

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/318542657>

# Courbes de Bézier quadratiques et nombres complexes massiques

Conference Paper · March 2017

CITATIONS

0

READS

64

2 authors:



Lionel Garnier

University of Burgundy

52 PUBLICATIONS 153 CITATIONS

SEE PROFILE



Jean-Paul Bécar

Polytechnic University of Hauts-de-France

38 PUBLICATIONS 49 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Skeleton based multiview reconstruction [View project](#)



conics [View project](#)

# Courbes de Bézier quadratiques et nombres complexes massiques

Lionel GARNIER<sup>1</sup>, Jean-Paul BÉCAR<sup>2</sup>,

<sup>1</sup> LE2i, FRE 2005, CNRS, Arts et Métiers, Univ. Bourgogne Franche-Comté, B.P. 47870, 21 078 Dijon Cedex, France,  
lionel.garnier@u-bourgogne.fr

<sup>2</sup> LAMAV-CGAO, CNRS 2956, Le Mont-Houy, 59313 Valenciennes cedex 9,  
jean-paul.becar@univ-valenciennes.fr

---

## Résumé

*Les courbes de Bézier quadratiques jouent un rôle fondamental pour la modélisation d'arcs de coniques. L'utilisation de points massiques permet de modéliser des demi-coniques dans le plan affine euclidien ou des surfaces canal dans l'espace de Minkowski-Lorentz. L'utilisation des nombres complexes permet de simplifier beaucoup de raisonnements en géométrie et de simplifier l'utilisation des transformations affines planes. Dans cet article, nous définissons dans un premier temps les nombres complexes massiques et dans un second temps, nous modélisons des arcs de coniques en utilisant des courbes de Bézier rationnelles quadratiques avec des points complexes massiques de contrôle.*

---

**Mots-clés :** Courbes de Bézier rationnelles quadratiques, points massiques, transformations massiques, nombres complexes massiques

## 1 Introduction

Les courbes de Bézier ont été inventées par Pierre Bézier [Béz86] et sont très utilisées en C.A.O. car d'une part, elles sont générées à l'aide de points de contrôle et d'autre part, pour obtenir l'image d'une telle courbe par une transformation affine, il suffit de prendre les images des points de contrôle par cette même transformation affine.

Les courbes de Bézier polynomiales de degré 2 permettent de tracer des arcs de paraboles connexes et bornés tandis que les courbes de Bézier rationnelles quadratiques autorisent le tracé d'arcs de coniques propres, connexes ou non, bornés ou non. En informatique graphique, l'usage est de ne plus se placer dans l'espace affine mais dans la fermeture projective. Cela pose quelques problèmes :

- en géométrie projective<sup>†</sup>, la notion de métrique disparaît et il n'est plus possible de distinguer une ellipse

d'une autre ellipse, une hyperbole d'une autre hyperbole, une parabole d'une autre parabole ;

- lorsque l'arc de conique est représenté par une courbe de Bézier, la modification d'un représentant de la classe d'équivalence définie par l'un des points de contrôle modifie la nature de la conique (un arc de parabole peut devenir un arc d'ellipse ou d'hyperbole) cf. [Gar09, PT95] et annexe A ;

Pour remédier à ce problème, il suffit de considérer l'aspect barycentrique : une courbe de Bézier quadratique est un lieu géométrique défini par des barycentres de points pondérés. En faisant ceci, nous ne pouvons pas obtenir les points à l'infini des paraboles et hyperboles. Nous devons donc généraliser la notion de barycentre dans un espace affine. Pour ce faire, nous considérons l'ensemble des points massiques [FJ89, Béc97] qui regroupe l'ensemble des points affines pondérés et de poids non nuls et les vecteurs de l'espace vectoriel attaché à l'espace affine que nous munissons d'un poids nul. Ainsi, il est possible de tracer une branche d'hyperbole, les premier et dernier points de contrôle sont deux vecteurs directeurs de chacune des asymptotes. De plus, un simple changement de paramètre homographique permet de déterminer les paramètres (euclidiens) de la conique définie par une courbe de Bézier [Béc97, BG14, GB16, GBre]. Nous pouvons aussi munir l'en-

---

<sup>†</sup>. Si nous ne connaissons pas la droite de l'infini, il n'est pas possible de distinguer une conique propre d'une autre conique propre.

semble des points massiques de n'importe quelle métrique et manipuler des cercles qui se tracent comme une ellipse ou une hyperbole [GBMF15, GDB15b, GDB15a] ou développer des algorithmes de subdivisions de courbes de Bézier [GDL12, GBD15, Gar10].

Dans cet article, nous nous donnons deux objectifs :

- le premier consiste à définir des transformations massiques permettant de construire l'image d'une courbe de Bézier par une transformation affine. Pour ce faire, nous allons définir des matrices de transformations massiques, mais il est essentiel que les poids des points pondérés et que les normes des vecteurs soient conservées. Dans le cas d'un vecteur  $\vec{u}$ , si l'application affine  $f$  est une isométrie, les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{f}(\vec{u})$  ont même norme, si  $f$  est une affinité ou une similitude<sup>‡</sup> de rapport  $k$ , nous avons  $\|\vec{f}(\vec{u})\| = |k| \times \|\vec{u}\|$  ;
- les nombres complexes étant un outil puissant pour faire de la géométrie « à la Monsieur Jourdain<sup>§</sup> », nous allons définir l'ensemble des complexes massiques ainsi que les courbes de Bézier dans cet espace.

L'article est organisé comme suit : dans le paragraphe suivant, nous rappelons les définitions des points massiques ainsi que des courbes de Bézier rationnelles quadratiques à points massiques de contrôle et nous définissons les matrices des transformations massiques ; avant de conclure et de donner quelques perspectives, nous introduisons l'ensemble des nombres complexes massiques et la définition des courbes de Bézier rationnelles quadratiques dans ce contexte.

Dans tout cet article,  $\mathcal{P}$  est le plan affine euclidien orienté usuel muni du repère orthonormé direct  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ . L'espace vectoriel attaché à  $\mathcal{P}$  est  $\vec{\mathcal{P}}$ .

## 2 Ensemble des points massiques

Dans ce paragraphe, les plans vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$  et affine  $\mathcal{P}$  peuvent être remplacés par tout espace affine  $\mathcal{E}$  de dimension  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}^* - \{1; 2\}$ , d'espace vectoriel attaché  $\vec{\mathcal{E}}$ .

### 2.1 Définition

L'ensemble des vecteurs du plan vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$  et des points pondérés du plan affine  $\mathcal{P}$  sont regroupés dans l'espace  $\tilde{\mathcal{P}}$  défini par :

$$\tilde{\mathcal{P}} = (\mathcal{P} \times \mathbb{R}^*) \cup (\vec{\mathcal{P}} \times \{0\}) \quad (1)$$

<sup>‡</sup>. Une homothétie est une similitude d'angle nul.

<sup>§</sup>. Il faisait des rimes sans le savoir. L'utilisateur pour donner des points de contrôle sans connaître le formalisme mathématique qu'il y a dans le logiciel.

et il est possible d'identifier  $\tilde{\mathcal{P}}$  à  $\vec{\mathcal{P}} \oplus \vec{\mathbb{R}}$ . L'idée est de considérer le plan affine  $\mathcal{P}$  comme un hyperplan de  $\tilde{\mathcal{P}}$  d'équation  $\omega = 1$  : la coordonnée supplémentaire représente le poids du point pondéré. Un point massique est soit un point pondéré du plan  $\mathcal{P}$ , soit un vecteur du plan vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$  à qui nous affectons un poids nul.

Rappelons que le barycentre d'une famille de points pondérés  $(A_i; \omega_i)_{i \in I}$  dont la somme des poids est nul n'est pas un point, mais le vecteur :

$$\vec{u} = \sum_{i \in I} \omega_i \overrightarrow{MA_i}$$

qui est indépendant du point  $M$ . Il est donc naturel de regrouper dans un même espace les points pondérés de  $\mathcal{P}$  et les vecteurs de  $\vec{\mathcal{P}}$ , identifié à l'hyperplan de  $\tilde{\mathcal{P}}$  d'équation  $\omega = 0$ . Nous pouvons ainsi généraliser la notion de barycentre aux familles des points pondérés dont la somme des poids est nulle.

M. Fiorot et al. travaillent directement dans  $\tilde{\mathcal{P}}$ , et terminent par une projection idoine (sans le poids) sur  $\mathcal{P}$  ou  $\vec{\mathcal{P}}$  selon le cas.

Etant donné un point  $M$  du plan affine, tous les points de  $\tilde{\mathcal{P}}$  situés sur la droite  $(O_{\tilde{\mathcal{P}}}M)$ , privée de  $O_{\tilde{\mathcal{P}}}$ , ont même projection sur le plan affine et sont donc notés avec la même lettre  $M$ . Si un point  $M$  a pour coordonnées  $(x; y)$ , et si  $\omega$  est un réel non nul, nous obtenons, dans le cadre de la théorie des points massiques, le point pondéré  $(M; \omega)$  représenté par  $((x; y); \omega)$  tandis que les coordonnées homogènes de ce point seraient  $(\omega x; \omega y; \omega)$ . Afin de pouvoir manipuler, de façon très simple et très pédagogique, les coordonnées des points ou des vecteurs, nous définissons l'opération d'addition en n'utilisant que des concepts faisant intervenir des transformations affines ou vectorielles. Ainsi, l'addition sur l'espace  $\tilde{\mathcal{P}}$ , notée  $\oplus$ , est définie de la façon suivante :

- $\omega \neq 0$  . Alors :

$$(M; \omega) \oplus (N; -\omega) = (\omega \overrightarrow{NM}; 0)$$

- $\omega \neq 0$  . Alors :

$$(M; \omega) \oplus (M; -\omega) = (\omega \overrightarrow{MM}; 0) = (\vec{0}; 0)$$

- $\omega \mu (\omega + \mu) \neq 0$  . Alors :

$$(M; \omega) \oplus (N; \mu) = \left( \text{bar} \left\{ (M; \omega); (N; \mu) \right\}; \omega + \mu \right)$$

où  $\text{bar} \left\{ (M; \omega); (N; \mu) \right\}$  désigne le barycentre des points pondérés  $(M; \omega)$  et  $(N; \mu)$ .

- $(\vec{u}; 0) \oplus (\vec{v}; 0) = (\vec{u} + \vec{v}; 0)$

- $\omega \neq 0 \implies (M; \omega) \oplus (\vec{u}; 0) = (\mathcal{T}_{\vec{u}}^{\omega} (M); \omega)$  où  $\mathcal{T}_{\vec{u}}^{\omega}$  est la translation de  $\mathcal{P}$  de vecteur  $\vec{u}$ .

