(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ 为最佳常数, 等号成立当且仅当 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

证明. □

7. 设 $p>1, f\in L^p(0,+\infty)$ 且 f 非负. 又设 $r>0, r\neq1$. 证明 Hardy 不等式的推广: 若 $r>1$, 则

$$\int_0^{+\infty}x^{-r}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{r-1}\right)^p\int_0^{+\infty}x^{p-r}f^p(x)\,\mathrm{d}x.$$

若 $0<r<1$, 则

$$\int_0^{+\infty}x^{-r}\left(\int_x^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{p}{r-1}\right)^p\int_0^{+\infty}x^{p-r}f^p(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明. □

8. 设 $p,q>1$ 为对偶数, $f\in L^q(0,+\infty)$ 且 f 非负. 令 $F(f)(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. 利用 Hardy 不等式以及对偶关系证明: $\|F(f)\|_{L^q(0,+\infty)}\leqslant\dfrac{p}{p-1}\|f\|_{L^q(0,+\infty)}$.

证明. □

10.4　Euler 积分

10.4 $\mathcal{A}$

1. 求实数 a 的取值范围, 使得积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 并计算该积分.

解. 由于

$$\frac{1}{x^a(x+1)(x+2)(x+3)}\sim\frac{1}{6x^a},x\to0^+,\qquad\frac{1}{x^a(x+1)(x+2)(x+3)}\sim\frac{1}{x^{a+3}},x\to+\infty,$$

从而 $a\in(-2,1)$ 时原积分收敛. 又

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right),$$

如果 $a\in(0,1)$, 那么根据例 10.4.2 的已知结果

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^a}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)x^{1-a}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

有

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^a(1+x)}-\frac{2}{x^a(x+2)}+\frac{1}{x^a(x+3)}\right)\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)}\,\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{1}{2^ax^a(x+1)}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{3^ax^a(x+1)}\,\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin a\pi}-\frac{1}{2^a}\frac{\pi}{\sin a\pi}+\frac{1}{2\cdot3^a}\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{\pi}{2\sin a\pi}\left(1-\frac{1}{2^{a-1}}+\frac{1}{3^a}\right),\end{aligned}$$

当 $a=0$ 时, 可以算得

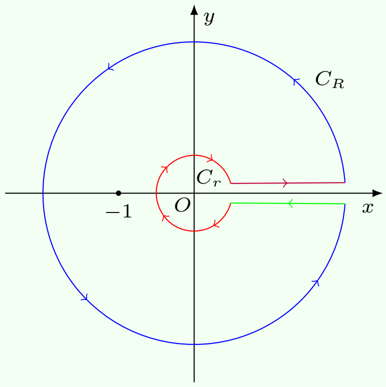
$$\begin{aligned}&\int_0^{A}\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{A}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2}\left(\ln(A+1)-2\ln(A+2)+\ln(A+3)+2\ln2-\ln3\right)\to\ln2-\frac{\ln3}{2},\quad A\to+\infty,\end{aligned}$$

类似得, $a=-1$ 时有

$$\begin{aligned}&\int_0^{A}\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{A}\left(\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x+3}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2}\left(4\ln(A+2)-3\ln(A+3)-\ln(A+1)-4\ln2+3\ln3\right)\to\frac{3}{2}\ln3-2\ln2,\quad A\to+\infty.\end{aligned}$$

现在我们来计算 $a\in(-2,0)$ 的情况, 前面的计算已经表明了 $a=-1$ 的情形, 事实证明, 这是有益的, 因为下面的计算无法显示 a 为整数时的值. 方便起见, 令 $b=-a$, 则 $b\in(0,2)$ 原积分也对应变为 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^b}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x$.

设 $F(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)}$, 考虑围道积分 $\displaystyle\int_C z^bF(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是如下图所示的区域.



则

$$\begin{aligned}\int_C z^b F(z)\,\mathrm{d}z &= \int_r^R x^b F(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} z^b F(z)\,\mathrm{d}z + \int_R^r \left(x\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\right)^b F(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_r} z^b F(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \left(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}b}\right)\int_r^R x^b F(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_r} z^b F(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_R} z^b F(z)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

由于 $x\to 0$ 时 $x^{b+1}F(x)\to 0$, 所以

$$\left|\int_{C_r} z^b F(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{C_r} z^{b+1}F(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \leqslant \max_{C_r}\left|z^{b+1}F(z)\right|\frac{2\pi r}{r} = 2\pi\max_{C_r}\left|z^{b+1}F(z)\right| \to 0,\quad r\to 0,$$

同理结合 $x\to+\infty$ 时 $x^{b+1}F(x)\to 0$ 可得

$$\left|\int_{C_R} z^b F(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{C_R} z^{b+1}F(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \leqslant \max_{C_R}\left|z^{b+1}F(z)\right|\frac{2\pi R}{R} \to 0, R\to+\infty,$$

于是有

$$\int_C z^b F(z)\,\mathrm{d}z = (1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}b})\int_r^R x^b F(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum \mathrm{Res}\left(z^b F(z)\right),\quad (0<\arg z<2\pi),$$

令 $r\to 0^+, R\to+\infty$ 得到

$$\int_0^{+\infty} x^b F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}b}}\sum \mathrm{Res}\left(z^b F(z)\right),$$

又

$$1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}b}\left(\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}b}-\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}b}\right) = (-1)^{b+1}\left(2\mathrm{i}\sin b\pi\right),$$

最后得到

$$\int_0^{+\infty} x^b F(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{\sin b\pi}\sum \mathrm{Res}\left((-z)^b F(z)\right),$$

$F(z)$ 在负实轴上只有 $-1,-2,-3$ 三个一阶极点, 易得

$$\sum \mathrm{Res}\left((-z)^b F(z)\right) = \frac{1}{2} - 2^b + \frac{3^b}{2},$$

于是 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^b F(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{\sin b\pi}\left(\frac{1}{2}-2^b+\frac{3^b}{2}\right)$, 即

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(x+1)(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sin a\pi}\left(1-\frac{1}{2^{a-1}}+\frac{1}{3^a}\right). \qquad \blacksquare$$

2. 试计算如下积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x+x^2)}{x}\,\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x+x^2)}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. (1) 我们有

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

注意到

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to 0^+}\lim_{q\to 1}\frac{\partial}{\partial q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{p\to 0^+}\lim_{q\to 1}\frac{\partial}{\partial q}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

而

$$\frac{\partial}{\partial q}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{\Gamma'(q)\Gamma(p)\Gamma(p+q)-\Gamma'(p+q)\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma^2(p+q)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\left(\psi(q)-\psi(p+q)\right),$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0^+}\lim_{q\to 1}\frac{\partial}{\partial q}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} &= \lim_{p\to 0^+}\lim_{q\to 1}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\left(\psi(q)-\psi(p+q)\right)\\ &= \lim_{p\to 0^+}\lim_{q\to 1}\frac{1}{p}\left(\psi(q)-\psi(p+q)\right) = -\psi'(1) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6},\end{aligned}$$

于是 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$. 注意在这过程之中我们也得到了 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6}$, 而她的作用不久就会让我们感觉到.

(2) 置 $x^2=t$ 并结合上一问的结果

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{24}.$$

(3) 注意到

$$(1-x^3)=(1-x)(1+x+x^2),\quad (1+x^3)=(1+x)(1-x+x^2),$$

这启示我们计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1\pm x^3)}{x}\,\mathrm{d}x$, 事实上我们有

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^3)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^6)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

又置 $x^3=t$, 发现

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi^2}{18},$$

这也意味着 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^3)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{36}$, 于是有

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x+x^2)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{9}.$$

(4) 根据上述分析有

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x+x^2)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^3)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{18}.$$ ■

3. 设 $n \geqslant 2$, 试用多种方法证明 $\prod_{k=0}^{n-1} \sin(x+\frac{k\pi}{n}) = \frac{\sin nx}{2^{n-1}}$.

证明. □

4. 设 $n \geqslant 2$, 证明: $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

证明. 我们我们直接使用下一题的结论, 注意到

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}, \sin\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)}, \cdots, \sin\frac{(n-1)\pi}{n},$$

于是有

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{\pi^{n-1}}{\left(\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

□

5. 设 $n \geqslant 2$, 证明: $\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{(n-1)/2}$.

证明. 由 Gauss 叠乘定理:

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{k}\right)\cdots\Gamma\left(s+\frac{k-1}{k}\right) = (2\pi)^{(k-1)/2} k^{1/2-ks}\Gamma(ks),$$

得到

$$\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{s\to 0^+} (2\pi)^{(n-1)/2} n^{1/2-ns}\frac{\Gamma(ns)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{\sqrt{n}}(2\pi)^{(n-1)/2}.$$

□

6. 计算 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 换元, 然后使用余元公式:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\Gamma(x)\ln\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\pi x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \ln\sin\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2\pi}{2}\end{aligned}$$

■

7. 设 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 以 1 为周期, $f(x) + f\left(x+\frac{1}{2}\right) = f(2x)$. 证明: $f \equiv 0$.

证明. f' 为 $\mathbb{R}$ 上的连续周期函数, 所以它有连续模

$$\omega(r) = \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}\\|x-y|\leqslant r}} |f'(x)-f'(y)|, \quad \forall r \geqslant 0,$$

$\omega(r)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续单调增加, 且 $\omega(0)=0$.

