Adrian Willi

Applied Statistics for Data Science

Serie 5

Aufgabe 5.1

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Haushaltsmitglieder bei einer Stichprobe und habe die Verteilung:

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1

Beschreiben Sie die von b) – e) gesuchten Wahrscheinlichkeiten in der Form $P(\ldots)$. Also zum Beispiel: $P(X \leq 5)$ oder $P(3 \leq X \leq 5)$.

a) Handelt es sich hier um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung? Begründen Sie ihre Antwort. ja, W'heiten geben 1

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei zufälliger Auswahl einen Haushalt zu erhalten, der zwischen 2 und 4 Mitglieder hat. 0.5

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei zufälliger Auswahl einen Haushalt zu erhalten, der mehr als 2 Mitglieder hat. 0.4

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei zufälliger Auswahl einen Haushalt zu erhalten, der höchstens 4 Mitglieder hat. 0.9

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei zufälliger Auswahl einen Mehrpersonenhaushalt zu erhalten. 0.6

Aufgabe 5.2

Ein Multiple-Choice-Test besteht aus 15 Fragen, mit jeweils 5 Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Aufgabe richtig zu beantworten, ist also 0.2. Die Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion sind gegeben durch:

k	8	9	10	11	12	13	14	15
$P(X \leq k)$	0.711	0.939	0.969	0.982	0.989	0.992	0.999	1

Beachten Sie: Es handelt sich hier um die *kumulierten* Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq k)$ und nicht $P(X = k)$.

Beschreiben Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten wieder in der Form $P(\ldots)$.

a) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 13 Aufgaben richtig beantwortet sind. $P(X \leq 13) = 0.992$

b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 10 Aufgaben richtig sind.
$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - 0.939 = 0.061$

c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 15 Aufgaben richtig beantwortet sind.
$P(X = 15) - P(X \leq 14) = 1 - 0.999 = 0.001$

d) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwischen 9 und 12 Aufgaben richtig beantwortet sind. $P(X \leq 12) - P(X \leq 8) = 0.989 - 0.711 = 0.278$

Aufgabe 5.3

Man wirft eine Münze dreimal. Die Zufallsgrösse X gibt an, wie oft dabei „Zahl" geworfen wurde.

a) Stellen Sie die Verteilungsfunktion als Tabelle auf.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 2 mal Zahl geworfen wird.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 mal Zahl geworfen wird.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 1 mal Zahl geworfen wird.

Aufgabe 5.4

Berechnen Sie den Erwartungswert der folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilung.

x_k	-5	-4	1	3	6
p_k	0.3	p_2	0.1	0.2	0.3

Wert für p_2 bestimmen
$p_2 = 0.1$

$E(X) = (-5 \cdot 0.3) + (-4 \cdot 0.1) + (1 \cdot 0.1) + (3 \cdot 0.2) + (6 \cdot 0.3)$
$= -1.5 - 0.4 + 0.1 + 0.6 + 1.8 = \underline{\underline{0.6}}$

Aufgabe 5.5

Sie werfen zusammen einen blauen und einen roten Würfel.

Aufgabe 5.3

$\Omega = \{(z,z,z), (z,z,k), (z,k,z), (k,z,z), (z,k,k), (k,z,k), (k,k,z), (k,k,k)\}$

$|\Omega| = 8$

a)

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b) genau 2 Mal Zahl

$P(X=2) = \frac{3}{8}$

c) mind. 2 Mal Zahl

$P(X \geq 2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

d) höchstens 1 Mal Zahl

$P(X \leq 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der geworfenen Augensumme.

b) Berechnen Sie den Erwartungwert und die Standardabweichung. Interpretieren Sie diese Werte.

Verwenden Sie dazu **R**, indem Sie zwei Liste **x** und **p** erzeugen, die beiden multiplizieren und den Befehl **sum(...)** benützen.

Aufgabe 5.5

$\Omega = \{(1,1), (1,2) \ldots\}$ $|\Omega| = 36$

a)

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

b)

$E(X) = \sum x P(X=x) = 7$

$Var(X) = 5.8333$

$Sd(X) = 2.415229$

Kurzlösungen vereinzelter Aufgaben

A 5.4: 0.6

A 5.5: Erwartungswert ist 7.

