Adrian Willi

Applied Statistics for Data Science

Serie 9

Aufgabe 9.1

Ein Weinhändler behauptet, dass die von ihm gefüllten Weinflaschen 70 Zentiliter enthalten. Ein skeptischer Konsument vermutet aber, dass der Weinhändler zu wenig Wein abfüllt und will diese Behauptung überprüfen. Deshalb kauft er 12 Weinflaschen und misst ihren Inhalt. Er findet:

$$71, 69, 67, 68, 73, 72, 71, 71, 68, 72, 69, 72 \quad \text{(in Zentiliter)}$$

Nehmen Sie zunächst an, dass die Standardabweichung der Abfüllung im Voraus bekannt ist. Sie beträgt $\sigma = 1.5$ Zentiliter. Da die Standardabweichung der Messungen bekannt ist, können wir einen z-Test durchführen. Führen Sie den (einseitigen; in welche Richtung?) Test auf dem 5 %- Signifikanzniveau durch. Geben Sie die Modellannahmen, H_0, H_A, den Verwerfungsbereich, den Wert der Teststatistik und das Testergebnis explizit an. Formulieren Sie in einem Satz die Schlussfolgerung für den kritischen Konsumenten.

Aufgabe 9.2

Wir gehen von der Aufgabenstellung 9.1 aus. Die Standardabweichung der Abfüllungen ist nicht bekannt. Somit machen wir einen t-Test.

a) Führen Sie den Test durch und treffen Sie den Testentscheid mit dem p-Wert.

```
t.test(...)
```

b) Was ändert sich verglichen zur Aufgabe 9.1?

Aufgabe 9.1

Modell: $X_1, \dots, X_{12}$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(70, \frac{1.5^2}{12})$

Nullhypothese: $H_0: \mu = \mu_0 = 70$

$H_1: \mu < \mu_0$

Verteilung der Teststatistik $\overline{X}_{12}$ unter H_0:

$$\overline{X}_{12} \sim \mathcal{N}\left(70, \frac{1.5^2}{12}\right)$$

Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

Verwerfungsbereich: qnorm(p = 0.05, mean = 70, sd = 1.5/sqrt(12))

$K = (-\infty, 69.29)$

Testentscheid: mean(wine) = 70.25

→ die Nullhypothese bleibt in diesem Fall

Aufgabe 9.2

a) t.test(wine, mu = 70, alternative = "less")

p-value = 0.6664 > 0.05

→ p-value ist signifikant grösser als 0.05, so wird Nullhypothese nicht verworfen.

Aufgabe 9.3

Eine Bäckerei gibt an, dass die von ihr hergestellten Brötchen ein Mindestgewicht von 50 g bei bekannter Standardabweichung $\sigma = 3$ g haben. Die Gewichte sind normalverteilt.

Ein Statistikstudent, der misstrauisch ist und vermutet, dass die Brötchen ein zu geringes Gewicht haben, kauft in der Bäckerei $n = 16$ Brötchen und wiegt alle Brötchen. Er erhält folgende Werte (in g):

$$46,\ 48,\ 52,\ 49,\ 46,\ 51,\ 52,\ 47,\ 49,\ 44,\ 48,\ 51,\ 49,\ 50,\ 53,\ 47$$

a) Stellen Sie die Null- und Alternativhypothese auf und führen Sie einen Hypothesentest auf dem 5 %-Signifikanzniveau durch.

b) Dem Studenten kommen bei seiner Auswertung Bedenken wegen des kleines Stichprobenumfangs von $n = 16$. Er untersucht deshalb noch einmal das Brötchengewicht, diesmal für $n = 100$ Brötchen. Er erhält denselben Mittelwert in der Stichprobe wie bei den $n = 16$ Brötchen.

   Kommt er zur selben Testentscheidung wie in a)? Begründen Sie die Antwort.

c) Der Student ist nun auch misstrauisch gegenüber der bekannten Standardabweichung und möchte sich nur auf die gegebenen Daten verlassen. Wie geht er vor? Führen Sie den Hypothesentest durch.

Aufgabe 9.3

a) $H_0: \mu = 50$, $H_A: \mu < 50$

pnorm(mean(x), 50, 3/sqrt(16))

= 0.0668072 → p-Wert liegt knapp über 0.05 und somit wird Nullhypothese nicht verworfen

b) pnorm(mean(x), 50, 3/sqrt(100))

= 8.841729e-05 → p-Wert liegt klar unter 0.05. Nullhypothese wird verworfen.

c) t.test(x, mu= 50, alternative = "less")

p-value= 0.04758 → Nullhypothese wird knapp verworfen

Applied Statistics for Data Science

Musterlösungen zu Serie 9

Lösung 9.1

X_i = Inhalt (in Zentiliter) der i-ten Weinflasche, $i = 1, \ldots, n = 12$.

