Lineare Algebra – Bloch 2

Aufgabe 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} z_{12}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} z_2(:2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z_{21}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = R$$

regulär (nicht singulär) $\Rightarrow Rx = 0 \quad \Rightarrow x = 0$

$N(A)$ = zero vector

$B \Rightarrow$ 2A ist ein Vielfaches von A, so $N(B) = N(A)$ = zero vector

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \begin{matrix} z_{12}(-3) \\ z_{13}(-2) \\ z_{14}(-6) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} z_2(:2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} z_{21}(-2) \\ \\ z_{24}(-4) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} z_{12}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} z_2(:2)$$

Pivots — free variables

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} z_{21}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Fall 1: $x_3 = 0$, $x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = -2$

$$N(C) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Fall 2: $x_3 = 1$, $x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 0$

$$N(C) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned} x \quad &= 1 \\ 4x + 3y &= 1 \\ 2x + 3y &= -1 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ Z_{12}(-4) \\ Z_{13}(-2) \end{array} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right] Z_2(:3)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right] Z_{23}(-3) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -1 \end{aligned}}$$

Prüfen

$x = 1 \rightarrow 1 = 1$ ✓

$4x + 3y = 1 \rightarrow 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 1$ ✓

$2x + 3y = -1 \rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = -1$ ✓

Aufgabe 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix} \begin{array}{l} Z_{12}(-2) \\ Z_{13}(-3) \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \end{bmatrix} Z_2(:4)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \end{bmatrix} Z_{23}(-6) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} Z_2(:(-2))$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} Z_{31}(-2) \\ Z_{32}(-1) \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} Z_{21}(1)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = R \quad \text{rank } A = 3 \text{ , da 3 Pivots}$$

$\rightarrow$ spezielle Lösung $A\vec{x} = 0$

$x_4 = 0 \rightarrow x_3 = 0, \; x_2 = 0, \; x_1 = 0$

$$s_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ spezielle Lösung (Linear unabhängig)

$x_4 = 1 \rightarrow x_3 = -1, \; x_2 = 0, \; x_1 = -1$

$$s_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} Z_{12}(*1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} Z_{21}(1) \\ Z_{23}(1) \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} Z_{31}(1) \\ Z_{32}(1) \\ Z_{34}(1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank} A = 3$

$A\vec{x} = 0$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\quad - x_4 &= 0 \\ x_2 \qquad\quad - x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$x_4 = 1 \rightarrow x_1, x_2, x_3 = 1$

$x_4 = 0 \rightarrow x_1, x_2, x_3 = 0$

Aufgabe 5

$C(I) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$C(A) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$, weil $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} Z_{12}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

also sind die Vektoren linear abhängig und es genügt einer, um den Raum aufzuspannen

$$C(B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} Z_2(:4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Z_{21}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C(B) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$

Aufgabe 6

Es gibt eine Lösung, wenn b_1 und b_2 in column space von A sind. Folglich aber b_3 nicht!

z.B. $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \dim(\operatorname{im}(B)) = 2$$

also spannen Vektor b_1 und b_2 den Raum / Ebene auf

Aufgabe 7

$Ax = b$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \\ -2 & -3 & b_3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ z_{12}(-1) \\ z_{13}(2) \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{array}\right] \begin{array}{l} z_{21}(-1) \\ \\ z_{23}(1) \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 + b_2 + b_1 \end{array}\right] \longrightarrow$$ $b_3 + b_2 + b_1$ muss 0 sein, sonst keine Lösung

$$x_p = \begin{bmatrix} 2b_1 - b_2 \\ b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

$$x_n = 0$$

$$x = x_p + x_n = x_p = \begin{bmatrix} 2b_1 - b_2 \\ b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 8

$$x + y + z = 3$$
$$x + 2y - z = 4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right] Z_{12}(-1) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] Z_{21}(-1)$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

rank $A = 2$

$$Ax = b \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 = 0 & \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \\ -2 \end{array} & \left|\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array}\right] \end{array} \qquad x_3 = 0 \rightarrow x_1 = b_1$$
$$x_2 = b_2$$

$$x_p = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = 0$$
$$x_n \Rightarrow x_3 = 1 \qquad x_1 + 3x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -3$$
$$x_2 - 2x_3 = 0 \rightarrow x_2 = 2$$

$$x_n = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = x_p + x_n = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{wo } \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 9

$Ax = b \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_p} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x_n \to \text{Nullspace}}$

rank = 1 $\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Aufgabe 10

$R = [\underbrace{1}_{I} \quad \underbrace{2 \quad 3}_{F}] \qquad N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$x_1 = -2 \qquad \Rightarrow 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0$ ✓

$x_2 = 1$

$x_3 = 0$

$x_1 = -3 \qquad \Rightarrow 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 0$ ✓

$x_2 = 0$

$x_3 = 1$

Aufgabe 11

Das Rang ~~ist~~ 1

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$R^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad y_2 = 1,\ y_3 = 0 \Rightarrow y_1 = -1$

S: $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$