Remarquons que le barycentre des points pondérés  $(M; \omega)$  et  $(N; \mu)$ , avec la condition  $\omega + \mu \neq 0$ , s'exprime très facilement en utilisant la translation :

$$\begin{aligned} & (M; \omega) \oplus (N; \mu) \\ &= (M; \omega + \mu) \oplus (M; -\mu) \oplus (N; \mu) \\ &= (M; \omega + \mu) \oplus (\mu \overrightarrow{MN}; 0) \\ &= \left( \mathcal{T}_{\frac{\mu}{\omega + \mu} \overrightarrow{MN}} (M); \omega + \mu \right) \end{aligned} \quad (2)$$

et si  $\alpha$ ,  $\mu$  et  $\omega$  sont trois nombres non nuls, nous avons :

$$(M; \alpha\omega) \oplus (\alpha \vec{u}; 0) = (\mathcal{T}_{\vec{u}}^{\alpha\omega} (M); \alpha\omega) \quad (3)$$

d'une part et :

$$\begin{aligned} & (M; \alpha\omega) \oplus (N; \alpha\mu) = \\ & \left( \text{bar} \left\{ (M; \omega); (N; \mu) \right\}; \alpha(\omega + \mu) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

d'autre part. De plus, si  $\omega\mu(\omega + \mu) \neq 0$ , alors, nous avons :

$$(M; \omega) \oplus (M; \mu) = (M; \omega + \mu) \quad (5)$$

Sur l'espace  $\tilde{\mathcal{P}}$ , nous définissons la multiplication par un scalaire, notée  $\odot$ , de la façon suivante :

- $\alpha \times \omega \neq 0 \implies \alpha \odot (M; \omega) = (M; \alpha\omega)$
- $\omega \neq 0 \implies 0 \odot (M; \omega) = (\vec{0}; 0)$
- $\alpha \odot (\vec{u}; 0) = (\alpha \vec{u}; 0)$

Notons que la multiplication  $\alpha \odot (M; \omega)$  permet d'exhiber la différence profonde entre l'ensemble des points massiques et l'utilisation des coordonnées homogènes dans le cadre de la géométrie projective. De plus, la formule (3) peut s'écrire :

$$(M; \alpha\omega) \oplus (\alpha \vec{u}; 0) = \alpha \odot ((M; \omega) \oplus (\vec{u}; 0)) \quad (6)$$

Notons que la définition de l'espace  $\tilde{\mathcal{P}}$  n'utilise que des notions affines (barycentres et translations<sup>¶</sup>) ou vectorielles à partir des plans affine  $\mathcal{P}$  et vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$  : nous pouvons définir n'importe quelle forme quadratique sur le plan vectoriel  $\vec{\mathcal{P}}$  [GBD16, GDB15b, GDL12]. De plus, l'ensemble  $(\tilde{\mathcal{P}}; \oplus; \odot)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

## 2.2 Matrice massique d'une transformation affine

### 2.2.1 Définition

Une transformation affine est une application  $\mathcal{F}$  bijective qui conserve le barycentre. A toute transformation affine cor-

respond un et un seul endomorphisme  $\vec{\mathcal{F}}$ . La réciproque est naturellement fautive : une application affine  $\mathcal{F}$  est complètement déterminé par son endomorphisme associé  $\vec{\mathcal{F}}$  auquel il faut ajouter le couple  $(M, \mathcal{F}(M))$  où  $M$  est un point de  $\mathcal{P}$ . En général,  $M$  est soit un point fixe de  $\mathcal{F}$ , soit l'origine du repère. Commençons par donner la définition d'une transformation massique.

### Définition 1 :

Soit  $\mathcal{F}$  une transformation affine d'endomorphisme associé  $\vec{\mathcal{F}}$ .

La transformation affine  $\mathcal{F}$  induit une transformation massique  $\widetilde{\mathcal{F}}$  unique définie par :

- Si le poids  $\omega$  est nul :

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\vec{u}; 0) = (\vec{\mathcal{F}}(\vec{u}); 0) \quad (7)$$

- Si le poids est non nul :

$$\widetilde{\mathcal{F}}(M; \omega) = (\mathcal{F}(M); \omega) \quad (8)$$

Soit  $\mathcal{F}$  une transformation affine de  $\mathcal{P}$  d'endomorphisme associé  $\vec{\mathcal{F}}$  dont la matrice est :

$$\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{F}}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec la condition :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

La matrice massique définie par la transformation affine  $\mathcal{F}$  tel que  $\mathcal{F}(O)(x_0; y_0)$  est :

$$\mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{F}}} = \begin{pmatrix} a & b & x_0 \\ c & d & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

et la composition de transformations massiques se calcule en utilisant la multiplication classique des matrices. L'image du point  $M(x; y)$  de poids 1 se détermine par le calcul :

$$\begin{pmatrix} a & b & x_0 \\ c & d & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + x_0 \\ cx + dy + y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mais le problème se pose si le poids n'est pas égal à 1 : **l'image d'un point pondéré doit toujours être le même quel que soit son poids.** Dans le cas général, la multiplication à droite d'une matrice par un vecteur colonne est définie comme suit :

$$\begin{pmatrix} a & b & x_0 \\ c & d & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + x_0 \\ cx + dy + y_0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

Naturellement, nous gardons l'associativité du produit  $\times$  des matrices puisque le poids n'intervient pas dans leurs calculs, mais il reste à définir la multiplication d'une

¶. Un vecteur est un représentant d'une classe d'équivalence de bipoints équipollents : un parallélogramme peut être caractérisé par le fait que ses côtés sont parallèles deux à deux.

matrice par un vecteur colonne dans le cas d'un vecteur de  $\vec{\mathcal{P}}$ . Pour ce faire, considérons le vecteur  $\vec{u}(x; y)$  qui est un point massique de poids nul, nous avons :

$$\begin{pmatrix} a & b & x_0 \\ c & d & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

ce qui permet de retrouver le point massique  $(\vec{\mathcal{F}}(\vec{u}); 0)$ . Notons que :

$$\det(\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{F}}}) = \det(\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{A}}})$$

et que les matrices de transformations massiques définies ici ne sont pas celles utilisées dans le cadre des coordonnées homogènes : hormis le fait que nous n'avons pas de relation d'équivalence, les multiplications (à droite, celle à gauche n'est pas définie volontairement dans notre cadre) d'une matrice par un vecteur colonne ne sont pas les mêmes.

En résumé, la multiplication  $\otimes$  est définie comme suit :

$$\begin{pmatrix} a & b & x_0 \\ c & d & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times x + b \times y + x_0 \times \mathbb{I}_{\mathbb{R}^*}(\omega) \\ c \times x + d \times y + y_0 \times \mathbb{I}_{\mathbb{R}^*}(\omega) \\ \omega \end{pmatrix}$$

où  $\mathbb{I}$  désigne la fonction indicatrice ( $\mathbb{I}_A(x) = 1 \iff x \in A$  et  $\mathbb{I}_A(x) = 0 \iff x \notin A$ ).

Si nous nous plaçons dans un espace affine de dimension  $n$ ,  $n > 2$ , la matrice massique définie par la transformation affine  $\mathcal{F}$  est de la forme :

$$\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{F}}} = \begin{pmatrix} \check{\mathcal{M}}_{\vec{\mathcal{F}}} & \check{\mathcal{F}}(O) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $\check{\mathcal{M}}_{\vec{\mathcal{F}}}$  représente les lignes et colonnes de la matrice  $\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{F}}}$  et  $\check{\mathcal{F}}(O)$  désigne les coordonnées (sur une colonne) de  $\mathcal{F}(O)$ .

### 2.2.2 Exemple dans le cas des homothéties

Soit  $k_1$  et  $k_2$  deux réels non nuls. Considérons les homothéties affines  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  de centre respectifs  $\Omega_1(x_1; y_1)$  et  $\Omega_2(x_2; y_2)$  et de rapport respectif  $k_1$  et  $k_2$ . Un simple calcul permettrait de montrer que ces homothéties peuvent être

définies par les matrices massiques :

$$\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{H}}_1} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & x_1(1-k_1) \\ 0 & k_1 & y_1(1-k_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{H}}_2} = \begin{pmatrix} k_2 & 0 & x_2(1-k_2) \\ 0 & k_2 & y_2(1-k_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{H}}_2 \circ \vec{\mathcal{H}}_1} = \mathcal{M}_{\vec{\mathcal{H}}_2} \times \mathcal{M}_{\vec{\mathcal{H}}_1} = \begin{pmatrix} k_2 \times k_1 & 0 & k_2 x_1(1-k_1) + x_2(1-k_2) \\ 0 & k_2 \times k_1 & k_2 y_1(1-k_1) + y_2(1-k_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

et la question est la suivante : quelles sont les natures de  $\vec{\mathcal{H}}_2 \circ \vec{\mathcal{H}}_1$  et  $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$  ?

- La matrice de  $\vec{\mathcal{H}}_2 \circ \vec{\mathcal{H}}_1$  est :

$$\mathcal{M}_{\vec{\mathcal{H}}_2 \circ \vec{\mathcal{H}}_1} = \begin{pmatrix} k_2 \times k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \times k_1 \end{pmatrix}$$

qui est la matrice de l'homothétie vectorielle de rapport  $k_2 \times k_1$ . De plus, la commutativité de la multiplication dans  $\mathbb{R}$  permet de retrouver que **l'ensemble des homothéties vectorielles forment un groupe commutatif**.

- La nature de  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$  dépend de  $k_2 \times k_1$

◉ **Cas 1** :  $k_2 \times k_1 = 1$ .

L'endomorphisme  $\vec{\mathcal{H}}$  associé à  $\mathcal{H}$  est l'identité :  $\mathcal{H}$  est donc une translation<sup>||</sup>. Pour déterminer le vecteur de translation, servons nous de  $\mathcal{H}(\Omega_1)$ .  $\mathcal{H}_1(\Omega_1) = \Omega_1$  d'où  $\mathcal{H}(\Omega_1) = \mathcal{H}_2(\Omega_1)$  ce qui conduit au calcul :

$$\begin{pmatrix} k_2 & 0 & x_2(1-k_2) \\ 0 & k_2 & y_2(1-k_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 x_1 + x_2(1-k_2) \\ k_2 y_1 + y_2(1-k_2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\overrightarrow{\Omega_1 \mathcal{H}(\Omega_1)} = \begin{pmatrix} (k_2 - 1)x_1 + x_2(1-k_2) \\ (k_2 - 1)y_1 + y_2(1-k_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

<sup>||</sup>. La commutativité de l'addition des réels implique que l'ensemble des translations forme un groupe commutatif.

Or :

$$\begin{pmatrix} (k_2 - 1)x_1 + x_2(1 - k_2) \\ (k_2 - 1)y_1 + y_2(1 - k_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - k_2)(x_2 - x_1) \\ (1 - k_2)(y_2 - y_1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et nous retrouvons que la transformation affine  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$  est la translation de vecteur :

$$(1 - k_2) \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2} \quad (12)$$

⊙ Cas 2 :  $k_2 \times k_1 \neq 1$ .

L'endomorphisme  $\overrightarrow{\mathcal{H}}$  associé à  $\mathcal{H}$  est une homothétie vectorielle de rapport  $k_1 k_2$  :  $\mathcal{H}$  est donc une homothétie affine, de rapport  $k_1 k_2$ . Il reste à déterminer le centre  $\Omega_0(x_0; y_0)$  de  $\mathcal{H}$  en résolvant :

$$\mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1}} \otimes \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui est équivalente à :

$$\begin{cases} (1 - k_2 k_1) x_0 = k_2 x_1 (1 - k_1) + x_2 (1 - k_2) \\ (1 - k_2 k_1) y_0 = k_2 y_1 (1 - k_1) + y_2 (1 - k_2) \end{cases}$$

Or :

$$k_2 (1 - k_1) + (1 - k_2) = 1 - k_2 k_1$$

et nous retrouvons que la transformation affine  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$  est l'homothétie de centre  $\Omega_0$  et de rapport  $k_2 k_1$  où  $\Omega_0$  le barycentre de  $(\Omega_1; k_2 (1 - k_1))$  et de  $(\Omega_2; 1 - k_2)$ .

Considérons le cas particulier où  $\Omega_2 = \Omega_1$ . La matrice de la formule (11) devient alors :

$$\mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1}} = \mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{H}_2}} \times \mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{H}_1}} = \begin{pmatrix} k_2 \times k_1 & 0 & x_1 (1 - k_1 k_2) \\ 0 & k_2 \times k_1 & y_1 (1 - k_1 k_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et, par analogie avec la formule (10),  $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$  est l'homothétie de centre  $\Omega_1$  et de rapport  $k_1 k_2$  et nous retrouvons le fait que **l'ensemble des homothéties affines de même centre est un groupe (commutatif)**.

