

Projet de Mathématiques 3A  
ESIREM 2018 - 2019  
Rapport théorique

Lanvin Pierre-Baptiste  
Martos Théo

3 décembre 2018

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Courbes de Bézier</b>	<b>3</b>
2.1	Courbes de Bézier polynomiales . . . . .	3
2.2	Polynômes de Bernstein . . . . .	3
2.3	Exemple de courbe de Bézier quadratique . . . . .	3
2.4	Courbes de Bézier rationnelles . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Asymptotes</b>	<b>5</b>
3.1	Rappel de cours . . . . .	5
3.2	Asymptotes verticales . . . . .	5
3.3	Asymptotes horizontales et obliques . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Algorithme de De Casteljaou</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Suite</b>	<b>6</b>

# 1 Introduction

Pour rappel, le but de ce projet de mathématique est l’affichage de la courbe représentative d’une fraction rationnelle à l’aide de courbes de Bézier rationnelles. On limite les fractions rationnelles étudiées à celles dont le numérateur est au plus de degré 3 et le dénominateur est au plus de degré 2. Nous allons présenter différentes notions qui nous permettront de manipuler les courbes de Bézier.

## 2 Courbes de Bézier

### 2.1 Courbes de Bézier polynomiales

Les courbes de Bézier sont des courbes paramétrées créées par l’ingénieur Pierre Bézier au début des années 60, à l’origine utilisées pour la CAO dans le domaine de l’automobile. L’approche consiste à définir des points de contrôles qui vont influencer sur la trajectoire de la courbe.

On définit les courbes de Bézier polynomiales  $M(t)$  de degré  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$  selon l’expression :

$$\forall t \in [0; 1], \quad M(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) M_i \quad (1)$$

où  $M_i$  sont les points de contrôles de la courbe et les  $B_{i,n}(t)$  sont les polynômes de Bernstein à l’ordre  $n$ . [1] On note que pour une courbe de Bézier d’ordre  $n$ , on a  $n + 1$  point de contrôle.

### 2.2 Polynômes de Bernstein

En effet, la construction des courbes de Bézier nécessite l’utilisation de polynômes qui sont partition de l’unité, ce qui est le cas des polynômes de Bernstein. On définit les polynômes de Bernstein de la manière suivante : [1]

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1 - t)^{n-i} \quad (2)$$

Les polynômes de Bernstein forment une base de l’espace vectoriel des polynômes de degré  $\geq n$ .

### 2.3 Exemple de courbe de Bézier quadratique

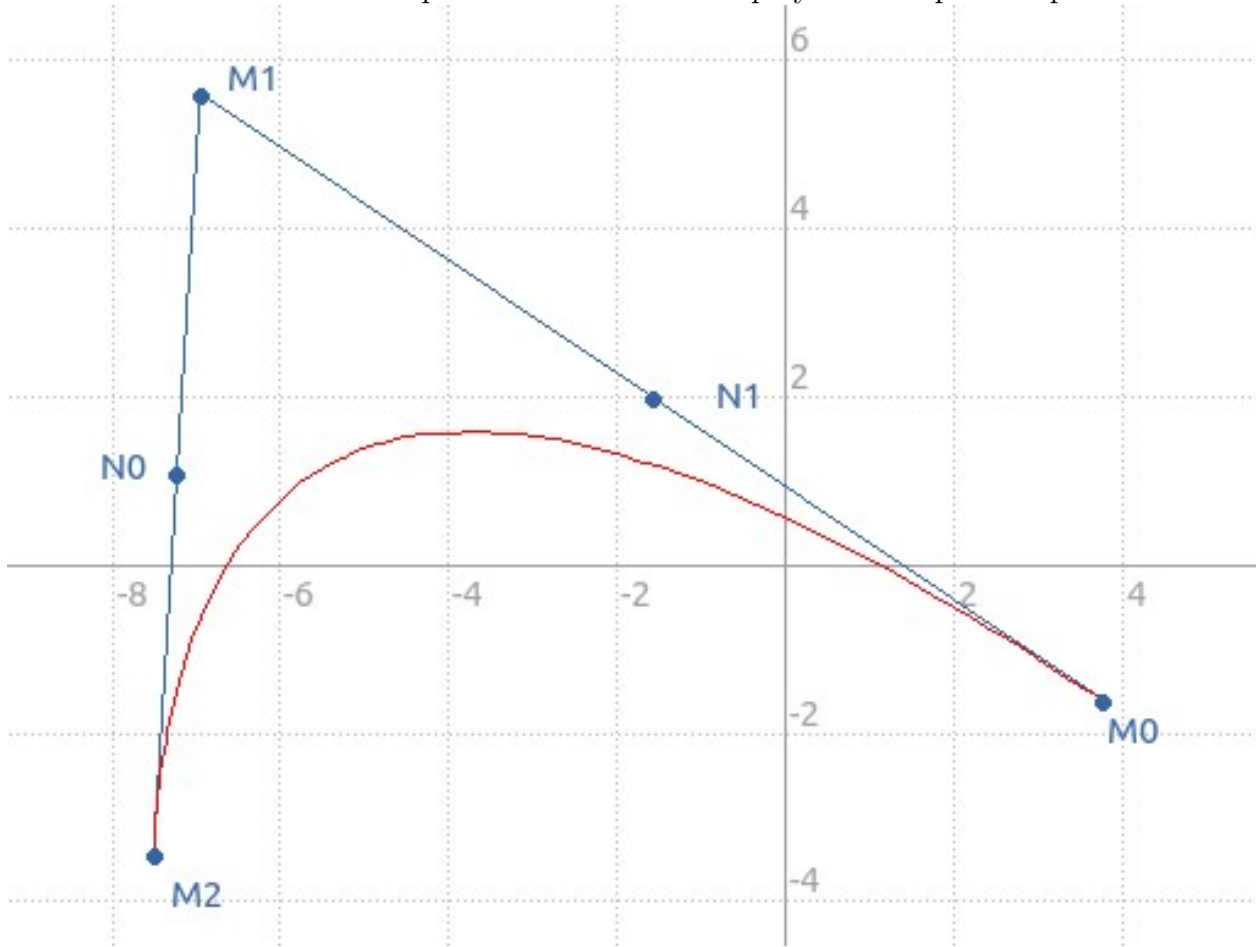
Une courbe de Bézier de degré 2 est donc caractérisée par ses points de contrôles  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$ . La courbe étant de degré 2, on a les polynômes de Bernstein suivant :