由题设有

$$f'(x) + f'\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2f'(2x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

于是对于任何 $\alpha>0$, 有

$$\begin{aligned}\omega(2\alpha)=&\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}\\|x-y|\leqslant 2\alpha}}|f'(x)-f'(y)|=\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}\\|x-y|\leqslant \alpha}}|f'(2x)-f'(2y)|\\=&\frac{1}{2}\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}\\|x-y|\leqslant \alpha}}\left|f'(x)+f'\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(f'(y)+f'\left(y+\frac{1}{2}\right)\right)\right|\leqslant\omega(\alpha),\end{aligned}$$

反复利用上式得到

$$\omega(\alpha)\leqslant\omega\left(\frac{\alpha}{2}\right)\leqslant\cdots\leqslant\omega\left(\frac{\alpha}{2^n}\right),\quad \forall n\geqslant 1,$$

令 $n\to+\infty$, 得到

$$\omega(\alpha)=\lim_{n\to+\infty}\omega\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)=\omega(0)=0,$$

所以 $f'(x)$ 是常数. 因为 $f(x)$ 为可微的周期函数, 因为 $f'(x)$ 有零点. 于是 $f'(x)\equiv 0$. 所以 f 为常数, 易见 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$, 从而 $f\equiv 0$. □

10.4 $\mathcal{B}$

1. 证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\cos x}{x}\,\mathrm{d}x=0.$

证明. 记 $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\cos x}{x}\,\mathrm{d}x(\alpha\geqslant 0)$, 易见其关于参数 α 一致收敛, 于是有

$$\begin{aligned}I'(\alpha)&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\left(\cos x-\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}(\sin x-\alpha\cos x)}{\alpha^2+1}+\frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+1)x}}{\alpha+1}\right)\Bigg|_0^{+\infty}\\&=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}-\frac{1}{\alpha+1}.\end{aligned}$$

注意到 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}I(\alpha)=0$, 于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\cos x}{x}\,\mathrm{d}x=I(0)=-\int_0^{+\infty}\frac{\alpha}{1+\alpha^2}-\frac{1}{1+\alpha}\,\mathrm{d}\alpha=0.$$ □

2. 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x-\cos x^2}{x}\,\mathrm{d}x.$

解. 记 $I(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-x^a)-\cos(x^a)}{x}\,\mathrm{d}x$, 置 $x^a=t$, 利用上一问的结果, 得到

$$I(a)=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}-\cos t}{t}\,\mathrm{d}x\equiv 0,$$

于是由 $I(1)=I(2)$ 可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x-\cos x^2}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-x)-\exp(-x^2)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

我们只需要计算右侧的积分, 即有

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\frac{\exp(-x)-\exp(-x^2)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\exp(-x)-\exp(-x^2)\right)\,\mathrm{d}\,(\ln x)\\=&\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x-2\int_0^{+\infty}x\exp(-x^2)\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Gamma'(1)=-\frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

从而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x-\cos x^2}{x}\,\mathrm{d}x=-\frac{\gamma}{2}$. ■

3. 计算 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin t^2\,\mathrm{d}t$.

解. 换元, 使用累次积分并运用已知结果.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin t^2\,\mathrm{d}t&=2\int_0^{+\infty}\sin t^2\,\mathrm{d}t\xlongequal{t^2=x}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\sin x\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$ ■

4. 计算 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^2}{1+n^3x^3}$.

解. 我们证明这样一个有趣的命题: 设函数 $g\in[0,+\infty)$ 单调递减, 并且 Riemann 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 则对于任何满足条件 $|f(x)|\leqslant g(x)$ 的函数 $f\in[0,\infty)$ 有 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}x\sum_{n=1}^{\infty}f(nx)=\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$.

如果我们证明了这个命题, 那么对于本问, 取 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}$, 就有

$$\lim_{x\to0^+}x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^3x^3}=\lim_{x\to0^+}x\sum_{n=1}^{\infty}f(nx)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$ ■

下面我们将证明这个命题.

证明. 考察 $\displaystyle M_n:=h\sum_{n=1}^{\infty}f(nh)-\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$, 设 N,L 是某些正整数, 我们将 M_n 表示为

$$\begin{aligned}M_n&=h\sum_{n=1}^{N}f(nh)+h\sum_{n=N+1}^{\infty}f(nh)-\int_0^{L}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_L^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\left(h-\frac{L}{N}\right)\sum_{n=1}^{N}f(nh)+h\sum_{n=N+1}^{\infty}f(nh)+\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(nh)-\int_0^{L}f(x)\,\mathrm{d}x\right)-\int_L^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(i) 因为 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上 Riemann 可积, 所以对于任何给定的 $\varepsilon>0$, 存在最小的正整数 $L=L(\varepsilon)$ 使得

$$\int_{L-1}^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.$$

下文中固定此 L.

(ii) 对于任何给定的 $h\in(0,1)$, 可取正整数 N 满足 $Nh\leqslant L\leqslant(N+1)h$, 于是

$$nh\in\left(\frac{Ln}{N+1},\frac{Ln}{N}\right]\subset\left(\frac{n-1}{N}L,\frac{n}{N}L\right],\quad 1\leqslant n\leqslant N,$$

由题设可知, 积分 $\displaystyle\int_0^{L}f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 所以

$$\frac{L}{N}\sum_{n=1}^{N}f(nh)\to\int_0^{L}f(x)\,\mathrm{d}x,\quad N\to+\infty,$$

注意由 N 的取法可知 $\frac{L}{N}\in\left[h,\frac{N+1}{N}h\right)$, 所以当 $h\to 0^+$ 时 $N\to+\infty$, 于是当 $0<h<h_0$(其中 $h_0=h_0(\varepsilon)$) 时, 有

$$\left|\frac{L}{N}\sum_{n=1}^{N}f(nh)-\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

(iii) 因为 $\frac{L}{N}\in\left[h,\frac{N+1}{N}h\right)$, 所以

$$\left|h-\frac{L}{N}\right|\leqslant\frac{N+1}{N}h-h=\frac{h}{N},$$

并且由 $|f(x)|<g(x)$, 我们有

$$\left|\left(h-\frac{L}{N}\right)\sum_{n=1}^{N}f(nh)\right|\leqslant\left|h-\frac{L}{N}\right|\sum_{n=1}^{N}g(nh)\leqslant\frac{h}{N}\sum_{n=1}^{N}g(nh).$$

因为 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减, 所以

$$h\sum_{n=1}^{N}g(nh)<\int_0^{Nh}g(x)\,\mathrm{d}x<\int_0^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x,$$

并且因为 $\int_0^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 所以当 $0<h<h_0$(其中 h_0 足够小) 时也有 $\frac{1}{N}\int_0^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}$. 于是由前式得知, 当 $0<h<h_0$ 时

$$\left|\left(h-\frac{L}{N}\right)\sum_{n=1}^{N}f(nh)\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

(iv) 另外, 依步骤 (i), 我们有

$$\left|h\sum_{n=N+1}^{\infty}f(nh)\right|\leqslant h\sum_{n=N+1}^{\infty}g(nh)\leqslant\int_{L-1}^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.$$

(v) 最后, 综上述诸估计, 我们得到对于任何 $\varepsilon>0$, 当 $0<h<h_0$ 时 $|M_n|<\varepsilon$. 因此结论得证. □

5. 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

解. 易见

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x&=2\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=-2\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}\ln x\,\mathrm{d}x\\&=-2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x\,\mathrm{d}x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$ ■

6. 设 $p,q>1$ 为对偶数, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^p$ 收敛. 证明如下离散的 Hard-Hilbert 不等式:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_mb_n}{m+n}\leqslant\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^p\right)^{1/q}.$$

证明. □

7. 计算 ψ 在 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{6},\frac{5}{6}$ 等点的值.

解. 我们将利用以下两个公式

$$\sum_{j=0}^{k}\psi\left(x+\frac{j}{k}\right)=k\left(\psi(kx)-\ln k\right),\quad \forall x>0. \tag{$\heartsuit$}$$

$$\psi(x)-\psi(1-x)=-\pi\cot\pi x,\quad \forall x\in(0,1). \tag{$\spadesuit$}$$

在式($\heartsuit$)中令 $k=2$ 得到

$$\psi(x)+\psi\left(x+\frac{1}{2}\right)=2\left(\varphi(2x)-\ln 2\right),$$

令 $x=\frac{1}{2}$, 即有 $\psi\left(\frac{1}{2}\right)+\psi\left(1\right)=2\left(\psi(1)-\ln 2\right)$, 由此解得 $\psi\left(\frac{1}{2}\right)=\psi(1)-2\ln 2=-\gamma-2\ln 2$.

令 $k=3$, 在分别令 $x=\frac{1}{6},\frac{1}{3}$, 有

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{1}{6}\right)+\psi\left(\frac{5}{6}\right)&=2\psi\left(\frac{1}{2}\right)-3\ln 3,\\ \psi\left(\frac{1}{3}\right)+\psi\left(\frac{2}{3}\right)&=2\psi\left(1\right)-3\ln 3,\end{aligned}$$

结合($\spadesuit$)式, 即有

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{1}{6}\right)-\psi\left(\frac{5}{6}\right)&=-\sqrt{3}\pi,\\ \psi\left(\frac{1}{3}\right)-\psi\left(\frac{2}{3}\right)&=-\frac{\pi}{\sqrt{3}},\end{aligned}$$

联立解得

$$\begin{aligned}&\psi\left(\frac{1}{3}\right)=-\gamma-\frac{3}{2}\ln 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}},\quad \psi\left(\frac{2}{3}\right)=-\gamma-\frac{3}{2}\ln 3+\frac{\pi}{2\sqrt{3}},\\ &\psi\left(\frac{1}{6}\right)=-\gamma-2\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi,\psi\left(\frac{5}{6}\right)=-\gamma-2\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi,\end{aligned}$$

随即令 $k=4$, $x=\frac{1}{4}$, 结合($\spadesuit$)式, 有

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right)+\psi\left(\frac{3}{4}\right)=3\psi(1)-\psi\left(\frac{1}{2}\right)-8\ln 2,\psi\left(\frac{1}{4}\right)-\psi\left(\frac{3}{4}\right)=-\pi,$$

解得

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right)=-\gamma-3\ln 2-\frac{\pi}{2},\psi\left(\frac{3}{4}\right)=-\gamma-3\ln 2+\frac{\pi}{2}.$$

■

8. 证明 Γ 函数在定义域内解析.

