Adrian Willi

Lucerne University of
Applied Sciences and Arts
HOCHSCHULE
LUZERN
Informatik
FH Zentralschweiz

Computer Graphics: Flächen - Übung

Josef F. Bürgler und Thomas Koller

TA.BA_CG, SW 09

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

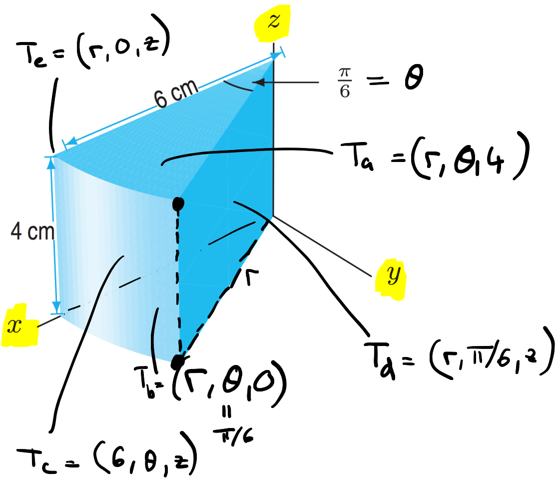
Sie sollten im Durchschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Aufgabe 1: Zylinderkoordinaten

Beschreiben Sie mit Hilfe von Zylinderkoordinaten das rechts gezeichneten Tortenstück. Sie müssen 5 Flächen exakt mit Hilfe von Mengen aus $\mathbb{R}^3$ beschreiben!

Hinweis: der Tortenboden lässt sich durch folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ beschreiben:

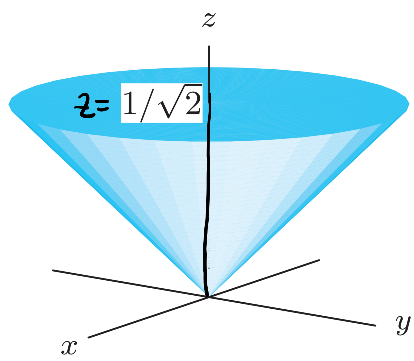
$$T_B = \{(r, \theta, 0) \,|0 \leq r \leq 6 \wedge 0 \leq \theta \leq \pi/6\}$$



Aufgabe 2: Sphärische Koordinaten

Beschreiben Sie mit Hilfe von Kugelkoordinaten den rechts gezeichneten Kegel mit Öffnungswinkel 90^o. Sie müssen dazu 2 Flächen exakt mit Hilfe von Mengen aus $\mathbb{R}^3$ beschreiben! Wie würde die Darstellung in Zylinderkoordinaten lauten?

Hinweis: die Deckfläche lässt sich durch folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ beschreiben:

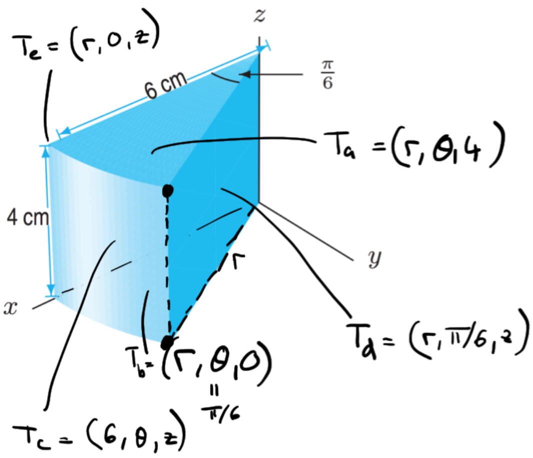


$$D = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}\cos\phi}, \phi, \theta \right) \middle| 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \wedge 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

In Zylinderkoord.: $D = \{(r, \theta, \frac{1}{\sqrt{2}}) \,|\, 0 \leq r \leq \phi \wedge 0 \leq \theta < 2\pi\}$

$M = \{(r, \theta, \frac{1}{\sqrt{2}}) \,|\, 0 \leq \rho 2 \wedge 0 \leq \theta < 2\pi\}$

Aufgabe 1



$T_a = \{(r, \theta, 4) \mid 0 \leq r \leq 6 \wedge 0 \leq \theta \leq \pi/6\}$

$T_b = \{(r, \theta, 0) \mid 0 \leq r \leq 6 \wedge 0 \leq \theta \leq \pi/6\}$

$T_c = \{(6, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/6 \wedge 0 \leq z \leq 4\}$

$T_d = \{(r, \pi/6, z) \mid 0 \leq r \leq 6 \wedge 0 \leq z \leq 4\}$

$T_e = \{(r, 0, z) \mid 0 \leq r \leq 6 \wedge 0 \leq z \leq 4\}$

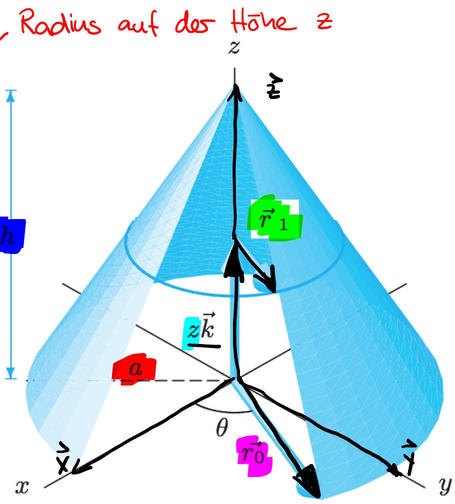
Aufgabe 3: Parametrisierung einer Rotationsfläche

