Maths

ORAUX

Juillet 2021

1 Mines

1.1 Exercice 1

On pose $E = \mathcal{M}_n(R)$, avec $n \geq 2$.
Soit $A \in E$. On définit l'endomorphisme $f_A \in \mathcal{L}_R(E)$ tel que pour tout $M \in E,\ f_A = AM$.

1. $\forall\ P \in R[X]$ déterminer $P(f_A)$.

2. Montrer que f_A est diagonalisable ssi A est diagonalisable.

3. Donner le polynôme caractéristique de f_A en fonction de celui de A.
Indication: Etudier le cas particulier $n =\ 2$.

4. Donner les éléments propres de f_A en fonction de ceux de A (valeurs propres, vecteurs propres et ordre de multiplicité).

5. Retrouver le résultat de la question 2.

1.2 Exercice 2

Soit $\alpha > 0$, On définit (U_n) par $\forall\ n \geq 1,\ U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} ln(k)^{\alpha}$.
Etudier la convergence de $\sum\limits_{\geq 2} \frac{1}{U_n}$

2 Centrale

2.1 Centrale 2

On définit (a_n) par $\forall\ n \in N,\ a_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$.

2. Représenter la courbe représentative de f grâce à Python.

3. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

4. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f sur $]0, R[$.
5. Donner la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.