证明. □

9. 证明例 9.4.7 中的结论.

10.5　变分法初步

10.5 $\mathcal{A}$

1. 证明: 对于任何 $a, b > 0$, 存在唯一的 $r > 0$ 以及 $\theta \in (0, 2\pi]$ 使得 $a = r(\theta - \sin\theta), b = r(1 - \cos\theta)$.

证明. □

2. 证明 (10.5.28) 式.

3. 设 $f \in C[a, b]$. 若存在 $h_1, h_2 \in L^1[a, b]$ 使得

$$f(x) = f(a) + \int_a^x h_j(t)\,\mathrm{d}t, \forall x \in [a, b], j = 1, 2.$$

证明: $\displaystyle\int_a^b |h_1(x) - h_2(x)|\,\mathrm{d}x = 0$.

4. 设 $1 < q < +\infty, E \subseteq \mathbb{R}^n$ 为测度非零的可测集, G 由 (10.5.50) 式给出. 证明: $\forall g \in L^q(E)$, 存在 $g_\varepsilon \in G$ 使得 $\|g_\varepsilon - g\|_{L^q(E)} < \varepsilon$.

10.5 $\mathcal{B}$

1. 举例说明, 对于 $\boldsymbol{A} \in C([a, b]; \mathbb{R}^{(2m)\times(2m)}), \boldsymbol{A}^\top(x) = \boldsymbol{A}(\forall x \in [a, b])$, 条件

$$\int_a^b \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}(x) \\ \boldsymbol{\varphi}'(x) \end{pmatrix}^\top \boldsymbol{A}^\top \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}(x) \\ \boldsymbol{\varphi}'(x) \end{pmatrix} \mathrm{d}x \geqslant 0, \qquad \forall \boldsymbol{\varphi} \in C_0^1([a, b]; \mathbb{R}^m)$$

并不蕴涵

$$\boldsymbol{A} \geqslant 0, \qquad \forall x \in [a, b].$$

第 11 章　曲线积分与曲面积分

11.1　第一型曲线积分

11.1 $\mathcal{A}$

1. 计算以下第一型曲线积分:

(1) $\displaystyle\int_C xyz\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为空间曲线 $\begin{cases} x(t)=\cos t, \\ y(t)=\sin t, \\ z(t)=t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$.

解. 由参数方程得

$$\int_C xyz\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\cos t\cdot\sin t\cdot t\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}\,\mathrm{d}t=-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$ ■

(2) $\displaystyle\int_C x^2\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为平面曲线 $x^{2/3}+y^{2/3}=1$.

解. 置 $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t, t\in[0,2\pi]$, 从而

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\cos^6 t\sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=3\int_0^{2\pi}\cos^6 t\,|\sin t\cos t|\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}.$$ ■

(3) $\displaystyle\int_C |xy|\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为平面曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$.

解. 置 $x=\sqrt{\cos 2t}\cos t, y=\sqrt{\cos 2t}\sin t, t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, 利用对称性则有

$$\int_C |xy|\,\mathrm{d}s=4\int_0^{\pi/4}\frac{\cos 2t\cdot\cos t\cdot\sin t}{\sqrt{\cos 2t}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\sin x\cos^{1/2}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B\left(1,\frac{3}{4}\right)=\frac{2}{3}.$$ ■

11.1 $\mathcal{B}$

1. 试将定积分的一些性质移植到第一型曲线积分.

解. ■

11.2　第一型曲面积分

11.2 $\mathcal{A}$

1. 设 $a,b>0$, 计算椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在 $z\geqslant 0, y\geqslant 0$ 中夹在平面 $y=z$ 和平面 $z=0$ 之间部分的侧面积.

解. 记 L 为在 xOy 平面上的曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 结合题设有 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$, 即 $z(x)=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$,

于是面积可以表成以下第一型曲线积分

$$\int_L z(x)\,\mathrm{d}s=\int_0^{\pi} b\sqrt{1-\cos^2\theta}\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

选取 x,z 为参数, 则由 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与 $y=z$ 得到题设区域到 xOz 面的投影

$$D=\left\{(x,z)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\leqslant 1, z\geqslant 0\right\}.$$

又记 $F=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$, 则有 $y_x=-\dfrac{F_x}{F_y}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$, 于是题设区域的面积

$$S=\iint_D\sqrt{1+y_x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,$$

置 $x=ar\cos\theta, z=br\sin\theta$, 结合 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 代入 y_x, 则有

$$S=\iint_D\sqrt{1+y_x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+\frac{b^2r^2\cos^2\theta}{a^2\left(1-r^2\cos^2\theta\right)}}\cdot abr\,\mathrm{d}r$$

■

2. 计算螺旋面 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=a\theta\end{cases}$ $(r\in[0,R],\theta\in[0,2\pi])$ 的面积.

记 $\boldsymbol{r}(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta,a\theta)$, 从而 $\boldsymbol{r}_r=(\cos\theta,\sin\theta,0)\,,\boldsymbol{r}_\theta=(-r\sin\theta,r\cos\theta,a)$, 于是题设曲面的面积 $\left(D=\left\{(r,\theta)\middle|r\in[0,R],\theta\in[0,2\pi]\right\}\right)$

$$\begin{aligned}S&=\iint_D|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_\theta|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{a^2+r^2}\,\mathrm{d}r\\&=\pi R\sqrt{a^2+R^2}+\pi a^2\ln\left(\frac{R+\sqrt{a^2+R^2}}{a}\right).\end{aligned}$$

3. 设 Σ 为三角形 $x+y+z=1(x,y,z\geqslant 0)$, 计算第一型曲面积分 $\displaystyle\iint_\Sigma\frac{1}{x+2y+3z}\,\mathrm{d}S$. 计算曲面积分 $\displaystyle\int_\Sigma x^2\,\mathrm{d}S$.

$$\iint_\Sigma\frac{1}{x+2y+3z}\,\mathrm{d}S=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}y}{3-2x-y}=\sqrt{3}\int_0^1\ln\left(\frac{3-x}{2-x}\right)\mathrm{d}x=\sqrt{3}\ln\frac{27}{16}.$$

$$\iint_\Sigma x^2\,\mathrm{d}S=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x^2\,\mathrm{d}y=\int_0^1x^2(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{12}.$$

4. 设球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上均匀分布着单位面积质量为 ρ 的物质. 某质点质量为 m, 位于点 $(0,0,r), r\neq R$. 试求球面上的物质的质量以及球面对于该质点的引力.

解. ■

5. 设 ℓ 是长为 L 且足够光滑的平面闭曲线. 对于 $\delta>0$, 设 W_δ 为所有以 ℓ 上的点为球心, δ 为半径的球的并. 证明: 当 δ 足够小时, W_δ 的表面积为 $2\pi\delta L$.

当 δ 足够小时, W_δ 暴露在外的面积为

$$\int_0^L\int_0^{2\pi}\theta\delta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}L=2\pi\delta L.$$

6. 设 φ,ψ 在 $[a,b]$ 上连续可导. 证明: 曲线 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t\in[a,b])$ 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转面的面积为 $2\pi\displaystyle\int_a^b|\psi(t)|\sqrt{|\varphi'(t)|^2+|\psi'(t)|^2}\,\mathrm{d}t$.

曲线绕 x 轴旋转一周得到旋转面的面积 S 正是

$$\sup\left\{\sum_{j=1}^N 2\pi\alpha_j\left|E_j\right|\,\middle|\,\sum_{j=1}^N\alpha_j\chi_{E_j}\text{为}[a,b]\text{上的简单函数},\ 0\leqslant\sum_{j=1}^N\alpha_j\chi_{E_j}\leqslant|y|\right\},$$

记题设曲线为 L, 于是 $S=2\pi\displaystyle\int_L|y|\,\mathrm{d}s=2\pi\int_a^b|\psi(t)|\sqrt{|\varphi'(t)|^2+|\psi'(t)|^2}\,\mathrm{d}t$.

11.2 $\mathcal{B}$

1. 设 a,b,c 为实数, $A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $f\in L^1[-A,A]$, 证明 Poisson(泊松) 公式

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^1 f(Au)\,\mathrm{d}u.$$

证明. 我们对坐标系 $Oxyz$ 进行旋转, 记新坐标系为 $Ouvw$, 平面 Ovw 即为 $ax+by+cz=0$, u 轴垂直于该平面, 于是有

$$u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+z^2}}.$$

则有

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1}f(Au)\,\mathrm{d}S,$$

于是有 $v^2+w^2=\left(\sqrt{1-u^2}\right)^2$, 则令

$$u=u,\quad v=\sqrt{1-u^2}\cos\theta,\quad w=\sqrt{1-u^2}\sin\theta,$$

□

11.3 第二型曲线积分

11.3 $\mathcal{A}$

1. 计算以下第二型曲线积分:

(1) $\displaystyle\int_C ye^{xy}\cos z\,\mathrm{d}x + xe^{xy}\cos z\,\mathrm{d}y - e^{xy}\sin z\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为曲线 $\begin{cases} x(t)=\cos t, \\ y(t)=\sin t, \\ z(t)=t \end{cases}$ 对应于 t 从 0 到 2π 的那一段.

(2) $\displaystyle\int_C (3x+2y)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$, 其中 C 为平面闭曲线 $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ 的逆时针方向.

解. (1) 由题意知

$$\int_C ye^{xy}\cos z\,\mathrm{d}x + xe^{xy}\cos z\,\mathrm{d}y - e^{xy}\sin z\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} e^{\sin t\cos t}(\cos 2t - \sin t)\,\mathrm{d}t,$$

首先由

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{\sin t\cos t}\sin t\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} e^{\sin t\cos t}\sin t\,\mathrm{d}t + \int_\pi^{2\pi} e^{\sin t\cos t}\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} e^{\sin t\cos t}\sin t\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} e^{\sin x\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x = 0,\end{aligned}$$

其次

$$\int_0^{\pi} e^{\sin t\cos t}\cos 2t\,\mathrm{d}t = e^{\sin t\cos t}\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

于是原积分为 0.