1. *Modell*: $X_1, \ldots, X_{12}$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1.5^2$ bekannt.
2. *Nullhypothese*:
$$H_0: \quad \mu = \mu_0 = 70$$
Alternative:
$$H_A: \quad \mu < \mu_0$$
3. Verteilung der Teststatistik $\overline{X}_{12}$ unter H_0:
$$\overline{X}_{12} \sim \mathcal{N}\left(70, \frac{1.5^2}{12}\right)$$
4. *Signifikanzniveau*:
$$\alpha = 5\,\%$$
5. *Verwerfungsbereich für die Teststatistik*:
```
qnorm(p = 0.05, mean = 70, sd = 1.5/sqrt(12))

## [1] 69.28776
```
$$K = (-\infty, 69.29)$$
6. *Testentscheid*:
$$\overline{x}_{12} = 70.25$$
```
x <- c(71, 69, 67, 68, 73, 72, 71, 71, 68, 72, 69, 72)
mean(x)

## [1] 70.25
```
$\overline{x}_{12} \notin K \rightarrow H_0$ beibehalten. Es ist also durchaus plausibel, dass der Weinhändler den Wein korrekt abfüllt.

Der Testentscheid ist an sich von vorneherein klar. Wir machen einen Test nach unten und $\overline{x}_{12}$ ist schon grösser als 70.

Lösung 9.2

a) Test:

```
wine <- c(71, 69, 67, 68, 73, 72, 71, 71, 68, 72, 69, 72)

t.test(wine, mu = 70, alternative = "less")

##
##  One Sample t-test
##
## data:  wine
## t = 0.44189, df = 11, p-value = 0.6664
## alternative hypothesis: true mean is less than 70
## 95 percent confidence interval:
##      -Inf 71.26603
## sample estimates:
## mean of x
##     70.25
```

Der p-Wert ist mit 0.666 deutlich grösser als das Signifikanzniveau von 0.05 und somit wird auch hier die Nullhypothese *nicht* verworfen. Die Messreihe „passt" zum Wert 70 ml.

b) Dieser p-Wert ist kleiner, als der p-Wert der Aufgabe 9.1:

```
pnorm(q = 70.25, mean = 70, sd = 1.5/sqrt(12))

## [1] 0.7181486
```

Dies liegt daran, dass mit der unbekannten Standardabweichung für den t-Test eine zusätzliche Unsicherheit dazu kommt.

Der Testentscheid hier ist allerdings schon vorher klar. Der Test wird nach unten gemacht, aber $x_{12} = 70.25$ ist schon über 70.

Lösung 9.3

```
x <- c(46, 48, 52, 49, 46, 51, 52, 47, 49, 44, 48, 51, 49, 50, 53,
    47)
```

a) $H_0 : \mu = 50$, $H_A : \mu < 50$

```
pnorm(mean(x), 50, 3/sqrt(16))

## [1] 0.0668072
```

Der p-Wert von 0.067 ist knapp über dem Signifikanzniveau und somit wird die Nullhypothese H_0 nicht verworfen. Der Durchschnitt der Werte ist zwar tiefer als 50 g, aber nicht signifikant tiefer.

b) p-Wert wird *sehr* viel kleiner

```
pnorm(mean(x), 50, 3/sqrt(100))

## [1] 8.841729e-05
```

und liegt unter dem Signifikanzniveau. In diesem Fall würde die Nullhypothese also klar verworfen. Der Wert 50 g stimmt statistisch signifikant nicht.

Der Grund dafür, dass der p-Wert sehr viel kleiner wird liegt darin, dass mit zunehmender Anzahl Messungen die Sicherheit, wo der wahre Mittelwert liegt, zunimmt. Somit ist für der Mittelwert 48.875 g für eine geringe Anzahl Brötchen durchaus möglich, sofern $\mu = 50$ g (Nullhypothese) stimmt. Bei einer grossen Anzahl Messungen ist derselbe Mittelwert 48.875 g schon eher unwahrscheinlich, immer unter der Annahme, dass Nullhypothese $\mu = 50$ g richtig ist.

c) t-test

```
t.test(x, mu = 50, alternative = "less")

##
##  One Sample t-test
##
## data:  x
## t = -1.7811, df = 15, p-value = 0.04758
## alternative hypothesis: true mean is less than 50
## 95 percent confidence interval:
##      -Inf 49.98228
## sample estimates:
## mean of x
##    48.875
```

Der p-Wert von 0.047 liegt leicht unter dem Signifikanzniveau von 0.05 und somit wird die Nullhypothese H_0 verworfen (knapp) verworfen. Der Wert 50 g stimmt statistisch signifikant nicht.

Beachten Sie, dass bei a) nicht verworfen wird, hier aber schon. Es kann also durchaus einen Unterschied machen, welchen Test wir anwenden.