$$B_0(t) = (1 - t)^2, \quad B_1(t) = 2t(1 - t), \quad B_2(t) = t^2$$

Donc une expression paramétrique de la courbe est :

$$\forall t \in [0; 1], \quad M(t) = M_0 B_0(t) + M_1 B_1(t) + M_2 B_2(t) \quad (3)$$

FIGURE 1 – Exemple de courbe de Bézier polynomiale quadratique



On notera que les points de contrôles  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$  forment le polyèdre de contrôle de la courbe. De plus, le point  $N_0$  (respectivement  $N_1$ ) est le barycentre des points  $M_0$  et  $M_1$  (respectivement  $M_1$  et  $M_2$ ).

## 2.4 Courbes de Bézier rationnelles

Toutefois, ici nous utiliserons des courbes de Bézier dites rationnelles. En effet on applique à chaque point de contrôle un poids  $\omega$  (tel que  $\omega \in \mathbb{R} - \{0\}$ ), qui va influencer sur la courbe paramétrée. On a alors une condition sur les poids : [1]

$$\forall t \in [0; 1], \quad \sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t) \neq 0 \quad (4)$$

ce qui nous permet de définir les courbes de Bézier rationnelles de degrés  $n$  : [1]

$$\forall t \in [0; 1], \quad M(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t) P_i}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t)} \quad (5)$$

## 3 Asymptotes

### 3.1 Rappel de cours

Une asymptote à une courbe  $C$  représentative d'une fonction  $f$  est une droite vers laquelle s'approche la courbe  $C$ .

### 3.2 Asymptotes verticales

Comme nous traitons de fractions rationnelles, les asymptotes verticales sont conséquences du dénominateur. Comme le degré du dénominateur est au plus deux, les cas de figure sont peu nombreux :

- le dénominateur est de degré 2 et l'on se rapporte à un calcul de déterminant, on aura alors autant d'asymptote verticale de racine du polynôme,
- le dénominateur est de degré 1 et la solution est triviale, on aura alors une seule asymptote verticale,
- le dénominateur est une constante alors il n'y a pas d'asymptote verticale

Bien sûr, si le numérateur est nul, la courbe sera confondue avec l'axe des abscisses sur  $\mathbb{R}$ .

### 3.3 Asymptotes horizontales et obliques

Pour ce qui est des asymptotes horizontales et obliques, cela va dépendre des degrés des deux polynômes et on peut déjà distinguer deux cas :

- si  $\deg(num) = \deg(denom)$ , alors on aura une asymptote horizontale,
- si  $\deg(num) = \deg(denom) + 1$ , alors on aura une asymptote oblique

En effet on travaille avec des fractions rationnelles, les limites de la fraction en  $+\infty$  et  $-\infty$  seront par conséquent le rapport des termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

Donc dans le premier cas énoncé ci-dessus, on aura bien une asymptote horizontale d'équation  $x = \frac{\alpha}{\beta}$ , où  $\alpha$  est le coefficient du terme de plus haut degré du numérateur et  $\beta$  est le coefficient de terme de plus haut degré du dénominateur.