(2) 置 $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$, t 从 0 到 2π, 于是

$$\begin{aligned}&\int_C (3x+2y)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y \\ =&\int_0^{2\pi}\left(3\left(\cos^6 t - \sin^6 t\right)\sin^2 t\cos t - 3(3\cos^3 t + 2\sin^3 t)\cos^2 t\sin t\right)\mathrm{d}t \\ =&-6\int_0^{2\pi}\sin^4 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{4}\pi.\end{aligned}$$

■

2. 设 C 为 $\mathbb{R}^2$ 中 C^1 简单曲线. P, Q 为 C 上的连续函数, 证明 $\left|\displaystyle\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \displaystyle\int_C \sqrt{P^2+Q^2}\,\mathrm{d}s$.

证明.

$$\left|\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\right| = \left|\int_C (P,Q)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\right| = \int_C |(P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,\mathrm{d}s| \leqslant \int_C |P\cos\alpha + Q\sin\alpha|\,\mathrm{d}s,$$

由 Cauchy 不等式知 $|P\cos\alpha + Q\sin\alpha| \leqslant \sqrt{P^2+Q^2}\cdot\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$, 命题获证. □

11.3 $\mathcal{B}$

1. 对于 $\mathbb{C}$ 中的 C^1 曲线 C 及其上的复值连续函数 f, 记 $f(z)\,\mathrm{d}z = f(x+\mathrm{i}y)(\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = f(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}f(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}y$. 若令 s 为 C 的弧长参数, $C_{s,\Delta s}$ 为 C 上对应于弧长从 s 到 $s+\Delta s$ 的那一段, 则 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\left|\int_{C_{s,\Delta s}}\mathrm{d}z\right|}{|\Delta s|}=1$. 这样相当于 $|\,\mathrm{d}z|=\mathrm{d}s$. 证明: $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s$.

证明. 利用题设条件与 Cauchy 不等式有:

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_C f(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}f(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}y\right|\\ &\leqslant \int_C |(f(x+\mathrm{i}y),\mathrm{i}f(x+\mathrm{i}y))\cdot(\,\mathrm{d}x,\,\mathrm{d}y)| \leqslant \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$ □

11.4　第二型曲面积分

11.4 $\mathcal{A}$

1. 计算以下第二型曲面积分:

(1) $\displaystyle\iint_\Sigma (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为曲面 $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 的上半部分, 方向取上侧.

(2) $\displaystyle\iint_\Sigma x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 对应于 $0\leqslant z\leqslant 1$ 的那部分, 方向取上侧.

解. (1) 为计算 $\displaystyle\iint_\Sigma (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 将 Σ 投影到 yz 平面, 其投影为

$$D_1=\left\{(y,z)\middle|\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\leqslant 1, z\geqslant 0\right\}.$$

曲面分为两部分:

$$\begin{aligned}\Sigma_1&=\left\{(x,y,z)\middle|x=\sqrt{1-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}},(y,z)\in D_1\right\},\text{方向为前侧},\\ \Sigma_2&=\left\{(x,y,z)\middle|x=-\sqrt{1-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}},(y,z)\in D_1\right\},\text{方向为后侧}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_{\Sigma_1}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma_2}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &=\iint_{D_1}\left(\sqrt{1-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}}+y\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\iint_{D_1}\left(\sqrt{1-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}}-y\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &=2\iint_{D_1}\sqrt{1-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=4\pi.\end{aligned}$$

同理计算可得 $\displaystyle\iint_\Sigma (y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=4\pi$, $\displaystyle\iint_\Sigma (z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\pi$. 从而

$$\iint_\Sigma (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=12\pi.$$

(2) 由对称性

$$\iint_{\Sigma} x^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} y^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = 0.$$

于是仅需计算

$$\iint_{\Sigma} (z+2)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \left(\sqrt{x^2+y^2}+2\right)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{43}{6}\pi.$$

■

2. 设 Σ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的有向 C^1 曲面, P, Q, R 为 Σ 上的连续函数. 证明:

$$\left|\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint_{\Sigma} \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\,\mathrm{d}S.$$

证明. 由第一, 第二型曲面积分的关系与 Cauchy 不等式得到

$$\left|\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| = \left|\iint_{\Sigma} (P,Q,R)\cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S\right| \leqslant \iint_{\Sigma} \sqrt{P^2+Q^2+R^2}\,\mathrm{d}S.$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 对应的单位法向量. □

11.4 $\mathcal{B}$

1. 若请你对 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 Σ 即函数 P 定义 $\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 则对于 Σ 和 P 的要求要怎么提?

解. ■

11.5　Green 公式,Gauss 公式,Stokes 公式

11.5 $\mathcal{A}$

1. 计算以下曲线积分绕原点的循环常数:

(1) $\displaystyle\int_C \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

解. 不妨取 $C = \{(x,y) | x^2+y^2=1\}$, 置 $x=\cos\theta, y=\sin\theta, (\theta\in[0,2\pi])$, 于是得到

$$\int_C \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = 2\pi, \quad \int_C \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = 0.$$

■

2. 设曲线 C 为 $\begin{cases} x=\cos t, \\ y = 2t\sin t, \\ z = t \end{cases}$ 对应于 t 从 0 到 2π 的第一段. 试计算

$$\int_C \mathrm{e}^{xy}\left[\left(y\cos(x+y)+yz^2-\sin(x+y)\right)\,\mathrm{d}x + \left(x\cos(x+y)+xz^2-\sin(x+y)\right)\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z\right].$$

解. 方便起见设原积分为 $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$. 令 L 为直线段 $x=1, y=0, z$ 从 2π 跑到 0, 于

是 $C\cup L$ 为闭曲线, 任取曲面 Σ 以 $C\cup L$ 为边界, 方向与 $C\cup L$ 的方向成右手系, 由 Stokes 公式得到

$$\int_{C\cup L} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

从而

$$\int_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=-\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}2\mathrm{e}z\,\mathrm{d}z=4\mathrm{e}\pi^2.$$ ■

3. 设 $R>0$, 计算积分 $\iint_{\Sigma}\frac{Rx\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+R)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解. 记原积分为 I_2, 选取平面 $D=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant R^2,z=0\}$, 方向为上侧, 可以得到

$$I_2:=\iint_D\frac{Rx\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+R)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\iint_D\frac{R^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi R^3.$$

记 Ω 为 $\Sigma\cup D$ 的内部, 于是由 Gauss 公式

$$\begin{aligned}-I_1+I_2&=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Rx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(z+R)^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\frac{13}{6}\pi R^3+\pi R^2-\frac{2}{3}\pi^2R^3\end{aligned}$$

于是 $I_1=\frac{2}{3}\pi^2R^3-\pi R^2-\frac{1}{6}\pi R^3$. ■

4. 设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分 $(z>0)$, 对于 $P=(x,y,z)\in S$, Σ 为 S 在点 P 处的切平面, $\rho(x,y,z)$ 为原点到平面 Σ 的距离, 求积分 $\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\,\mathrm{d}S$.

解. 首先, 记 $f=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2-1$, 对于 $P=(A,B,C)\in S$, Σ 的方程为

$$\left(f_x\big|_{x=A},f_y\big|_{y=B},f_z\big|_{z=C}\right)\cdot(x-A,y-B,z-C)=0,$$

即 $Ax+By+2Cz-A^2-B^2-2C^2=0$. 由此

$$\rho(x,y,z)=\frac{x^2+y^2+2z^2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}},$$

即计算 $\iint_S\frac{z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}{x^2+y^2+2z^2}\,\mathrm{d}S$. 注意到 Σ 上的点 (x,y,z) 处, 指向曲面外侧的的单位法向量为 $\frac{(x,y,2z)}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}$, 这样就是计算

$$I(S):=\iint_S\frac{zx}{x^2+y^2+2z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{zy}{x^2+y^2+2z^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{2z^2}{x^2+y^2+2z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

置 $D=\{(x,y,z)|\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1,z=0\}$, 易见 $I(D)=0$. 令 Ω 表示 $S\cup D$ 的内部, 利用 Gauss 公式, 得到

$$\begin{aligned}I&=\iiint_{\Omega}\frac{6z(x^2+y^2+2z^2)-2x^2z-2y^2z-8z^3}{(x^2+y^2+2z^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\left(6r\cos\varphi\sin\varphi-2r\cos\varphi\sin^3\varphi-4r\cos^3\varphi\sin\varphi\right)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$ ■

5. 设 $\theta_1 < \theta_2 \leqslant \theta_1 + 2\pi$. 证明: 在极坐标下由射线 $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ 和曲线 $C: \rho = \rho(\theta)(\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2)$ 所围成的曲边扇形 (如图11.1所示) 的面积为 $\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. 当 ρ 连续可导时, 验证这一结果与公式 (11.5.9) 给出的结果一致. 思考这一面积为什么不是 $\frac{1}{2}\int_C \rho^2\,\mathrm{d}\sigma$.

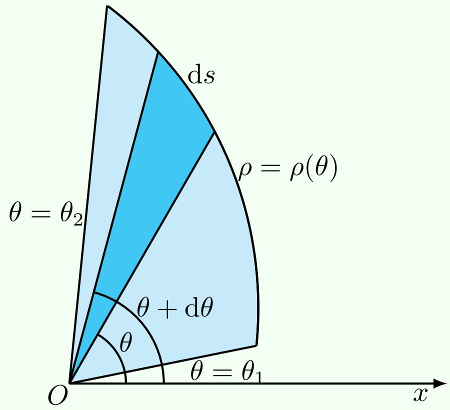


图 11.1 第 5 题图

解. ■

6. 试对于足够光滑的 f 和 $\boldsymbol{F}$, 化简以下表达式:

(1)$\nabla \cdot \nabla f$; (2)$\nabla \times \nabla f$; (3)$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F})$; (4)$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F})$; (5)$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F})$.

