

Courbes de Bézier et coniques

Master MIGS, seconde année, Université de Bourgogne

Lionel GARNIER

Table des matières

1	Courbes de Bézier dans le plan affine euclidien	2
1.1	Polynômes de Bernstein	2
1.2	Courbes polynômiales	3
1.2.1	Courbe de Bézier polynômiale	3
1.2.2	Courbe de Bézier quadratique et arc de parabole	4
1.3	Courbes de Bézier : du modèle polynômial au modèle rationnel	7
1.4	Courbe de Bézier rationnelle quadratique	7
1.4.1	Définition	7
1.4.2	CBRQ sous forme (quasi) standard	9
1.4.3	Le cas du cercle	10
1.4.3.1	Condition géométrique	10
1.4.3.2	Calculs des poids	12
2	Courbes de Bézier en utilisant le formalisme des points massiques	16
2.1	Points massiques	16
2.1.1	Définition	16
2.1.2	Courbes de Bézier rationnelles quadratiques dans $\widehat{\mathcal{P}}$	18
2.1.3	Modélisation d'arcs de cercles par des CBRQs dans $\widehat{\mathcal{P}}$	19
2.2	Caractéristiques d'une conique propre modélisée par une courbe de Bézier	22
2.2.1	Changement de paramètre homographique	23
2.2.2	Cas de la parabole	24
2.2.3	Cas de l'ellipse	30
2.2.4	Cas de l'hyperbole	36
3	Construction itératives d'arcs de cercles	43
3.1	Préambule	43
3.1.1	Construction itérative, fractales et auto-similarité	43
3.1.2	Construction itérative d'arcs de paraboles	43
3.2	Cas de cercles euclidiens	46
3.3	Subdivisions d'arcs de coniques à centre	50
3.3.1	Choix de la forme quadratique adéquate	50
3.3.2	Cas d'un arc de cercle borné	51
3.3.3	Cas de composantes non connexes	53
3.3.4	Linéarisation des algorithmes 3.2, 3.3 et 3.4	54

Chapitre 1

Courbes de Bézier dans le plan affine euclidien

Dans tout le document, jusqu'au paragraphe 3.3, \mathcal{P} désigne le plan affine euclidien orienté muni du repère orthonormé direct $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ et d'espace vectoriel attaché $\overline{\mathcal{P}}$.

1.1 Polynômes de Bernstein

Notation 1 : *Combinaison*

Soit n appartenant à \mathbb{N}^* . Pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, nous posons :

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (1.1)$$

Théorème 1 : *Propriétés de récurrence des combinaisons*

Nous avons :

1. Pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, nous avons :

$$C_n^i = C_n^{n-i} \quad (1.2)$$

2. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

3. Pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, nous avons :

$$C_{n+1}^{i+1} = C_n^i + C_n^{i+1} \quad (1.3)$$

Démonstration :

1. $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{(n-i)!i!} = \frac{n!}{(n-i)!(n-(n-i))!} = C_n^{n-i}$. \square

2. $C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$ et d'après la formule (1.2), nous avons $C_n^n = C_n^0 = 1$. \square

3. Pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, nous avons :

$$\begin{aligned} C_n^i + C_n^{i+1} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} + \frac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!} = \frac{n!(i+1)}{(i+1)!(n-i)!} + \frac{n!(n-i)}{(i+1)!(n-i)!} = \\ &= \frac{n!(n+1)}{(i+1)!(n-i)!} = C_{n+1}^{i+1} \end{aligned}$$

■

La relation (1.3) permet d'obtenir facilement les combinaisons, sans calculer les factorielles, en utilisant le triangle de Pascal, tableau 1.1. Par exemple, $C_4^2 = 6 = C_3^1 + C_3^2$.

Définition 1 : *Polynômes de Bernstein de degré n*

Soit n appartenant à $\mathbb{N} - \{0; 1\}$.

Pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, le i -ème **polynôme de Bernstein de degré n** est :

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad (1.4)$$

	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5
$n = 0$	1					
$n = 1$	1	1				
$n = 2$	1	2	1			
$n = 3$	1	3	3	1		
$n = 4$	1	4	6	4	1	
$n = 5$	1	5	10	10	5	1

TABLE 1.1 – Le triangle de Pascal.

En appliquant la formule du binôme de Newton, nous obtenons :

$$\forall t \in [0; 1], \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1 \quad (1.5)$$

De plus, pour n appartenant à $\mathbb{N} - \{0; 1\}$, $B_{0,n}(t) = (1-t)^n$ et $B_{n,n}(t) = t^n$ donc :

$$B_{0,n}(0) = 1 \quad B_{n,n}(1) = 1 \quad (1.6)$$

et pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, nous avons :

$$B_{i,n}(0) = 0 \quad B_{n-i,n}(1) = 0 \quad (1.7)$$

et pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, nous avons :

$$B_i(t) = B_{n-i}(1-t) \quad (1.8)$$

Pour les courbes quadratiques (i.e. de degré 2), ou pour les courbes cubiques (i.e. de degré 3), nous emploierons les **polynômes de Bernstein de degré 2** :

$$B_{0,2}(t) = B_0(t) = (1-t)^2, \quad B_{1,2}(t) = B_1(t) = 2t(1-t), \quad B_{2,2}(t) = B_2(t) = t^2 \quad (1.9)$$

et **de degré 3** :

$$\begin{aligned} B_{0,3}(t) &= (1-t)^3 & B_{1,3}(t) &= 3t(1-t)^2 \\ B_{2,3}(t) &= 3t^2(1-t) & B_{3,3}(t) &= t^3 \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.2 Courbes polynômiales

1.2.1 Courbe de Bézier polynômiale

Définition 2 : courbe de Bézier de degré n

Soit n appartenant à $\mathbb{N} - \{0; 1\}$. Soit $(M_i)_{i \in [0;n]}$ et O , $n+2$ points de \mathcal{P} .

La courbe de Bézier de degré n de points de contrôle $(M_i)_{i \in [0;n]}$ est l'ensemble des points $M(t)$, $t \in [0; 1]$ vérifiant la formule :

$$\forall t \in [0; 1], \overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \overrightarrow{OM_i} \quad (1.11)$$

et les points $(M_i)_{i \in [0;n]}$ définissent un polygone appelé **polygone de contrôle** de la courbe de Bézier.

Géométriquement, pour t_0 fixé dans $[0; 1]$, $M(t_0)$ est le barycentre des points pondérés $(M_i; B_{i,n}(t_0))_{i \in [0;n]}$. Pour tout t de $[0; 1]$, $B_{i,n}(t)$ est positif, d'après la formule du binôme de Newton, formule (1.5), le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ est donc défini par une combinaison convexe des vecteurs $(\overrightarrow{OM_i})_{i \in [0;n]}$ et donc le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ appartient à l'enveloppe convexe des vecteurs $(\overrightarrow{OM_i})_{i \in [0;n]}$, c'est-à-dire que la courbe de Bézier est incluse dans son polygone de contrôle.

D'après la formule du binôme de Newton, formule (1.5), la définition d'une courbe de Bézier de degré n , formule (1.11), ne dépend pas du point O choisi. Ainsi, lors du codage informatique, nous pouvons considérer que nous avons l'abus de notation :

$$\forall t \in [0; 1], M(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) M_i \quad (1.12)$$

D'après les formules (1.6) et (1.7), nous avons $M(0) = M_0$ et $M(1) = M_n$. Pour $n = 3$, les courbes sont cubiques et sont définies à partir de quatre points de contrôle $(M_0; M_1; M_2; M_3)$ de \mathcal{P} . La courbe de Bézier cubique de points de contrôle M_0, M_1, M_2, M_3 est l'ensemble des points $M(t)$, $t \in [0; 1]$ vérifiant la formule :

$$\forall t \in [0; 1], \overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \overrightarrow{OM_i} \quad (1.13)$$

Exercice 1 :

Montrer que le point M_1 (resp. M_2) permet de contrôler la tangente à la courbe en M_0 (resp. M_3).

★

Modifier les deux premiers (resp. derniers) points ne modifie pas la tangente à la courbe en M_3 (resp. M_0). La figure 1.1 illustre une jointure G^1 -continue entre deux courbes de Bézier γ_M et γ_P de points de contrôle respectifs M_0, M_1, M_2, M_3 et P_0, P_1, P_2, P_3 . La G^0 -continuité provient de l'égalité $M_3 = P_0$. La G^1 -continuité provient de l'alignement de $M_3 = P_0, M_2$ et P_1 ou encore de la colinéarité de $\overrightarrow{M_3M_2}$ et $\overrightarrow{P_0P_1}$. Modifier M_0 et/ou M_1 ne modifie pas la G^1 -continuité de la jointure des deux courbes.

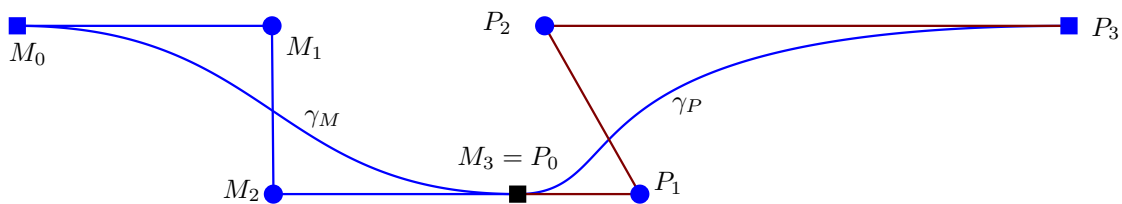


FIGURE 1.1 – Jointure G^1 -continue de deux courbes de Bézier cubiques.

1.2.2 Courbe de Bézier quadratique et arc de parabole

Pour $n = 2$, les courbes sont quadratiques et sont définies à partir de trois points de contrôle $(P_0; P_1; P_2)$. La courbe de Bézier quadratique de points de contrôle P_0, P_1, P_2 est l'ensemble des points $M(t)$, $t \in [0; 1]$ vérifiant :

$$\forall t \in [0; 1], \overrightarrow{OM(t)} = \sum_{i=0}^2 B_i(t) \overrightarrow{OP_i} \quad (1.15)$$

Exercice 2 :

Montrer que le point P_1 permet de contrôler la tangente à la courbe en P_0 et en P_2 .

★

Exercice 3 :

Montrer que la courbe définie par la formule (1.15) est un arc de parabole. (On pourra montrer que l'équation implicite de la parabole, dans le repère $(P_1; \overrightarrow{P_1P_0}, \overrightarrow{P_1P_2})$, est : $(x - y)^2 - 2(x + y) + 1 = 0$).

★

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de \mathcal{P} . L'algorithme 1.1 permet de construire un arc d'une parabole \mathcal{C}_P , défini par une courbe de Bézier de points de contrôle P_0, P_1 et P_2 , point par point.

La figure 1.2 illustre la méthode de De Casteljau pour construire un arc de parabole, algorithme 1.1. Les extrémités de l'arc sont P_0 et P_2 et le point P_1 définit les tangentes à la courbe en ces points. La figure montre aussi la construction de deux points de la parabole $N_3(\frac{1}{4})$ (resp. $N_3(\frac{1}{2})$) en utilisant les points $N_1(\frac{1}{4})$ et $N_2(\frac{1}{4})$ (resp. $N_1(\frac{1}{2})$ et $N_2(\frac{1}{2})$).

Exercice 4 :

Montrer que la droite $(N_1(t)N_2(t))$ et la tangente à la courbe \mathcal{C}_P au point $N_3(t)$.

★

Algorithme 1.1 : Méthode de De Casteljau

Entrée : Soit P_0 , P_1 et P_2 trois points non alignés de \mathcal{P} .

1. Soit la famille de points $(N_1(t))_{t \in [0;1]}$ définie par :

$$\overrightarrow{ON_1(t)} = (1-t)\overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OP_1} \quad (1.16)$$

2. Soit la famille de points $(N_2(t))_{t \in [0;1]}$ définie par :

$$\overrightarrow{ON_2(t)} = (1-t)\overrightarrow{OP_1} + t\overrightarrow{OP_2} \quad (1.17)$$

3. Soit la famille de points $(N_3(t))_{t \in [0;1]}$ définie par :

$$\overrightarrow{ON_3(t)} = (1-t)\overrightarrow{ON_1(t)} + t\overrightarrow{ON_2(t)} \quad (1.18)$$

Sortie : un arc de parabole défini par une courbe de Bézier de points de contrôle P_0 , P_1 et P_2 .

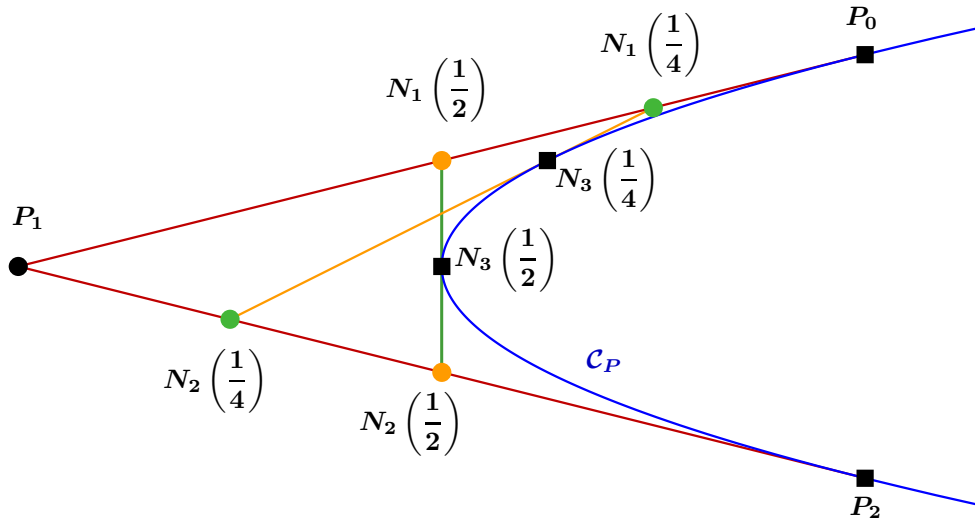


FIGURE 1.2 – Arc de parabole construit en utilisant la méthode de De Casteljau, algorithme 1.1.

1.3 Courbes de Bézier : du modèle polynômial au modèle rationnel

Considérons $M(t)$ un point d'une courbe de Bézier de degré n de points de contrôle $(M_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ dans le plan affine \mathcal{P} . Pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, (\mathfrak{M}_i) désignent les coordonnées du point M_i dans \mathcal{P} et donc les coordonnées homogènes de M_i sont $(\mathfrak{M}_i; 1)$ mais aussi $(\omega_i \mathfrak{M}_i; \omega_i)$ où ω_i est un réel non nul.

Soit $(\mathfrak{M}(t))$ les coordonnées de $M(t)$ dans \mathcal{P} et $(\widehat{\mathfrak{M}}(t); \omega(t))$ ses coordonnées homogènes. D'après la formule (1.11), nous avons la relation :

$$\forall t \in [0; 1], \quad \begin{cases} \widehat{\mathfrak{M}}(t) &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \omega_i \mathfrak{M}_i \\ \omega(t) &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \omega_i \end{cases} \quad (1.19)$$

En revenant dans le plan affine \mathcal{P} , nous pouvons définir :

Définition 3 : *Courbe de Bézier rationnelle*

Soit $n+1$ points de contrôle $(M_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ de \mathcal{P} .

Soit $n+1$ scalaires non nuls $(\omega_i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$, appelés poids, vérifiant :

$$\forall t \in [0; 1], \quad \sum_{i=0}^n \omega_i B_{i,n}(t) \neq 0 \quad (1.20)$$

Une courbe de Bézier rationnelle de degré n , dans l'espace affine \mathcal{P} est l'ensemble des points $M(t)$, t appartenant à $[0; 1]$, vérifiant :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \omega_i} \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \omega_i \overrightarrow{OM_i} \quad (1.21)$$

Il est possible de généraliser cette définition en prenant des vecteurs dans l'hyperplan de l'infini, la condition (1.20) devenant caduque, et d'utiliser des coniques projectives. L'intérêt des courbes rationnelles est qu'elles se conservent lorsque nous les transformons en utilisant des applications projectives : il suffit de prendre les images des points de contrôle.

1.4 Courbe de Bézier rationnelle quadratique

Dans la suite, nous allons considérer les courbes rationnelles de degré 2, c'est-à-dire que dans l'équation (1.21), nous aurons $n = 2$.

1.4.1 Définition

Définition 4 : *Courbe de Bézier rationnelle quadratique (CBRQ)*

Soit trois points de contrôle $(P_i)_{0 \leq i \leq 2}$ non alignés et trois poids, non nuls, $(\omega_i)_{0 \leq i \leq 2}$ vérifiant la condition :

$$\forall t \in [0; 1], \quad \sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t) \neq 0 \quad (1.22)$$

Un point $M(t)$, $t \in [0; 1]$, appartient à la CBRQ définie par les points de contrôle $(P_i)_{0 \leq i \leq 2}$ et les poids $(\omega_i)_{0 \leq i \leq 2}$ si, pour un point O de \mathcal{P} , $M(t)$ vérifie l'équation :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t)} \sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t) \overrightarrow{OP_i} \quad (1.23)$$

La condition (1.22) nous assure que la courbe de Bézier rationnelle quadratique reste dans le plan affine \mathcal{P} . Géométriquement, pour t fixé dans $[0; 1]$, $M(t)$ est le barycentre des points pondérés $\left(P_i; \frac{\omega_i B_i(t)}{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t)}\right)_{i \in [0; n]}$. Comme nous avons :

$$\sum_{i=0}^2 \frac{\omega_i B_i(t)}{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t)} = \frac{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t)}{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t)} = 1$$

la définition d'une CBRQ, formule (1.23), ne dépend pas du point O choisi. Ainsi, lors du codage informatique, nous pouvons considérer que nous avons l'abus de notation :

$$\forall t \in [0; 1], M(t) = \frac{1}{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t)} \sum_{i=0}^2 \omega_i B_i(t) P_i \quad (1.24)$$

Notation 2 :

Si P_0, P_1 et P_2 sont trois points non alignés de \mathcal{P} :

- ★ $RQBC\{(P_0; P_1; P_2)\}$ désigne une CBRQ de points de contrôle P_0, P_1 et P_2 ,
 - ★ $RQBC\{(P_0; P_1; P_2), \omega\}$ représente une CBRQ de points de contrôle pondérés $(P_0; 1), (P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$,
 - ★ $RQBC\{(P_0; P_1; P_2), (\omega_0; \omega_1; \omega_2)\}$ ou $RQBC\{(P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}$ est une CBRQ de points de contrôle (pondérés) $(P_0; \omega_0), (P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$.
-

D'après les formules (1.6) et (1.7), nous avons $M(0) = P_0$ et $M(1) = P_2$.