### 2.2.3 Matrice massique d'une rotation affine dans le plan euclidien

Comme nous sommes dans un espace euclidien orienté, à partir de la définition de matrice de transformation massique, paragraphe 2.2, nous pouvons définir les matrices de rotations. Considérons les rotations affines  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  de centre respectifs  $\Omega_1(2; 3)$  et  $\Omega_2(-5; 7)$  et d'angle respectif  $r_1 = \frac{\pi}{3}$  et  $r_2 = \frac{\pi}{4}$ . Ces rotations peuvent être définies par les ma-

trices massiques :

$$\mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{R}_1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2+3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3-2\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et :

$$\mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{R}_2}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -5+6\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 7-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$\mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1}} = \mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{R}_2}} \times \mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{R}_1}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} & \frac{-20+23\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \frac{28+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Or, nous avons :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

et nous en déduisons :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(7\frac{\pi}{12}\right) \\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(7\frac{\pi}{12}\right) \end{cases}$$

et  $\mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{R}_2}} \times \mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{R}_1}}$  est la matrice de la rotation massique, d'angle  $7\frac{\pi}{12}$  telle que les coordonnées de l'image de  $O$  par  $\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$  soient :

$$\begin{pmatrix} \frac{-20+23\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{4} \\ \frac{28+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Naturellement, le centre de la rotation  $\Omega_0(x_0; y_0)$  est défini par :

$$\mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1}} \otimes \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### 2.3 Courbe de Bézier rationnelle quadratique et conique

Nous généralisons les courbes de Bézier rationnelles quadratiques classiques c'est-à-dire que les points \*\* de contrôle sont des points massiques (i.e. des points pondérés de  $\mathcal{P}$  ou des vecteurs de  $\tilde{\mathcal{P}}$ ) que nous supposons non alignés c'est-à-dire :

- si  $\prod_{i=0}^2 \omega_i \neq 0$ , il s'agit de la notion usuelle ;
- si  $\omega_i = 0$  et si les deux autres poids sont non nuls,  $\vec{P}_i$  n'est pas un vecteur directeur de la droite engendrée par les deux autres points ;
- si  $\omega_i = 0$  et  $\omega_j = 0$ , avec  $i \neq j$ , alors  $\vec{P}_i$  et  $\vec{P}_j$  ne sont pas colinéaires.

**Définition 2** : CBRQ dans  $\tilde{\mathcal{P}}$

Soit  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$  et  $(P_2; \omega_2)$  trois éléments de  $\tilde{\mathcal{P}}$ .

Soit  $I$  (resp.  $J$ ) l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls (resp. nuls).

Soit la fonction  $\omega_f$  définie sur  $[0; 1]$  par :

$$\omega_f(t) = \sum_{i \in I} \omega_i \times B_i(t)$$

Un point massique  $(M; \omega)$  ou  $(\vec{u}; 0)$  appartient à la courbe de Bézier quadratique de points massiques de contrôle  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(P_1; \omega_1)$  et  $(P_2; \omega_2)$ , s'il existe un réel  $t_0$  de  $[0; 1]$  tel que :

- si  $\omega_f(t_0) \neq 0$  alors, nous avons :

$$\begin{cases} \vec{OM} = \frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0) \vec{OP}_i \\ \quad + \frac{1}{\omega_f(t_0)} \sum_{i \in J} B_i(t_0) \vec{P}_i \\ \omega = \omega_f(t_0) \end{cases} \quad (13)$$

- si  $\omega_f(t_0) = 0$  alors, nous avons :

$$\vec{u} = \sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0) \vec{OP}_i + \sum_{i \in J} B_i(t_0) \vec{P}_i \quad (14)$$

Si tous les points de contrôle de la courbe de Bézier rationnelle quadratique sont des points pondérés ( $J = \emptyset$ ) le discriminant réduit du dénominateur est :

$$\Delta' = \omega_1^2 - \omega_2 \omega_0 \quad (15)$$

et nous pouvons en déduire :

- si  $\omega_1^2 - \omega_2 \omega_0 = 0$  alors le dénominateur s'annule une et une seule fois et la conique est une parabole ;

- si  $\omega_1^2 - \omega_2 \omega_0 < 0$  alors le dénominateur ne s'annule pas et la conique est une ellipse ;

- si  $\omega_1^2 - \omega_2 \omega_0 > 0$  alors le dénominateur s'annule deux fois et la conique est une hyperbole.

Notons que le critère est le même si  $J$  n'est pas l'ensemble vide.

Un arc de parabole peut être défini par trois points pondérés  $(P_0; 1)$ ,  $(P_1; \omega)$  et  $(P_2; \omega^2)$ ,  $\omega \neq 0$  ou un point pondéré  $(P_0; 1)$  et deux vecteurs  $(\vec{P}_1; 0)$  et  $(\vec{P}_2; 0)$ , figure 1 ;

Un arc d'ellipse peut être défini par trois points pondérés  $(P_0; 1)$ ,  $(P_1; \omega_1)$  et  $(P_2; \omega_2)$  ou deux points pondérés  $(P_0; 1)$  et  $(P_2; 1)$  et un vecteur  $(\vec{P}_1; 0)$ , figure 1 ;

Un arc d'hyperbole peut être défini par trois points pondérés  $(P_0; 1)$ ,  $(P_1; \omega_1)$  et  $(P_2; \omega_2)$  ou deux points pondérés  $(P_0; 1)$  et  $(P_2; -1)$  et un vecteur  $(\vec{P}_1; 0)$  ou un point pondéré  $(P_1; 1)$  et deux vecteurs  $(\vec{P}_0; 0)$  et  $(\vec{P}_2; 0)$ , figure 1. La figure 1 a été réalisée en *pstricks* en utilisant les courbes de Bézier rationnelles quadratiques et le formalisme des points massiques. Le package est disponible ici : <https://www.ctan.org/pkg/pst-bezier>.

### 2.4 Image d'une courbe de Bézier par une similitude directe

Rappelons qu'une similitude directe est la composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre (et la composition est commutative). Posons :

$$\begin{cases} dx_1 &= (1 - k \cos(\theta)) x_1 + k \sin(\theta) y_1 \\ dy_1 &= -k \sin(\theta) x_1 + (1 - k \cos(\theta)) y_1 \end{cases}$$

D'après les paragraphes 2.2.2 et 2.2.3, la matrice d'une similitude massique  $\mathcal{S}_{\Omega, \theta, k}$  d'angle  $\theta$ , de rapport  $k$  et de centre  $\Omega(x_1; y_1)$  est :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}_{\Omega, \theta, k}} = \begin{pmatrix} k \cos(\theta) & -k \sin(\theta) & dx_1 \\ k \sin(\theta) & k \cos(\theta) & dy_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

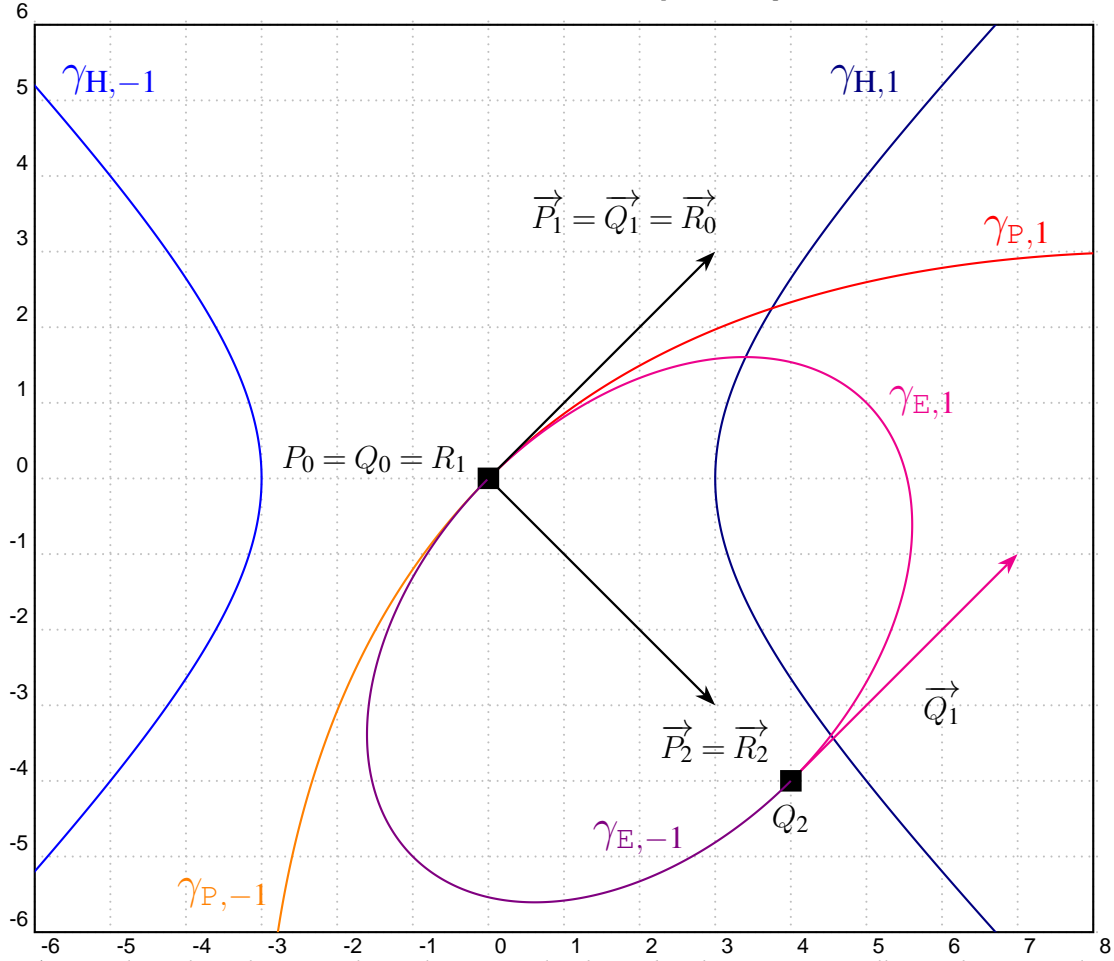
et nous avons bien :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}_{\Omega, \theta, k}} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les courbes de Bézier définies par des points pondérés sont invariantes par transformation affine c'est-à-dire que l'image d'une courbe de Bézier est une courbe de Bézier de même nature et les points de contrôle se correspondent.

Les points massiques décrivent les courbes Bézier rationnelles par des points pondérés et des vecteurs. Les transformations massiques généralisent les applications affines.

\*\*. Evidemment, les points de la courbe sont aussi des points massiques.



**Figure 1:** En utilisant le package *pstricks*, quelques exemples de courbes de Bézier rationnelles quadratiques utilisant des vecteurs comme points de contrôle modélisant des arcs de coniques propres. Soit  $\varepsilon$  dans  $\{-1; 1\}$ . Les points de contrôle de la parabole  $\gamma_{P,\varepsilon}$  sont  $(P_0; 1)$ ,  $(\varepsilon; \vec{P}_1; 0)$  et  $(\vec{P}_2; 0)$ . Les points de contrôle de l'ellipse  $\gamma_{E,\varepsilon}$  sont  $(Q_0; 1)$ ,  $(\varepsilon; \vec{Q}_1; 0)$  et  $(Q_2; 1)$ . Les points de contrôle de l'hyperbole  $\gamma_{H,\varepsilon}$  sont  $(\vec{R}_0; 0)$ ,  $(R_1; \varepsilon)$  et  $(\vec{R}_2; 0)$ .

Ainsi le calcul d'images de courbes de Bézier par ces transformations se réduit au calcul matriciel.

L'exemple suivant illustre ce propos. L'image par une similitude directe d'une branche hyperbole définie par deux vecteurs purs et un point pondéré est obtenue en appliquant la transformation massique de la similitude sur les seuls points massiques de contrôle.

Considérons la branche d'hyperbole  $\tilde{\gamma}_0$  modélisée par une courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle  $(\vec{W}_0; 0)$ ,  $(Q_1; \omega_1)$  et  $(\vec{W}_2; 0)$  avec  $\vec{W}_0(1; 1)$ ,  $Q_1(0; 0)$ ,  $\vec{W}_2(1; -1)$  et  $\omega_1 = 2$ . Soit  $\Omega(2; -1)$  et  $\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}$  la similitude de centre  $\Omega$ , d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de rapport 2 et déterminons l'image de la branche d'hyperbole par la similitude massique  $\widetilde{\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}}$ , figure 2.