解. 不妨设 $f = f(x,y,z), \boldsymbol{F} = X(x,y,z)\boldsymbol{i} + Y(x,y,z)\boldsymbol{j} + Z(x,y,z)\boldsymbol{z}$, 于是

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

容易验证 $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}, \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0$.

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right),$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla \times \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z \partial y}\right).$$

值得一提的是 $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \Delta \boldsymbol{F}$. ■

7. 保守场, 无源场和无旋场之间有没有什么关系?

解. content... ■

8. 用记号 ∇ 重写 Gauss 公式和 Stokes 公式.

解. Gauss 公式可以表示为

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V,$$

Stokes 公式可表示为

$$\int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_{\Sigma} (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$ ■

9. 验证

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}\mathrm{d}\omega$$

适用于 Green 公式, Ostrogradskiĭ-Gauss 公式, Stokes 公式以及 Newton-Leibniz 公式.

解. ■

10. 试利用 Stokes 公式计算 $\int_C y\,\mathrm{d}x+2z\,\mathrm{d}y+3x\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y+z=0.\end{cases}$ 从 z 轴正向[a]看去, 曲线是逆时针方向的.

解. 平面 $x+y+z=0$ 的法线的方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, 于是由 Stokes 公式

$$\int_C y\,\mathrm{d}x+2z\,\mathrm{d}y+3x\,\mathrm{d}z$$

■

[a] 表示从上往下看.

11.5 $\mathcal{B}$

1. 设 $a,b,c>0$, Σ 为曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$. 利用 Gauss 公式计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}.$$

解. 记原积分为 I, 注意到有

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{y^2}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}\,\mathrm{d}S.$$

注意到曲面 Σ 的单位法向量为 $\dfrac{(x/a^2,y/b^2,z/c^2)}{\sqrt{x^2/a^4+y^2/b^4+z^2/c^4}}$. 于是有

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=:\iint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

由于 P,Q,R 在原点处不可导, 而在别处有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,$$

再由 Gauss 公式有

$$I=\iint_{\Sigma'}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\iint_{\Sigma'}\frac{\mathrm{d}S}{\rho^2}=\frac{4\pi\rho^2}{\rho^2}=4\pi,$$

其中 Σ' 是半径 ρ 充分小使得含于 Σ 的球面 $x^2+y^2+z^2=\rho^2$. ■

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中具有 C^1 边界的有界区域, $\boldsymbol{\varphi}\in C_0^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$. 证明:

$$\int_{\Omega}\det\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{x}}\right)\,\mathrm{d}x=\det(\boldsymbol{A})\,|\Omega|\,.$$

证明. □

3. 设 $n \geqslant 1$, R 是仅在点 $0,0$ 为零的 $2n$ 次二元多项式, P,Q 是不超过 $2n-2$ 次的二元多项式. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty}\dfrac{R(x,y)}{(x^2+y^2)^n}>0$, 且在点 $(0,0)$ 之外成立 $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{Q(x,y)}{R(x,y)}=\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{P(x,y)}{R(x,y)}$, 证明: 曲线积分 $\displaystyle\int_C\frac{P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y}{R}$ 绕点 $(0,0)$ 的循环常数为零.

证明. □

4. 在上一题中, 去掉条件 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty}\dfrac{R(x,y)}{(x^2+y^2)^n}>0$ 后结论是否依然成立.

解. ■

11.6　调和函数与解析函数

11.6 $\mathcal{A}$

1. 利用解析函数的性质证明: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\cos x}{x}\,\mathrm{d}x=0.$

证明. 考虑积分 $\displaystyle\int_L\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z$, 其中 L 是如下图所示的路径:

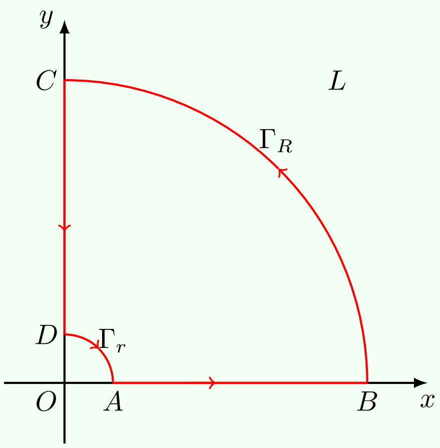


图 11.2

其中 Γ_R 表图中半径为 R 的弧. 由于 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$ 在 Γ_R 所围区域内解析, 从而

$$\int_{\Gamma_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z=0.$$

又

$$\int_L f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{AB}f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\Gamma_R}f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{CD}f(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}z+\int_{\Gamma_r}f(z)\,\mathrm{d}z,$$

注意到

$$\int_{AB} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{CD} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_r^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x+\int_R^r \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_r^R \frac{-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x=-\int_r^R \frac{\mathrm{e}^{-x}-\cos x}{x}\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

下面我们说明 $\displaystyle\int_{\Gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z=-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$, 由于 $\lim\limits_{r\to 0} zf(z)=1$, 则 r 充分小时, 有

$$|zf(z)-1|<\frac{2}{\pi}\varepsilon,$$

又

$$\left|\int_{\Gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right|=\left|\int_{\Gamma_r}\frac{zf(z)-1}{z}\,\mathrm{d}z\right|<\varepsilon,$$

从而结论得证. 又由 Jordan 引理可知

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z=0,$$

结合上述结论可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\cos x}{x}\,\mathrm{d}x=0.$ □

2. 设 $1\leqslant p<+\infty$, φ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数, $\varphi\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 证明 $\varphi\equiv 0$.

证明. □

3. 设 $\varphi\in C^2(\mathbb{R}^n)$ 为上调和函数, 即满足 $-\Delta\varphi\geqslant 0$. 任取 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$, 证明 $F(r)=\dfrac{1}{|B_r(\boldsymbol{x}_0)|}\cdot\displaystyle\int_{B_r(\boldsymbol{x}_0)}\varphi(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x$ 关于 $r>0$ 单调.

证明. □

4. 设 f 在有界复区域 D 上复解析, 在 $\overline{D}$ 上连续. 若存在 $z_0\in D$ 满足 $|f(z_0)|\leqslant\min\limits_{z\in\partial D}|f(z)|$. 证明: f 在 D 内为常数或有零点.

证明. 假设 f 不为常数且无零点, 则 $\dfrac{1}{f(z)}$ 在 D 上解析, 依条件有 $\left|\dfrac{1}{f(z_0)}\right|\geqslant\max\limits_{x\in\partial D}\left|\dfrac{1}{f(z)}\right|$, 这与最大模原理矛盾, 从而 f 在 D 内有零点. □

5. 设 f 在 $\mathbb{C}$ 上复解析, $\lim\limits_{z\to\infty}|f(z)|=+\infty$. 证明: f 有零点. 进一步, 若存在 $n\geqslant 1$ 使得 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{|f(z)|}{|z|^n}=a\in(0,+\infty]$, 则 f 至少有 n 个零点 (含重数).

证明. 由条件知 $\lim\limits_{z\to\infty}\left|\dfrac{1}{f(z)}\right|=0$, 若 f 无零点, 则 $\dfrac{1}{f(z)}$ 解析, 但依极限知 $\exists z_0$, 使得 $\forall|z|>|z_0|$ 时有 $|1/f(z)|>|1/f(z_0)|$, 与最大模原理矛盾, 从而 f 有零点. 进一步, 若 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{|f(z)|}{|z|^n}=a\in(0,+\infty]$, 则 $\lim\limits_{z\to\infty}\left|\dfrac{f(z)}{z^{n-1}}\right|=+\infty$, 归纳即得结论. □

6. 证明: 对任何 $z\in\mathbb{C}$ 以及 $\delta\in(0,1)$, 有 $\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_{(0,1-\delta)\cup(1+\delta,+\infty)}x^z\left(x\mathrm{e}^{-x}\right)^s\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(x\mathrm{e}^{-x}\right)^s\,\mathrm{d}x}=0.$

证明. 记 α 为 xe^{-x} 在 $[0,1-\delta]\cup[1+\delta,+\infty]$ 上的最大值, 给定 $\beta\in(\alpha,e^{-1})$, 则存在长度为 l 的区间 $I\subseteq[1-\delta,1+\delta]$, 使得 $xe^{-x}\geqslant\beta$ 对 $x\in I$ 恒成立. 从而 $\int_0^{+\infty}(xe)^s\,dx\geqslant l\cdot\beta^s$, s 足够大时, 存在常数 C_1 使得

$$\left|\int_0^{1-\delta}x^z(xe^{-x})^s\,dx\right|\leqslant C_1\cdot\alpha^s,$$

又存在常数 C_2 使得

$$\begin{aligned}&\left|\int_{1+\delta}^{+\infty}x^z(xe^{-x})^s\,dx\right|\leqslant\int_{1+\delta}^{+\infty}x^{\operatorname{Re}z}(xe^{-x})^s\,dx\\&\leqslant\int_{1+\delta}^{+\infty}x^{\operatorname{Re}z}(xe^{-x})^{s-1}\cdot[s(x-1)-\operatorname{Re}z]\,e^{-x}\,dx=-\int_{1+\delta}^{+\infty}d\left[x^{\operatorname{Re}z}(xe^{-x})^s\right]\leqslant C_2\cdot\alpha^s.\end{aligned}$$

□

11.6 $\mathcal{B}$

1. 设 $\alpha\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{\sigma}\in S^{n-1}$. 证明: 在 $\mathbb{R}^n$ 的单位球 $B_1(\boldsymbol{x})$ 内, $f(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{x}|^\alpha$ 可以展开成 $\boldsymbol{x}$ 的幂级数, 且对任何 $\delta\in(0,1)$, 该幂级数关于 $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{x})\in S^{n-1}\times B_\delta(\boldsymbol{0})$ 一致收敛.

