Druhý zápočtový test

Varianta B

8 **1a.** Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + 2xy - y^2 - 3x + 7$.

8 **1b.** Najděte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - 24x + 7$ na úsečce procházející body $[-2,-5]$, $[2,3]$.

8 **2a.** Řešte diferenciální rovnici $y'' - 6y' + 10y = \sin(3x)e^{2x}$.

8 **2b.** Řešte diferenciální rovnici $y' + 4y = y^2 + 4$, $y(0) = 1$.

8 **3.** Integrujte funkci $f(x,y) = \frac{1}{(3x+2y+15)^2}$ na trojúhelníku určeném body: $[-1,-1]$, $[0,0]$, $[1,-1]$.

1a) $\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + 2y - 3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y = 0 \end{array}\right\}$ $x^2 + 2x - 3 = 0$

$[1,1]$ $2a^2 + 4ab - 2b^2 = 2(a+b)^2 - 4b^2$ IND $\Rightarrow$ NIC

$[-3,-3]$ $-6a^2 + 4ab - 2b^2 = -2(a-b)^2 - 4a^2$ ND $\Rightarrow$ l. max.

4 4

b) $y = 2x - 1$ $f(x, 2x-1) = (\underbrace{x - 2x + 1}_{-x+1})^2 - 24x + 7 = x^2 - 2x + 1 - 24x + 7 = x^2 - 26x + 8$

$f'(x, 2x-1) = 2x - 26 = 0 \Rightarrow$ 3 $x = 13$ neleží na úsečce

$f(-2,-5) = 9 + 48 + 7 = \underline{\underline{64}}$ max. 1 $f(2,3) = 1 - 48 + 7 = \underline{\underline{-40}}$ min. 1 3

2a) $k^2 - 6k + 10 = 0$

$k_{1,2} = \frac{+6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = +3 \pm i$

$y_H = e^{+3x} \cdot (C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ $x \in \mathbb{R}$ 3

$y_p = A \cdot e^{2x + 3ix}$ $\Rightarrow A = \frac{-7+6i}{49+36}$

$A \cdot (2+3i)^2 - 6A(2+3i) + 10A = 1$

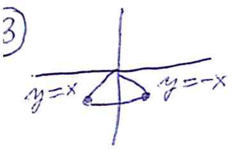
$y_p = \mathrm{Im}\left(\frac{-7+6i}{85} e^{2x} \cdot (\cos 3x + i \sin 3x)\right)$

$= e^{2x}\left(-\frac{7}{85} \sin 3x + \frac{6}{85} \cos 3x\right)$ 5

2b) $y' = y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2$ s.ř. $y = 2$

$y \neq 2 \longrightarrow \int \frac{dy}{(y-2)^2} = \int dx$ $\frac{-1}{y-2} = x + C$

$y_o = \frac{-1}{x+C} + 2$ $1 = \frac{-1}{C} + 2$ $\underline{\underline{y_p = \frac{-1}{x+1} + 2}}$ 1 $x > -1$ 7

3) 

$\int_{-1}^{0} \int_{y}^{-y} \frac{dx}{(3x+2y+15)^2} dy = \int_{-1}^{0} \left[\frac{-1}{3x+2y+15} \cdot \frac{1}{3}\right]_{y}^{-y} dy = \frac{1}{3} \int_{-1}^{0} \frac{1}{5y+15} - \frac{1}{15-y} dy$ 3

$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{5} \ln|y+3| + \ln|y-15|\right]_{-1}^{0} = \underline{\underline{\frac{1}{15} \ln \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \ln \frac{15}{16}}}$

5