Nous avons :

$$\mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

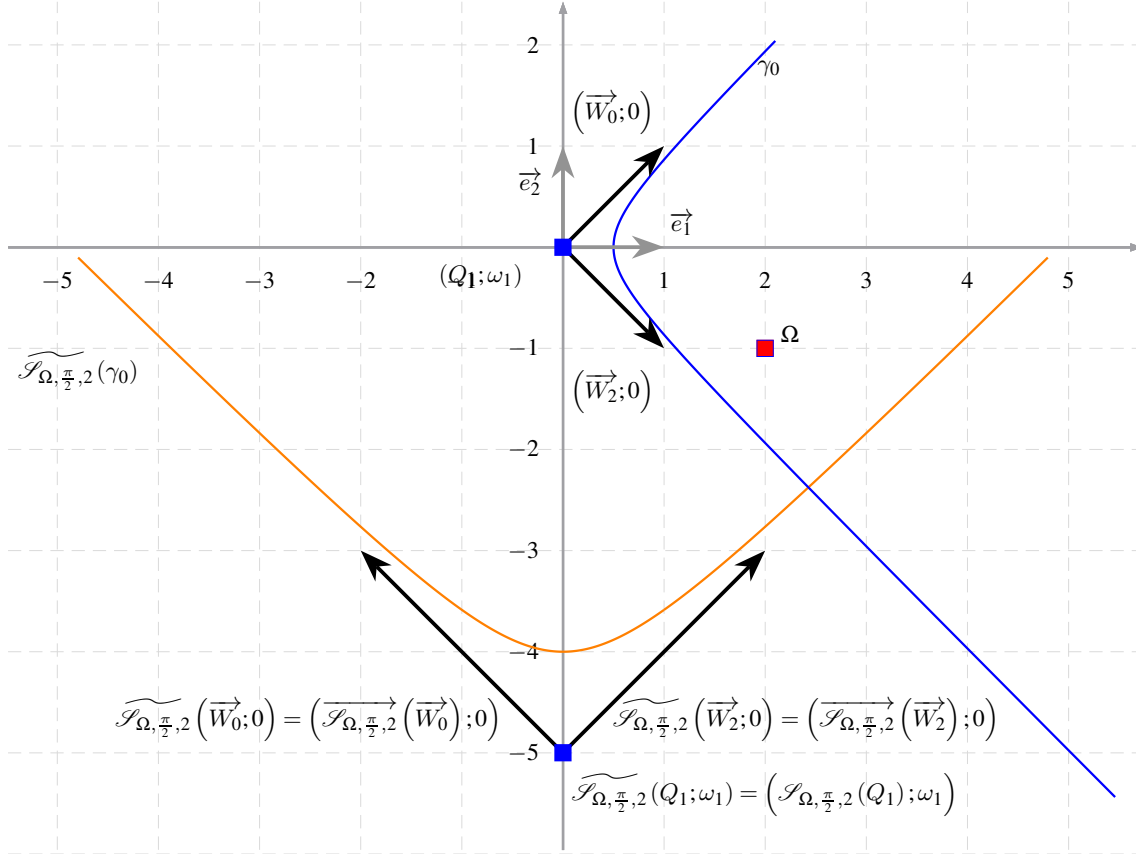
De prime abord, pour  $t = 0$ , nous avons :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\overrightarrow{\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}}(\overrightarrow{\gamma_0(0)}) = \overrightarrow{\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}}(\vec{W}_0) = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \quad (18)$$





**Figure 2:** Image d'une courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle  $(\vec{W}_0;0)$ ,  $(Q_1;\omega_1)$  et  $(\vec{W}_2;0)$  avec  $\vec{W}_0(1;1)$ ,  $Q_1(0;0)$ ,  $\vec{W}_2(1;-1)$  et  $\omega_1 = 2$ , par la similitude directe  $\widetilde{\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}}$ . Les points massiques de contrôle de la courbe image sont  $(\widetilde{\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}}(\vec{W}_0);0)$ ,  $(\mathcal{S}_{\Omega, \theta, k}(Q_1);\omega_1)$  et  $(\widetilde{\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}}(\vec{W}_2);0)$ .

tandis que pour  $t = 1$ , nous avons :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\widetilde{\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}}(\gamma_0(1)) = \widetilde{\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}}(\vec{W}_2) = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \quad (19)$$

Pour  $t_0 \in ]0;1[$ ,  $\gamma_0(t_0)(x(t_0);y(t_0))$  est le barycentre de  $(B_0(t_0)\vec{W}_0;0)$ ,  $(Q_1;\omega_1 B_1(t_0))$  et  $(B_2(t_0)\vec{W}_2;0)$  c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & (\gamma_0(t_0);\omega_1 B_1(t_0)) \\ &= (B_0(t_0)\vec{W}_0;0) \oplus (Q_1;\omega_1 B_1(t_0)) \oplus (B_2(t_0)\vec{W}_2;0) \\ &= \left( \mathcal{T}_{\frac{1}{\omega_1 B_1(t_0)}}(B_0(t_0)\vec{W}_0 + B_2(t_0)\vec{W}_2)(Q_1);\omega_1 B_1(t_0) \right) \end{aligned}$$

Ciomme nous avons :

$$\gamma_0(t_0) = (B_0(t_0)\vec{W}_0;0) \oplus (Q_1;2B_1(t_0)) \oplus (B_2(t_0)\vec{W}_2;0)$$

le point  $\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}(\gamma_0(t_0))$  se détermine, par le calcul matriciel suivant :

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}}} \otimes \begin{pmatrix} B_0(t_0) \\ B_0(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \oplus \mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}}} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2B_1(t_0) \end{pmatrix} \\ & \oplus \mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}}} \otimes \begin{pmatrix} B_2(t_0) \\ -B_2(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}} \otimes \begin{pmatrix} B_0(t_0) \\ B_0(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} B_0(t_0) \\ B_0(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2B_0(t_0) \\ 2B_0(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}} \otimes \begin{pmatrix} B_2(t_0) \\ -B_2(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} B_2(t_0) \\ -B_2(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2B_2(t_0) \\ 2B_0(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2B_1(t_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2B_1(t_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2B_1(t_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -2B_0(t_0) \\ 2B_0(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2B_2(t_0) \\ 2B_0(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2B_1(t_0) \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \frac{1}{2B_1(t_0)}(-2B_0(t_0) + 2B_2(t_0)) \\ -5 + \frac{1}{2B_1(t_0)}(2B_0(t_0) + 2B_2(t_0)) \\ 2B_1(t_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A partir des formules (18) et (19) et de :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\widetilde{\mathcal{F}}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

nous retrouvons que les points massiques de contrôle de  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}(\tilde{\gamma}_0)$  sont :

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{F}}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}(\vec{W}_0; 0) &= (\overrightarrow{\mathcal{F}}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}(\vec{W}_0); 0) \\ \widetilde{\mathcal{F}}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}(Q_1; \omega_1) &= (\mathcal{F}_{\Omega, \theta, k}(Q_1); \omega_1) \\ \widetilde{\mathcal{F}}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}(\vec{W}_2; 0) &= (\overrightarrow{\mathcal{F}}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}(\vec{W}_2); 0) \end{cases}$$

c'est-à-dire que le résultat usuel se généralise aux CBRQs à points massiques de contrôle : pour déterminer l'image d'une CBRQ à points massiques de contrôle par une application massique  $\mathcal{F}$ , il suffit de prendre les images des points pondérés par  $\mathcal{F}$  et des vecteurs par  $\overrightarrow{\mathcal{F}}$  et les poids sont conservés.

### 3 Ensemble $\widetilde{\mathbb{C}}$ des nombres complexes massiques

#### 3.1 Définitions de la somme et de la multiplication par un scalaire

Dans ce paragraphe, nous construisons l'ensemble des nombres complexes massiques  $\widetilde{\mathbb{C}}$ , en tant que plan réel muni du repère orthonormé direct  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ , où un vecteur  $\vec{u}(a; b)$  de  $\vec{\mathcal{P}}$  est représenté par le nombre complexe :

$$z_{\vec{u}} = a + \imath b = a \mathbf{1}_{\mathbb{R}} + b \imath$$

et un point pondéré  $M(a; b)$ , de poids  $\omega$ , a pour affixe pondérée :

$$z_{\widetilde{M}} = a + \imath b + \omega \kappa = a \mathbf{1}_{\mathbb{R}} + b \imath + \omega \kappa$$

et, un nombre complexe massique est de la forme  $\tilde{z} = z + \omega \kappa$  où  $z \in \mathbb{C}$  et  $\omega \in \mathbb{R}$  : si  $\omega = 0$ ,  $\tilde{z}$  représente le vecteur du plan d'affixe  $z$  tandis que dans l'autre cas,  $\tilde{z}$  représente le point pondéré d'affixe  $z$  et de poids  $\omega$ . Comme dans  $\mathbb{C}$ , nous avons :  $1 \times 1 = 1$ ,  $1 \times \imath = \imath \times 1 = \imath$ ,  $\imath \times \imath = -1$ . Concernant  $\kappa$ , nous avons :

$$\kappa \times \xi = \xi \times \kappa = 0 \quad \text{avec} \quad \xi \in \{1; \imath; \kappa\}$$

Naturellement, nous avons  $\mathbb{C} \subset \widetilde{\mathbb{C}}$  et les nombres complexes sont les nombres complexes massiques de masse nulle. Il reste à adapter l'addition et la multiplication par un scalaire. Soit  $\tilde{z}_1 = z_1 + \omega_1 \kappa$  et  $\tilde{z}_2 = z_2 + \omega_2 \kappa$  deux complexes massiques. Alors :

- $\omega_1 + \omega_2 = 0$  et  $\omega_1 \omega_2 \neq 0$  implique :

$$\tilde{z}_1 \oplus \tilde{z}_2 = (z_1 + \omega_1 \kappa) \oplus (z_2 - \omega_1 \kappa) = \omega_1 (z_1 - z_2)$$

qui représente le vecteur d'affixe  $\omega_1 (z_1 - z_2)$  ;

- $(z_1 + \omega_1 \kappa) \oplus (z_1 - \omega_1 \kappa) = 0$  ;
- $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$  implique :

$$\tilde{z}_1 \oplus \tilde{z}_2 = (z_1 + \omega_1 \kappa) \oplus (z_2 + \omega_2 \kappa)$$

$$= \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} (\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2) + (\omega_1 + \omega_2) \kappa$$

- qui représente le point pondéré d'affixe  $\frac{1}{\omega_1 + \omega_2} (\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2)$  et de poids  $\omega_1 + \omega_2$  ;
- $\omega_1 = \omega_2 = 0 \implies \tilde{z}_1 \oplus \tilde{z}_2 = z_1 + z_2$  qui représente le vecteur d'affixe  $z_1 + z_2$  ;
  - $\omega_1 \neq 0$  et  $\omega_2 = 0$  implique :

$$\tilde{z}_1 \oplus \tilde{z}_2 = (z_1 + \omega_1 \kappa) \oplus z_2 = z_1 + \frac{1}{\omega_1} z_2 + \omega_1 \kappa$$

qui représente le point pondéré d'affixe  $z_1 + \frac{1}{\omega_1} z_2$  et de poids  $\omega_1$ .

Evidemment, l'addition  $\oplus$  est commutative. Nous définissons la multiplication par un scalaire, notée  $\odot$ , de la façon suivante :

- $\alpha = 0 \implies \alpha \odot \tilde{z}_1 = 0$
- $\alpha \neq 0$  et  $\omega_1 = 0 \implies \alpha \odot \tilde{z}_1 = \alpha z_1$  ;
- $\alpha \times \omega_1 \neq 0 \implies \alpha \odot \tilde{z}_1 = z_1 + \alpha \omega_1 \kappa$ .