Exercice 5 :

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de \mathcal{P} . Montrer que la droite $(P_0 P_1)$ (resp. $(P_2 P_1)$) est la tangente à la $RQBC\{(P_0; P_1; P_2)\}$ au point P_0 (resp. P_2).

★

Exercice 6 :

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de \mathcal{P} . A partir de la formule (1.23), en posant :

$$D(t) = \omega_0 (1-t)^2 + 2\omega_1 (1-t)t + \omega_2 t^2$$

déterminer la nature de l'arc d'une CBRQ. On pourra montrer que, dans le repère $(P_1; \overrightarrow{P_1 P_0}, \overrightarrow{P_1 P_2})$, l'équation de la courbe est : $xy = \omega_0 \omega_2 \frac{(1-x-y)^2}{4\omega_1^2}$.

★

Exercice 7 :

Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de \mathcal{P} . Déterminer la nature de la conique propre définie par $RQBC \{(P_0; P_1; P_2), (\omega_0; \omega_1; \omega_2)\}$.

★

★

★

★

1.4.2 CBRQ sous forme (quasi) standard

Une CBRQ (quasi) standard est une CBRQ particulière, les poids extrémaux sont égaux à 1.

Définition 5 : *CBRQ sous forme (quasi) standard*

Un point $M(t)$ appartient à la CBRQ sous forme quasi standard, définie par les points de contrôle $(P_i)_{0 \leq i \leq 2}$ et le poids ω non nul, si pour un point O de \mathcal{P} , pour tout t de $[0; 1]$, $M(t)$ vérifie :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{B_0(t) + \omega B_1(t) + B_2(t)} \left(B_0(t) \overrightarrow{OP_0} + \omega B_1(t) \overrightarrow{OP_1} + B_2(t) \overrightarrow{OP_2} \right) \quad (1.28)$$

Lorsque nous avons $\omega > 0$, la CBRQ est dite sous **forme standard**.

Evidemment, la valeur de ω est telle que la condition (1.22) soit vérifiée.

Exercice 8 Déterminer la nature de la conique obtenue en fonction de la valeur de ω .

★

★

★

★

Ce nombre ω n'est pas l'excentricité de la conique puisque l'excentricité d'un cercle est nulle et la CBRQ de points de contrôles $(P_0, 1)$, $(P_1, 0)$ et $(P_2, 1)$ serait le segment $[P_0P_2]$.

1.4.3 Le cas du cercle

Comme tout diamètre d'un cercle est un axe de symétrie, nous obtenons une condition nécessaire (non suffisante) pour qu'une $RQBC \{(P_0; P_1; P_2)\}$ soit un arc de cercle : $P_0P_1 = P_1P_2$ c'est-à-dire que P_1 appartient à la médiatrice de $[P_0P_2]$. Nous allons dans un premier temps déterminer les relations entre les points de contrôle de la CBRQ et le cercle dont elle modélise l'arc.

1.4.3.1 Condition géométrique

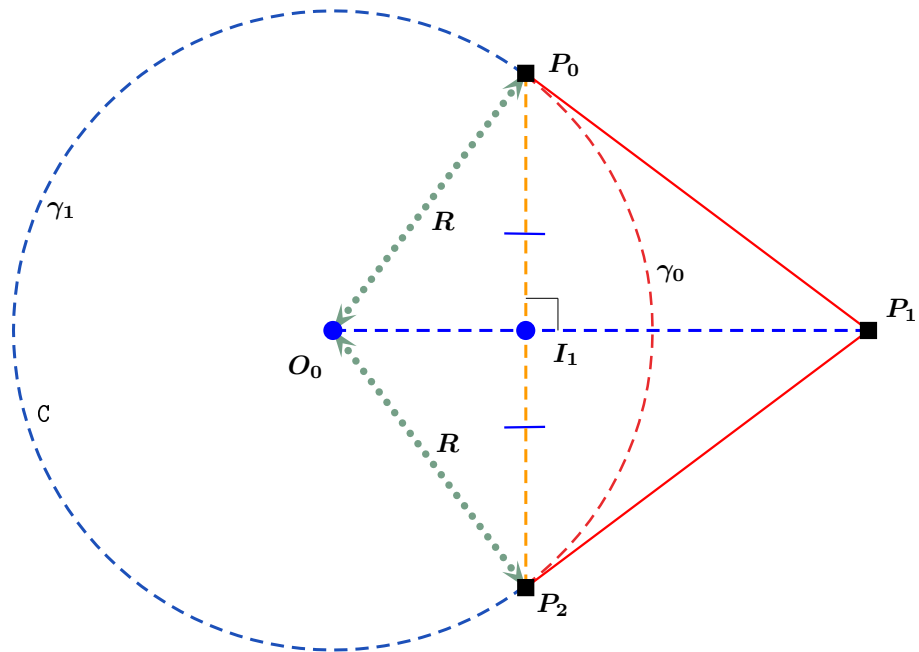


FIGURE 1.3 – Modélisation d'un cercle par deux CBRQs.

Nous allons commencer ce paragraphe par un rappel sur la détermination du centre d'un cercle lorsque nous connaissons trois points distincts de celui-ci.

Lemme 1 : *Connaissant trois points distincts, détermination du centre d'un cercle*

Soit A , B et C trois points d'un cercle \mathcal{C} de centre O .

O est le point d'intersection des médiatrices Δ_1 et Δ_2 des segments $[AB]$ et $[AC]$.

Le premier travail, théorème 2, permet de déterminer les caractéristiques du cercle passant par P_0 et P_2 et ayant comme tangente (P_0P_1) et (P_2P_1) , figure 1.3.

Théorème 2 : Centre du cercle déterminé par deux points et deux tangentes

Soit \mathcal{C} le cercle de centre O_0 et de rayon R passant par P_0 et P_2 et ayant comme tangente (P_0P_1) et (P_2P_1) , les points P_0 , P_1 et P_2 n'étant pas alignés, les points P_0 et P_2 n'étant pas diamétralement opposés.

Soit I_1 le milieu du segment $[P_0P_2]$. Soit Δ la médiatrice du segment $[P_0P_2]$. Alors :

1. Si le cercle \mathcal{C} existe alors le point P_1 appartient à Δ .
2. Si le cercle \mathcal{C} existe, le centre O_0 est donné par :

$$\overrightarrow{P_1O_0} = t_0 \overrightarrow{P_1I_1} \quad \text{avec} \quad t_0 = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}^2}{\overrightarrow{I_1P_1} \bullet \overrightarrow{P_0P_1}} \quad (1.29)$$

Démonstration :

1. Si le cercle \mathcal{C} existe alors (I_1O_0) est un axe de symétrie de \mathcal{C} . Soit s_Δ la réflexion d'axe Δ .
Ainsi $s_\Delta(P_0) = P_2$ et $s_\Delta(P_2) = P_0$. Soit \mathcal{T}_0 et \mathcal{T}_2 les tangentes respectives à \mathcal{C} en P_0 et P_2 . Nous avons donc $s_\Delta(\mathcal{T}_0) = \mathcal{T}_2$. Les tangentes \mathcal{T}_0 et \mathcal{T}_2 sont concourantes (puisque les deux contiennent P_1) et se coupent sur Δ donc P_1 appartient à Δ .
- 2.

■

La condition nécessaire $P_0P_1 = P_2P_1$ n'est pas suffisante puisque le triangle $P_0P_1P_2$ peut être isocèle en P_1 et la CBRQ une conique quelconque : pour cela, il suffit que les droites (P_0P_1) et (P_1P_2) soient symétriques par rapport à un des axes de la conique. Réciproquement, le théorème 3 permet de construire le point P_1 pour que la $RQBC(P_0; P_1; P_2)$ soit un des deux arcs de cercle de centre donné et d'extrémités P_0 et P_2 . Ainsi, pour modéliser un arc de cercle d'extrémités P_0 et P_2 par une CBRQ, nous déterminerons le centre du cercle à l'aide de trois points de cet arc, lemme 1, puis nous pourrions calculer le troisième point de contrôle P_1 .

Théorème 3 : Connaissant le centre du cercle, construction du point P_1

Soit \mathcal{C} le cercle de centre O_0 et de rayon R passant par P_0 et P_2 et I_1 le milieu du segment $[P_0P_2]$, P_0 et P_2 n'étant pas diamétralement opposés.

Pour que $RQBC(P_0; P_1; P_2)$ soit un arc de cercle de \mathcal{C} passant par les deux points distincts P_0 et P_2 , il faut que P_1 vérifie :

$$\overrightarrow{I_1P_1} = t_1 \overrightarrow{O_0I_1} \quad \text{avec} \quad t_1 = \frac{\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{I_1P_0}}{\overrightarrow{O_0P_0} \bullet \overrightarrow{O_0I_1}} \quad (1.30)$$

Démonstration :

■

1.4.3.2 Calculs des poids

Après avoir déterminé le point de contrôle P_1 , nous allons, dans ce paragraphe, donner les conditions sur les poids ω_0 , ω_1 et ω_2 pour qu'une CBRQ modélise un arc de cercle.

Théorème 4 : *Cercle déterminé par deux points et les tangentes en ces points*

Soit \mathcal{C} le cercle de centre O_0 et de rayon R passant par P_0 et P_2 et ayant comme tangente (P_0P_1) et (P_2P_1) , les points P_0 et P_2 n'étant pas diamétralement opposés. Soit $(\omega_0; \omega_2) \in (\mathbb{R}_^+)^2$.*

La CBRQ γ de points de contrôle pondérés $(P_i; \omega_i)_{0 \leq i \leq 2}$, est un arc de cercle si et seulement si :

$$\omega_1^2 = \omega_0 \omega_2 \cos^2 \left(\widehat{\overrightarrow{P_0P_1}; \overrightarrow{P_0P_2}} \right) = \omega_0 \omega_2 \left(\frac{\overrightarrow{P_0P_1} \bullet \overrightarrow{P_0P_2}}{\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}} \right)^2 \quad (1.31)$$

Démonstration du théorème :

■

Remarquons que le fait que P_1 appartiennent aux tangentes au cercle en P_0 et P_2 implique l'égalité suivante : $P_0P_1 = P_2P_1$. Lorsque deux CBRQs modélisent un même arc de cercle (les points de contrôle sont évidemment les mêmes) les valeurs des poids n'interviennent que dans la vitesse de parcours des deux CBRQs.

Exercice 9 :

Soit $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan affine euclidien \mathcal{P} . Considérons les points $P_0 = (1; 0)$, $P_1 = (1; 1)$ et $P_2 = (0; 1)$.

1. Déterminer le poids ω pour que le cercle de centre O et de rayon 1 soit modélisé par l'union de deux courbes de Bézier rationnelles quadratiques γ_1 et γ_2 de points de contrôle respectifs $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; 2)$ d'une part, $(P_0; 1)$, $(P_1; -\omega_1)$ et $(P_2; 2)$ d'autre part, figure 1.4.
2. Déterminer le poids ω pour que le cercle de centre O et de rayon 1 soit modélisé par l'union de deux courbes de Bézier rationnelles quadratiques quasi standard γ^+ et γ^- de points de contrôle respectifs $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$ d'une part, $(P_0; 1)$, $(P_1; -\omega)$ et $(P_2; 1)$ d'autre part.

1.

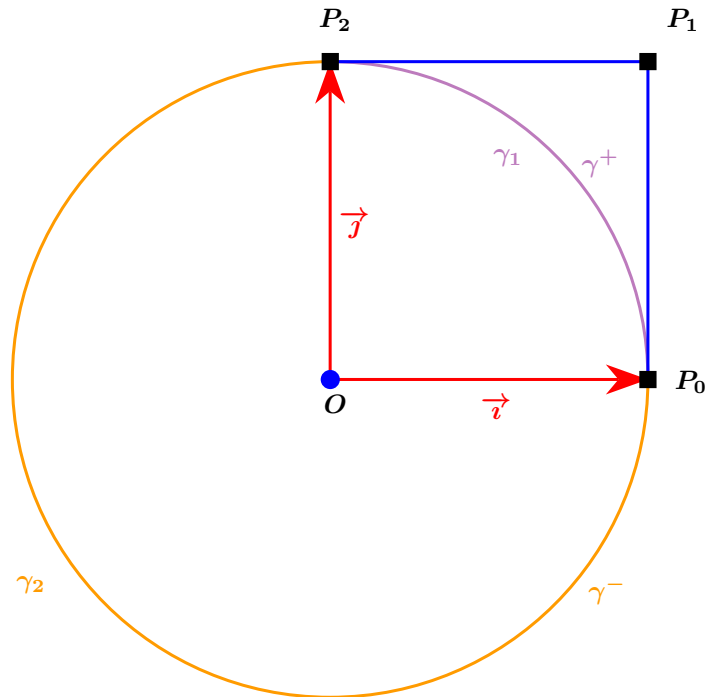


FIGURE 1.4 – Cercle modélisé par deux unions de deux courbes de Bézier rationnelles quadratiques γ_1 et γ_2 d'une part et γ^+ et γ^- d'autre part.

2.

★

Question 1 : Dans la figure 1.4, comment placer géométriquement le point $\gamma^+(\frac{1}{2})$?

Question 2 : Dans la figure 1.4, comparer les points $\gamma^+ \left(\frac{1}{2} \right)$ et $\gamma^- \left(\frac{1}{2} \right)$.

Question 3 : Dans la figure 1.4, quel point est le plus près de P_2 , $\gamma^+ \left(\frac{1}{2} \right)$ ou $\gamma_1 \left(\frac{1}{2} \right)$?

Question 4 : Dans la figure 1.4, comparer les normes de $\overrightarrow{\gamma^{+'} \left(\frac{1}{2} \right)}$ et $\overrightarrow{\gamma^{-'} \left(\frac{1}{2} \right)}$.

★

Chapitre 2

Courbes de Bézier en utilisant le formalisme des points massiques

2.1 Points massiques

2.1.1 Définition

L'ensemble des vecteurs du plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ et des points pondérés du plan affine \mathcal{P} sont regroupés dans l'espace $\tilde{\mathcal{P}}$ défini par :

$$\tilde{\mathcal{P}} = (\mathcal{P} \times \mathbb{R}^*) \cup (\vec{\mathcal{P}} \times \{0\}) \quad (2.1)$$

et il est possible d'identifier $\tilde{\mathcal{P}}$ à $\vec{\mathcal{E}}_2 = \vec{\mathcal{P}} \oplus \vec{\mathbb{R}}$, figure 2.1. L'idée est de considérer le plan affine \mathcal{P} comme un hyperplan de $\vec{\mathcal{E}}_2$ d'équation $\omega = 1$: la coordonnée supplémentaire représente le poids du point pondéré. Un point massique est soit un point pondéré du plan \mathcal{P} , soit un vecteur du plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ à qui nous affectons un poids nul.

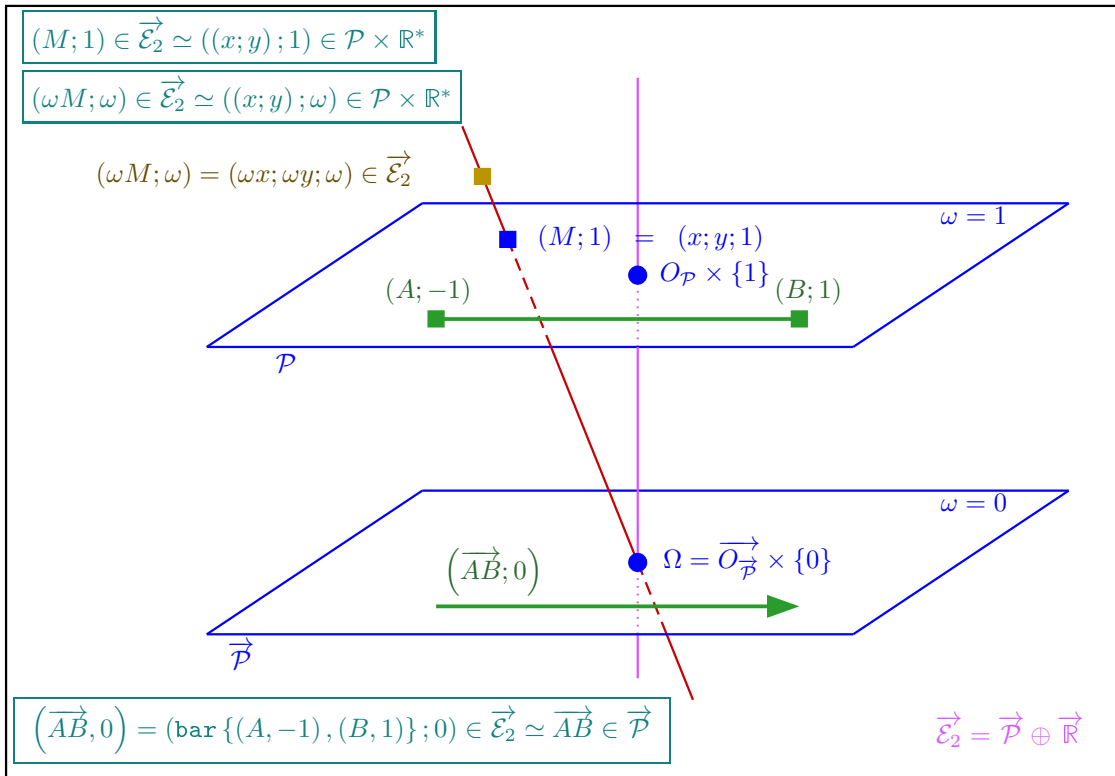


FIGURE 2.1 – Espace $\tilde{\mathcal{P}}$ des points massiques réunissant les points pondérés du plan affine \mathcal{P} d'équation $\omega = 1$ et les vecteurs (muni d'un poids nul) du plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ d'équation $\omega = 0$.

