

Lineare Algebra - Block 2

Aufgabe 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_{12}(-3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_2(:2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_{21}(-2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{R}$$

R ist regulär (nicht singular) $\rightarrow Rx = 0 \rightarrow x=0$
 also gibt es nur die triviale Lösung $x=0$ $N(A) = 0$ vector

$B \Rightarrow 2A$ ist ein Vielfaches von A , so $N(B) = N(A) = 0$ vector

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} z_{12}(-3) \\ z_{13}(-2) \\ z_{14}(-6) \end{array}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_2(:2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_{21}(-2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_{12}(-3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_2(:2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_{21}(-2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

↑ Pivots ↑ free variables

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Fall 1: } x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$N(C) = [0 \ -2 \ 0 \ 1]^T$$

$$\text{Fall 2: } x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -2 \\ x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$N(C) = [-2 \ 0 \ 1 \ 0]^T$$

Aufgabe 2

$$\begin{array}{l} x = 1 \\ 4x + 3y = 1 \\ 2x + 3y = -1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} z_{12}(-4) \\ z_{13}(-2) \end{array} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{array} \right] \quad z_2(:3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right] \quad z_{23}(-3) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \end{array}}$$

Rüfen

$$\begin{array}{ll} x = 1 & \rightarrow 1 = 1 \quad \checkmark \\ 4x + 3y = 1 & \rightarrow 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 1 \quad \checkmark \\ 2x + 3y = -1 & \rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = -1 \quad \checkmark \end{array}$$

Aufgabe 3

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{10} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} z_{12}(-2) \\ z_{13}(-3) \end{array} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right] \quad z_2(:4)$$

$$= \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} z_{23}(-6) \\ z_2(:2) \end{array} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \quad z_2(:2)$$

$$= \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} z_{31}(-2) \\ z_{32}(-1) \end{array} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \quad z_{21}(1)$$

$$= \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right] = R \quad \text{rank } A = 3, \text{ da 3 pivots}$$

\Rightarrow spezielle Lösung $\vec{x} = \vec{0}$

$$x_4 = 0 \rightarrow x_3 = 0, x_2 = 0, x_1 = 0$$

$$s_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{spezielle Lösung (linear unabhängig)}$$

$$x_4 = 1 \rightarrow x_3 = -1, x_2 = 0, x_1 = -1$$

$$s_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_{12}(+1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_{23}(1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} z_{31}(1) \\ z_{32}(1) \\ z_{34}(1) \end{array}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } A = 3$$

$$A\vec{x} = 0$$

$$x_1$$

$$-x_4 = 0$$

$$x_2$$

$$-x_4 = 0$$

$$x_3$$

$$-x_4 = 0$$

$$x_4 = 1 \rightarrow x_1, x_2, x_3 = 1$$

$$x_4 = 0 \rightarrow x_1, x_2, x_3 = 0$$

Aufgabe 5

$$C(I) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$C(A) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \text{ weil } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_{12}(-2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

also sind die Vektoren linear abhängig und es genügt einer, um den Raum aufzuspannen

$$C(B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_2(:4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_{21}(-3)} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C(B) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$$

Aufgabe 6

Es gibt eine Lösung, wenn b_1 und b_2 in column space von A sind. Folglich aber b_3 nicht!

$$2. B. \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dim(\text{im}(B)) = 2$$

also spannen Vektoren b_1 und b_2 den Raum/Ebene auf

Aufgabe 7

$$Ax = b$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & b_2 \\ -2 & -3 & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} 2 \leftrightarrow 2 \\ 2+1 \rightarrow 2 \\ 2+3 \rightarrow 3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b_1 & 2_{21}(-1) \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 & 2_{23}(2) \\ 0 & -1 & b_3 - 2b_1 & 2_{33}(1) \end{array} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2b_1 - b_2 \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \rightarrow b_3 + b_2 + b_1 \text{ muss } 0 \text{ sein, sonst keine Lösung}$$

$$x_p = \begin{bmatrix} 2b_1 - b_2 \\ b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

$$x_n = 0$$

$$x = x_p + x_n = x_p = \begin{bmatrix} 2b_1 - b_2 \\ b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 8

$$x + y + z = 3$$

$$x + 2y - z = 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -1 & | & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_{12}(-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_{21}(-1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } A = 2$$

$$Ax = b \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 0 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 \end{array} \quad x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = b_1$$

$$x_2 = b_2$$

$$x_p = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = 0$$

$$x_n \Rightarrow x_3 = 1$$

$$x_1 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$$

$$x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$x_n = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = x_p + x_n = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{wo } \lambda \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 9

$$Ax = b$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_p \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x_n \rightarrow \text{Nullspace}$$

$$\text{rank } A = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 10

$$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} F \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -2 \quad \Rightarrow 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 0$$

$$x_1 = -3 \quad \Rightarrow 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 0 \quad \checkmark$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 1$$

Aufgabe 11

Der Rang ist 1

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_2 = 1, \gamma_3 = 0 \Rightarrow \gamma_1 = -1$$

$$\text{S: } [-1 \ 1 \ 0]^T$$