Si le point pondéré  $M_1$  a pour affixe  $\tilde{z}_1 = z_1 + \omega_1 \kappa$  alors le vecteur  $\overrightarrow{OM_1}$  a pour affixe  $z_1$  c'est-à-dire que :

$$z_1 = \frac{1}{\omega_1} \odot \tilde{z}_1 \oplus -\kappa = (z_1 + \kappa) \oplus (0 - \kappa) \quad (20)$$

Pour finir ce paragraphe, notons que  $(\tilde{\mathbb{C}}; \oplus; \odot)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

### 3.2 Métrique sur $\tilde{\mathbb{C}}$ : module et argument

La métrique sur  $\tilde{\mathbb{C}} - \mathbb{C}$  est définie à partir de celle de  $\mathbb{C}$  c'est-à-dire que :

$$|\tilde{z}_1| \stackrel{def}{=} \left| \frac{1}{\omega_1} \odot \tilde{z}_1 \oplus -\kappa \right| = |z_1|$$

et si  $\omega_1 = 0$ ,  $|\tilde{z}_1|$  est la norme du vecteur d'affixe  $z_1$  et dans le cas contraire,  $|\tilde{z}_1|$  est la distance du point pondéré  $M_1$  d'affixe  $z_1$  à l'origine  $O$  c'est-à-dire l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{OM_1}$ . Immédiatement, la distance entre les points pondérés d'affixes  $z_1$  et  $z_2$  est :

$$\left| \frac{1}{\omega_1} \odot \tilde{z}_1 \oplus \frac{-1}{\omega_2} \odot \tilde{z}_2 \right| = |z_1 - z_2|$$

L'argument du nombre complexe pondéré  $\tilde{z}_1 = z_1 + \omega_1 \kappa$  est, quand il est défini, celui de  $z_1$  c'est-à-dire :

$$z_1 \neq 0 \implies \arg \tilde{z}_1 = \arg z_1$$

Soit  $\vec{u}(z_u)$  et  $\vec{v}(z_v)$  avec  $z_u = x_u + \imath y_u$  et  $z_v = x_v + \imath y_v$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \overline{z_u} z_v &= \overline{x_u + \imath y_u} (x_v + \imath y_v) \\ &= (x_u - \imath y_u) (x_v + \imath y_v) \\ &= x_u x_v + y_u y_v + \imath (x_u y_v - x_v y_u) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \overline{z_u} z_v &= \vec{u} \bullet \vec{v} + \imath \det(\vec{u}; \vec{v}) \\ &= x_u x_v + y_u y_v + \imath \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

De même, nous avons :

$$z_u \overline{z_v} = \vec{u} \bullet \vec{v} + \imath \det(\vec{v}; \vec{u}) = \vec{u} \bullet \vec{v} - \imath \det(\vec{u}; \vec{v})$$

d'où les relations :

$$\begin{cases} \vec{u} \bullet \vec{v} &= \frac{\overline{z_u} z_v + z_u \overline{z_v}}{2} \\ \det(\vec{u}; \vec{v}) &= \frac{\overline{z_u} z_v - z_u \overline{z_v}}{2} \end{cases} \quad (22)$$

### 3.3 Multiplication et déplacement

La multiplication dans  $\mathbb{C}$  se traduit géométriquement par une transformation géométrique du plan. Nous définissons une multiplication  $\otimes$  de  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  dans  $\tilde{\mathbb{C}}$  par :

$$\tilde{z}' = \lambda \otimes \tilde{z} = \lambda \otimes (z + \omega \kappa) = (\lambda \times z) + \omega \kappa$$

qui s'interprète géométriquement par une similitude :

- vectorielle de rapport  $|\lambda|$  et d'angle  $\arg \lambda$  si  $\omega$  est nul ;
- affine de centre  $O$ , de rapport  $|\lambda|$  et d'angle  $\arg \lambda$  si  $\omega$  est non nul.

Immédiatement, une similitude massique de centre  $\Omega(z_\Omega)$ , de rapport  $|\lambda|$  et d'angle  $\arg \lambda$  est définie par :

$$\tilde{z}' = (\omega z_\Omega) \oplus \lambda \otimes (\tilde{z} \oplus -\omega z_\Omega) \quad (23)$$

et la multiplication de  $z_\Omega$  par  $\omega$  vient compenser le nombre  $\frac{1}{\omega}$  de l'addition  $\oplus$ . Distinguons deux cas.

- $\omega = 0$  . Nous avons directement :

$$\tilde{z}' = \lambda \otimes \tilde{z}$$

c'est-à-dire que nous obtenons l'écriture usuelle :

$$z' = \lambda \times z$$

- $\omega \neq 0$  . Nous avons :

$$\tilde{z} \oplus \omega z_\Omega = (z + \omega \kappa) \oplus -\omega z_\Omega = (z - z_\Omega) + \omega \kappa$$

d'où :

$$\lambda \otimes (\tilde{z} \oplus -\omega z_\Omega) = \lambda \times (z - z_\Omega) + \omega \kappa$$

ce qui conduit à :

$$\tilde{z}' = (\lambda \times (z - z_\Omega) + z_\Omega) + \omega \kappa$$

et nous obtenons l'écriture usuelle :

$$\tilde{z}' = z' + \omega \kappa = (\lambda \times (z - z_\Omega) + z_\Omega) + \omega \kappa$$

Notons que si nous avons  $|\lambda| = 1$  (resp.  $\arg \lambda \equiv 0 [\pi]$ ), la similitude est une rotation (resp. homothétie).

La translation est définie directement par la définition de  $\oplus$ .

Considérons deux homothéties affines  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  de centres respectifs  $\Omega_1(z_{\Omega_1})$  et  $\Omega_2(z_{\Omega_2})$  de rapports respectifs  $k_1$  et  $k_2$ . Soit  $M_1$  le point pondéré d'affixe  $z_1$  et de poids  $\omega_1$ . Alors  $\mathcal{H}_1(M_1)$ , de poids  $\omega_1$  a pour affixe pondérée :

$$\widetilde{Z}_1 = (\omega_1 z_{\Omega_1}) \oplus k_1 \otimes ((z_1 - z_{\Omega_1}) + \omega_1 \kappa)$$

$$= (\omega_1 z_{\Omega_1}) \oplus (k_1 (z_1 - z_{\Omega_1}) + \omega_1 \kappa)$$

$$= (k_1 (z_1 - z_{\Omega_1}) + z_{\Omega_1}) + \omega_1 \kappa$$

$$= (k_1 z_1 + (1 - k_1) z_{\Omega_1}) + \omega_1 \kappa$$

$$\text{d'où } Z_1 = k_1 z_1 + (1 - k_1) z_{\Omega_1}.$$

De même,  $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1(M_1)$ , de poids  $\omega_1$  a pour affixe pondérée :

$$\widetilde{Z}_2 = (\omega_1 z_{\Omega_2}) \oplus k_2 \otimes ((Z_1 - z_{\Omega_2}) + \omega_1 \kappa)$$

$$= (\omega_1 z_{\Omega_2}) \oplus (k_2 (Z_1 - z_{\Omega_2}) + \omega_1 \kappa)$$

$$= (k_2 (Z_1 - z_{\Omega_2}) + z_{\Omega_2}) + \omega_1 \kappa$$

$$= (k_2 Z_1 + (1 - k_2) z_{\Omega_2}) + \omega_1 \kappa$$

$$= (k_2 k_1 z_1 + k_2 (1 - k_1) z_{\Omega_1} + (1 - k_2) z_{\Omega_2}) + \omega_1 \kappa$$

et nous devons distinguer deux cas.

⊙ **Cas 1** :  $k_2 \times k_1 = 1$ .

Nous avons :

$$\widetilde{Z}_2 = z_1 + (1 - k_2) (z_{\Omega_2} - z_{\Omega_1}) + \omega_1 \kappa$$

c'est-à-dire :

$$\widetilde{Z}_2 = \widetilde{z}_1 \oplus \omega_1 (1 - k_2) \odot ((z_{\Omega_2} + \kappa) \oplus (z_{\Omega_1} - \kappa))$$

et  $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$  est la translation de vecteur  $(1 - k_2) \overrightarrow{\Omega_1 \Omega_2}$  et nous retrouvons le résultat du paragraphe 2.2.2.

⊙ **Cas 2** :  $k_2 \times k_1 \neq 1$ .

Nous avons :

$$\widetilde{Z}_2 = k_2 k_1 z_1 + k_2 (1 - k_1) z_{\Omega_1} + (1 - k_2) z_{\Omega_2} + \omega_1 \kappa$$

qui définit l'homothétie de centre  $\Omega(z_{\Omega})$  et de rapport  $k_1 k_2$ . Le complexe  $z_{\Omega}$  vérifie :

$$z_{\Omega} = k_2 k_1 z_{\Omega} + k_2 (1 - k_1) z_{\Omega_1} + (1 - k_2) z_{\Omega_2}$$

d'où :

$$z_{\Omega} = \frac{k_2 (1 - k_1)}{1 - k_2 k_1} z_{\Omega_1} + \frac{1 - k_2}{1 - k_2 k_1} z_{\Omega_2}$$

et la relation :

$$k_2 (1 - k_1) + 1 - k_2 = 1 - k_2 k_1$$

montre que  $\Omega$  est le barycentre de  $\Omega_1(k_2(1 - k_1))$  et  $\Omega_2(1 - k_2)$  c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \widetilde{z}_{\Omega} &= z_{\Omega} + \kappa \\ &= \left( z_{\Omega_1} + \frac{k_2 (1 - k_1)}{1 - k_2 k_1} \kappa \right) \\ &\oplus \left( z_{\Omega_2} + \frac{1 - k_2}{1 - k_2 k_1} \kappa \right) \end{aligned}$$

qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \widetilde{z}_{\Omega} &= \frac{k_2 (1 - k_1)}{1 - k_2 k_1} \odot (z_{\Omega_1} + \kappa) \\ &\oplus \frac{1 - k_2}{1 - k_2 k_1} \odot (z_{\Omega_2} + \kappa) \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\widetilde{Z}_2 = (\omega_1 z_{\Omega}) \oplus k_1 k_2 \otimes ((z_1 - z_{\Omega}) + \omega_1 \kappa)$$

et nous retrouvons le résultat du paragraphe 2.2.2 : il est donc légitime de noter de la même façon la multiplication d'un complexe massique par un complexe et la multiplication d'une matrice massique par un vecteur colonne.

### 3.4 Anti-déplacement

La symétrie par rapport à l'axe des abscisses est définie par la conjugaison c'est-à-dire que :

$$\overline{\widetilde{z}_1} \stackrel{def}{=} \overline{z_1 + \omega_1 \kappa} = \overline{z_1} + \omega_1 \kappa$$

et nous allons généraliser ce résultat aux réflexions quelconques.

#### 3.4.1 Equations de droites

Soit  $z_{ab} = a + \imath b$  un complexe non nul et  $z = x + \imath y$  un nombre complexe. Nous avons :

$$\begin{aligned} & z_{ab} \overline{z} + \overline{z_{ab}} z \\ &= (a + \imath b) (x - \imath y) + (a - \imath b) (x + \imath y) \\ &= ax + by + \imath (bx - ay) + ax + by + \imath (ay - bx) \\ &= 2ax + 2by \end{aligned}$$

et nous pouvons énoncer :

#### Théorème 1

L'équation complexe de la droite  $\Delta$  d'équation :

$$ax + by + c = 0, (a; b; c) \in \mathbb{R}^3, (a; b) \neq (0; 0)$$

est :

$$z_{ab} \overline{z} + \overline{z_{ab}} z + 2c = 0 \quad (24)$$

avec  $z_{ab} = a + \imath b$  et  $z = x + \imath y$ .

Notons que  $z_{ab}$  est l'affixe d'un vecteur normal  $\overrightarrow{\nabla_{\Delta}}$  à la droite. En effet, soit  $A(z_A)$  et  $B(z_B)$  deux points distincts de la droite  $\Delta$ . Comme  $c$  est une constante et que les deux complexes  $z_A$  et  $z_B$  vérifient l'équation (24), nous obtenons :

$$z_{ab} \overline{z_B - z_A} + \overline{z_{ab}} (z_B - z_A) = 0$$

et d'après la formule (22), les vecteurs  $\overrightarrow{\nabla_{\Delta}}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont orthogonaux.

### 3.4.2 Expression analytique d'une réflexion

Nous pouvons énoncer :

#### Théorème 2

Soit l'équation complexe, d'une droite  $\Delta$ , donnée par la formule (24).

Soit  $M(\tilde{z})$  et  $M'(\tilde{z}')$  avec  $\tilde{z} = z + \omega \kappa$  et  $\tilde{z}' = z' + \omega \kappa$ .