Rappelons que le barycentre d'une famille de points pondérés dont la somme des poids est nul n'est pas un point, mais le vecteur :

$$\vec{u} = \sum_{i \in I} \omega_i \overrightarrow{MA_i}$$

qui est indépendant du point M . Il est donc naturel de regrouper dans un même espace les points pondérés de \mathcal{P} et les vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$, identifié à l'hyperplan de $\vec{\mathcal{E}}_2$ d'équation $\omega = 0$. Nous pouvons ainsi généraliser la notion de barycentre aux familles des points pondérés dont la somme des poids est nulle.

Cela revient à établir une bijection entre $\tilde{\mathcal{P}}$ et $\vec{\mathcal{E}}_2$ suivie d'une projection sur \mathcal{P} ou $\vec{\mathcal{P}}$ selon le cas. L'espace $\tilde{\mathcal{P}}$ permet de garder notre structure euclidienne sur le plan affine \mathcal{P} et sur le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$.

Afin de pouvoir manipuler les coordonnées des points ou des vecteurs, nous définissons, sur l'espace $\tilde{\mathcal{P}}$, les additions, notées \boxplus , de la façon suivante :

- $\omega + \mu = 0 \implies (M; \omega) \boxplus (N; \mu) = (M; \omega) \boxplus (N; -\omega) = (\omega \overrightarrow{NM}; 0)$
- $\omega + \mu \neq 0 \implies (M; \omega) \boxplus (N; \mu) = \left(\text{bar} \left\{ (M; \omega); (N; \mu) \right\}; \omega + \mu \right)$
- $(\vec{u}; 0) \boxplus (\vec{v}; 0) = (\vec{u} + \vec{v}; 0)$
- $\omega \neq 0 \implies (M; \omega) \boxplus (\vec{u}; 0) = \left(\mathcal{T}_{\frac{1}{\omega} \vec{u}}(M); \omega \right)$ où $\mathcal{T}_{\vec{w}}$ est la translation de \mathcal{P} de vecteur \vec{w} .

Sur l'espace $\tilde{\mathcal{P}}$, nous définissons la multiplication par un scalaire, notée \boxtimes , de la façon suivante :

- $\alpha \neq 0 \implies \alpha \boxtimes (M; \omega) = (M; \alpha \omega)$
- $\omega \neq 0 \implies 0 \boxtimes (M; \omega) = (\vec{0}; 0)$
- $\alpha \boxtimes (\vec{u}; 0) = (\alpha \vec{u}; 0)$

La figure 2.1 donne une interprétation géométrique de la somme \boxplus et du produit \boxtimes dans l'hyperplan \mathcal{H}_y d'équation $y = 0$ de $\tilde{\mathcal{P}}$ et permet de retrouver l'associativité du barycentre, illustré par la formule :

$$(G_1; 3) \boxplus (N; 1) = (M; 2) \boxplus (N; 1) \boxplus (N; 1) = (M; 2) \boxplus (N; 2) = (G_2; 4)$$

qui définit le point $(G_2; 1)$ comme intersection de la droite passant $O_{\vec{\mathcal{E}}_2}$ et $G_2 \equiv (G_2; 4)$ avec le plan \mathcal{P} . $(G_2; 1)$ est le milieu du segment défini par $N \equiv (N; 1)$ et $M \equiv (M; 1)$.

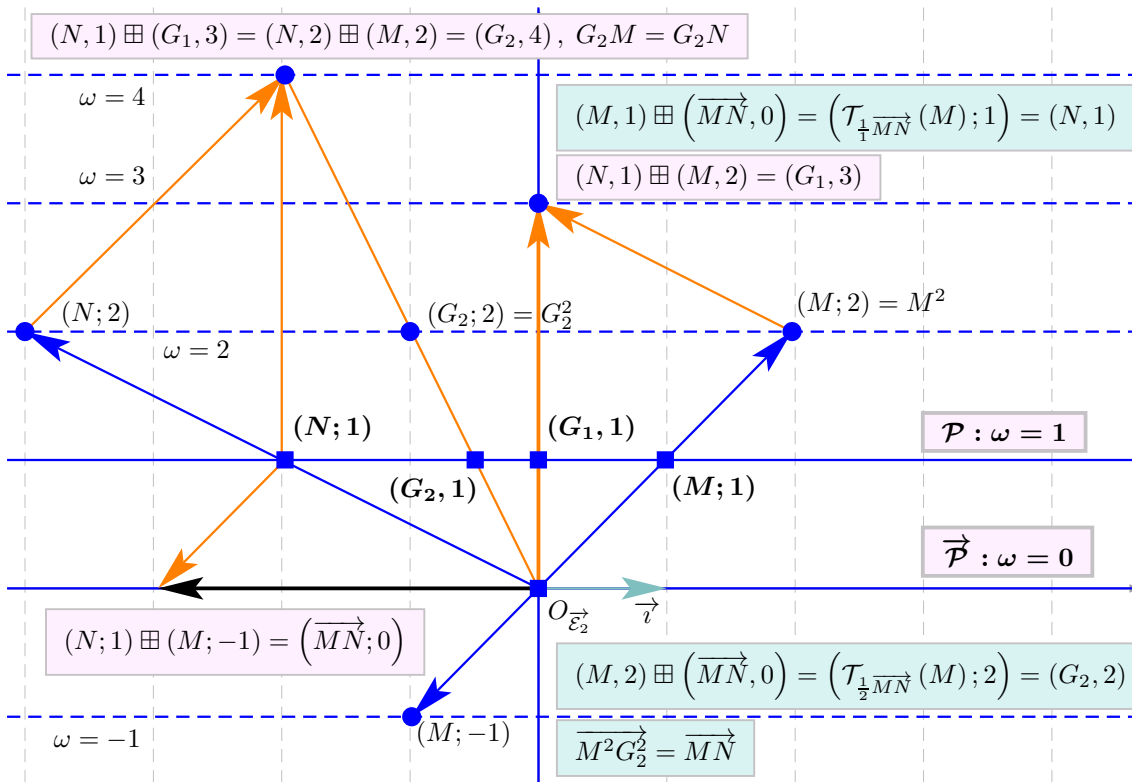


FIGURE 2.2 – Interprétation géométrique de la somme \boxplus et du produit \boxtimes dans l'hyperplan d'équation $y = 0$ de $\tilde{\mathcal{P}}$.

Toujours dans $\mathcal{H}_y, (M; 2) \boxplus (\overrightarrow{MN}; 0)$ se traduit, sur la droite d'équation $\omega = 2$, par :

$$\overrightarrow{M^2G_2^2} = \overrightarrow{MN}$$

tandis que sur la droite d'équation $\omega = 1$, nous avons :

$$\overrightarrow{MG_2} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MN}$$

et en introduisant l'homothétie vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}$ de rapport $\frac{1}{2}$, nous avons :

$$\overrightarrow{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(\overrightarrow{O_{\mathcal{E}_2}M^2}) = \overrightarrow{O_{\mathcal{E}_2}M}, \quad \overrightarrow{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(\overrightarrow{O_{\mathcal{E}_2}G_2^2}) = \overrightarrow{O_{\mathcal{E}_2}G_2}, \quad \overrightarrow{\mathcal{H}}_{\frac{1}{2}}(\overrightarrow{M^2G_2^2}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{MG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$$

Dans $\tilde{\mathcal{P}}$, la somme $(M; \omega_0) \boxplus (\vec{u}; 0)$ traduit une translation de vecteur \vec{u} dans l'hyperplan d'équation $\omega = \omega_0$, qui via l'homothétie $\overrightarrow{\mathcal{H}}_{\frac{1}{\omega_0}}$ se traduit dans le plan affine \mathcal{P} par une translation de vecteur $\frac{1}{\omega_0} \vec{u}$.

De plus, nous avons :

$$(M; 1) \boxplus (N; 1) = (M; 2) \boxplus (M; -1) \boxplus (N; 1) = (M; 2) \boxplus (\overrightarrow{MN}; 0) = (G_2; 2)$$

et nous généralisons l'associativité du barycentre aux vecteurs.

2.1.2 Courbes de Bézier rationnelles quadratiques dans $\tilde{\mathcal{P}}$

Ce paragraphe est une généralisation du paragraphe 1.4 : il est alors possible de sortir de l'espace affine \mathcal{P} en incluant les vecteurs de $\tilde{\mathcal{P}}$, les points de contrôles sont alors des points massiques (i.e. des points pondérés de \mathcal{P} ou des vecteurs de $\tilde{\mathcal{P}}$).

Définition 6 : CBRQ dans $\tilde{\mathcal{P}}$

Soit $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ trois éléments de $\tilde{\mathcal{P}}$.

Soit I (resp. J) l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls (resp. nuls).

Soit la fonction ω_f définie sur $[0; 1]$ par :

$$\omega_f(t) = \sum_{i \in I} \omega_i \times B_i(t)$$

Un point massique $(M(t_0); \omega)$ ou $(\vec{u}; 0)$ appartient à la courbe de Bézier quadratique de points massiques de contrôle $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$, s'il existe un réel t_0 de $[0; 1]$ tel que :

- si $\omega_f(t_0) \neq 0$ alors, nous avons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM(t_0)} &= \frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0) \overrightarrow{OP_i} + \frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in J} B_i(t_0) \vec{P_i} \\ \omega &= \omega_f(t_0) \end{cases} \quad (2.2)$$

- si $\omega_f(t_0) = 0$ alors, nous avons :

$$\vec{u} = \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0) \overrightarrow{OP_i} + \sum_{i \in J} B_i(t_0) \vec{P_i} \quad (2.3)$$

Notation 3 :

La notation $RQBC \{(P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}$ désigne une CBRQ de points de contrôle massiques $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$.

La notation $\overline{RQBC \{(P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}}$ désigne la conique propre contenant l'arc de courbe définie par $RQBC \{(P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}$.

La CBRQ étant définie à partir de vecteurs et de points pondérés dont la somme des poids vaut 1, elle ne dépend pas du point O choisi.

En utilisant les additions et multiplications définies dans le cadre du formalisme des points massiques, dans le cas où $(P; \omega)$ et un point de la CBRQ vérifiant $\omega \neq 0$, nous aurions la notation suivante :

$$(P; 1) = \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i \times B_i(t_0)} \sqcap \left(\sum_{i \in I} B_i(t_0) \sqcap (P_i; \omega_i) \right) \boxplus \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i \times B_i(t_0)} \sqcap \left(\sum_{i \in J} B_i(t_0) \sqcap (\vec{P}_i; 0) \right) \quad (2.4)$$

où \sum^{\boxplus} désigne une somme de \boxplus . La formule (2.4) se simplifie en :

$$(P; 1) = \sum_{i \in I}^{\boxplus} \left(P_i; \frac{\omega_i \times B_i(t_0)}{\sum_{i \in I} \omega_i \times B_i(t_0)} \right) \boxplus \left(\sum_{i \in J}^{\boxplus} \left(\frac{B_i(t_0)}{\sum_{i \in I} \omega_i \times B_i(t_0)} \vec{P}_i; 0 \right) \right) \quad (2.5)$$

Le point massique $(\vec{u}; 0)$ s'écrit :

$$(\vec{u}; 0) = \sum_{i \in I}^{\boxplus} \omega_i B_i(t_0) \sqcap (\vec{\Omega P}_i; 0) \boxplus \left(\sum_{i \in J}^{\boxplus} B_i(t_0) \sqcap (\vec{P}_i; 0) \right) \quad (2.6)$$

Considérons le cas particulier où $\omega_0 \omega_2 > 0$ et $\omega_1 = 0$. D'après la formule (2.2), le point $M(t)$ appartient à la courbe si et seulement si :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{1}{\omega_0 B_0(t) + \omega_2 B_2(t)} \left(\omega_0 B_0(t) \overrightarrow{OP}_0 + \omega_2 B_2(t) \overrightarrow{OP}_2 + B_1(t) \vec{P}_1 \right) \quad (2.7)$$

d'où $M(0) = P_0$ et $M(1) = P_2$.

Exercice 10 :

Soit ω_0 et ω_2 deux réels vérifiant $\omega_0 \omega_2 > 0$. Soit P_0 et P_2 deux points de \mathcal{P} et \vec{P}_1 un vecteur de $\vec{\mathcal{P}}$. Déterminer les tangentes à la courbe RQBC $\left\{ (P_0; \omega_0); (\vec{P}_1; 0); (P_2; \omega_2) \right\}$ en P_0 et P_2 .

★

2.1.3 Modélisation d'arcs de cercles par des CBRQs dans $\tilde{\mathcal{P}}$

L'utilisation des courbes de Bézier rationnelles quadratiques définies à partir de points massiques permet de tracer des demi-cercles.

Théorème 5 : Demi-cercle déterminé par deux points diamétralement opposés et un vecteur

Soit \mathcal{C} le cercle de centre O_0 et de rayon R .

Soit P_0 et P_2 deux points diamétralement opposés de \mathcal{C} .

Soit ω_0 et ω_2 deux nombres réels non nuls et de même signe.

Soit \vec{P}_1 un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{P_0 P_2}$.

La courbe de Bézier γ de points de contrôle massiques $(P_0; \omega_0)$, $(\vec{P}_1; 0)$ et $(P_2; \omega_2)$ est un demi-cercle de \mathcal{C} si et seulement si :

$$\omega_0 \omega_2 \overrightarrow{P_0 P_2}^2 = 4 \vec{P}_1^2 \quad (2.10)$$

Démonstration du théorème :

q

■

Exercice 11 :

Soit $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan affine euclidien \mathcal{P} . Considérons les points $P_0 = (1; 0)$ et $P_2 = (-1; 0)$.

Soit γ_3 la courbe de Bézier rationnelle quadratique de points de contrôle massiques $(P_0; \omega)$, $(-\vec{j}; 0)$ et $(P_2; \omega)$,

Déterminer le poids ω pour que le demi cercle de centre O et de rayon 1 situé dans les deux derniers quadrants soit modélisé par γ_3 , figure 1.4.

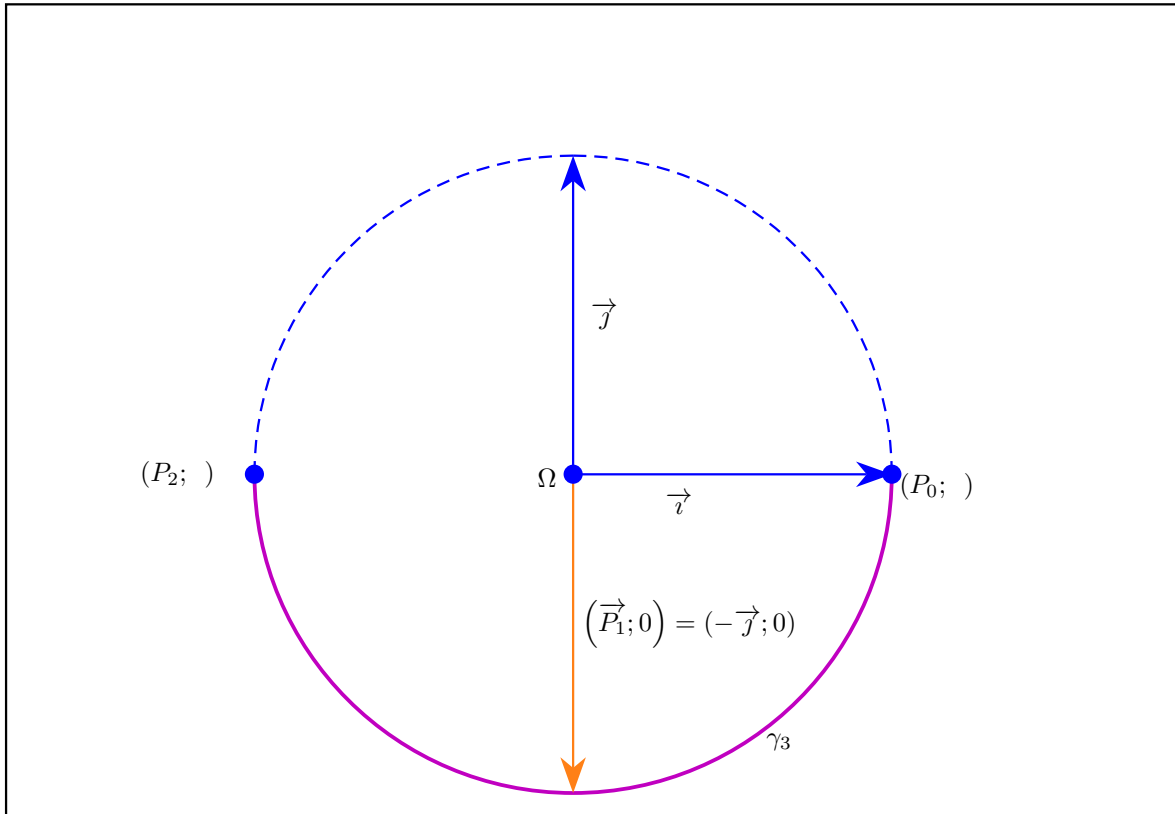


FIGURE 2.3 – Demi-cercle modélisé une courbe de Bézier rationnelle quadratique γ_3 définie par les points de contrôle massiques $(P_0;)$, $(-\vec{j}; 0)$ et $(P_2;)$.