2. 已知当 $0<\alpha<1$ 时, 成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha^2}-\frac{\pi\cot(\alpha\pi)}{2\alpha}.$$

试利用复解析函数的性质证明: 当 $\alpha>0$ 时, 成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}=-\frac{1}{2\alpha^2}+\frac{\pi}{2\alpha\tanh(\alpha\pi)}.$$

3. 试用不同的方法证明

$$\operatorname{sh}x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

11.7 附录: C^1 曲面上的 Hausdoff 测度

Theorem 11.7.1

设 $1\leqslant k\leqslant n$, D_0 为 $\mathbb{R}^k$ 中得区域, 单射 $\boldsymbol{\varphi}:D_0\to\mathbb{R}^n$ 连续可微, 则对于紧包含于 D_0 得可测集 D, $\Sigma=\boldsymbol{\varphi}(D)$ 得 k 维测度为

$$V_k(\Sigma)=\int_D\sqrt{\det\left(\boldsymbol{\varphi_u}^T\boldsymbol{\varphi_u}\right)}\,d\boldsymbol{u}.$$

等价地,

$$V_k(\Sigma)=\int_D\sqrt{\boldsymbol{\varphi_u}\text{的所有}k\text{阶子式的平方和}}\,d\boldsymbol{u}.$$

11.7 $\mathcal{A}$

1. 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为区域, $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$. 设 $F \subset \Omega$ 为紧集,

$$\omega(r) = \sup_{\substack{0<|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|\leqslant r \\ \boldsymbol{u}\in F, \boldsymbol{v}\in\Omega}} \frac{|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{v})|}{|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|}, \quad r > 0.$$

证明 $\lim\limits_{r\to 0^+} \omega(r) = 0$.

证明. □

11.7 $\mathcal{B}$

1. 试减弱定理 11.7.1 得条件使得结论仍然成立.

解. ■

第 12 章 Fourier 级数

12.1 三角级数,Fourier 级数

12.1 $\mathcal{A}$

1. 设 f 以 2π 为周期, 对于 $x \in [0, 2\pi)$, $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$, 其中 $0 \leqslant a < b < 2\pi$. 试将 f 展开成 Fourier 级数.

解. 我们有

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \chi_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{\pi}, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \chi_{[a,b]}(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{\sin nb - \sin na}{n\pi},$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \chi_{[a,b]}(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{\cos na - \cos nb}{n\pi}.$$

因此

$$f(x) \sim \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nb - \sin na}{n\pi}\cos nx + \frac{\cos na - \cos nb}{n\pi}\sin nx\right). \qquad \blacksquare$$

2. 试将 $|\cos x|$ 和 $|\sin x|$ 展开成 Fourier 级数.

解. 对于 $|\cos x|$, 我们有

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos x|\cos 2nx\,\mathrm{d}x = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n+1)(2n-1)}.$$

对于 $|\sin x|$, 有

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin x|\cos 2nx\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{\pi(2n+1)(2n-1)}.$$

于是有

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}\cos nx}{\pi(2n+1)(2n-1)}, \quad |\cos x| = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos nx}{\pi(2n+1)(2n-1)}. \qquad \blacksquare$$

?

3. 设 p, q 为对偶数, $f \in L^p_{\#}(\mathbb{R})$, $g \in L^q_{\#}(\mathbb{R})$. 令

$$h(x) = \int_0^{2\pi} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}.$$

证明: h 以 2π 为周期. 进一步, 试用 f, g 的 Fourier 系数表示 h 的 Fourier 系数.

证明. 由

$$h(x+2\pi) = \int_0^{2\pi} f(y)g(x+2\pi-y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y = h(x),$$

从而 $h(x)$ 以 2π 为周期.

我们不妨记 f 的 Fourier 级数展开为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 并且

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,$$

注意 f 的 Fourier 级数可以表示为 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, 其中

$$c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_n=\frac{a_n-b_n\mathrm{i}}{2},\quad c_{-n}=\frac{a_n+b_n\mathrm{i}}{2},\quad n\geqslant 1,$$

于是有 $c_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x$, 我们以此为基础, 分析 h 的 Fouroer 系数与 f,g 的 Fourier 的关系, 分别记 g,h 的 Fourier 展开为 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}p_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}q_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$, 于是

$$\begin{aligned}
q_n&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\left(\int_0^{2\pi}g(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(x-y)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\,\mathrm{d}y\cdot\int_0^{2\pi}g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x=c_n\cdot 2\pi p_n.
\end{aligned}$$

□

4. 设 $f\in L^1_{\#}(\mathbb{R})$, $h_1(x)=f(-x)$, $h_2(x)=f(x+x_0)$ $(x\in\mathbb{R})$, 其中 $x_0\in\mathbb{R}$. 试用 f 的 Fourier 系数表示 h_1,h_2 的 Fourier 系数.

解. 设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

通过计算得

$$\begin{aligned}
h_1(x)&\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx-b_n\sin nx),\\
h_2(x)&\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}((a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0)\cos nx+(b_n\cos nx_0-a_n\sin nx_0)\sin nx).
\end{aligned}$$

■

5. 设 $f(x)=x^2-x$ $(x\in[0,\pi])$. 试将 f 分别展开成以 2π 为周期的余弦级数与正弦级数.

解. 对 f 偶延拓 $f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\in[0,\pi],\\ x^2+x, & x\in[-\pi,0)\end{cases}$ 从而由

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi^3-3\pi^2}{3\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2(2\pi-1)(1+\cos n\pi)}{\pi n^2},\quad n\geqslant 1.$$

得

$$f(x)\sim\frac{2\pi^3-3\pi^2}{6\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2\pi-1)(1+\cos n\pi)}{\pi n^2}\cos nx.$$

同理对 f 奇延拓 $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & x\in[0,\pi], \\ -(x^2+x), & x\in[-\pi,0) \end{cases}$ 由

$$a_0=0,\ a_n=0,\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx=\frac{4\cos n\pi-4-2n^2(\pi^2-\pi)\cos n\pi}{\pi n^3},\quad n\geqslant 1,$$

于是

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos n\pi-4-2n^2(\pi^2-\pi)\cos n\pi}{\pi n^3}\sin nx.$$

■

6. 设 f 以 2π 为周期,

$$f(x)=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right),\quad \forall x\in(0,2\pi).$$

试计算 f 的 Fourier 级数.

解. 计算得到

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\left(2\pi\ln 2+2\int_0^{\pi}\ln\sin x\,\mathrm{d}x\right)=0.$$

对于 $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$, 由于

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln\sin x=\lim_{x\to\pi^-}\sqrt{\pi-x}\ln\sin x=0,$$

即原积分收敛, 又

$$\begin{aligned} I:=\int_0^{\pi}\ln\sin x\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi/2}2\ln\sin 2x\,\mathrm{d}x=\pi\ln 2+2\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x+2\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,\mathrm{d}x \\ &=\pi\ln 2+2\int_0^{\pi}\ln\sin x\,\mathrm{d}x=\pi\ln 2+2I=-\pi\ln 2. \end{aligned}$$

继续计算得到

$$\begin{aligned} a_n&=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\ln 2+\ln\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &=-\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\ln 2\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x+\int_0^{2\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\ &=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin x\cdot\cos 2nx\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\left(\ln\sin x\cdot\frac{\sin 2nx}{2n}\bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx\cdot\cos x}{2n\sin x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx\cdot\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

注意到 $\sin 2nx\cdot\cos x=\sin(2n+1)x-\cos 2nx\cdot\sin x$, 则

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x-\cos 2nx\cdot\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x,$$

注意到

$$\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\cos(2kt),$$

从而

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx\cdot\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2kt\right)\,\mathrm{d}t=\pi.$$

故 $a_n = \dfrac{1}{n}$.

$$\begin{aligned}
b_n &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\ln 2 + \ln\sin\frac{x}{2}\right)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\ln 2\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin x\cdot\sin 2nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin x\cdot\sin 2n(\pi - x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin x\cdot\sin 2nx\,\mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}$$

即 $f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$. ■

7. 设 $k \geqslant 1, a_n, b_n$ 为 $f \in C_{\#}^{k}(\mathbb{R})$ 的 Fourier 系数. 证明: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^k a_n = \lim_{n\to+\infty} n^k b_n = 0$.

证明. 由推广的 Riemann-Lebesgue 引理易知 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. 这也作为了三角级数成为某一函数 Fourier 展开的必要条件.

进一步由题设有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = f(x)\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

若记 $f'(x)$ 的 Fourier 系数为 $a_n^{(1)}, b_n^{(1)}$, 则 $a_n = -\dfrac{1}{n}b_n^{(1)}$, 同理可得 $b_n = \dfrac{1}{n}a_n^{(1)}$, 于是得到

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

记 $a_n^{(l)}, b_n^{(l)}$ 为 $f^{(l)}$ 的 Fourier 系数 $(l \leqslant k)$, 于是

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{1}{n}b_n^{(1)} = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}a_n^{(2)}\right) = \cdots = \pm\frac{1}{n^k}b_n^{(k)}, \quad \left(\text{或 } \pm\frac{1}{n^k}a_n^{(k)}\right) \\
b_n &= \frac{1}{n}a_n^{(1)} = \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}a_n^{(2)}\right) = \cdots = \pm\frac{1}{n^k}a_n^{(k)}, \quad \left(\text{或 } \pm\frac{1}{n^k}b_n^{(k)}\right)
\end{aligned}$$

从而 $a_n = o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$, $b_n = o\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$, 即得结论. □

12.1 $\mathcal{B}$

1. 给定 $m \geqslant 1$.

(1) 证明: 当 $n \to +\infty$ 时, m 阶三角多项式列

$$T_n(x) = a_{n0} + \sum_{k=1}^{m}(a_{nk}\cos kx + b_{nk}\sin kx)$$

关于 $x \in [0, 2\pi]$ 一致收敛当且仅当对每个 $k(0 \leqslant k \leqslant m)$, $\{a_{nk}\}$ 和 $\{b_{nk}\}$ 均收敛.

