LIFPF – Programmation fonctionnelle
TD1 – introduction au λ-calcul

Licence informatique UCBL – Printemps 2023–2024

Exercice 1 : Typage et évaluation en λ-calcul

1. Pour chacune des λ-expressions suivantes, donner son type en supposant que le seul type primitif est `number` puis l'évaluer *en explicitant chaque β-réduction*. Si l'expression n'est pas typable, expliquer pourquoi. On supposera que l'addition notée $+$ a pour type `number` $\to$ `number` $\to$ `number` et se réduit par calcul arithmétique usuel, de même que pour la multiplication notée $*$. Par exemple, $(\lambda x.x + 3)\ 2$ a pour type `number` et peut se réduire en $(\lambda x.x + 3)\ 2 \overset{x}{\rightsquigarrow} 2 + 3 \rightsquigarrow 5$
   1. $(\lambda x.\lambda y.(x + y))\ 3\ 4$
   2. $(\lambda x.\lambda y.(x\ y))\ 3\ 4$
   3. $\lambda x.(x\ x)$
   4. $(\lambda x.\lambda y.(y\ (x + 2)))\ 5\ (\lambda z.(z * 3))$
   5. $(\lambda x.((\lambda y.(x + y))\ x))\ 5$
   6. $(\lambda x.((x\ (\lambda y.(y + 2))) + (x\ (\lambda z.(z * 3)))))\quad ((\lambda u.\lambda w.(w\ u))\ 5)$
   7. $(\lambda x.\lambda y.(x\ y))(\lambda z.z)$
   8. $\lambda x.(x + 3)(\lambda y.y)$
   9. $(\lambda x.\lambda y.x)$
   10. $(\lambda x.\lambda y.x)\ 3$
   11. $(\lambda x.\lambda y.(y\ (3 + x)))\ 4\ (\lambda z.(z * 2))$
   12. $(\lambda x.((\lambda y.(y * x))\ x))\ 5$
2. Donner deux séquences de réductions *différentes* de l'expression $(\lambda x.x + 5)((\lambda z.z)\ 2)$

Exercice 2 : Pour aller plus loin : codage des booléens dans le λ-calcul

Dans cet exercice on va s'intéresser au codage des booléens en λ-calcul pur appelé *booléens de Church*. Dans ce codage, les valeurs de vérités sont *des fonctions* et les fonctions booléennes des *fonctions d'ordre supérieur*. On définit les termes suivants qui représentent « vrai », « faux » et la fonction « et » :

— $\mathbf{T} = \lambda x.\lambda y.x$
— $\mathbf{F} = \lambda x.\lambda y.y$
— $\mathbf{AND} = \lambda x.\lambda y.((x\ y)\ \mathbf{F})$, soit $\lambda x.\lambda y.x\ y\ \mathbf{F}$ avec les parenthèses implicites

1. Vérifier les réductions suivantes

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AND}(\mathbf{T})(\mathbf{T}) &\rightsquigarrow \mathbf{T}\\
\mathbf{AND}(\mathbf{T})(\mathbf{F}) &\rightsquigarrow \mathbf{F}\\
\mathbf{AND}(\mathbf{F})(\mathbf{T}) &\rightsquigarrow \mathbf{F}\\
\mathbf{AND}(\mathbf{F})(\mathbf{F}) &\rightsquigarrow \mathbf{F}
\end{aligned}
$$

2. Quelle est la fonction booléenne associée à $\textbf{XXX} = \lambda x.\lambda y.x\ y\ x$?
3. Qu'est ce qui se passe quand on évalue $\textbf{AND}\ x\ y$ où x ou y n'est *pas* la représentation d'un booléen ?
4. Donner une représentation de la fonction booléenne « non ».
5. Donner une représentation de la fonction booléenne « ou ».
6. Montrer que le terme $\textbf{IF} = \lambda x.x$ permet de représenter l'instruction conditionnelle `IF cond THEN M ELSE N`.