Nous avons :

$$\omega_f(t) = \sum_{i \in I} \omega_i \times B_i(t) = B_0(t) + B_2(t) = 1 - 2t + 2t^2$$

♡ En utilisant la formule (2.2), nous avons :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =$$

=

=

♡ En utilisant la formule (2.4),

♡ Il reste à trouver une équation usuelle de la courbe.

★

2.2 Caractéristiques d'une conique propre modélisée par une courbe de Bézier

Exercice 12 :

Montrer que si γ est une CBRQ de points de contrôle pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; 1)$ et $(P_2; 1)$ et qu'en posant

$$h : u \mapsto \frac{u}{1-u}$$

alors $\gamma \circ h$ est une CBRQ de points massiques de contrôle $(P_0; 1)$, $(\overrightarrow{P_0P_1}; 0)$ et $(\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_2}; 0)$.

★

Lemme 2 :*Soit $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ trois éléments de $\tilde{\mathcal{P}}$.**Soit I (resp. J) l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls (resp. nuls).**Soit λ un réel non nul. Alors, si $\sum_{i \in I} \omega_i \times B_i(t_0)$ est non nul, nous avons :*

$$RQBC \left\{ (P_i; \omega_i)_{i \in I}; \left(\vec{P}_j; 0 \right)_{j \in J} \right\} = RQBC \left\{ (P_i; \lambda \omega_i)_{i \in I}; \left(\lambda \vec{P}_j; 0 \right)_{j \in J} \right\} \quad (2.13)$$

Démonstration :

$$\frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i \times B_i(t_0)} \left(\sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0) \overrightarrow{OP_i} + \sum_{j \in J} B_j(t_0) \vec{P}_j \right) = \frac{1}{\sum_{i \in I} \lambda \omega_i \times B_i(t_0)} \left(\sum_{i \in I} \lambda \omega_i B_i(t_0) \overrightarrow{OP_i} + \sum_{j \in J} B_j(t_0) \lambda \vec{P}_j \right)$$

■

Si $J = \emptyset$, on ne change pas les points de contrôle d'une CBRQ en multipliant tous les poids par un même réel non nul.

2.2.1 Changement de paramètre homographique

Théorème 6 : *Changement de paramètre homographique*

Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle massiques $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ de support la conique \mathcal{C} . Soit les réels a , b , c et d vérifiant :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.14)$$

Soit h définie par :

$$\begin{aligned} h : \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\longmapsto \frac{a(1-u) + bu}{c(1-u) + du} \end{aligned} \quad (2.15)$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(Q_0; \varpi_0)$, $(Q_1; \varpi_1)$ et $(Q_2; \varpi_2)$ de support la conique \mathcal{C} avec :

$$\begin{cases} (Q_0; \varpi_0) &= (c-a)^2 \square (P_0; \omega_0) \boxplus 2a(c-a) \square (P_1; \omega_1) \boxplus a^2 \square (P_2; \omega_2) \\ (Q_1; \varpi_1) &= (c-a)(d-b) \square (P_0; \omega_0) \boxplus (bc - 2ab + ad) \square (P_1; \omega_1) \boxplus ab \square (P_2; \omega_2) \\ (Q_2; \varpi_2) &= (d-b)^2 \square (P_0; \omega_0) \boxplus 2b(d-b) \square (P_1; \omega_1) \boxplus b^2 \square (P_2; \omega_2) \end{cases} \quad (2.16)$$

Démonstration : [B97]

■

Corollaire 1 : *Changement de paramètre homographique laissant invariant 0 et 1*

Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle massiques $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ de support la conique \mathcal{C} . Soit b et c deux réels non nuls. Soit h définie par :

$$\begin{aligned} h : \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\longmapsto \frac{bu}{c(1-u) + bu} \end{aligned} \quad (2.17)$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(P_0; \varpi_0)$, $(P_1; \varpi_1)$ et $(P_2; \varpi_2)$ de support la conique \mathcal{C} avec :

$$\begin{cases} (P_0; \varpi_0) &= c^2 \square (P_0; \omega_0) \underbrace{=}_{\text{si } \omega_0 \neq 0} (P_0; c^2 \omega_0) \\ (P_1; \varpi_1) &= bc \square (P_1; \omega_1) \underbrace{=}_{\text{si } \omega_1 \neq 0} (P_1; bc \omega_1) \\ (P_2; \varpi_2) &= b^2 \square (P_2; \omega_2) \underbrace{=}_{\text{si } \omega_2 \neq 0} (P_2; b^2 \omega_2) \end{cases} \quad (2.18)$$

Démonstration : [B97]

Nous avons $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$.

Pour obtenir la formule (2.18), il suffit d'appliquer la formule (1) en remarquant que dans la formule (2.17), nous avons $a = 0$ et $b - d = 0$.

■

Si ω_0 et ω_2 sont deux réels strictement positifs, en prenant $c = \frac{1}{\sqrt{\omega_0}}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{\omega_2}}$, nous avons :

$$\omega_1 \neq 0 \implies RQBC \{(P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\} = RQBC \left\{ (P_0; 1); \left(P_1; \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_0 \omega_2}} \right); (P_2; 1) \right\} \quad (2.19)$$

et :

$$\omega_1 = 0 \implies RQBC \{(P_0; \omega_0); (\vec{P}_1; 0); (P_2; \omega_2)\} = RQBC \left\{ (P_0; 1); \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_0 \omega_2}} \vec{P}_1; 0 \right); (P_2; 1) \right\} \quad (2.20)$$

2.2.2 Cas de la parabole

Trivialement, en prenant $\omega_0 = 1$, $RQBC \{(P_0; 1); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}$ est un arc de parabole si et seulement si nous avons :

c'est-à-dire que la courbe est de la forme $RQBC \{(P_0; 1); (P_1; \omega); (P_2; \quad)\}$. Nous pouvons énoncer :

Théorème 7 :

Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; \quad)$. Nous devons distinguer deux cas :

1. Si $\omega = 1$.

Soit h est définie par :

$$\begin{aligned} h : \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\longmapsto \frac{u}{1-u} \end{aligned} \quad (2.21)$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(P_0; 1)$, $(\vec{U}_1; 0)$ et $(\vec{U}_2; 0)$ avec :

$$\begin{cases} (\vec{U}_1; 0) &= (\overrightarrow{P_0 P_1}; 0) \\ (\vec{U}_2; 0) &= (\overrightarrow{P_1 P_0} + \overrightarrow{P_1 P_2}; 0) \end{cases} \quad (2.22)$$

et :

$$\overline{RQBC}\{(P_0; 1); (P_1; \omega); (P_2; \quad)\} = \overline{RQBC}\{(P_0; 1); (\overrightarrow{P_0 P_1}; 0); (\overrightarrow{P_1 P_0} + \overrightarrow{P_1 P_2}; 0)\}$$

2. Si $\omega \notin \{0; 1\}$.

Soit h est définie par :

$$\begin{aligned} h : \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\longmapsto \frac{u}{1-\omega} \end{aligned} \quad (2.23)$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(P_0; 1)$, $(\vec{U}_1; 0)$ et $(\vec{U}_2; 0)$ avec :

$$\begin{cases} (\vec{U}_1; 0) &= \left(\frac{\omega}{1-\omega} \overrightarrow{P_0 P_1}; 0\right) \\ (\vec{U}_2; 0) &= \left(\left(\frac{\omega}{1-\omega}\right)^2 (\overrightarrow{P_1 P_0} + \overrightarrow{P_1 P_2}); 0\right) \end{cases} \quad (2.24)$$

et :

$$\overline{RQBC}\{(P_0; 1); (P_1; \omega); (P_2; \quad)\} = \overline{RQBC}\{(P_0; 1); (\vec{U}_1; 0); (\vec{U}_2; 0)\}$$

Démonstration :

1.

et le calcul est plus simple que celui fait dans l'exercice 12.

2. Si $\omega \notin \{0; 1\}$.

■

Nous pouvons énoncer :

Théorème 8 :

Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle massiques $(P_0; 1)$, $(\vec{U}_1; 0)$ et $(\vec{U}_2; 0)$ telle que :

$$\vec{U}_1 \bullet \vec{U}_2 \neq 0$$

Soit r le réel défini par :

$$r = \frac{1}{\|\vec{U}_2\|^2} \vec{U}_1 \bullet \vec{U}_2 \quad (2.25)$$

Soit h définie par :

$$\begin{aligned} h : \quad \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\longmapsto \frac{r u}{(1 - u) + r u} \end{aligned} \quad (2.26)$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(P_0; 1)$, $(\vec{V}_1; 0)$ et $(\vec{V}_2; 0)$ avec :

$$\begin{cases} (\vec{V}_1; 0) &= (r \vec{U}_1; 0) \\ (\vec{V}_2; 0) &= (r^2 \vec{U}_2; 0) \end{cases} \quad (2.27)$$

Alors :

$$\overline{RQBC \left\{ (P_0; 1); (\vec{U}_1; 0); (\vec{U}_2; 0) \right\}} = \overline{RQBC \left\{ (P_0; 1); (\vec{V}_1; 0); (\vec{V}_2; 0) \right\}}$$

Démonstration :

■

Nous pouvons énoncer :

Théorème 9 :

Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle massiques $(P_0; 1)$, $(\vec{V}_1; 0)$ et $(\vec{V}_2; 0)$ telle que :

$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 \neq 0$$

Soit h définie par :

$$\begin{aligned} h : \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\longmapsto \frac{-(1-u) + u}{u} \end{aligned} \quad (2.28)$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(Q_0; 1)$, $(\vec{W}_1; 0)$ et $(\vec{V}_2; 0)$ avec :

$$\begin{cases} (Q_0; 1) &= (\mathcal{T}_{\vec{V}_2 - 2\vec{V}_1}(P_0); 1) \\ (\vec{W}_1; 0) &= (\vec{V}_1 - \vec{V}_2; 0) \end{cases} \quad (2.29)$$

Alors :

$$\overline{RQBC \left\{ (P_0; 1); (\vec{V}_1; 0); (\vec{V}_2; 0) \right\}} = \overline{RQBC \left\{ (Q_0; 1); (\vec{W}_1; 0); (\vec{V}_2; 0) \right\}}$$

Démonstration :

■

Nous pouvons remarquer :

Proposition 1 :

Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. Soit les courbes $RQBC \{(P_0; 1); (P_1; \omega); (P_2; \omega^2)\}$ et $RQBC \{(Q_0; 1); (\vec{W}_1; 0); (\vec{V}_2; 0)\}$, cette dernière courbe étant obtenue en utilisant les théorèmes 7, 8 puis 9.

Alors, nous avons :

$$\vec{W}_1 \bullet \vec{V}_2 = 0 \quad (2.30)$$

Démonstration :

■

Nous pouvons énoncer :

Théorème 10 :

Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. Considérons les courbes $RQBC \{(P_0; 1); (P_1; \omega); (P_2; \omega^2)\}$ et $RQBC \{(Q_0; 1); (\vec{W}_1; 0); (\vec{V}_2; 0)\}$, cette dernière courbe étant obtenue en utilisant les théorèmes 7, 8 puis 9.

Alors, $RQBC \{(P_0; 1); (P_1; \omega); (P_2; \omega^2)\}$ est la parabole P :

★ de sommet Q_0 ,

★ de foyer $F \left(0; \frac{\|\vec{W}_1\|^2}{\|\vec{V}_2\|} \right)$ dans le repère orthonormal $\left(Q_0; \frac{1}{\|\vec{W}_1\|} \vec{W}_1; \frac{1}{\|\vec{V}_2\|} \vec{V}_2 \right)$,

★ d'axe focal $\Delta = (Q_0; \vec{V}_2)$, qui est un axe de symétrie de P ,

★ de tangente $\Delta' = (Q_0; \vec{W}_1)$ en Q_0 ,

★ de directrice \mathcal{D} d'équation $Y = -\frac{\|\vec{W}_1\|^2}{\|\vec{V}_2\|}$ dans le repère orthonormal $\left(Q_0; \frac{1}{\|\vec{W}_1\|} \vec{W}_1; \frac{1}{\|\vec{V}_2\|} \vec{V}_2 \right)$.

Démonstration :

$-0,006x^2 - 0,155y^2 + 0,062xy + 0,134x + 0,766y + 1,000 = 0$

$\mathcal{D} : y = -5,000x - 35,000$

\vec{W}_1

F

Q_0

\vec{V}_2

$\Delta : y = 0,200x + 2,286$

P_0

P_1

P_2

$(P_0; \omega_0) = ((0; 6); 1)$	$(P_1; \omega_1) = ((-13; 0); 1)$	$(P_2; \omega_2) = ((-1; -1); 1)$
$(Q_0; \varpi_0) = ((-6, 743; 0, 938); 1)$	$(\vec{W}_1; 0) = ((-0, 357; 1, 786); 0)$	$(\vec{V}_2; 0) = ((7, 457; 1, 481); 1)$
$\vec{V}_2 \bullet \vec{W}_1 = 1.15463 \times 10^{-14}$	$p \simeq 0,872$	$F \simeq (-6, 312; 1, 023)$

FIGURE 2.4 – Deux arcs d’une parabole modélisée à l’aide de deux CBRQs de points de contrôle massiques $(P_0; 1)$, $(P_1; 1)$ et $(P_2; 1)$ d’une part et $(Q_0; 1)$, $(\vec{W}_1; 0)$ et $(\vec{V}_2; 0)$ d’autre part. _____

2.2.3 Cas de l'ellipse

Les poids vérifient la condition : . Sans perte de généralités, nous nous plaçons dans le cas $\omega_0 = 1$ et $\omega_2 > 0$ et nous avons le lemme suivant :

Lemme 3 :

Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle pondérés $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ avec $\omega_1 \leq 0$.
Soit h définie par :

$$\begin{aligned} h: \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\longmapsto \frac{u}{-(1-u) + u} \end{aligned} \quad (2.33)$$

et nous devons distinguer deux cas.

- si $\omega_1 < 0$, alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(P_0; 1)$, $(P_1; -\omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ et :

$$\overline{RQBC}\{(P_0; 1); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\} = \overline{RQBC}\{(P_0; 1); (P_1; -\omega_1); (P_2; \omega_2)\}$$

- si $\omega_1 = 0$, alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(P_0; 1)$, $(-\vec{P}_1; 0)$ et $(P_2; \omega_2)$ et :

$$\overline{RQBC}\{(P_0; 1); (\vec{P}_1; 0); (P_2; \omega_2)\} = \overline{RQBC}\{(P_0; 1); (-\vec{P}_1; 0); (P_2; \omega_2)\}$$

Démonstration :

■

Nous pouvons énoncer :

Théorème 11 :

Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$ avec $\omega_1 > 0$.
Soit r le réel défini par :

$$r = -\frac{1}{\omega_1}$$

Soit h définie par :

$$\begin{aligned} h: \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\longmapsto \frac{r u}{(1-u) + (1+r) u} \end{aligned} \quad (2.34)$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(P_0; 1)$, $(\vec{U}_1; 0)$ et $(P_3; \varpi_3)$ avec :

$$\begin{cases} (\vec{U}_1; 0) &= (\overline{P_1 P_0}; 0) \\ (P_3; \varpi_3) &= \left(\text{bar} \left\{ (P_0; 1); (P_1; -2) \left(P_2; \frac{\omega_2}{\omega_1^2} \right) \right\}; -1 + \frac{\omega_2}{\omega_1^2} \right) \end{cases} \quad (2.35)$$

Alors :

$$\overline{RQBC}\{(P_0; 1); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\} = \overline{RQBC}\{(P_0; 1); (\vec{U}_1; 0); (P_3; \varpi_3)\}$$

Démonstration :

■

Nous pouvons énoncer :

Théorème 12 :

Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle pondérés $(P_0; 1)$, $(\vec{U}_1; 0)$ et $(P_3; \omega_3)$ avec $\omega_3 > 0$.

Soit h définie par :

$$\begin{aligned} h: \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\longmapsto \frac{u}{-\sqrt{\omega_3}(1-u) + u} \end{aligned} \quad (2.36)$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(P_0; 1)$, $(\vec{V}_1; 0)$ et $(P_3; 1)$ avec :

$$\vec{V}_1 = -\frac{1}{\sqrt{\omega_3}} \vec{U}_1 \quad (2.37)$$

Alors :

$$\overline{RQBC} \{(P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\} = \overline{RQBC} \{(P_0; 1); (\vec{V}_1; 0); (P_3; 1)\}$$

Démonstration :

■

Si nous avons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_0 P_3} \bullet \vec{V}_1 &= 0 \\ P_0 P_3^2 &= 4 \vec{V}_1^2 \end{cases}$$

alors la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(P_0; 1)$, $(\vec{V}_1; 0)$ et $(P_3; 1)$ est un arc de cercle, théorème 5. Dans la suite de ce paragraphe, nous excluons ce cas particulier d'ellipses.