Le point  $M'$  est l'image de  $M$  par la réflexion d'axe  $\Delta$  si et seulement si :

$$z' = -\frac{z_{ab}\bar{z} + 2c \mathbb{I}_{\mathbb{R}^*}(\omega)}{\bar{z}_{ab}} \quad (25)$$

Démonstration : Cherchons les points invariants :

$$\begin{aligned} z = z' &\iff z = -\frac{z_{ab}\bar{z} + 2c}{\bar{z}_{ab}} \\ &\iff z\bar{z}_{ab} = -(z_{ab}\bar{z} + 2c) \\ &\iff z_{ab}\bar{z} + \bar{z}_{ab}z + 2c = 0 \end{aligned}$$

et l'ensemble des points invariants est l'axe  $\Delta$ . L'équation (25) est équivalente à :

$$z' = -\frac{z_{ab}^2}{|z_{ab}|^2}\bar{z} - \frac{2c}{\bar{z}_{ab}} \quad (26)$$

et  $-\frac{z_{ab}^2}{|z_{ab}|^2}$  est un nombre complexe de module 1 : la transformation géométrique est un anti-déplacement comme composée de la réflexion d'axe réel, suivi de la rotation de centre l'origine et d'angle  $\arg -\frac{z_{ab}^2}{|z_{ab}|^2}$  suivi de la translation de vecteur d'affixe  $-\frac{2c}{\bar{z}_{ab}}$ .

■

Si  $\omega = 0$ , la réflexion est vectorielle d'axe  $\vec{\Delta}$  d'équation :

$$z_{ab}\bar{z} + \bar{z}_{ab}z = 0$$

sinon, la réflexion est affine d'axe  $\Delta$ . Sauf mention contraire, dans la suite, une réflexion sera affine.

Soit  $I(z_I)$  le milieu de  $[MM']$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} z_I &= \frac{z' + z}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{z_{ab}\bar{z} + 2c}{\bar{z}_{ab}} + z \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{z_{ab}\bar{z} + 2c - \bar{z}_{ab}z}{\bar{z}_{ab}} \right) \end{aligned}$$

et nous obtenons :

$$\bar{z}_{ab}z_I = -\frac{z_{ab}\bar{z} + 2c - \bar{z}_{ab}z}{2}$$

d'où :

$$\bar{z}_I z_{ab} = -\frac{\bar{z}_{ab}\bar{z} + 2c - \bar{z}_{ab}\bar{z}}{2} = -\frac{\bar{z}_{ab}z + 2c - z_{ab}\bar{z}}{2}$$

et finalement :

$$\begin{aligned} &\bar{z}_{ab}z_I + \bar{z}_I z_{ab} \\ &= -\frac{z_{ab}\bar{z} + 2c - \bar{z}_{ab}z}{2} - \frac{\bar{z}_{ab}z + 2c - z_{ab}\bar{z}}{2} \\ &= -\frac{4c}{2} \\ &= -2c \end{aligned}$$

ce qui montre que  $I$  appartient à  $\Delta$ .

L'affixe de  $\overrightarrow{MM'}$  est :

$$z' - z = -\frac{z_{ab}\bar{z} + 2c}{\bar{z}_{ab}} - z = -\frac{z_{ab}\bar{z} + 2c + \bar{z}_{ab}z}{\bar{z}_{ab}}$$

et considérons le point  $N$  d'affixe massique  $z' - z + \kappa$ . Le point  $N$  appartient à une droite parallèle à  $\Delta$  (i.e. une ligne de niveau) ce qui montre que le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  est orthogonal à l'axe  $\Delta$ .

### 3.5 Courbes de Bézier rationnelles quadratiques

Pour  $i \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$ , considérons les trois points massiques suivants

$$\tilde{z}_i = z_i + \omega_i \kappa \quad (27)$$

et la courbe de Bézier rationnelle quadratiques, de nombres complexes massiques de contrôle  $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1$  et  $\tilde{z}_2$  est  $\gamma$  définie en utilisant  $I$  l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids non nuls et  $J$  l'ensemble des indices des points massiques ayant des poids nuls. Pour  $t_0$  de  $[0; 1]$ , si nous avons :

$$\sum_{i \in I} \omega_i \times B_i(t_0) \neq 0 \quad (28)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma(t_0)} &= \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0)} \odot (B_0(t_0) \odot \tilde{z}_0) \\ &\oplus \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0)} \odot (B_1(t_0) \odot \tilde{z}_1) \\ &\oplus \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0)} \odot (B_2(t_0) \odot \tilde{z}_2) \end{aligned} \quad (29)$$

tandis que dans le cas contraire, nous obtenons :

$$\widetilde{\gamma(t_0)} = B_0(t_0) \odot \tilde{z}_0 \oplus B_1(t_0) \odot \tilde{z}_1 \oplus B_2(t_0) \odot \tilde{z}_2$$

Contrairement à la formule (13), l'utilisation des nombres complexes massiques permet d'uniformiser l'écriture et nous obtenons alors :

$$\widetilde{\gamma(t_0)} = \frac{1}{\sum_{i \in I} \omega_i B_i(t_0)} \odot \left( \sum_{i \in I \cup J}^{\oplus} B_i(t_0) \odot \tilde{z}_i \right) \quad (30)$$

où  $\sum^{\oplus}$  désigne une somme pour la loi  $\oplus$ .

Prenons l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \tilde{z}_0 = 1 + \imath \\ \tilde{z}_1 = \omega_1 \kappa \\ \tilde{z}_2 = 1 - \imath \\ \omega_1 = 2 \end{cases}$$

et  $I = \{1\}$ ,  $J = \{0; 2\}$ . La condition de la formule (28) n'est pas vérifiée pour  $t_0$  appartenant à  $\{0; 1\}$ . Nous avons :

$$\widetilde{\gamma(0)} = B_0(0) \odot \tilde{z}_0 \oplus B_1(0) \odot \tilde{z}_1 \oplus B_2(0) \odot \tilde{z}_2 = \tilde{z}_0 = 1 + \imath$$

et :

$$\widetilde{\gamma(1)} = B_0(1) \odot \tilde{z}_0 \oplus B_1(1) \odot \tilde{z}_1 \oplus B_2(1) \odot \tilde{z}_2 = \tilde{z}_2 = 1 - \imath$$

Soit  $t_0 \in ]0; 1[$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma(t_0)} &= \frac{1}{2B_1(t_0)} \odot (B_0(t_0)(1 + \imath) \oplus 2B_1(t_0)\kappa) \\ &\quad \oplus \frac{1}{2B_1(t_0)} \odot (B_2(t_0)(1 - \imath)) \\ &= \frac{B_0(t_0)}{2B_1(t_0)}(1 + \imath) \oplus \kappa \oplus \frac{B_2(t_0)}{2B_1(t_0)}(1 - \imath) \\ &= \frac{B_0(t_0)(1 + \imath) + B_2(t_0)(1 - \imath)}{2B_1(t_0)} + \kappa \\ &= \frac{1 - 2t_0 + 2t_0^2}{4t_0(1 - t_0)} + \frac{1 - 2t_0}{4t_0(1 - t_0)}\imath + \kappa \end{aligned}$$

et nous obtenons :

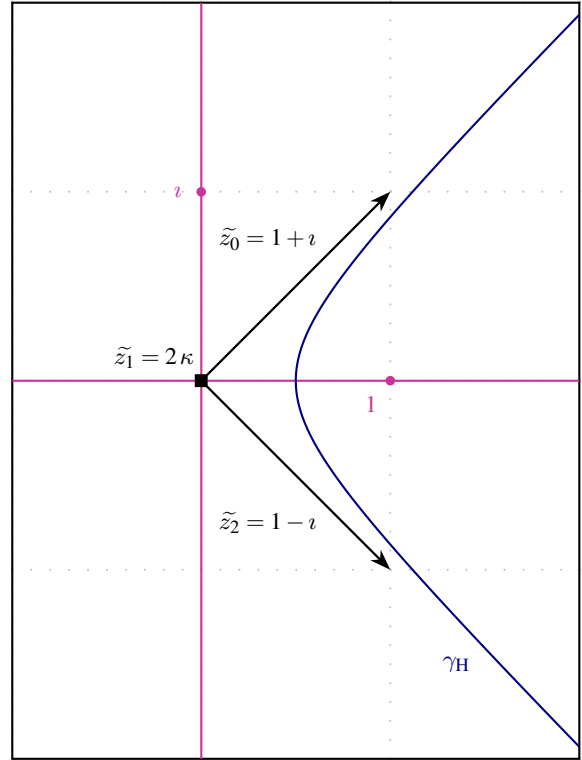
$$\begin{cases} x(t_0) = \operatorname{Re}(\widetilde{\gamma(t_0)}) = \frac{1 - 2t_0 + 2t_0^2}{4t_0(1 - t_0)} \\ y(t_0) = \operatorname{Im}(\widetilde{\gamma(t_0)}) = \frac{1 - 2t_0}{4t_0(1 - t_0)} \end{cases}$$

et tous les points pondérés de la courbe ont un poids de 1.

Nous obtenons facilement l'équation implicite de l'hyperbole :

$$\begin{aligned} &x(t_0)^2 - y(t_0)^2 \\ &= \left( \frac{(1 - 2t_0) + 2t_0^2}{4t_0(1 - t_0)} \right)^2 - \left( \frac{1 - 2t_0}{4t_0(1 - t_0)} \right)^2 \\ &= \frac{4t_0^2(1 - 2t_0) + 4t_0^4}{16t_0^2(1 - t_0)^2} \\ &= \frac{4t_0^2(1 - 2t_0 + t_0^2)}{16t_0^2(1 - t_0)^2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

La figure 3 montre une branche d'hyperbole modélisée par une courbe de Bézier rationnelle quadratique ayant des nombres complexes massiques de contrôle.



**Figure 3:** Courbe de Bézier rationnelle quadratique ayant pour points de contrôle des nombres complexes massiques représentant une branche d'hyperbole.

Soit  $z_\Omega = 2 - \imath$  l'affixe du centre de la similitude  $\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}$  de rapport 2 et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . L'expression analytique de  $\widetilde{\mathcal{S}_{\Omega, \frac{\pi}{2}, 2}}$  est donnée par la formule (23) avec  $z = 2\imath$  et  $\omega = 1$ . Pour  $t_0$  appartenant à  $\{0; 1\}$ , nous obtenons :

$$\widetilde{\gamma'(t_0)} = 2\imath \otimes (\widetilde{\gamma(t_0)})$$

tandis que pour  $t_0 \in ]0; 1[$ , nous obtenons :

$$\widetilde{\gamma'(t_0)} = (2 - \imath) \oplus 2\imath \otimes (\widetilde{\gamma(t_0)} \oplus (-2 + \imath))$$

Concernant les points extrémaux, nous avons :

$$\widetilde{\gamma'(0)} = 2\imath \times (\widetilde{\gamma(0)}) = 2\imath \times (1 + \imath) = -2 + 2\imath$$

et :

$$\widetilde{\gamma'(1)} = 2\imath \times (\widetilde{\gamma(1)}) = 2\imath \times (1 - \imath) = 2 + 2\imath$$