(2) 设 $\mathcal{T}_m$ 表示以 2π 为周期的 m 阶三角多项式全体. 证明: $\forall \in C_{\#}(\mathbb{R})$, 存在 $S \in \mathcal{T}_m$, 使得

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - S(x)| = \inf_{T(x)\in\mathcal{T}_n}\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - T(x)|.$$

证明. (1)

(2) □

2. 试寻找比习题 $\mathcal{A}$ 第 7 题更一般的条件使得 f 的 Fourier 系数 a_n, b_n 满足

$$\lim_{n\to+\infty} n^k a_n = \lim_{n\to+\infty} n^k b_n = 0.$$

解. 在其证明中, $f \in C_{\#}^k(\mathbb{R})$ 可以退化到 $f^{(k)}(x) \in L(\mathbb{R})$. ■

12.2 Fourier 级数的收敛性

12.2 $\mathcal{A}$

1. 设 $f \in C_{\#}^1[0,2\pi]$, 证明: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|f(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}x \leqslant C\int_0^{2\pi}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x$, 且其最佳常数为 $C=1$.

证明. 设

$$f(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

于是有

$$f'(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\left(nb_n\cos nx-na_n\sin nx\right),$$

依 Parseval 等式便有

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\int_0^{2\pi}\left|f(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}x.$$

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(a_n^2+b_n^2\right)=\int_0^{2\pi}|f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

则有

$$\begin{aligned}&C\int_0^{2\pi}|f'(t)|\,\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}\left|f(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}x\\=&\pi\left(\sum_{n=1}^{\infty}(Cn^2-1)(a_n^2+b_n^2)\right)\geqslant 0.\end{aligned}$$

□

2. 按以下步骤对 C^1 平面上的简单闭曲线 C, 证明等周不等式 $4\pi S\leqslant L^2$, 其中 L, S 分别为 C 的周长与所围区域的面积. 依次证明:

(1) 设 s 为弧长参数, 令 $t=\dfrac{2\pi s}{L}$, C 的参数方程为 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$ $(t\in[0,2\pi])$, 则 $L^2=2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(|x'(t)|^2+|y'(t)|^2\right)\mathrm{d}t$.

(2) $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right)\mathrm{d}t$.

(3) $4\pi S \leqslant L^2$.

证明. 首先由 $t=\dfrac{2\pi s}{L}$, 得到 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dfrac{L}{2\pi}$, 从而

$$\frac{L^2}{4\pi^2}=\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)=\left|x'(t)\right|^2+\left|y'(t)\right|^2,$$

积分得到 $L^2=2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\left|x'(t)\right|^2+\left|y'(t)\right|^2\right)\mathrm{d}t$.

由 Green 公式易见

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_C x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=S,$$

其中 D 表示闭曲线所围区域.

设

$$x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

$$y(t)\sim\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\cos nx+d_n\sin nx\right).$$

易见上述 Fourier 一致收敛, 则有

$$x'(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left(nb_n\cos nx-na_n\sin nx\right),\ y'(t)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left(nd_n\cos nx-nc_n\sin nx\right),$$

于是依照 Parseval 等式有

$$\frac{L^2}{2\pi^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|x'(t)|^2\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|y'(t)|^2\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2\right),$$

容易得到

$$\begin{aligned}\frac{2S}{\pi}&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\right)\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(2a_nd_n-2c_nb_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n\left(2|a_nd_n|+2|c_nb_n|\right)\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n\left(a_n^2+d_n^2+c_n^2+b_n^2\right),\end{aligned}$$

由于 $n^2\geqslant n$, 于是 $4\pi S\leqslant L^2$. □

3. 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上单调且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. 证明 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0$.

证明. 由于 $\left|\displaystyle\int_0^A\sin nx\,\mathrm{d}x\right|=\dfrac{1-\cos nA}{n}\leqslant 1$ 有界, f 单调且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, 依 Dirichlet 判别法知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$ 收敛, 这意味着 $\exists A$ 使得 $\forall\varepsilon>0$ 使得

$$\left|\int_A^{+\infty}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

令 $F(x)=xf(x)$, 则 $F(0^+)=0$, 于是由 Dirichlet 引理可得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^A\frac{F(x)-F(0^+)}{x}\sin nx=0.$$

再由 ε 的任意性即得结论. □

4. 设 $n \geqslant 1$, 证明: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x < \frac{n^2\pi^2}{4}$.

证明. 只需证 $n \geqslant 2$ 的情况, 令

$$\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/(2n)} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x + \int_{\pi/(2n)}^{\pi/2} x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 \mathrm{d}x =: I + J.$$

对 I, 用数学归纳法易知 $\left|\dfrac{\sin nx}{\sin x}\right| \leqslant n$, 从而 $I \leqslant \dfrac{n^2\pi^2}{8}$; 对 J, 利用 $|\sin nx| \leqslant 1$ 及 $\dfrac{2}{\pi}t < \sin t\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$, 可得 $J < \dfrac{n^2\pi^2}{8}$. 相加即得结论. □

5. 设 $f \in C(\mathbb{R})$ 以 1 为周期, $f(x) + f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = f(2x)$. 若存在 $g \in L^1[0,1]$ 使得 $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, 证明: $f \equiv 0$.

证明. 设 f 的 Fourier 展开式为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(2k\pi x) + b_k \sin(2k\pi x)\right),$$

则 $f(x) + f\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$ 的 Fourier 展开为

$$\begin{aligned}
&a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(1 + (-1)^k\right) a_k \cos(2k\pi x) + \left(1 + (-1)^k\right) b_k \sin(2k\pi x)\right)\\
=&a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(2a_{2k} \cos(4k\pi x) + 2b_{2k} \sin(4k\pi x)\right),
\end{aligned}$$

而 $f(2x)$ 的 Fourier 展开为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(4k\pi x) + b_k \sin(4k\pi x)\right).$$

比较系数得到

$$a_0 = 0, \quad a_k = 2a_{2k}, \quad b_k = 2b_{2k}, \quad k \geqslant 1,$$

从而

$$a_k = 2^n a_{2^n k}, \quad b_k = 2^n b_{2^n k}, \quad \forall k \geqslant 1, n \geqslant 1,$$

由题设 $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\lim_{n\to+\infty} n a_n = \lim_{n\to+\infty} 2n \int_0^1 f(x)\cos(2n\pi x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^1 g(x)\sin(2n\pi x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

同理 $\lim\limits_{n\to+\infty} n b_n = 0$, 所以

$$a_k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{k} 2^n k a_{2^n k} = 0, \quad b_k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{k} 2^n k b_{2^n k} = 0, \quad \forall k \geqslant 1,$$

这样 f 的 Fourier 系数均为 0, 所以 $f \equiv 0$. □

6. 设 $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in L^p[0, 2\pi]$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f;\cdot) - f(\cdot)\|_{L^p[0,2\pi]} = 0$.

证明. 由于

$$\|\sigma_n(f;x)-f(x)\|_{L^p[0,2\pi]}=\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}(f(x+t)-f(x))\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2\mathrm{d}t\right|^p\mathrm{d}x,$$

□

12.2 $\mathcal{B}$

1. 设 $f\in L^1_{\#}(\mathbb{R}),g_n\in L^{\infty}_{\#}(\mathbb{R})(n\geqslant 1)$, 满足

$$\int_{-\pi}^{\pi}g_n(x)\,\mathrm{d}x=1,\quad \int_{-\pi}^{\pi}|g_n(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant M,\quad \forall n\geqslant 1,$$

其中 M 为常数. 又对任何 $\delta>0$, 成立

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}(|g_n(x)|+|g_n(-x)|)\,\mathrm{d}x=0,\qquad \sup_{\substack{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi\\ n\geqslant 1}}|g_n(x)|<+\infty.$$

证明:

(1) 若 f 在点 x_0 连续, 则 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)g_n(x_0-y)\,\mathrm{d}y=f(x_0)$.

(2) 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 则 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(y)g_n(x-y)\,\mathrm{d}y-f(x)\right|=0$.

2. 推广上一题的结果.

3. 计算 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\ln(\sin x)\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$.

证明. 容易得到 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}x\ln(\sin x)\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$, 利用

$$\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n},\quad \forall x\in(0,2\pi).$$

置 $\displaystyle I=\int_0^{\pi/2}x\ln(\sin x)\ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$ 我们有

$$\begin{aligned}
I&=\frac{\pi}{8}\int_0^{\pi/2}\left\{[\ln(\sin x)+\ln(\cos x)]^2-\ln^2(\sin x)-\ln^2(\cos x)\right\}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi}{8}\int_0^{\pi/2}\left[\ln^2\frac{\sin 2x}{2}-2\ln^2(\sin x)\right]\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi}{8}\int_0^{\pi/2}\left\{\left[2\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4nx}{n}\right]^2-2\left[\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n}\right]^2\right\}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\pi}{8}\left(\pi\ln^2 2-\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{8}\ln^2 2-\frac{\pi^4}{192}.
\end{aligned}$$

□

4. 试考察函数 $\displaystyle f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\ln x}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的可积性.

5. 设 $\alpha\in(0,1)$, 考察函数 $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ 和 $\displaystyle g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$ 当 $x\to 0^+$ 时的阶.

6. 设 $f \in C_{\#}[0,2\pi]$ 的 Fourier 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$. 问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n\cos nx - a_n\sin nx)$ 是不是某个 $g \in C_{\#}[0,2\pi]$ 的 Fourier 级数?

7. 设 $\{b_n\}$ 为单调下降的正数列, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛的充要条件是 $nb_n \to 0$.

8. 试讨论如何定义方程 (12,2,47) 的解, 以及在何种条件下, 方程 (12.2.47) 有唯一解, 而 (12.2.48)-(12.2.49) 给出了方程的解.