Nous pouvons énoncer :

Théorème 13 :

Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle pondérés $(P_0; 1)$, $(\vec{V}_1; 0)$ et $(P_3; 1)$.

Soit k_1 et k_2 les nombres définis par :

$$\begin{cases} k_1 &= \overrightarrow{P_0 P_3} \bullet \vec{V}_1 \\ k_2 &= \vec{V}_1^2 - \frac{1}{4} P_0 P_3^2 \end{cases} \quad (2.38)$$

Si $k_2 = 0$, nous posons $\theta = \frac{\pi}{8}$, sinon, nous posons :

$$\theta = \frac{1}{4} \arctan \left(\frac{k_1}{k_2} \right)$$

Soit $P_4 = \text{bar} \left\{ (P_0; \cos^2(\theta)); (P_3; \sin^2(\theta)) \right\}$ et $P_5 = \text{bar} \left\{ (P_3; \cos^2(\theta)); (P_0; \sin^2(\theta)) \right\}$.

Soit h définie par :

$$\begin{aligned} h: \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\longmapsto \frac{\sin(\theta) (1-u) + \cos(\theta) u}{(\cos(\theta) + \sin(\theta)) (1-u) + (\cos(\theta) - \sin(\theta)) u} \end{aligned} \quad (2.39)$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(Q_0; 1)$, $(\vec{W}_1; 0)$ et $(Q_2; 1)$ avec :

$$\begin{cases} (Q_0; 1) &= \left(\mathcal{T}_{\sin(2\theta) \vec{V}_1} (P_4); 1 \right) \\ (\vec{W}_1; 0) &= \left(\frac{\sin(2\theta)}{2} \overrightarrow{P_0 P_3} + \cos(2\theta) \vec{V}_1; 0 \right) \\ (Q_2; 1) &= \left(\mathcal{T}_{-\sin(2\theta) \vec{V}_1} (P_5); 1 \right) \end{cases} \quad (2.40)$$

Alors :

$$\overline{RQBC \{(P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}} = \overline{RQBC \{(Q_0; 1); (\vec{W}_1; 0); (Q_2; 1)\}}$$

Démonstration :

■

Notons que la condition $k_2 = 0$ de la formule (2.38) est équivalente à :

$$\|\vec{V}_1\| = \frac{1}{2} P_0 P_3 = O_0 P_0 = O_0 P_3$$

où O_0 , milieu du segment $[P_0 P_3]$, est le centre de l'ellipse. De plus, si $k_2 = 0$ alors $k_1 \neq 0$ puisque l'ellipse n'est pas un cercle. Montrons le lemme :

Lemme 4 :

Considérons les courbes $RQBC \{(P_0; 1); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}$ et $RQBC \{(Q_0; 1); (\vec{W}_1; 0); (Q_2; 1)\}$, cette dernière courbe étant obtenue en utilisant les théorèmes 11, 12 puis 13. Alors nous avons :

$$\overrightarrow{Q_0 Q_2} \bullet \vec{W}_1 = 0$$

Démonstration :

Une démonstration analytique en utilisant un logiciel de calcul formel est trivial.

■

Il reste à déterminer les éléments caractéristiques de l'ellipse et nous pouvons énoncer :

Théorème 14 *Eléments caractéristiques de l'ellipse*

Considérons les courbes $RQBC \{(P_0; 1); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}$ et $RQBC \{(Q_0; 1); (\vec{W}_1; 0); (Q_2; 1)\}$, cette dernière courbe étant obtenue en utilisant les théorèmes 11, 12 puis 13. Alors l'ellipse :

$$\overline{RQBC \{(Q_0; 1); (\vec{W}_1; 0); (Q_2; 1)\}}$$

vérifie les conditions :

$$\begin{cases} k_1 &= \overrightarrow{Q_0 Q_2} \bullet \vec{W}_1 &= 0 \\ k_2 &= \vec{W}_1^2 - \frac{1}{4} Q_0 Q_2^2 &\neq 0 \end{cases}$$

Distinguons deux cas :

• $k_2 < 0$. Nous posons :

$$\vec{i} = \frac{1}{a} \frac{1}{2} \overrightarrow{Q_0 Q_2} \quad \text{avec} \quad a = \left\| \frac{1}{2} \overrightarrow{Q_0 Q_2} \right\|, \quad \vec{j} = \frac{1}{b} \vec{W}_1 \quad \text{avec} \quad b = \|\vec{W}_1\|$$

• $k_2 > 0$. Nous posons :

$$\vec{i} = \frac{1}{a} \vec{W}_1 \quad \text{avec} \quad a = \|\vec{W}_1\|, \quad \vec{j} = \frac{1}{b} \frac{1}{2} \overrightarrow{Q_0 Q_2} \quad \text{avec} \quad b = \left\| \frac{1}{2} \overrightarrow{Q_0 Q_2} \right\|$$

Soit $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. La CBRQ est l'ellipse :

★ de centre Ω_0 , milieu du segment $[Q_0 Q_2]$, et nous avons :

$$(\Omega_0; 1) = \left(Q_0; \frac{1}{2} \right) \boxplus \left(Q_2; \frac{1}{2} \right)$$

- ★ d'axe focal $\Delta = (\Omega_0; \vec{i})$,
- ★ d'axe non focal $\Delta' = (\Omega_0; \vec{j})$
- ★ de sommets $A(a; 0)$ et $A'(-a; 0)$, situés sur l'axe focal,
- ★ de sommets $B(0; b)$ et $B'(0; -b)$, situés sur l'axe non focal,
- ★ de foyers $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$,
- ★ de directrices \mathcal{D} et \mathcal{D}' d'équations respectives $X = \frac{a^2}{c}$ et $X = -\frac{a^2}{c}$,
- ★ d'excentricité $e = \frac{c}{a}$,
- ★ dont une équation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) &= a \cos t \\ y(t) &= b \sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.41)$$

Démonstration :

- si $k_2 < 0$,

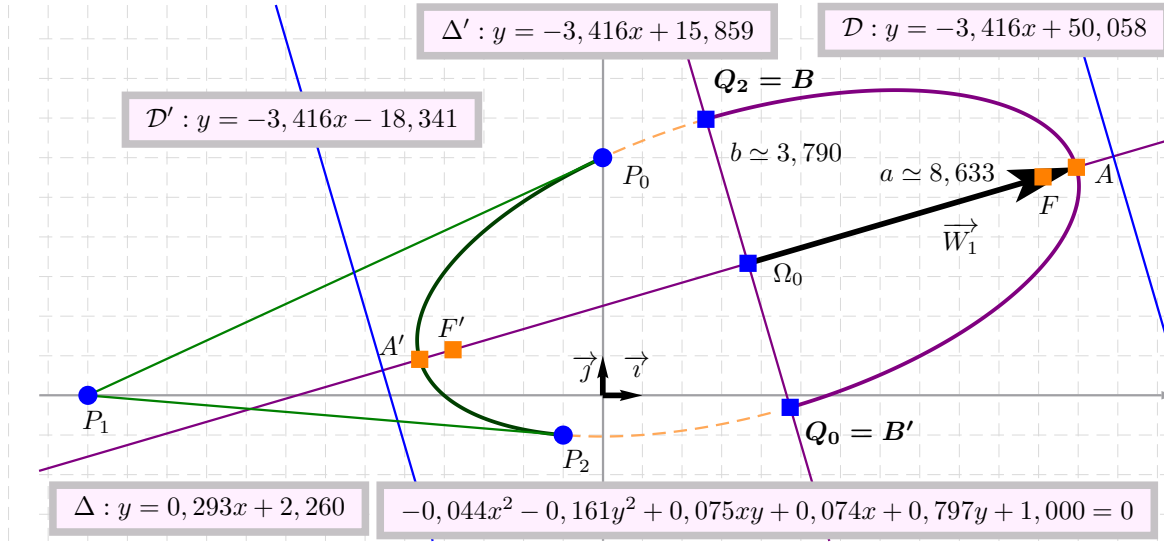
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =$$

- si $k_2 > 0$,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =$$

■

La figure 2.5 montre deux arcs d'une ellipse modélisée à l'aide de deux CBRQs de points de contrôle pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \frac{1}{2})$ et $(P_2; 1)$ d'une part et $(Q_0; 1)$, $(\vec{W}_1; 0)$ et $(Q_2; 1)$ d'autre part. Cette dernière nous permet de déterminer les paramètres de l'ellipse en utilisant le théorème 14.



$(P_0; \omega_0) = ((0; 6); 1)$	$(P_1; \omega_1) = \left((-13; 0); \frac{1}{2}\right)$	$(P_2; \omega_2) = ((-1; -1); 1)$
$(Q_0; \varpi_0) = ((4, 731; -0, 304); 1)$	$(\vec{W}_1; 0) = ((8, 285; 2, 425); 0)$	$(Q_2; \varpi_2) = ((2, 602; 6, 970); 1)$
$\overrightarrow{Q_0 Q_2} \bullet \vec{W}_1 = -3, 19744 \times 10^{-14}$	$\theta \simeq 0, 163309$	$\Omega_0 \simeq (3, 667; 3, 333)$
$\vec{W}_1^2 - \frac{1}{4} Q_0 Q_2^2 \simeq 60, 16443$	$B_0 \simeq (11, 952; 5, 759)$	$B_2 \simeq (-4, 619; 0, 908)$
$a = \ \vec{W}_1\ \simeq 8, 633$	$b \simeq 3, 790$	$\ \overrightarrow{Q_0 Q_2}\ \simeq 7, 580$
$F' = (-3, 777; 1, 154)$		$F = (11, 110; 5, 513)$

FIGURE 2.5 – Deux arcs d’une ellipse modélisée à l’aide de deux CBRQs de points de contrôle massiques $(P_0; 1)$, $(P_1; \frac{1}{2})$ et $(P_2; 1)$ d’une part et $(Q_0; 1)$, $(\vec{W}_1; 0)$ et $(Q_2; 1)$ d’autre part. _____

2.2.4 Cas de l'hyperbole

Nous supposons que $\omega_0 = 1$. Les poids vérifient la condition :
Nous pouvons énoncer :

Théorème 15 :

Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$. Nous devons distinguer deux cas.

- Si $1 - 2\omega_1 + \omega_2 \neq 0$, l'équation (1.26) est de degré 2 et admet deux racines t_1 et t_2 définies par :

$$t_1 = \frac{1 - \omega_1 + \sqrt{\omega_1^2 - \omega_2}}{1 - 2\omega_1 + \omega_2} \quad t_2 = \frac{1 - \omega_1 - \sqrt{\omega_1^2 - \omega_2}}{1 - 2\omega_1 + \omega_2}$$

Soit h définie par :

$$\begin{aligned} h : \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\longmapsto t_1(1 - u) + t_2 u \end{aligned} \quad (2.42)$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(Q_0; \varpi_0)$, $(Q_1; \varpi_1)$ et $(Q_2; \varpi_2)$ avec :

$$\left\{ \begin{aligned} (\vec{U}_0; 0) &= (B_0(t_1) \overrightarrow{\Omega P_0} + \omega_1 B_1(t_1) \overrightarrow{\Omega P_1} + \omega_2 B_2(t_1) \overrightarrow{\Omega P_2}; 0) \\ (Q_1; \varpi_1) &= \left(\text{bar} \{ (P_0; (1 - t_1)(1 - t_2)); (P_1; \omega_1(t_2 - 2t_1 t_2 + t_1)); (P_2; t_1 t_2 \omega_2) \}; \frac{2(\omega_2 - \omega_1^2)}{(1 - 2\omega_1 + \omega_2)} \right) \\ (\vec{U}_2; 0) &= (B_0(t_2) \overrightarrow{\Omega P_0} + \omega_1 B_1(t_2) \overrightarrow{\Omega P_1} + \omega_2 B_2(t_2) \overrightarrow{\Omega P_2}; 0) \end{aligned} \right. \quad (2.43)$$

Alors :

$$\overline{RQBC \{ (P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2) \}} = \overline{RQBC \{ (\vec{U}_0; 0); (Q_1; \varpi_1); (\vec{U}_2; 0) \}}$$

- Si $1 - 2\omega_1 + \omega_2 = 0$, l'équation (1.26) est de degré 1 et admet une racine :

$$t_0 = \frac{1}{2(1 - \omega_1)}$$

Soit h définie par :

$$\begin{aligned} h : \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\longmapsto \frac{t_0(1 - u) + u}{(1 - u)} \end{aligned} \quad (2.44)$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(Q_0; \varpi_0)$, $(Q_1; \varpi_1)$ et $(Q_2; \varpi_2)$ avec :

$$\left\{ \begin{aligned} (\vec{U}_0; 0) &= (B_0(t_0) \overrightarrow{\Omega P_0} + \omega_1 B_1(t_0) \overrightarrow{\Omega P_1} + \omega_2 B_2(t_0) \overrightarrow{\Omega P_2}; 0) \\ (Q_1; \varpi_1) &= (\text{bar} \{ (P_0; t_0 - 1); (P_1; \omega_1(1 - 2t_0)); (P_2; t_0 \omega_2) \}; \omega_1 - 1) \\ (\vec{U}_2; 0) &= (\overrightarrow{\Omega P_0} - 2\omega_1 \overrightarrow{\Omega P_1} + \omega_2 \overrightarrow{\Omega P_2}; 0) \end{aligned} \right. \quad (2.45)$$

Alors :

$$\overline{RQBC \{ (P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2) \}} = \overline{RQBC \{ (\vec{U}_0; 0); (Q_1; \varpi_1); (\vec{U}_2; 0) \}}$$

Démonstration :

- Si $1 - 2\omega_1 + \omega_2 \neq 0$

Simplifions le calcul de ϖ_1 afin de montrer qu'il n'est pas nul.

- Si $1 - 2\omega_1 + \omega_2 = 0$

■

Corollaire 2 :

Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega_1)$ et $(P_2; \omega_2)$. Nous devons distinguer deux cas.

- Si $1 - 2\omega_1 + \omega_2 \neq 0$, alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(Q_0; \varpi_0)$, $(Q_1; \varpi_1)$ et $(Q_2; \varpi_2)$ avec :

$$\begin{cases} (\vec{V}_0; 0) &= \left(\frac{1 - 2\omega_1 + \omega_2}{2(\omega_2 - \omega_1^2)} \vec{U}_0; 0 \right) \\ (\vec{V}_2; 0) &= \left(\frac{1 - 2\omega_1 + \omega_2}{2(\omega_2 - \omega_1^2)} \vec{U}_2; 0 \right) \end{cases} \quad (2.46)$$

Alors :

$$\overline{RQBC \{(P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}} = \overline{RQBC \{(\vec{V}_0; 0); (Q_1; 1); (\vec{V}_2; 0)\}}$$

- Si $1 - 2\omega_1 + \omega_2 = 0$, posons :

$$\begin{cases} (\vec{V}_0; 0) &= \left(\frac{1}{\omega_1 - 1} \vec{U}_0; 0 \right) \\ (\vec{V}_2; 0) &= \left(\frac{1}{\omega_1 - 1} \vec{U}_2; 0 \right) \end{cases} \quad (2.47)$$

et nous obtenons :

$$\overline{RQBC \{(P_0; \omega_0); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}} = \overline{RQBC \{(\vec{V}_0; 0); (Q_1; 1); (\vec{V}_2; 0)\}}$$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer la formule (2.13) du lemme 2 aux résultats obtenus dans le théorème 15.

■

Nous pouvons énoncer :

Théorème 16 :

Soit une courbe de Bézier γ de points de contrôle pondérés $(\vec{V}_0; 0)$, $(Q_1; 1)$ et $(\vec{V}_2; 0)$.

Soit r défini par :

$$r = \sqrt[4]{\frac{\|\vec{V}_0\|}{\|\vec{V}_2\|}}$$

Soit h définie par :

$$\begin{aligned} h : \overline{\mathbb{R}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\longmapsto \frac{r u}{\frac{1}{r} (1 - u) + r u} \end{aligned} \quad (2.48)$$

alors $\gamma \circ h$ est la courbe de Bézier de points de contrôle massiques $(Q_0; \varpi_0)$, $(Q_1; 1)$ et $(Q_2; \varpi_2)$ avec :

$$\begin{cases} (Q_0; \varpi_0) = (\vec{W}_0; 0) &= \left(\sqrt{\frac{\|\vec{V}_2\|}{\|\vec{V}_0\|}} \vec{V}_0; 0 \right) \\ (Q_2; \varpi_0) = (\vec{W}_2; 0) &= \left(\sqrt{\frac{\|\vec{V}_0\|}{\|\vec{V}_2\|}} \vec{V}_2; 0 \right) \end{cases} \quad (2.49)$$

Alors :

$$\overline{RQBC \{(\vec{V}_0; 0); (Q_1; 1); (\vec{V}_2; 0)\}} = \overline{RQBC \{(\vec{W}_0; 0); (Q_1; 1); (\vec{W}_2; 0)\}}$$

et :

$$\|\vec{W}_0\| = \|\vec{W}_2\| \quad (2.50)$$

Démonstration :

■

Il reste à déterminer les éléments caractéristiques de l'hyperbole et nous pouvons énoncer :

Théorème 17 *Eléments caractéristiques de l'Hyperbole*

Considérons les courbes $RQBC \{(P_0; 1); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}$ et $RQBC \{(\vec{W}_0; 0); (Q_1; 1); (\vec{W}_2; 0)\}$, cette dernière courbe étant obtenue en utilisant les théorèmes 15 puis 16 et nous avons la condition de la formule (2.50).