Pour  $t_0 \in ]0; 1[$ , nous avons :

$$\widetilde{\gamma(t_0)} \oplus (-2 + \imath)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-2t_0+2t_0^2}{4t_0(1-t_0)} - 2 + \left( \frac{1-2t_0}{4t_0(1-t_0)} + 1 \right) \iota + \kappa \\
&= \frac{1-2t_0+2t_0^2}{4t_0(1-t_0)} - \frac{8t_0-8t_0^2}{4t_0(1-t_0)} \\
&+ \frac{1-2t_0+4t_0-4t_0^2}{4t_0(1-t_0)} \iota + \kappa \\
&= \frac{1-10t_0+10t_0^2}{4t_0(1-t_0)} + \frac{1+2t_0-4t_0^2}{4t_0(1-t_0)} \iota + \kappa
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
&2\iota \otimes \left( \widetilde{\gamma(t_0)} \oplus (-2+\iota) \right) \\
&= 2\iota \otimes \left( \frac{1-10t_0+10t_0^2}{4t_0(1-t_0)} + \frac{1+2t_0-4t_0^2}{4t_0(1-t_0)} \iota + \kappa \right) \\
&= \frac{1-10t_0+10t_0^2}{2t_0(1-t_0)} \iota + \frac{1+2t_0-4t_0^2}{2t_0(1-t_0)} \iota^2 + \kappa \\
&= -\frac{1+2t_0-4t_0^2}{2t_0(1-t_0)} + \frac{1-10t_0+10t_0^2}{2t_0(1-t_0)} \iota + \kappa
\end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned}
&((2-\iota) \oplus (2\iota \otimes (\widetilde{\gamma(t_0)} \oplus (-2+\iota)))) \\
&= (2-\iota) \oplus \left( -\frac{1+2t_0-4t_0^2}{2t_0(1-t_0)} + \frac{1-10t_0+10t_0^2}{2t_0(1-t_0)} \iota + \kappa \right) \\
&= -\frac{1+2t_0-4t_0^2}{2t_0(1-t_0)} + 2 + \left( \frac{1-10t_0+10t_0^2}{2t_0(1-t_0)} - 1 \right) \iota + \kappa \\
&= \frac{-1-2t_0+4t_0^2+4t_0-4t_0^2}{2t_0(1-t_0)} + \\
&+ \frac{1-10t_0+10t_0^2-2t_0+2t_0^2}{2t_0(1-t_0)} \iota + \kappa \\
&= \frac{-1+2t_0}{2t_0(1-t_0)} + \frac{1-12t_0+12t_0^2}{2t_0(1-t_0)} \iota + \kappa
\end{aligned}$$

et il reste à écrire le numérateur dans la base de Bernstein :

$$\begin{aligned}
&-1+2t_0 \\
&= -B_0(t_0) - B_1(t_0) - B_2(t_0) + B_1(t_0) + 2B_2(t_0) \\
&= -B_0(t_0) + B_2(t_0)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
1-12t_0+12t_0^2 &= B_0(t_0) + B_1(t_0) + B_2(t_0) \\
&\quad -6B_1(t_0) - 12B_2(t_0) + 12B_2(t_0) \\
&= B_0(t_0) - 5B_1(t_0) + B_2(t_0)
\end{aligned}$$

et l'expression  $\widetilde{\gamma'(t_0)}$  de la courbe de Bézier rationnelle quadratique image est :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma'(t_0)} &= \frac{-B_0(t_0) + B_2(t_0)}{B_1(t_0)} \\
&+ \frac{B_0(t_0) - 5B_1(t_0) + B_2(t_0)}{B_1(t_0)} \iota + \kappa
\end{aligned} \tag{31}$$

et nous obtenons :

$$\begin{cases} \widetilde{z'_0} = -1 + \iota \\ \widetilde{z'_1} = -5\iota + 1\kappa \\ \widetilde{z'_2} = 1 + \iota \\ \omega'_1 = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\widetilde{\gamma'(t_0)} = \frac{1}{B_1(t_0)} \sum_{i=0}^2 (B_i(t_0) \odot \widetilde{z'_i}) \tag{32}$$

mais le poids du nombre complexe intermédiaire est 1 au lieu de 2. En gardant la valeur du poids originel, la formule (32) devient :

$$\widetilde{\gamma'(t_0)} = \frac{1}{2 \times B_1(t_0)} \sum_{i=0}^2 (B_i(t_0) \odot (2 \odot \widetilde{z'_i})) \tag{33}$$

et nous obtenons :

$$\begin{cases} \widetilde{Z'_0} = -2 + 2\iota \\ \widetilde{Z'_1} = -5\iota + 2\kappa \\ \widetilde{Z'_2} = 2 + 2\iota \\ \omega_1 = 2 \end{cases}$$

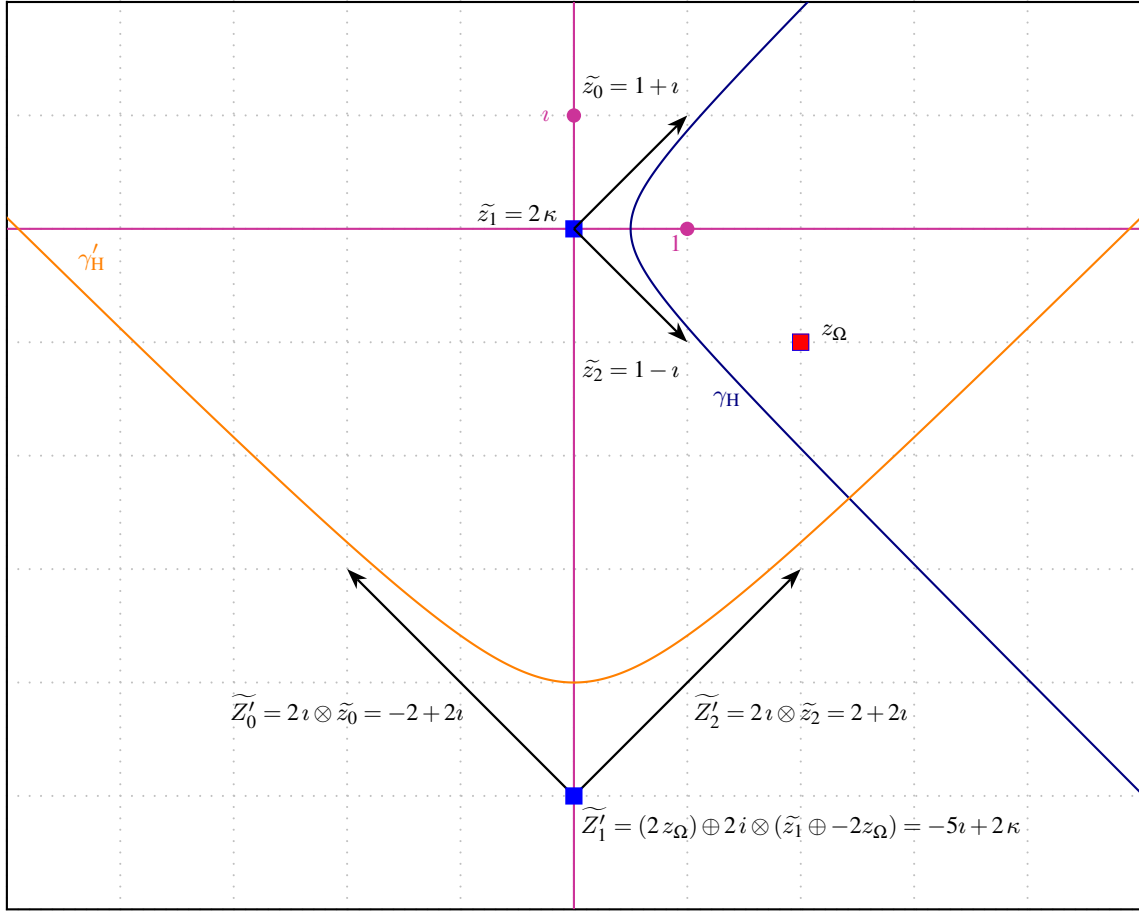
Faisons le lien avec la multiplication  $\otimes$  par  $2\iota$  pour les complexes purs qui sont des affixes de vecteurs. Nous avons :

- $2\iota \otimes \widetilde{z'_0} = 2\iota \otimes (1 + \iota) = 2\iota + 2\iota^2 = -2 + 2\iota = \widetilde{Z'_0}$  ;
- $2\iota \otimes \widetilde{z'_2} = 2\iota \otimes (1 - \iota) = 2\iota - 2\iota^2 = 2 + 2\iota = \widetilde{Z'_2}$  .

Quand au point intermédiaire, nous utilisons le fait que la transformation géométrique est une similitude massique et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&(2(2-\iota) \oplus 2\iota \otimes (2\kappa \oplus (-2(2-\iota)))) \\
&= (2(2-\iota) \oplus 2\iota \otimes ((-2+\iota) + 2\kappa)) \\
&= (2(2-\iota) \oplus (-2-4\iota) + 2\kappa) \\
&= -5\iota + 2\kappa = \widetilde{Z'_1}
\end{aligned}$$

La figure 4 montre une branche d'hyperbole modélisé par une courbe de Bézier rationnelle quadratique ayant des nombres complexes massiques de contrôle obtenue comme image par une similitude directe de la branche d'hyper-



**Figure 4:** Courbe de Bézier rationnelle quadratique ayant pour points de contrôle des nombres complexes massiques représentant une branche d'hyperbole obtenue comme image de la courbe de Bézier rationnelle quadratique de la figure 3.

bole de la figure 3 et nous retrouvons les résultats du paragraphe 2.4.

#### 4 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons généralisé les propriétés classiques des images d'une courbe de Bézier : l'image d'une courbe de Bézier ayant des points massiques de contrôle par une transformation massique est une courbe de Bézier dont les points massiques de contrôle sont les images des précédents par cette même transformation massique. Dans un second temps, nous avons défini les nombres complexes massiques permettant d'utiliser la puissance des nombres complexes pour de la géométrie analytique, puis, nous avons défini les courbes de Bézier rationnelles quadratiques dans cet espace.

Dans un futur proche, nous comptons utiliser les quaternions afin de modéliser des courbes de Bézier rationnelles quadratiques dans l'espace.

#### Références

- [Béc97] BÉCAR J. P. : *Forme (BR) des coniques et de leurs faisceaux*. PhD thesis, Université de Valenciennes et de Hainaut-Cambrésis, LIMAV, Décembre 1997.
- [Béz86] BÉZIER P. : *Courbe et surface*, 2ème ed., vol. 4. Hermès, Paris, Octobre 1986.
- [BG14] BÉCAR J. P., GARNIER L. : Points massiques, courbes de Bézier quadratiques et coniques : un état de l'art. In *G.T.M.G. 2014* (Lyon, 26 au 27 mars 2014).
- [FJ89] FIOROT J. C., JEANNIN P. : *Courbes et surfaces rationnelles*, vol. RMA 12. Masson, 1989.
- [Gar09] GARNIER L. : Courbes de Bézier quadratiques et coniques. *Feuille de Vigne, IREM de Dijon*. Vol. 113 (Septembre 2009), 17–32.
- [Gar10] GARNIER L. : Constructions euclidiennes, dans le plan affine, d'arcs de coniques propres par des I.F.S. af-



finies non stationnaires. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique*. Vol. 4, Num. 1 (2010), 21–56.

- [GB16] GARNIER L., BÉCAR J.-P. : Mass points, Bézier curves and conics : a survey. In *Eleventh International Workshop on Automated Deduction in Geometry* (Strasbourg, France, juin 2016), Proceedings of ADG 2016, pp. 97–116. <http://ufrsciencestech.u-bourgogne.fr/~garnier/publications/adg2016/>.
- [GBD15] GARNIER L., BÉCAR J. P., DRUOTON L. : Subdivisions de courbes de Bézier quadratiques. AFIG, (Ed.), Université de Lyon, LIRIS. [http://liris.cnrs.fr/afig2015/?page\\_id=939#sthash.IbJxJhLu.dpuf](http://liris.cnrs.fr/afig2015/?page_id=939#sthash.IbJxJhLu.dpuf).
- [GBD16] GARNIER L., BÉCAR J. P., DRUOTON L. : Surfaces canal et courbes de bézier rationnelles quadratiques. GTMG, (Ed.), Université de Bourgogne, Le2i. <http://ufrsciencestech.u-bourgogne.fr/~garnier/publications/hippocampe/>.
- [GBre] GARNIER L., BÉCAR J. P. : *Nouveaux modèles géométriques pour la C.A.O. et la synthèse d'images : courbes de Bézier, points massiques et surfaces canal*. Editions Universitaires Européennes, Saarbrücken, 2017 à paraître. ISBN 978-3-639-54676-7.
- [GBMF15] GARNIER L., BÉCAR J. P., MORIN G., FUCHS L. : Une application de l'espace des sphères : détermination des sphères de Dandelin. AFIG, (Ed.), Université de Lyon, LIRIS. [http://liris.cnrs.fr/afig2015/?page\\_id=939#sthash.IbJxJhLu.dpuf](http://liris.cnrs.fr/afig2015/?page_id=939#sthash.IbJxJhLu.dpuf).
- [GDB15a] GARNIER L., DRUOTON L., BÉCAR J. P. : Points massiques, espace des sphères et « hyperbole ». In *G.T.M.G. 2015* (Poitiers, Avril 2015). [http://gtmg2015.conference.univ-poitiers.fr/programme\\_details](http://gtmg2015.conference.univ-poitiers.fr/programme_details).
- [GDB15b] GARNIER L., DRUOTON L., BÉCAR J. P. : Points massiques, hyperbole et hyperboloïde à une nappe. In *G.T.M.G. 2015* (Poitiers, Avril 2015). [http://gtmg2015.conference.univ-poitiers.fr/programme\\_details](http://gtmg2015.conference.univ-poitiers.fr/programme_details).
- [GDL12] GARNIER L., DRUOTON L., LANGEVIN R. : Subdivisions itératives d'arcs d'ellipses et d'hyperboles et application à la visualisation de cyclides de Dupin. *Revue Electronique Francophone d'Informatique Graphique*. Vol. 6, Num. 2 (2012), 1–36.
- [PT95] PIEGL L., TILLER W. : *The NURBS book*. Monographs in visual communication. Springer, 1995.