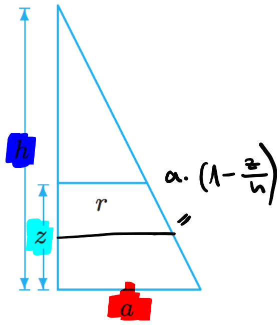
$\vec{r}_0 = a(\cos\phi\,\vec{x} + \sin\phi\,\vec{y})$

$\vec{r}_1 = a(1-\frac{z}{h})(\cos\phi\,\vec{x} + \sin\phi\,\vec{y})$

$\vec{r}(\phi,z) = \vec{r}_1 + z\vec{k}$
$= a(1-\frac{z}{h})(\cos\phi\,\vec{x} + \sin\phi\,\vec{y}) + z\vec{k}$

Paramterform





Gesucht ist die Parametrisierung eines Kegels mit dem Basiskreis $x^2 + y^2 = a^2$ in der xy-Ebene und der Spitze im Punkt $(0,0,h)$ über der xy-Ebene (siehe folgende Abbildung).

Aufgabe 4: Regelfläche — Möbiusband

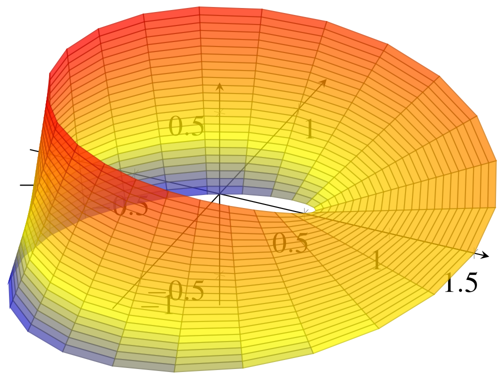
Zeige, dass das Möbiusband (siehe Abb. rechts) durch die folgende parametrische Gleichung dargestellt werden kann:

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{p}(u) + v\mathbf{q}(u)$$

wobei

$$\mathbf{p}(u) = \begin{bmatrix} \cos(2u) \\ \sin(2u) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{q}(u) = \begin{bmatrix} \cos(u)\cos(2u) \\ \cos(u)\sin(2u) \\ \sin(u) \end{bmatrix}$$

wobei $(u,v) \in [0,\pi] \times [-1,1]$, indem Sie die Regelfläche mit einem geeigneten Zeichenprogramm darstellen.

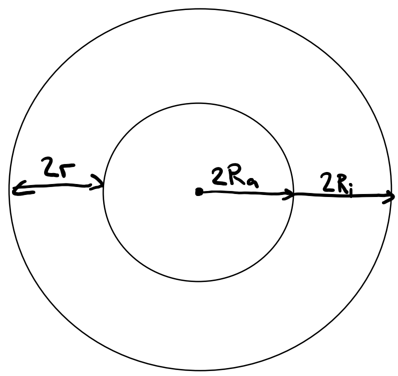


Aufgabe 5: Extrudierte Fläche — der Doughnut

Erstellen Sie ein Programm in Ihrer Lieblingsprogrammiersprache welches 8×8 Punkte auf einem Torus (Doughnut) berechnet. Der Aussendurchmesser sei $2R_a$, der Innendurchmesser $2R_i$ und der Durchmesser des Querschnitts sei $2r$.

Wir legen ein Koordinatensystem in den Schwerpunkt des Doubhnut. Verwenden Sie dann folgende Informationen:

$2R_i - 2R_a = 2r$



- Der Schwerpunkt der Querschnittsfläche beschreibt den Kreis

$$u \mapsto \mathbf{x}(u) \;=\; \frac{R_i + R_a}{2} \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \le u < 2\pi.$$

- Berechnen Sie mit dieser Information das die Kurve begleitende Dreibein, d.h. $\mathbf{t}(u)$, $\mathbf{n}(u)$ und $\mathbf{b}(u)$ mit den Formeln aus den Slides.
- Denken Sie sich jetzt ein lokales Koordinatensystem mit Ursprung auf der obigen Kurve. Dann ist der Rand des Doughnut gegeben durch

$$\mathbf{s}(u,v) = r(\mathbf{n}(u)\cos v + \mathbf{b}(u)\sin v) \quad \text{wobei} \quad 0 \le v < 2\pi.$$

- Ein beliebiger Punkt auf dem Doughnut lässt sich nun beschreiben durch

$$\mathbf{S}(u,v) = \mathbf{x}(u) + \mathbf{s}(u,v) \quad \text{wobei} \quad 0 \le u, v < 2\pi.$$

Viel Spass!

Aufgabe 5 noch nicht programmiert :)

$$u \mapsto x(u) = \frac{R_i + R_a}{2} \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{wobei} \quad 0 \le u < 2\pi \quad , \quad \dot{x}(u) = \frac{R_i + R_a}{2} \begin{bmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tangentenvektor

$$t(u) = \frac{\dot{x}(u)}{|\dot{x}(u)|} = \frac{R_i + R_a}{2} \begin{bmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

Hauptnormalenvektor

$$n(u) = \frac{\dot{t}(u)}{|\dot{t}(u)|} = \frac{R_i + R_a}{2} \begin{bmatrix} -\cos u \\ -\sin u \\ 0 \end{bmatrix}$$

Normiesung nicht nötig, da

$$= \sqrt{\sin^2(u) + \cos^2(u)} = \sqrt{1} = 1$$

Binormalenvektor

$$b(u) = t(u) \times n(u)$$

$$= \frac{R_i + R_a}{2} \left(\begin{bmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\cos u \\ -\sin u \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{R_i + R_a}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ob das stimmt ? :)