Posons :

$$\vec{i} = \frac{1}{a} \frac{1}{2} (\vec{W}_0 + \vec{W}_2) \quad \text{avec} \quad a = \frac{\|\vec{W}_0 + \vec{W}_2\|}{2} \quad (2.51)$$

et :

$$\vec{j} = \frac{1}{b} \frac{1}{2} (\vec{W}_0 - \vec{W}_2) \quad \text{avec} \quad b = \frac{\|\vec{W}_0 - \vec{W}_2\|}{2} \quad (2.52)$$

Soit $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Alors la courbe :

$$\overline{RQBC \{(P_0; 1); (P_1; \omega_1); (P_2; \omega_2)\}} = \overline{RQBC \{(\vec{W}_0; 0); (Q_1; 1); (\vec{W}_2; 0)\}}$$

est l'hyperbole :

- ★ de centre Q_1 ,
- ★ d'équation implicite suivante :

$$x(u) \times y(u) = \frac{\|\vec{W}_0\|^2}{4}$$

dans le repère orthonormé $\left(Q_1; \frac{1}{\|\vec{W}_0\|} \vec{W}_0; \frac{1}{\|\vec{W}_2\|} \vec{W}_2\right)$,

- ★ d'asymptotes les droites Δ_0 et Δ_2 passant par Q_1 et de vecteur directeurs respectifs \vec{W}_0 et \vec{W}_2 ,
- ★ d'équation implicite suivante :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dans le repère orthonormé $(Q_1; \vec{i}; \vec{j})$,

- ★ d'axe focal $\Delta = (Q_1; \vec{i})$,
- ★ d'axe non focal $\Delta' = (Q_1; \vec{j})$
- ★ de sommets $A(a; 0)$ et $A'(-a; 0)$, dans le repère $(Q_1; \vec{i}; \vec{j})$, situés sur l'axe focal,
- ★ de foyers $F(c; 0)$ et $F'(-c; 0)$, dans le repère $(Q_1; \vec{i}; \vec{j})$,

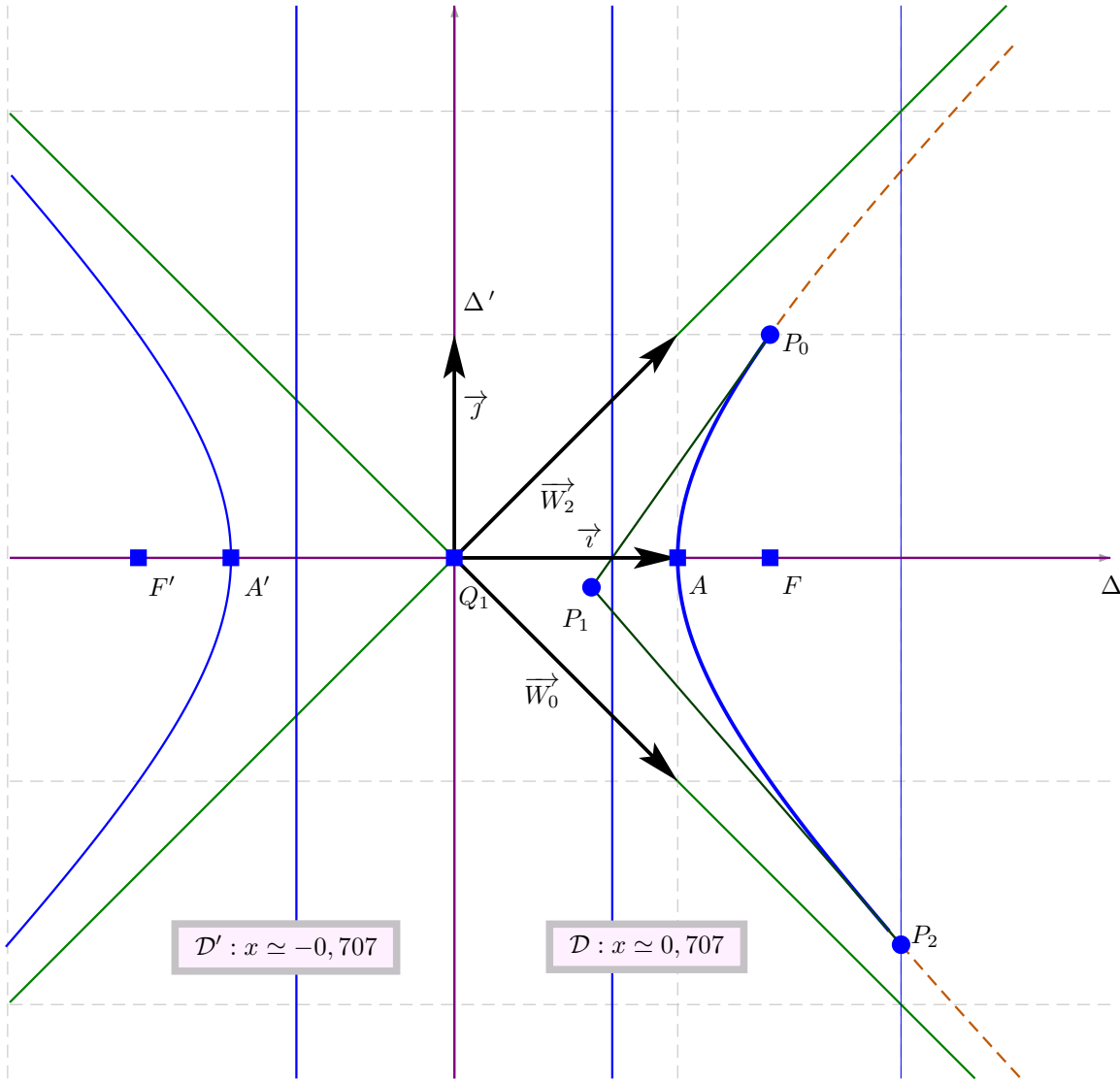
- ★ de directrices \mathcal{D} et \mathcal{D}' d'équations respectives $X = \frac{a^2}{c}$ et $X = -\frac{a^2}{c}$, dans le repère $(Q_1; \vec{i}; \vec{j})$,
- ★ d'excentricité $e = \frac{c}{a}$,
- ★ dont une équation paramétrique, dans le repère $(Q_1; \vec{i}; \vec{j})$, est :

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{a}{\cos(t)} \\ y(t) &= b \tan(t) \end{cases}, \quad t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[\quad (2.53)$$

Démonstration :

■

La figure 2.6 montre deux arcs d'une hyperbole modélisée à l'aide de deux CBRQs de points de contrôle pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \frac{5}{3})$ et $(P_2; 1)$ d'une part et $(\vec{W}_0; 0)$, $(Q_1; 1)$, et $(\vec{W}_2; 0)$ d'autre part. Cette dernière nous permet de déterminer les paramètres de l'ellipse en utilisant le théorème 17. Nous avons : $(P_1; \omega_1) \simeq ((0, 614; -0.132); 1, 667)$.



$(P_0; \omega_0) = \left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}; 1 \right)$	$(P_1; \omega_1) = \left(\begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) (3 + \sqrt{3}) \\ 1 + (1 + \sqrt{3}) (1 - \sqrt{2}) \end{pmatrix}; \frac{5}{3} \right)$	$(P_2; \omega_2) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}; 1 \right)$
$(\vec{W}_0; 0) \simeq ((1.001; -1.001); 0)$	$(Q_1; 1) \simeq ((-0.001; 0.000); 0)$	$(\vec{W}_2; 0) \simeq ((1.001; 1.001); 0)$
$a \simeq 1.00095$	$b \simeq 3,790$	$e \simeq 1,414$

FIGURE 2.6 – Deux arcs d’une elliphyperbole modélisée à l’aide de deux CBRQs de points de contrôle massiques $(P_0; 1)$, $(P_1; \frac{5}{3})$ et $(P_2; 1)$ d’une part et $(\vec{W}_0; 0)$, $(Q_1; 1)$ et $(\vec{W}_2; 0)$ d’autre part. _____

Chapitre 3

Construction itératives d'arcs de cercles

3.1 Préambule

3.1.1 Construction itérative, fractales et auto-similarité

Un I.F.S. (Iterated Function Systems) est basé sur le théorème du point fixe, dans un espace métrique complet, appliqué sur les compacts en utilisant un opérateur appelé opérateur de Hutchinson. Etant donné un espace métrique (E, d) , un I.F.S. est un ensemble fini d'opérateurs $\{T_i\}_{i \in [0; N-1]}$ contractants sur E pour la distance d .

Pour tout I.F.S., il existe un unique compact \mathcal{A} tel que :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=0}^{N-1} T_i(\mathcal{A}) \quad (3.1)$$

où \mathcal{A} est appelé attracteur de l'I.F.S. et la formule (3.1) traduit la propriété d'auto-similarité de \mathcal{A} .

Les G.I.F.S. (Generalized - IFS) décrivent des processus de construction itératifs non-stationnaires et engendrent une variété de formes plus grande. Etant donné un espace métrique (E, d) , à partir d'une famille infinie d'ensembles d'opérateurs contractants $\{F^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ avec :

$$F^j = \{T_i^j\}_{i=1, \dots, n_j-1}$$

(où n_j désigne un entier strictement supérieur à 1), nous définissons les opérateurs W^i par :

$$W^i(K) = \bigcup_{j=0}^{N_j-1} T_j^{(i)} K$$

pour tout compact K de E . L'attracteur associé au G.I.F.S. est :

$$\mathcal{A} = \lim_{j \rightarrow \infty} W^j \circ \dots \circ W^2 \circ W^1(K)$$

où K est un compact non-vidé quelconque de E .

3.1.2 Construction itérative d'arcs de paraboles

Nous allons montrer, comment à partir de l'algorithme 1.1, il est possible de réaliser une modélisation fractale d'un arc de parabole en utilisant seulement des triangles et le théorème de la droite des milieux.

En prenant la valeur de $\frac{1}{2}$ dans l'algorithme 1.1, les points $N_1(\frac{1}{2})$ et $N_2(\frac{1}{2})$ sont les milieux respectifs des segments $[P_0P_1]$ et $[P_1P_2]$ tandis que le point $N_3(\frac{1}{2})$ est le milieu du segment $[N_1(\frac{1}{2}) N_2(\frac{1}{2})]$ et, d'après le théorème de la droite des milieux appliqué dans le triangle $M_0M_1M_2$, **la droite $(N_1(\frac{1}{2}) N_2(\frac{1}{2}))$ est parallèle à la droite (P_0P_2)** . Si nous voulons ré-itérer ce processus, nous devons montrer que les conditions initiales sont vérifiées pour les deux arcs de parabole d'extrémités P_0 et $N_3(\frac{1}{2})$ d'une part et $N_3(\frac{1}{2})$ et P_2 d'autre part. Ceci a été démontré dans l'exercice 4. **L'arc de parabole de points de contrôle P_0, P_1 et P_2 est découpé en deux arcs de parabole de points de contrôle respectifs $P_0, N_1(\frac{1}{2})$ et $N_3(\frac{1}{2})$ d'une part, et $P_2, N_2(\frac{1}{2})$ et $N_3(\frac{1}{2})$ d'autre part.** En ré-itérant ce processus sur les points $P_0, N_1(\frac{1}{2})$ et $N_3(\frac{1}{2})$ d'une part,

Algorithme 3.1 : Construction itérative d'un arc de parabole.

Entrée : Soit P_0 , P_1 et P_2 trois points non alignés de \mathcal{P} et un entier strictement positif n .

Procédure FractPara(P_0, N_1, N_3, n)

1. Soit N_1 le milieu du segment $[P_0P_1]$.
2. Soit N_2 le milieu du segment $[P_2P_1]$.
3. Soit N_3 le milieu du segment $[N_1N_2]$.
4. Si $n > 0$ alors **FractPara**($P_0, N_1, N_3, n-1$) et **FractPara**($N_3, N_2, P_2, n-1$) fin si.

Sortie : Une ligne brisée approchant un arc de parabole défini par une courbe de Bézier polynômiale de points de contrôle P_0 , P_1 et P_2 .

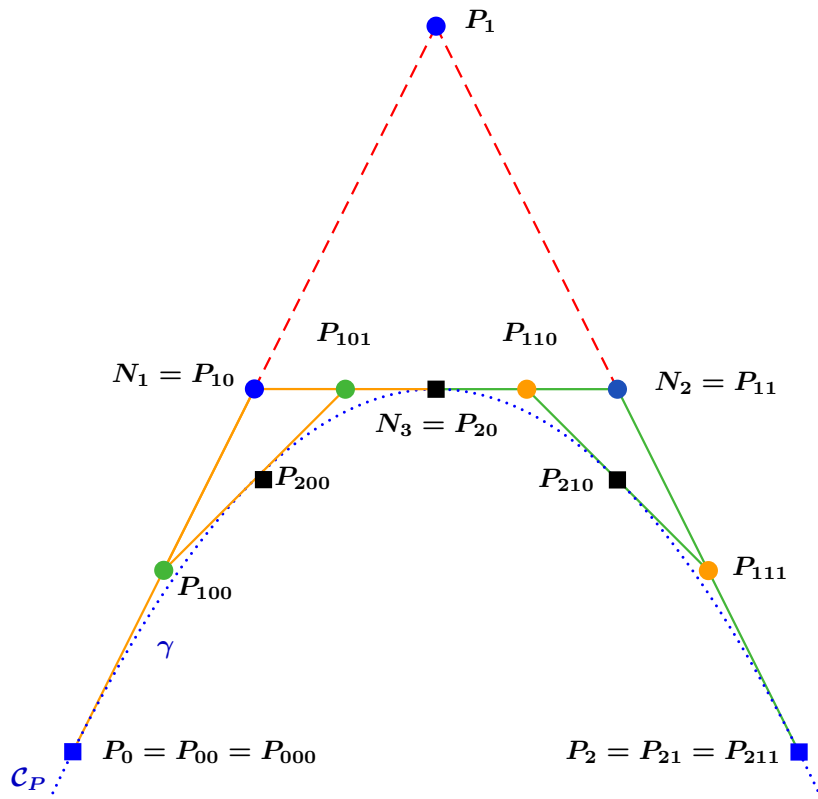


FIGURE 3.1 – Construction itérative d'un arc de parabole d'extrémités P_0 et P_2 et ayant pour tangentes les droites (P_0P_1) et (P_1P_2) .

$N_3 \left(\frac{1}{2}\right)$, $N_2 \left(\frac{1}{2}\right)$ et P_2 d'autre part, il est aussi possible de construire deux nouveaux points de la parabole, un point appartenant à l'arc d'extrémités P_0 et $N_3 \left(\frac{1}{2}\right)$, l'autre appartenant à l'arc d'extrémités $N_3 \left(\frac{1}{2}\right)$ et P_2 . Ainsi, il est possible d'obtenir une construction fractale d'un arc de parabole, algorithme 3.1.

Notons que l'algorithme 3.1 ne nécessite que la construction du milieu d'un segment, il est ainsi possible de construire les points d'un arc de parabole à la règle et au compas.

L'algorithme 3.1 peut être modélisé par un I.F.S. linéaire composé de deux transformations contractantes T_0 et T_1 définis par :

$$T_0 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ \text{bar} \left\{ \left(P_0; \frac{1}{2}\right); \left(P_1; \frac{1}{2}\right) \right\} \\ \text{bar} \left\{ \left(P_0; \frac{1}{4}\right); \left(P_1; \frac{1}{2}\right); \left(P_2; \frac{1}{4}\right) \right\} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$T_1 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{bar} \left\{ \left(P_0; \frac{1}{4}\right); \left(P_1; \frac{1}{2}\right); \left(P_2; \frac{1}{4}\right) \right\} \\ \text{bar} \left\{ \left(P_1; \frac{1}{2}\right); \left(P_2; \frac{1}{2}\right) \right\} \\ P_2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

c'est-à-dire que si $P_{i_0 \dots i_{n-1}}$, $(i_0; \dots; i_{n-1}) \in \{0; 1\}^n$, est un point de \mathcal{P} , alors son image, par la transformation contractante T_{i_n} , $i_n \in \{0; 1\}$, est noté $P_{i_0 \dots i_{n-1} i_n}$.

La figure 3.1 déroule l'algorithme 3.1 dans une profondeur de 2. En entrée, nous avons les extrémités P_0 et P_2 de l'arc de parabole γ et le point de contrôle des tangentes P_1 . La première étape de cet algorithme consiste à construire le point N_1 (resp. N_2), milieu du segment $[P_0 P_1]$ (resp. $[P_2 P_1]$). Le point N_3 , milieu du segment $[N_1 N_2]$ est ensuite construit. En prenant la méthode d'adressage usuelle en théorie des I.F.S., que nous garderons lors du déroulement des différents algorithmes, nous avons :

$$\begin{cases} N_1 &= P_{10} = T_0(P_0) \\ N_2 &= P_{11} = T_1(P_2) \\ N_3 &= P_{20} = T_0(P_2) \end{cases}$$

ce qui se traduit par :

$$T_0 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ N_1 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{00} \\ P_{10} \\ P_{20} \end{pmatrix}$$

et :

$$T_1 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_3 \\ N_2 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{20} \\ P_{11} \\ P_{21} \end{pmatrix}$$

Naturellement, nous avons $P_0 = P_{00} = P_{000}$ et $P_2 = P_{21} = P_{211}$. La première partie de la seconde étape est de construire les points P_{100} et P_{101} , milieux respectifs des segments $[P_0 P_{10}]$ et $[P_{10} P_{20}]$ puis de construire le point P_{200} , milieu du segment $[P_{100} P_{101}]$. La seconde partie de la seconde étape est de construire les points P_{110} et P_{111} , milieux respectifs des segments $[P_{20} P_{11}]$ et $[P_{11} P_2]$ puis de construire le point P_{210} , milieu du segment $[P_{110} P_{111}]$. Les deux points P_{200} et P_{210} sont deux autres points de l'arc de parabole γ . Nous avons :

$$\begin{aligned} T_0^2 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_{000} \\ P_{100} \\ P_{200} \end{pmatrix} & T_1 \circ T_0 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_{200} \\ P_{101} \\ P_{201} \end{pmatrix} \\ T_0 \circ T_1 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_{010} \\ P_{110} \\ P_{210} \end{pmatrix} & T_1^2 \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_{210} \\ P_{111} \\ P_{211} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en remarquant :

$$P_{20} = P_{01} = P_{201} = P_{010}$$

3.2 Cas de cercles euclidiens

L'algorithme 3.2 permet, en s'inspirant de l'algorithme de De Casteljau (algorithme 1.1) appliqué à un arc de parabole, de construire de façon itérative un arc de cercle dans un plan affine euclidien, comme dans la figure 3.2. Notons qu'à chaque étape de l'algorithme 3.2, le point construit N_3 appartient à la médiatrice du segment $[P_0P_2]$ ce qui permet d'obtenir une construction régulière : le triangle est remplacé par deux triangles ayant pour côté commun une droite qui est médiatrice, médiane, hauteur et bissectrice dans le triangle initial.