9. 对于 $p \in [1,+\infty)$, 证明 (12.3.38) 式与 (12.2.40) 式的等价性.

10. 证明 (12.2.39) 与 (12.2.41) 式等价.

12.3　Fourier 变换

Theorem 12.3.1

设 $f,g \in \mathscr{S}$, 则

$$(f*g)^{\wedge}(\boldsymbol{x}) = \widehat{f}(\boldsymbol{x})\widehat{g}(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$
$$(fg)^{\wedge}(\boldsymbol{x}) = \left(\widehat{f}*\widehat{g}\right)(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Theorem 12.3.2

设设 $f,g \in \mathscr{S}$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\overline{g(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\boldsymbol{x})\overline{\widehat{g}(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

12.3 $\mathcal{A}$

1. 设 $L \in L^1(\mathbb{R}^n), g(\boldsymbol{x}) = f(r\boldsymbol{x})$, 其中 $r > 0$ 为给定实数, 试求 f 的 Fourier 变换表示 g 的 Fourier 变换.

解. ■

2. 设 $f \in C_c^2(\mathbb{R})$, 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left|x^2\widehat{f}(x)\right| = 0$. 进而对于任何 $g \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, 有

$$\lim_{T\to+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\widehat{f}\left(\frac{n}{T}\right)g\left(\frac{n}{T}\right) = \int_{\mathbb{R}}\widehat{f}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明. □

3. 对于

$$f \in X_a = \{f \big| f\text{非负, 偶, } \operatorname{supp} f = \left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right], f\text{在}\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)\text{内 Lipschitz 连续}\},$$

证明: $\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$.

证明. □

4. 设 $f(x)=\pi\mathrm{e}^{-2\pi|x|}(x\in\mathbb{R})$. 试求 f 的 Fourier 变换.

解. ■

5. 证明: $g(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi y^2}\mathrm{e}^{2\pi yz}\,\mathrm{d}y$ 复可导.

证明. □

6. 试用积分号下求导的方法计算

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\pi y^2}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

解. 首先 $F(0)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\pi y^2}\,\mathrm{d}y$, 即

$$F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=1,$$

又

$$F'(x)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\pi y^2}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}(-2\pi\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}y=-2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\pi x^2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\pi(y+\mathrm{i}x)^2}y\,\mathrm{d}y,$$

由

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\pi(y+\mathrm{i}x)^2}y\,\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\pi(y+\mathrm{i}x)^2}\left((y+\mathrm{i}x)-\mathrm{i}x\right)\,\mathrm{d}y\\=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\pi(y+\mathrm{i}x)^2}\,\mathrm{d}\left(y+\mathrm{i}x\right)^2-\mathrm{i}x\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\pi(y+\mathrm{i}x)^2}\,\mathrm{d}y=-\mathrm{i}x,\end{aligned}$$

于是 $F'(x)=-2\pi x\mathrm{e}^{-\pi x^2}$, 可知 $F(x)=\displaystyle\int_0^x F'(x)\,\mathrm{d}x+F(0)=\mathrm{e}^{-\pi x^2}$. ■

12.3 $\mathcal{B}$

1. 试仿下列等式给出一些类似的等式.

对于正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 当且仅当 $a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant 1$ 时, 成立

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\pi^2\cos a_1x}{\pi^2-4a_1^2x^2}\cdots\frac{\pi^2\cos a_nx}{\pi^2-4a_n^2x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{1}{2^n\sin^n(1/2)}\int_0^{+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\frac{2a_kx+1}{2}}{2a_kx+1}+\frac{\sin\frac{2a_kx-1}{2}}{2a_kx-1}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\frac{\pi^2-2a_1\pi x\sin a_1x}{\pi^2-4a_1^2x^2}\cdots\frac{\pi^2-2a_n\pi x\sin a_nx}{\pi^2-4a_n^2x^2}=\frac{\pi}{2},$$

$$3^n\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin a_1x-a_1x\cos a_1x}{a_1^3x^3}\cdots\frac{\sin a_nx-a_nx\cos a_nx}{a_n^3x^3}=\frac{\pi}{2}.$$

解. ■

2. 设 $f\in C^1(\mathbb{R})$, 且 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left(f^2(x)+\left(f'(x)\right)^2\right)\,\mathrm{d}x=1$. 证明: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, 且 $\|f\|_\infty<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

证明. □

3. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$, 计算含参变量积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\pi x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\ \int_0^{+\infty} \frac{x\sin(\alpha\pi x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

解. 记 $J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha\pi x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. 显然有 $J(\alpha) = J(-\alpha)$, 为此我们不妨设 $\alpha \geqslant 0$. 注意到 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1+x^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}$, 于是

$$\int_0^{+\infty} \cos(\alpha\pi x)\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1+x^2)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\cos(\alpha\pi x)\,\mathrm{d}x,$$

记 $I(\alpha,t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx^2}\cos(\alpha\pi x)\,\mathrm{d}x$, 如果我们置 $x = \sqrt{\frac{\pi}{t}}p, \alpha = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}q$, 则

$$I(\alpha,t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi p^2}\cos(2\pi pq)\,\mathrm{d}p,$$

注意到在 12.3.A 第 6 题中算得

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi y^2}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\pi x^2},$$

这意味着 $I(\alpha,t) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{t}}\mathrm{e}^{-\pi q^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{t}}\exp\left(-\dfrac{\pi^2\alpha^2}{4t}\right)$. 于是

$$J(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty} \exp\left(-t - \frac{\pi^2\alpha^2}{4t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}},$$

置 $t = u^2$, 得

$$J(\alpha) = \sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u^2 + \frac{\pi^2\alpha^2}{4u^2}\right)\right)\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\pi\alpha}\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2u}\right)^2\right)\mathrm{d}u,$$

置 $y = u - \dfrac{\pi\alpha}{2u}$, 有 $\mathrm{d}y = \left(1 + \dfrac{\pi\alpha}{2u^2}\right)\mathrm{d}u$, 并且 $u = 0, y = -\infty$; $u = +\infty, y = +\infty$, 于是

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y &= \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2u}\right)^2\right)\left(1 + \frac{\pi\alpha}{2u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2u}\right)^2\right)\mathrm{d}u + \frac{\pi\alpha}{2}\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2u}\right)^2\right)\frac{\mathrm{d}u}{u^2},\end{aligned}$$

对于 $\dfrac{\pi\alpha}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2u}\right)^2\right)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$, 令 $u = -\dfrac{\pi\alpha}{2w}$, 则 $\mathrm{d}u = \dfrac{\pi\alpha}{2}\dfrac{\mathrm{d}w}{w^2}$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{\pi\alpha}{2}\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2}\right)^2\right)\frac{\mathrm{d}u}{u^2} &= \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^0 \exp\left(-\left(w - \frac{\pi\alpha}{2w}\right)^2\right)\frac{2}{\pi\alpha}\,\mathrm{d}w \\ &= \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\left(w - \frac{\pi\alpha}{2w}\right)^2\right)\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

即有 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2u}\right)^2\right)\mathrm{d}u$, 从而

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(u - \frac{\pi\alpha}{2u}\right)^2\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

即得 $J(\alpha)=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\pi|\alpha|}$. 对于 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(\alpha\pi x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, 注意到

$$J'(\alpha)=-\pi\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(\alpha\pi x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{2}\mathrm{e}^{-\pi\alpha},\quad \alpha>0,$$

类似可得其余结果, 最终 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(\alpha\pi x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\operatorname{sgn}(\alpha)\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\pi|\alpha|}$. ■

4. 证明: (12.3.27) 式给出了方程 (12.3.23) 的唯一解.

证明. □

5. 设 $p\in(1,2)$, 速降函数列 $\{\varphi_k\}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中强收敛于 f. 证明: $\{\widehat{\varphi}_k\}$ 在 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 中强收敛于 $\widehat{f}$, 其中 p' 是 p 的对偶数.

证明. □

6. 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$. 证明: 可取到速降函数列 $\{f_k\}$ 同时在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中强收敛于 f.

证明. □

7. 证明: Plancherel 定理在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中成立.

证明. □

8. 设 $p\in[1,2]$, 证明 Hausdorff-Young 不等式对于 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 成立.

证明. □

9. 试推广定理 **12.3.1** 和 **12.3.2**.

解. ■

12.4 Fourier 级数的唯一性

Lemma 12.4.1: Cantor 引理

设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛, 则 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n=0$.

Lemma 12.4.2: Riemann 第二定理

设 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}c_n=0$, 则

$$\lim_{h\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\sin^2 nh}{n^2h}=0.$$

Lemma 12.4.3

设 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = A$, 则

$$\lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 = A.$$

12.4 $\mathcal{A}$

1. 试利用闭区间套定理证明引理 **12.4.1**.

证明. □

2. 证明引理 **12.4.2**

证明. □

12.4 $\mathcal{B}$

1. 推广引理 **12.4.3**.

解. ■

2. 利用 Rabbe 判别法讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}(p,q>0)$ 的敛散性.

解. 即计算 $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$, 有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}\cdot\frac{q(q+1)\cdots(q+n)(q+n+1)}{(n+1)!(n+1)^{-p}}-1\right)\\ =&\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{q+n+1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p-1\right)\\ =&\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{q(n+1)^{p-1}}{n^{p-1}}+\frac{(n+1)^p-n^p}{n^{p-1}}\right)=q+p,\end{aligned}$$

则 $p+q>1$ 时, 原级数收敛; $p+q<1$ 时, 原级数发散. 而 $p+q=1$ 时, **Rabbe** 判别法失效. ■

事实上由上式可知

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}}&=\left(1+\frac{q}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=\exp\left(\ln\left(1+\frac{q}{n+1}\right)+p\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\ &=\exp\left(\frac{p+q}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=1+\frac{p+q}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),\end{aligned}$$

由 Gauss 判别法 (定理 14.3.8) 可知 $p+q=1$, 级数发散.