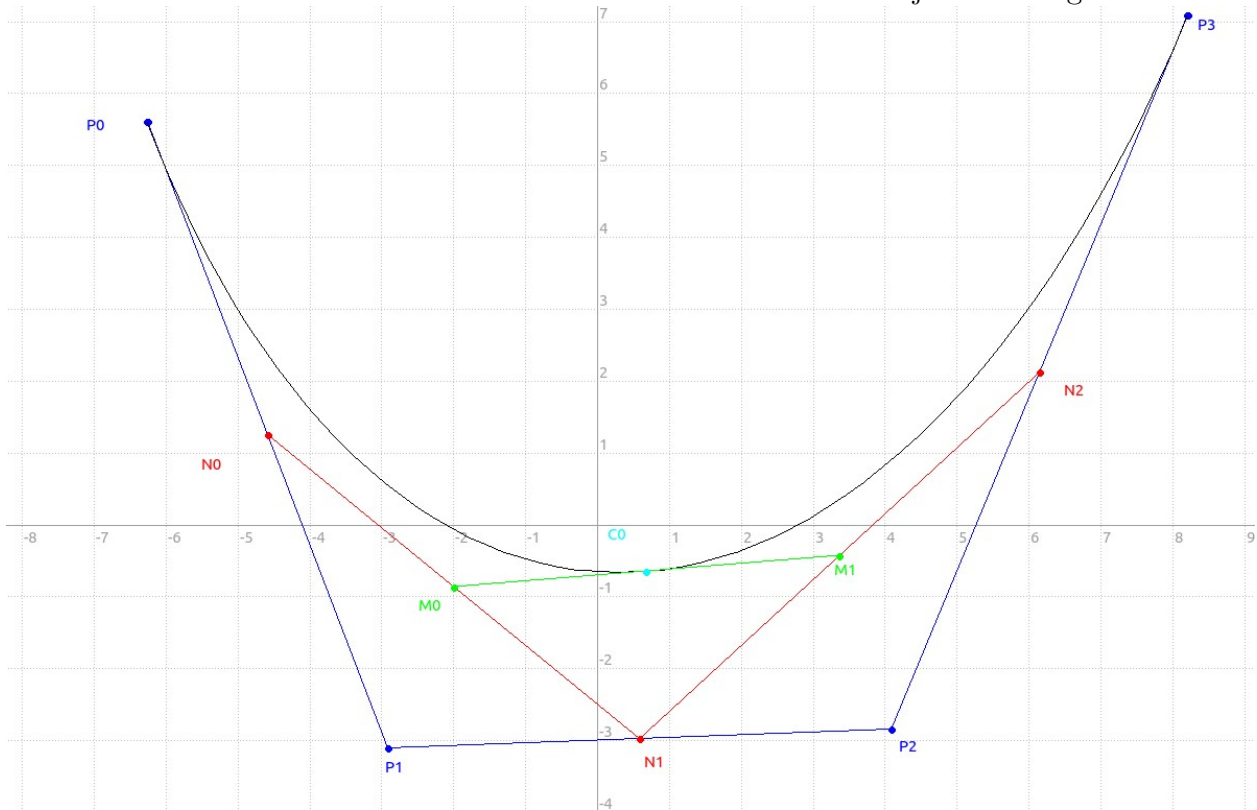
On rappelle qu'une asymptote oblique est de la forme  $y = mx + p$ , et si on est dans le deuxième cas énoncé ci-dessus, le calcul du quotient de la division euclidienne du numérateur par le dénominateur nous donne directement le résultat  $mx + p$ .

## 4 Algorithme de De Casteljau

L'ingénieur Paul de Casteljau a mis au point un algorithme pour tracer les courbes de Bézier à partir des points de contrôle de la courbe. Il se base sur le fait qu'une restriction d'une courbe de Bézier est également une courbe de Bézier.

Le principe est alors de calculer les barycentres des segments qui composent le polyèdre de contrôle de la courbe de Bézier, à tracer sur un intervalle donné. On obtient alors une liste de points sur lesquels on va répéter l'opération. A chaque itération, le nombre de points se décrémente. Le dernier point trouvé fait alors partie de la courbe (Figure 1). Cette opération peut alors être effectuée sur une autre portion de la courbe de Bézier.

FIGURE 2 – Visualisation de la méthode de De Casteljau sous Kig



## 5 Suite

Pour la suite, nous devons trouver comment définir les points de contrôles associés aux fractions rationnelles que nous devons représenter. Cela devra se faire en trouvant également les bons poids associés aux points de contrôles.

La paramétrisation de la courbe passera par le passage dans la base des polynômes de Bernstein.

Afin de travailler au mieux avec les courbes de Bézier rationnelles, nous étudions également l'espace  $\tilde{\mathcal{E}}$  défini dans [2] qui est un espace qui va nous permettre de travailler avec

les points de contrôles pondérés.

## Références

- [1] Lionel Garnier. *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'image*. Ellipses, 2007.
- [2] Lucie Druoton Lionel Garnier, Jean-Paul Bécar. Subdivision de courbes de bézier quadratiques. *Publication mathématique*, page 5, 2015.