Algorithme 3.2 : Construction itérative d'un arc de cercle dans un plan affine euclidien.

Entrée : Soit P_0, P_1 et P_2 trois points non alignés de \mathcal{P} tels que $P_0P_1 = P_2P_1$ et un entier strictement positif n .

1. Calcul du poids :

$$\omega = \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \bullet \overrightarrow{P_0P_2}}{\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \bullet \overrightarrow{P_0P_2}}{\sqrt{\overrightarrow{P_0P_1}^2 \times \overrightarrow{P_0P_2}^2}} \quad (3.4)$$

2. Procédure itérative **FractCercle**(P_0, P_1, P_2, ω, n)

- (a) Soit $N_1 = \text{bar}\{(P_0; 1); (P_1; \omega)\}$.
- (b) Soit $N_2 = \text{bar}\{(P_2; 1); (P_1; \omega)\}$.
- (c) Soit N_3 le milieu du segment $[N_1N_2]$.
- (d) Actualisation du poids :

$$\omega = \sqrt{\frac{1 + \omega}{2}} \quad (3.5)$$

- (e) Si $n > 0$ alors **FractCercle**($P_0, N_1, N_3, \omega, n - 1$) et **FractCercle**($N_3, N_2, P_2, \omega, n - 1$) fin si.

Sortie : Une ligne brisée approchant un arc de cercle d'extrémités P_0 et P_2 et ayant pour tangentes les droites (P_0P_1) et (P_2P_1) .

La figure 3.2 montre les éléments de l'algorithme 3.2. Nous allons démontrer que cet algorithme construit bien des points de l'arc de cercle souhaité en deux étapes :

- (Etape 1) montrer que les triangles $P_0N_1N_3$ et $N_3N_2P_2$ sont isocèles en N_1 et N_2 ;
- (Etape 2) montrer que le nouveau calcul de ω est celui qui convient.

Etape 1.

Etape 2.

et nous pouvons énoncer :

Résultat 1 :

La courbe limite obtenue par l'algorithme 3.2 est le petit arc de cercle d'extrémités P_0 et P_2 .

L'algorithme 3.2 peut s'écrire formellement en s'inspirant de la théorie des I.F.S. à l'aide de deux applications T_0^{ce} et T_1^{ce} , de $\mathcal{P}^3 \times]-1; 1[$ dans lui-même, définies par :

$$T_0^{ce} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ \text{bar} \{(P_0; 1); (P_1; \omega)\} \\ \text{bar} \{(P_0; 1); (P_1; 2\omega); (P_2; 1)\} \\ \sqrt{\frac{1+\omega}{2}} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

et

$$T_1^{ce} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{bar} \{(P_0; 1); (P_1; 2\omega); (P_2; 1)\} \\ \text{bar} \{(P_1; \omega); (P_2; 1)\} \\ P_2 \\ \sqrt{\frac{1+\omega}{2}} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Remarquons que si nous prenons $\omega = -\cos \alpha$, la courbe limite obtenue par l'algorithme 3.2 est le grand arc de cercle de centre O_0 et de rayon O_0P_0 , d'extrémités P_0 et P_2 , figure 3.3.

la figure 3.4 permet d'obtenir une subdivision d'un cercle par deux lignes brisées.

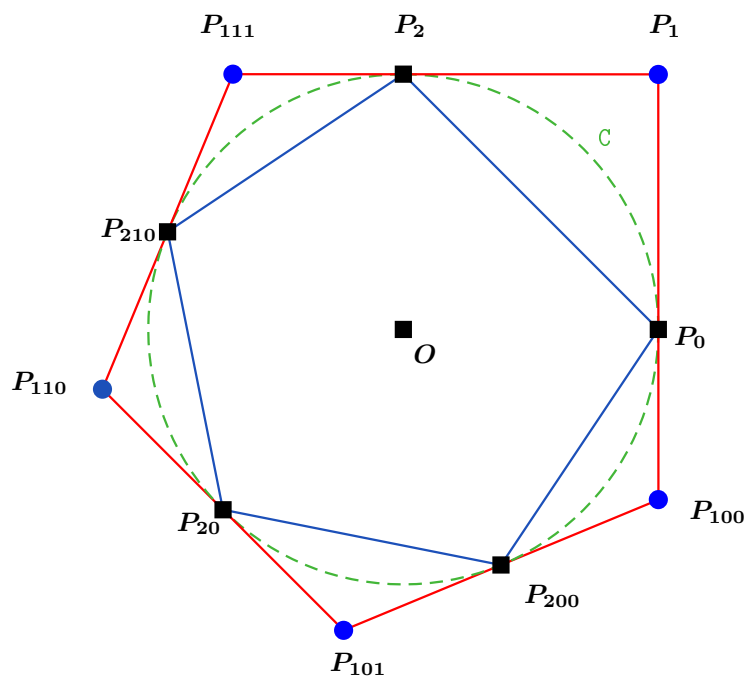


FIGURE 3.4 – Construction d'un cercle par deux lignes brisées par un I.F.S. non stationnaire : $P_0P_2P_{210}P_{20}P_{200}$ est celui des sommets appartenant au cercle, $P_1P_{111}P_{110}P_{101}P_{100}$ est celui des tangentes au cercle aux sommets du polygone précédent.

3.3 Subdivisions d'arcs de coniques à centre

Commençons par rappeler la définition d'un cercle :

Définition 7 : Cercle

Soit \mathcal{Q} une forme quadratique définie du plan $\vec{\mathcal{P}}$ et Ω un point du plan affine \mathcal{P} .
 \mathcal{C} est un cercle de centre Ω s'il existe un réel k tel que :

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{P} \mid \mathcal{Q}(\overrightarrow{\Omega M}) = k \right\} \quad (3.9)$$

Naturellement, si k est négatif, le rayon du cercle est un nombre imaginaire pur, sinon, le rayon est \sqrt{k} .
 Considérons l'ellipse E et l'hyperbole H d'équations respectives :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.10) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.11)$$

Nous supposons $a > b$ et l'axe focal des deux coniques est $(\Omega; \vec{i})$ et l'axe non focal est $(\Omega; \vec{j})$.

3.3.1 Choix de la forme quadratique adéquate

Soit $\vec{u}(x; y)$ un vecteur du plan $\vec{\mathcal{P}}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$. Dans le cas de l'ellipse (resp. hyperbole) dont l'équation est donnée par la formule (3.10) (resp. (3.11)), nous allons munir $\vec{\mathcal{P}}$ de la forme quadratique \mathcal{Q}_E (resp. \mathcal{Q}_H) afin d'obtenir l'équation d'un cercle unitaire de centre Ω . Nous avons ainsi :

$$\mathcal{Q}_E(\vec{u}) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (3.12) \qquad \mathcal{Q}_H(\vec{u}) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad (3.13)$$

La signature de la forme quadratique définie \mathcal{Q}_E (resp. \mathcal{Q}_H) est $(2; 0)$ (resp. $(1; 1)$). Lorsque les propriétés sont communes à l'hyperbole et à l'ellipse, la forme quadratique sera notée \mathcal{Q}_C et la forme bilinéaire symétrique associée sera notée \mathcal{L}_C . Remarquons que nous avons :

$$\mathcal{L}_C(\vec{i}; \vec{j}) = 0$$

et la base $(\vec{i}; \vec{j})$ est orthogonale pour la forme quadratique \mathcal{Q}_C . Nous avons :

$$\mathcal{Q}_E(\vec{i}) > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_E(\vec{j}) > 0$$

et

$$\mathcal{Q}_H(\vec{i}) > 0 \quad , \quad \mathcal{Q}_H(\vec{j}) < 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_H(a\vec{i} + b\vec{j}) = 0$$

et il est possible de distinguer trois types de vecteurs pour la forme quadratique \mathcal{Q}_H , tableau 3.1.

Type du vecteur \vec{v}	Espace	Temps	Lumière
	$\mathcal{Q}_H(\vec{v}) > 0$	$\mathcal{Q}_H(\vec{v}) < 0$	$\mathcal{Q}_H(\vec{v}) = 0$

TABLE 3.1 – Les trois types de vecteurs \vec{v} pour la forme quadratique \mathcal{Q}_H .

Dans le cas où les points extrémaux de l'arc de cercle sont sur la même partie connexe de \mathcal{C} , le principe est de transformer un triangle isocèle pour \mathcal{L}_C en deux triangles isocèles (pour \mathcal{L}_C). Cependant, lorsque le cercle n'est pas connexe, nous pouvons être obligés de passer par l'espace vectoriel et d'utiliser les points massiques.

Dans les deux cas, nous nous donnons deux points P_0 et P_2 , non symétriques par rapport au point Ω , et nous calculons le point P_1 comme intersection des tangentes au cercle \mathcal{C} en P_0 et P_2 .

3.3.2 Cas d'un arc de cercle borné

Dans un premier temps, nous allons donner l'algorithme 3.3 permettant de construire un arc de cercle dans le plan affine \mathcal{P} muni de la forme quadratique adéquate puis nous donnerons une méthode permettant de le linéariser ce qui permet alors une implémentation en utilisant des matrices. Notons que nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \left(N_1; \sqrt{\frac{1+\omega}{2}} \right) & = & \sqrt{\frac{1}{2(1+\omega)}} \square ((P_0; 1) \boxplus (P_1; \omega)) \\ \left(N_2; \sqrt{\frac{1+\omega}{2}} \right) & = & \sqrt{\frac{1}{2(1+\omega)}} \square ((P_2; 1) \boxplus (P_1; \omega)) \\ (N_3; 1) & = & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{1+\omega}} \square \left(\left(N_1; \sqrt{\frac{1+\omega}{2}} \right) \boxplus \left(N_2; \sqrt{\frac{1+\omega}{2}} \right) \right) \end{array} \right.$$

Notons qu'une modification possible serait de supprimer la condition 2 de l'algorithme 3.3 et d'ajouter, après le premier calcul de ω , le test suivant : si ω n'appartient pas à \mathbb{R} , alors nous devons utiliser l'algorithme 3.4.

Algorithme 3.3 : Construction itérative d'un arc de cercle \mathcal{C} dans un plan muni de la forme quadratique $\mathcal{Q}_{\mathcal{C}}$.

Entrée : Soit P_0 et P_2 deux points distincts de \mathcal{C} . Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Condition 1 : Ω n'est pas le milieu de $[P_0 P_2]$.

Condition 2 : les points P_0 et P_2 sont sur la même composante connexe :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{P_0 P_1}) \times \mathcal{Q}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{P_0 P_2}) > 0 \quad (3.14)$$

1. Détermination du point P_1 , intersection des tangentes à \mathcal{C} en P_0 et P_2 , par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{\Omega P_0}, \overrightarrow{P_0 P_1}) & = & 0 \\ \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{\Omega P_2}, \overrightarrow{P_2 P_1}) & = & 0 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

2. Calcul du poids ω :

$$\omega = \frac{|\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2})|}{\sqrt{\mathcal{Q}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{P_0 P_1}) \times \mathcal{Q}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{P_0 P_2})}} \quad (3.16)$$

3. Procédure itérative **FractCercle1**(P_0, P_1, P_2, ω, n)

- (a) Soit $N_1 = \mathbf{bar}\{(P_0; 1); (P_1; \omega)\}$.
- (b) Soit $N_2 = \mathbf{bar}\{(P_2; 1); (P_1; \omega)\}$.
- (c) Soit N_3 le milieu du segment $[N_1 N_2]$.
- (d) Actualisation de la valeur de ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\omega}{2}} \quad (3.17)$$

- (e) Si $n > 0$ alors **FractCercle1**($P_0, N_1, N_3, \omega, n-1$) et **FractCercle1**($N_3, N_2, P_2, \omega, n-1$) fin si.

Sortie : Une ligne brisée approchant un arc de cercle, de centre Ω , d'extrémités P_0 et P_2 et ayant pour tangentes $(P_0 P_1)$ et $(P_2 P_1)$.

Nous rappelons que pour tout point $M(x; y)$ de \mathcal{C} , nous avons :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{C}}(\overrightarrow{\Omega M}) = 1$$

Le calcul du point P_1 est aussi trivial puisque les tangentes en P_0 et P_2 sont \mathcal{L}_c -orthogonales aux rayons et il suffit de résoudre le système donné par la formule (3.15). De plus, nous avons l'égalité :

$$\mathcal{Q}_c(\overrightarrow{P_0P_1}) = \mathcal{Q}_c(\overrightarrow{P_2P_1})$$

ce qui traduit que le triangle $P_0P_1P_2$ est isocèle en P_1 pour la restriction à \mathcal{P} de la pseudo-métrique induite par la forme bilinéaire \mathcal{L}_c , figure 3.5.

Notons de plus que si I désigne le milieu du segment $[P_0P_2]$, alors la droite (IP_1) est la \mathcal{L}_c -médiatrice du triangle $P_0P_1P_2$ issue de P_1 car nous avons :

$$\mathcal{L}_c(\overrightarrow{IP_1}, \overrightarrow{P_0P_2}) = 0$$

Remarquons que dans le cas de l'ellipse \mathbf{E} , nous pouvons prendre la valeur opposée de celle de la formule (3.16) dans l'algorithme 3.3 : nous obtenons alors l'autre partie de la conique, figure 3.6.

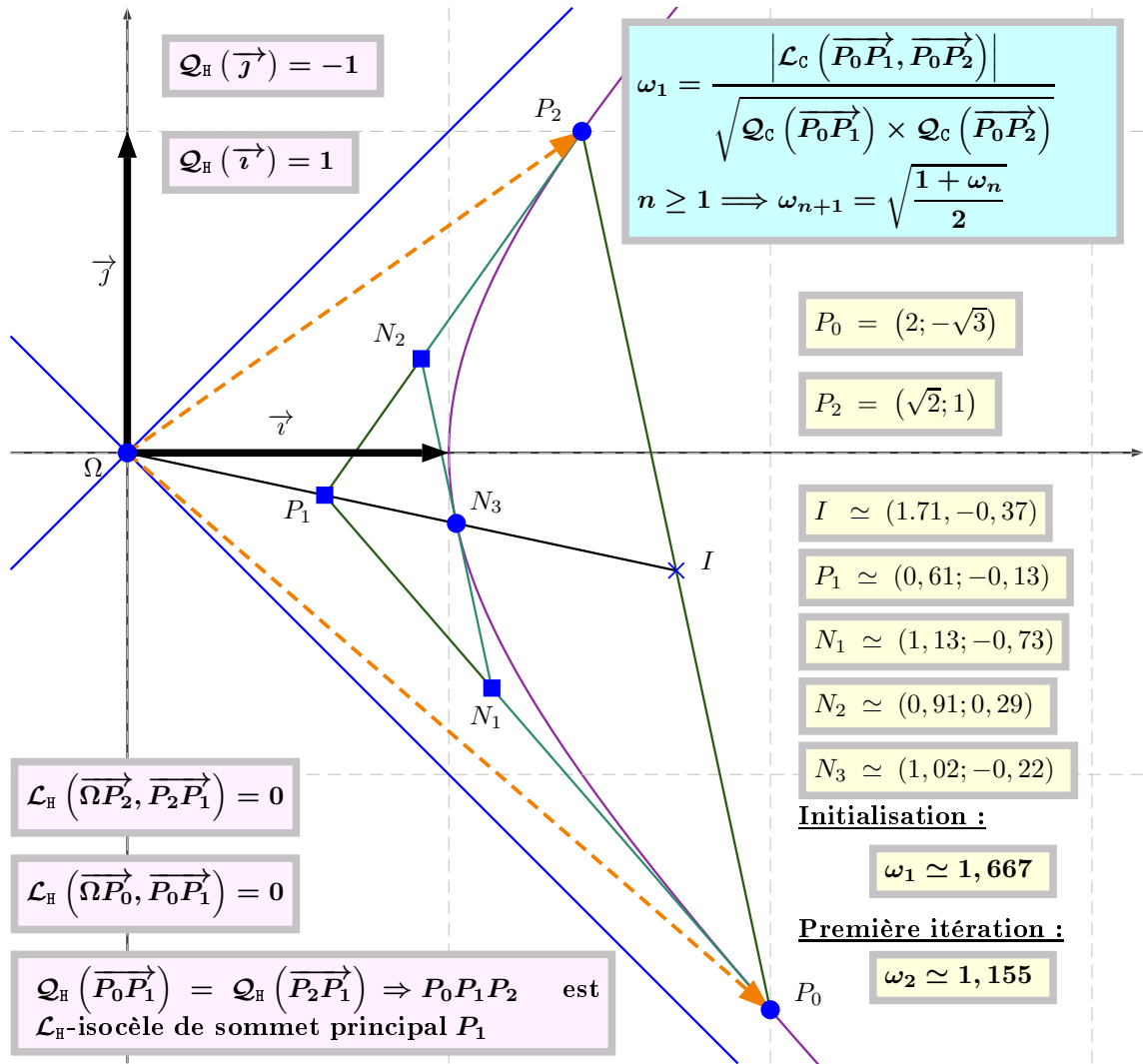


FIGURE 3.5 – Exemple de construction itérative d'un arc de cercle dans le plan \mathcal{P} muni de la forme quadratique \mathcal{Q}_H , à partir de trois points pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \omega)$ et $(P_2; 1)$, $\omega > 1$. Le triangle $P_0P_1P_2$, \mathcal{L}_H -isocèle en P_1 , est remplacé par deux triangles $P_0N_1N_3$, d'une part, et $N_3N_2P_2$, d'autre part, \mathcal{L}_H -isocèles respectivement en N_1 et N_2 . Dans le plan euclidien, \mathbf{H} est l'hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

Notons que si les points P_0 et P_2 ne sont pas sur la même composante connexe du cercle \mathbf{H} , alors le résultat de la formule (3.14) est négatif : l'algorithme 3.3 fonctionne toujours, mais les points construits appartiennent à un cercle dans le complexifié de l'espace affine. Nous sommes alors obligés d'utiliser une autre piste afin de pouvoir représenter les points obtenus.