## A Points massiques et coordonnées homogènes

La figure 5 montre trois coniques affines obtenues à partir des mêmes points de contrôle projectifs. Les points de contrôle de  $\gamma_1$  ont pour coordonnées homogènes :

$$\begin{cases} ((-5;0);1) \\ ((0;3);0) \\ ((5;0);1) \end{cases}$$

Les points de contrôle de  $\gamma_2$  ont pour coordonnées homogènes :

$$\begin{cases} ((-5;0);1) \\ ((0;4);0) \\ ((5;0);1) \end{cases}$$

Les points de contrôle de  $\gamma_3$  ont pour coordonnées homogènes :

$$\begin{cases} ((-5;0);1) \\ ((0;3);0) \\ ((25;0);5) \end{cases}$$

Le premier point de contrôle est le même dans les trois cas. Le deuxième point de contrôle est toujours dans la même classe d'équivalence :

$$\begin{matrix} \bullet \\ ((0;1);0) \end{matrix}$$

et il en est de même pour le dernier point de contrôle, sa classe d'équivalence est :

$$\begin{matrix} \bullet \\ ((5;0);1) \end{matrix}$$

Naturellement, les trois courbes  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  sont les mêmes dans l'espace projectif, mais la courbe obtenue dans l'espace affine dépend du choix du représentant de la classe d'équivalence ! Que dirait-on si nous avions :

$$1 + \frac{1}{2} \neq 1 + \frac{2}{4}$$

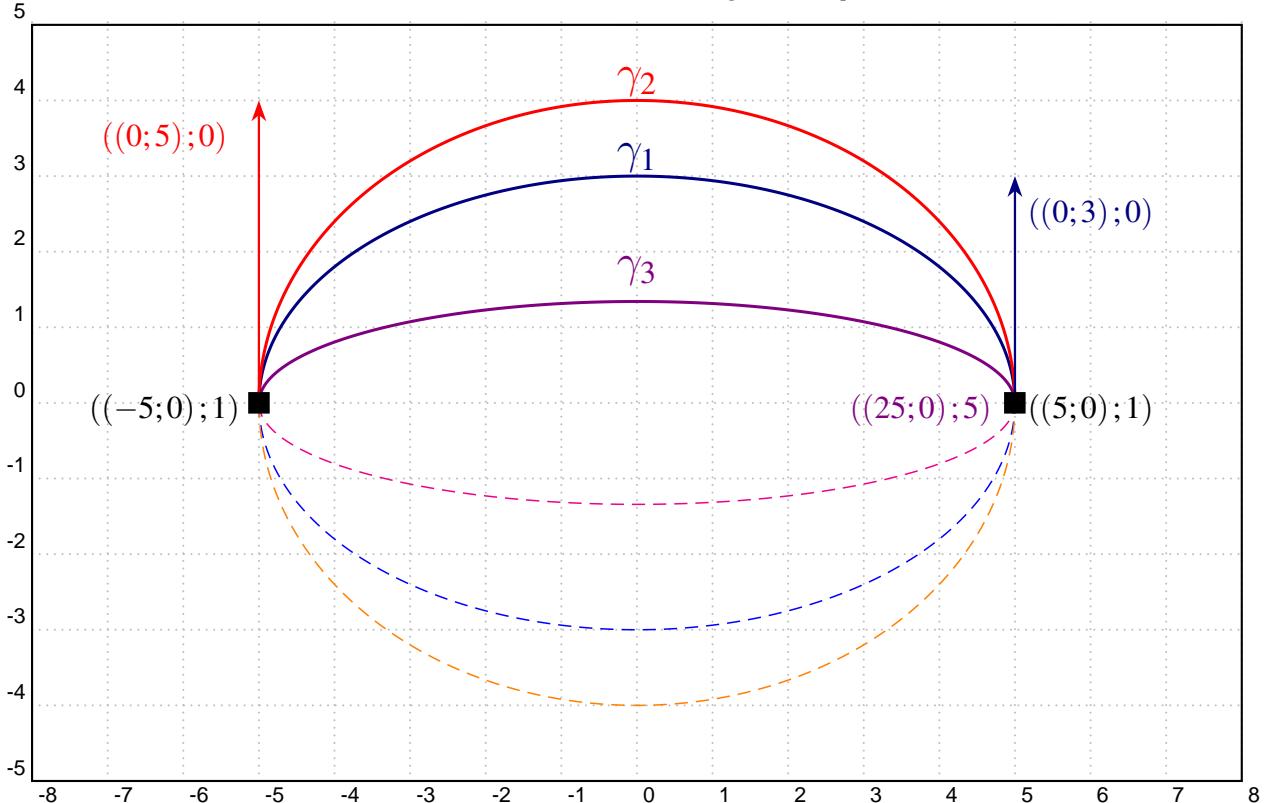
Considérons la similitude de centre  $O(0;0)$  de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ . Sa matrice en coordonnées homogènes est :

$$\tilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $\vec{u}(x;y)$  a pour coordonnées homogènes  $(x;y;0)$  d'où :

$$\tilde{\mathcal{M}} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix}$$

et l'image de  $\vec{u}(x;y)$  est  $\vec{v}(x-y;x+y)$ . Nous avons aussi :



**Figure 5:** Trois coniques affines distinctes modélisés par des courbes de Bézier rationnelles quadratiques ayant les mêmes points de contrôle projectifs.

$$\begin{aligned} \ddot{M} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x+y \\ -x-y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'image de  $\vec{u}$  est aussi  $-\vec{v}(-x+y; -x-y)!!!$

**L'image d'un vecteur dépend du représentant de la matrice.**

L'image du vecteur  $\vec{u}$  est tout vecteur  $\lambda \vec{u}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Comme les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\lambda \vec{u}$  sont dans la même classe d'équivalence, le résultat est cohérent du point de vue projectif. Remarquons que c'est un peu étrange de parler de similitude dans un espace projectif où il n'y a ni métrique ni angle !

Le problème ne se pose avec les points massiques puisque cet espace n'est pas un espace quotient. De plus, nous pouvons munir l'espace de n'importe quelle forme quadratique et répondre à la question suivante : combien peut-on tracer de cercles passant par deux points donnés  $P_0$  et  $P_2$  et ayant

des tangentes parallèles en ces points ? La figure 6 montre deux cercles et un pseudo-cercle répondant à la question précédente. Le demi-cercle  $\gamma_1$ , de points de contrôle  $(P_0;1)$ ,  $(\vec{P}_1;0)$  et  $(P_2;1)$ , est euclidien, de rayon 3 i.e. la forme quadratique est :

$$\mathcal{Q}(x \vec{i} + y \vec{j}) = x^2 + y^2$$

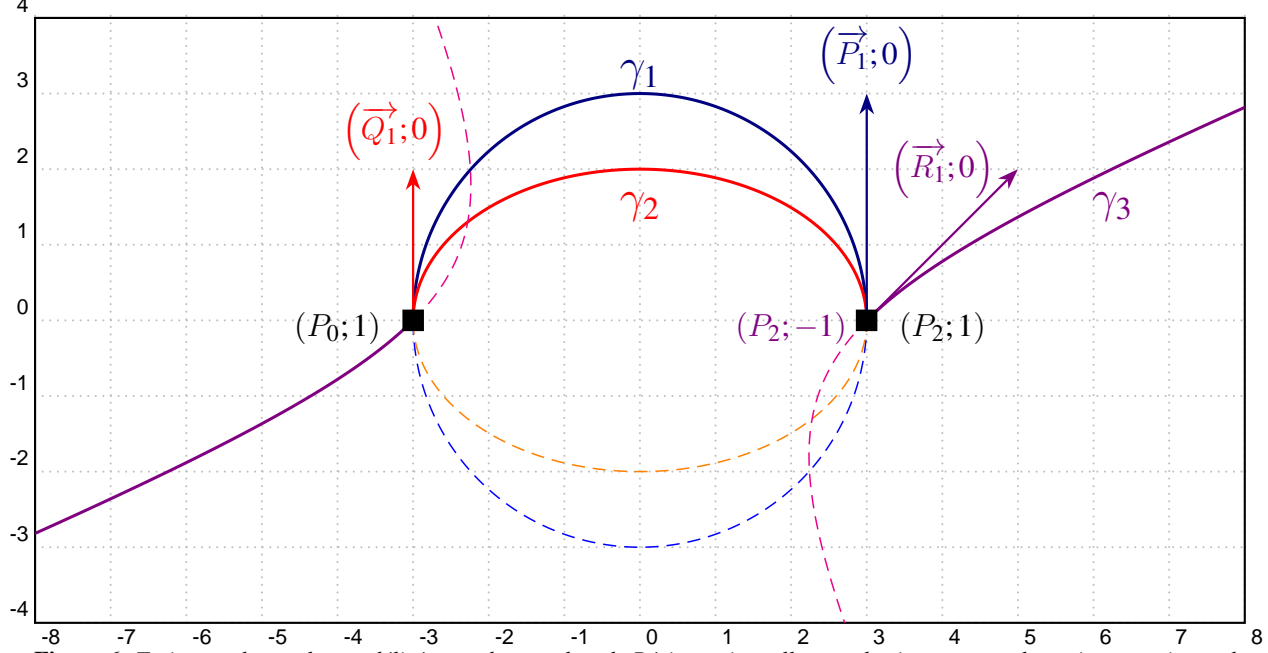
tandis que le demi-cercle  $\gamma_2$ , de points de contrôle  $(P_0;1)$ ,  $(\vec{Q}_1;0)$  et  $(P_2;1)$ , a un rayon de 3 pour la forme quadratique :

$$\mathcal{Q}_2(x \vec{i} + y \vec{j}) = x^2 + \frac{y^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

Notons que ce cercle se trace comme une ellipse. Le pseudo-demi-cercle  $\gamma_3$ , de points de contrôle  $(P_0;1)$ ,  $(\vec{R}_1;0)$  et  $(P_2;-1)$ , a un rayon de 3 pour la forme quadratique :

$$\mathcal{Q}_3(x \vec{i} + y \vec{j}) = x^2 - y^2$$

Notons que ce cercle se trace comme une hyperbole et que le vecteur  $\vec{R}_1$  est un vecteur isotrope pour la forme quadratique  $\mathcal{Q}_3$ .



**Figure 6:** Trois pseudo-cercles modélisés par des courbes de Bézier rationnelles quadratiques ayant des points massiques de contrôle.

Notons que dans tous les cas, la courbe de Bézier rationnelle quadratique de points massiques de contrôle  $(P_0; \omega_0)$ ,  $(\vec{P}_1; 0)$  et  $(P_2; \omega_2)$ , avec  $\omega_0 \omega_2 \neq 0$  est un pseudo-demi-cercle pour la forme quadratique  $\mathcal{Q}_p$  si et seulement si nous avons la relation :

$$\omega_0 \omega_2 \mathcal{Q}_p(\overrightarrow{P_0 P_2}) = 4 \mathcal{Q}_p(\vec{P}_1)$$