Applied Statistics for Data Science

Musterlösungen zu Serie 5

Lösung 5.1

a) Ja, den die Wahrscheinlichkeiten aufaddiert ergeben 1:

$$0.4 + 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.1 = 1$$

b) Gesucht ist

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.2 + 0.2 + 0,1 = 0.5$$

c) Gesucht

$$P(X > 2) = P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.2 + 0.1 + 0.1 = 0.4$$

Oder:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 2)) = 1 - 0.4 - 0.2 = 0.4$$

d) Gesucht

$$P(X \leq 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - 0.1 = 0.9$$

e) Gesucht

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - 0.4 = 0.6$$

Lösung 5.2

a) Gesucht:

$$P(X \leq 13) = 0.992$$

Kann direkt aus der Tabelle abgelesen werden.

b) Gesucht:

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - 0.939 = 0.061$$

c) Gesucht:

$$P(X = 15) = P(X \leq 15) - P(X \leq 14) = 1 - 0.999 = 0.001$$

d) Gesucht:

$$P(9 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X \leq 8) = 0.989 - 0.711 = 0.278$$

Lösung 5.3

a) Der Ergebnisraum lautet (Z: Zahl, K: Kopf)

$$\Omega = \{ZZZ, ZZK, ZKZ, KZZ, ZKK, KZK, KKZ, KKK\}$$

Es gilt dann:

$$P(X=0) = \frac{1}{8}; \qquad P(X=1) = \frac{3}{8}; \qquad P(X=2) = \frac{3}{8}; \qquad P(X=3) = \frac{1}{8}$$

Also:

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b) Gesucht:

$$P(X=2) = \frac{3}{8}$$

c) Gesucht:

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

d) Gesucht:

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Lösung 5.4

Zuerst müssen wir den Wert für p_2 bestimmen. Da die Summe 1 ergeben muss, gilt

$$p_2 = 1 - 0.3 - 0.1 - 0.2 - 0.3 = 0.1$$

Der Erwartungswert berechnet sich durch

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_5 p_5 \\ &= -5 \cdot 0.3 + (-4) \cdot 0.1 + \ldots + 6 \cdot 0.3 = 0.6 \end{aligned}$$

Wir verwenden wieder **R**:

```r
x <- c(-5, -4, 1, 3, 6)
p <- c(0.3, 0.1, 0.1, 0.2, 0.3)

sum(x*p)

## [1] 0.6
```

Lösung 5.5

a) Sei X die Zufallsvariable für die geworfene Augensumme. Dann ist

$$\Omega = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$$

Es ergibt sich dann für die Wahrscheinlichkeitsverteilung folgende Tabelle

x_i	Elementarereignis	abs. Häufigkeit	p_i
2	11	1	$\frac{1}{36}$
3	12,21	2	$\frac{2}{36}$
4	13,22,31	3	$\frac{3}{36}$
5	14,23,32,41	4	$\frac{4}{36}$
6	15,24,33,42,51	5	$\frac{5}{36}$
7	16,25,34,43,52,61	6	$\frac{6}{36}$
8	26,35,44,53,62	5	$\frac{5}{36}$
9	36,45,54,63	4	$\frac{4}{36}$
10	46,55,64	3	$\frac{3}{36}$
11	56,65	2	$\frac{2}{36}$
12	66	1	$\frac{1}{36}$

b) Der Erwartungswert berechnet sich durch

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_{11} p_{11} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \ldots + 12 \cdot \frac{1}{36} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Wir verwenden zur Berechnung **R**:

```r
x <- 2:12
p <- c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1) / 36
```

```
E <- sum(x*p)
E

## [1] 7
```

Wenn wir sehr viele Male die beiden Würfel werfen, so werfen wir durchschnittlich die Augenzahl 7. Das war aber auch so zu erwarten, weil die Tabelle oben symmetrisch ist.

Wir berechnen noch die Standardabweichung.

```
E <- sum(x*p)
var.X <- sum((x-E)**2*p)
var.X

## [1] 5.833333

sigma <- sqrt(var.X)
sigma

## [1] 2.415229
```

Die Standardabweichung ist 2.42. Wenn wir sehr viele Male die beiden Würfel werfen, so weichen wir „durchschnittlich" 2.42 vom Erwartungswert 7 ab.