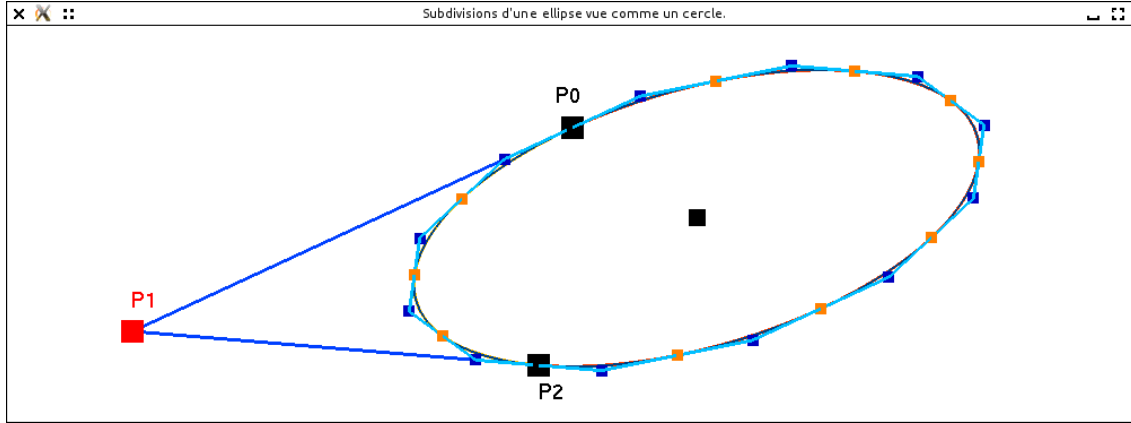


FIGURE 3.6 – Subdivision de l'ellipse de la figure 2.5 modélisée à l'aide de deux CBRQs de points de contrôle pondérés $(P_0; 1)$, $(P_1; \frac{1}{2})$ et $(P_2; 1)$ d'une part et $(P_0; 1)$, $(P_1; -\frac{1}{2})$ et $(P_2; 1)$ d'autre part.

3.3.3 Cas de composantes non connexes

Dans ce paragraphe, nous traitons du cas où le cercle \mathbb{H} a deux composantes connexes et nous nous plaçons dans $\tilde{\mathcal{P}}$ muni de la forme quadratique $\mathcal{Q}_{\mathbb{H}}$. Le lemme 5 qui permet de démontrer que les vecteurs directeurs des asymptotes de \mathbb{H} sont des vecteurs lumière pour notre forme quadratique $\mathcal{Q}_{\mathbb{H}}$ ce qui implique que ces droites sont leurs propres $\mathcal{L}_{\mathbb{H}}$ -orthogonales.

Lemme 5 :

Soit $\vec{\delta}$ une direction lumière. Alors :

$$\vec{\delta}^{\perp_{\mathcal{L}_{\mathbb{H}}}} = \vec{\delta}$$

c'est-à-dire que l'orthogonal de $\vec{\delta}$ pour la forme bilinéaire $\mathcal{L}_{\mathbb{H}}$ est $\vec{\delta}$.

Dém. : Soit $\vec{u}(a; b)$ i.e. $\mathcal{Q}_{\mathbb{H}}(\vec{u}) = 0$. Soit $\vec{v}(x; y)$. Nous avons $\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(\vec{u}; \vec{v}) = 0$ ssi $\frac{ax}{a^2} - \frac{by}{b^2} = 0$ ssi $y = \frac{b}{a}x$. Si nous avons $\vec{u}(a; -b)$, la démonstration est analogue.

■

L'algorithme 3.4 permet de construire de façon itérative un arc de cercle ayant pour extrémité un vecteur. Nous devons calculer le point P_1 appartenant à l'asymptote Δ et à la tangente à \mathbb{H} en P_0 . Notons que les vecteurs \vec{P}_2 et \vec{P}_3 sont choisis de telle façon que :

$$\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(\vec{P}_2, \vec{P}_3) = 1 \quad (3.22)$$

La formule (3.18) traduit le fait que le point P_1 appartient à l'asymptote choisie et à la tangente au cercle \mathbb{H} au point P_0 .

Après avoir calculé la valeur du poids ω , nous pouvons, de façon très naturelle, utiliser l'algorithme 3.4, généralisant celui de De Casteljau en utilisant des points massiques. Afin d'établir une formule permettant de calculer directement la valeur du poids, formule (3.19), en fonction des données de départ, il suffit de déterminer, en fonction de ω , les points N_1 , N_2 et N_3 à partir des points 2a, 2b et 2c de l'algorithme 3.4. Nous imposons alors la $\mathcal{L}_{\mathbb{H}}$ -orthogonalité entre les vecteurs $\vec{\Omega N_3}$ et $\vec{N_3 N_1}$ c'est-à-dire que la valeur du poids, formule (3.19), est la solution positive de l'équation :

$$\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(\vec{\Omega N_3}, \vec{N_3 N_1}) = 0 \quad (3.23)$$

Nous avons choisi de prendre $\vec{P}_2(\lambda a; \lambda b)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ comme vecteur directeur de la première bissectrice Δ , figure 3.7.

La figure 3.8 montre l'influence du vecteur \vec{P}_2 . A chaque itération, vis-à-vis de l'algorithme 3.4, les points sur l'hyperbole correspondent à N_3 tandis que les points sur Δ sont les points correspondant à N_2 . Les autres points correspondent à N_1 .

3.3.4 Linéarisation des algorithmes 3.2, 3.3 et 3.4

$$T_0^c \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ \text{bar} \{ (P_0; 1); (P_1; \omega_1) \} \\ \text{bar} \{ (P_0; 1); (P_1; 2\omega_1); (P_2; 1) \} \\ \sqrt{\frac{1+\omega_1}{2}} \end{pmatrix}, \quad T_1^c \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{bar} \{ (P_0; 1); (P_1; 2\omega_1); (P_2; 1) \} \\ \text{bar} \{ (P_1; \omega_1); (P_2; 1) \} \\ P_2 \\ \sqrt{\frac{1+\omega_1}{2}} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Quand le poids ω est positif, la formule (3.16) peut être linéarisée en utilisant la formule (3.25) (resp. formule (3.26)) si le cercle \mathbb{C} a une composante connexe (resp. deux composantes connexes) : d'un point de vue euclidien, le cercle est une ellipse (resp. une hyperbole).

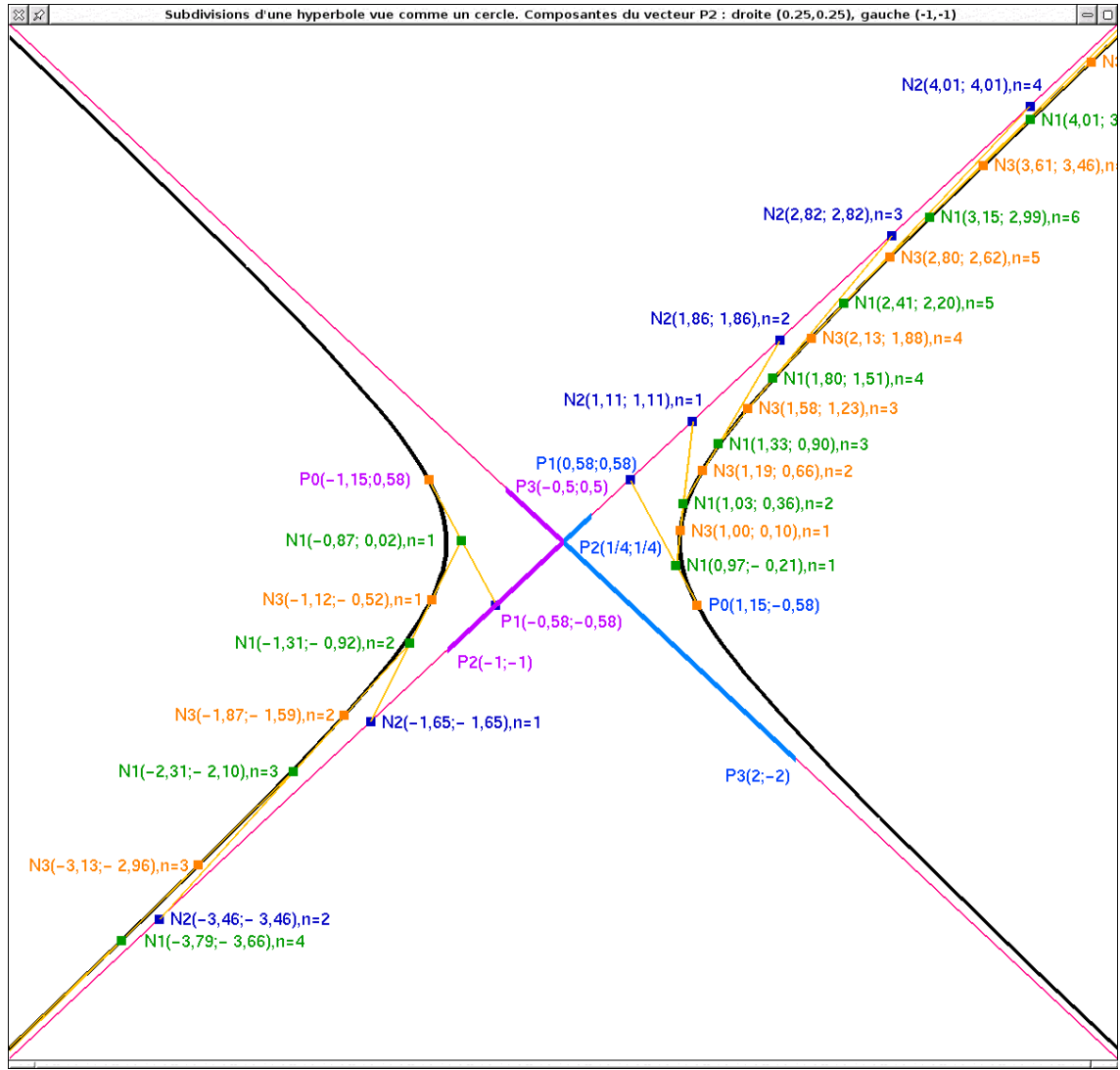


FIGURE 3.8 – Influence du vecteur \vec{P}_2 sur la subdivision du cercle H de la figure 3.7. Branche de droite : $\vec{P}_2(\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$ d'où $\vec{P}_3(2; -2)$. Branche de gauche : $\vec{P}_2(-1; -1)$ d'où $\vec{P}_3(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Nous avons mis les coordonnées des points N_1 , N_2 et N_3 ainsi que la valeur de l'itération n correspondante.

$$\begin{cases} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} \\ \alpha_1 = \arccos(\omega_1) \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\begin{cases} \text{ch}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \text{ch}(\alpha)}{2} \\ \alpha_1 = \text{argch}(\omega_1) \end{cases} \quad (3.26)$$

Dans le reste de ce paragraphe, la fonction cosh désigne la fonction cos (resp. ch) si C a une composante connexe (resp. deux composantes connexes). Dans les deux cas, nous avons :

$$\alpha_n = \frac{\alpha_{n-1}}{2} \quad n \geq 2$$

et le poids peut être calculé, à l'itération i , par la formule suivante :

$$\omega_n = \cosh(\alpha_n)$$

Ainsi, pour le premier et le dernier triangle, nous pouvons utiliser la notation traditionnelle utilisée dans le domaine de la subdivision, tableau 3.2. Naturellement, les autres triangles sont obtenus en combinant les deux matrices définies par les applications précédentes $(T_0^c)^n$ et $(T_1^c)^n$.

$$\begin{aligned}
(T_0^c)^n \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} &= \left[\prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1 + \cosh\left(\frac{\alpha_1}{2^{i-1}}\right)} & \frac{\cosh\left(\frac{\alpha_1}{2^{i-1}}\right)}{1 + \cosh\left(\frac{\alpha_1}{2^{i-1}}\right)} & 0 \\ \frac{1}{2 + 2 \cosh\left(\frac{\alpha_1}{2^{i-1}}\right)} & \frac{2 \cosh\left(\frac{\alpha_1}{2^{i-1}}\right)}{2 + 2 \cosh\left(\frac{\alpha_1}{2^{i-1}}\right)} & \frac{1}{2 + 2 \cosh\left(\frac{\alpha_1}{2^{i-1}}\right)} \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \\
(T_1^c)^n \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} &= \left[\prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2 + 2 \cosh\left(\frac{\alpha_1}{2^{i-1}}\right)} & \frac{2 \cosh\left(\frac{\alpha_1}{2^{i-1}}\right)}{2 + 2 \cosh\left(\frac{\alpha_1}{2^{i-1}}\right)} & \frac{1}{2 + 2 \cosh\left(\frac{\alpha_1}{2^{i-1}}\right)} \\ 0 & \frac{\cosh\left(\frac{\alpha_1}{2^{i-1}}\right)}{1 + \cosh\left(\frac{\alpha_1}{2^{i-1}}\right)} & \frac{1}{1 + \cosh\left(\frac{\alpha_1}{2^{i-1}}\right)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

TABLE 3.2 – Obtention des premier et dernier triangles en utilisant la théorie des I.F.S. et la notation matricielle lors de la subdivision de cercles . Nous rappelons que la fonction cosh désigne soit la fonction cos soit la fonction ch.

Algorithme 3.4 : Construction itérative d'un arc de cercle ayant une extrémité à l'infini.

Entrée : Deux points massiques du cercle \mathbb{H} : $(P_0; 1)$ et $(\vec{P}_2; 0) = ((x_2; y_2); 0) = ((\lambda a; \lambda b); 0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Condition : Les abscisses de P_0 et \vec{P}_2 sont de même signe.

Pré-calcul : $\vec{P}_3 = \left(\left(\frac{a}{2\lambda}; -\frac{b}{2\lambda} \right); 0 \right)$

1. Initialisation

(a) Détermination du point P_1 par :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(\vec{OP_0}, \vec{OP_1}) &= 0 \\ \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(\vec{OP_1}, \vec{OP_2}) &= 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

(b) Calcul de ω_1 par :

$$\omega_1 = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(\vec{OP_0}, \vec{OP_3})}} \quad (3.19)$$

2. Procédure itérative **FractCercle2** $((P_0; 1), (P_1; \omega_1), (\vec{P}_2; 0), n)$

(a) Soit $(N_1; 1 + \omega_1) = (P_0; 1) \boxplus (P_1; \omega_1)$.

(b) Soit $(N_2; \omega_1) = (\vec{P}_2; 0) \boxplus (P_1; \omega_1)$.

(c) Soit $(N_3; 1 + 2\omega_1) = (N_1; 1 + \omega) \boxplus (N_2; \omega_1)$.

(d) Calcul du poids :

$$\omega_0 = \frac{|\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(\vec{P_0N_1}, \vec{P_0N_3})|}{\sqrt{\mathcal{Q}_{\mathbb{H}}(\vec{P_0N_1}) \times \mathcal{Q}_{\mathbb{H}}(\vec{P_0N_3})}} \quad (3.20)$$

(e) Si $n > 0$ alors **FractCercle** $(P_0, N_1, N_3, \omega_0, n - 1)$ fin si.

(f) Calcul du poids :

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 + 2\omega_1}} \quad (3.21)$$

(g) Si $n > 0$ alors **FractCercle2** $((N_3; 1), (N_2; \omega_2), (\vec{P}_2; 0), n - 1)$ fin si.

Sortie : une ligne brisée approchant un arc de cercle \mathbb{H} d'extrémités P_0 et \vec{P}_2 et ayant pour tangentes les droites (P_0P_1) et $(P_1; \vec{P}_2)$.

Bibliographie

- [B97] J. P. Bécar. *Forme (BR) des coniques et de leurs faisceaux*. PhD thesis, Université de Valenciennes et de Hainaut-Cambrésis, LIMAV, Décembre 1997.
- [Gar07] L. Garnier. *Mathématiques pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images*. Ellipses, 2007. ISBN : 978-2-7298-3412-8.
- [Gou83] M. Gourion. *Mathématiques, Terminales C et E, tome 2*. Fernand Nathan, 1983.