LIFO65 - Analyse de données

TD1

Exercise 1 :

Soit un ensemble E de 8 clients définis dans $\mathbb{R}^2$ (2 produits). Les clients possèdent tous la même importance égale à 1. Ils sont séparés en 2 profils A1 et A2.

Client	Produit 1	Produit 2	Groupe
C1	3	0	1
C2	0	1	1
C3	1	1	1
C4	0	2	1
C5	4	2	2
C6	2	3	2
C7	4	3	2
C8	2	4	2

1. Calculer le centre de gravité de E et la matrice G des centres de gravité de $A1$ et $A2$.
2. Calculer la matrice centrée $\hat{X}$ et les matrices centrées ($\hat{Y}$ et $\hat{Z}$) des groupes $A1$ et $A2$.
3. Calculer la matrice d'inertie totale T.
4. Calculer la matrice d'inertie intra-groupes W et la matrice inter-groupe B.
5. Calculer l'inertie totale supportée par la direction de coordonnées $(1, 1)$.
6. Calculer le pouvoir discriminant de cette direction.
7. Calculer l'inertie de E par rapport au client c de coordonnées $(1, -1)$.

Exercise 2 :

Soient les 6 vecteurs lignes représentant 6 clients $\{x_i\}_{i=1}^{6}$ dans $\mathbb{R}^3$ (3 produits) muni de la métrique euclidienne usuelle et $m_i = 1$, $i = 1, \ldots, 6$. Dans la matrice des données : 1 : positif ; 0 : Indifférent et -1 : négatif

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice $V = \sum_{i=1}^{6} m_i x_i^T x_i$
2. Calculer l'inertie I_0 du nuage des points par rapport à l'origine.
3. Calculer les valeurs propres de V.
4. Trouver le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$.
5. Trouver les vecteurs propres orthonormés de V associés aux valeurs propres non nulles de V.
6. Représenter graphiquement le nuage des points dans le sous-espace engendré par ces 2 vecteurs.

Solution

Exercise 1 :

1. Le centre de gravité de E se calcule en faisant la moyenne des coordonnées de tous les clients :

$$\text{Centre de gravité de } E = \left(\frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} x_i, \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} y_i \right)$$

   où (x_i, y_i) sont les coordonnées du client C_i.

   La matrice G des centres de gravité de $A1$ et $A2$ se calcule de la manière suivante :

$$G = \begin{pmatrix} \bar{x}_{A1} & \bar{y}_{A1} \\ \bar{x}_{A2} & \bar{y}_{A2} \end{pmatrix}$$

   où $\bar{x}_{A1}$ et $\bar{y}_{A1}$ sont les coordonnées du centre de gravité de $A1$, et $\bar{x}_{A2}$ et $\bar{y}_{A2}$ sont les coordonnées du centre de gravité de $A2$.

2. La matrice centrée $\hat{X}$ se calcule en soustrayant le centre de gravité de E à chaque client. Les matrices centrées $\hat{Y}$ et $\hat{Z}$ se calculent de la même manière pour les groupes $A1$ et $A2$.
3. La matrice d'inertie totale T se calcule en faisant la somme des produits externes des vecteurs centrés.
4. La matrice d'inertie intra-groupes W se calcule en faisant la somme des matrices d'inertie pour chaque groupe $A1$ et $A2$. La matrice inter-groupe B se calcule en soustrayant la matrice W de la matrice T.
5. L'inertie totale supportée par la direction de coordonnées $(1, 1)$ se calcule en projetant chaque client sur cette direction et en faisant la somme des carrés des distances.
6. Le pouvoir discriminant de cette direction se calcule en prenant le rapport de l'inertie inter-groupes sur l'inertie totale.

7. L'inertie de E par rapport au client c de coordonnées $(1, -1)$ se calcule en projetant c sur la droite passant par l'origine et $(1, -1)$ et en faisant la somme des carrés des distances.

Exercice 2 :

1. La matrice V se calcule en faisant la somme des produits externes des vecteurs x_i.
2. L'inertie I_0 du nuage des points par rapport à l'origine se calcule en faisant la somme des carrés des distances de chaque point à l'origine.
3. Les valeurs propres de V se calculent en résolvant le problème aux valeurs propres $Vv = \lambda v$, où v est le vecteur propre et λ est la valeur propre.
4. Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$ se trouve en résolvant le système d'équations $Vv = 0$.
5. Les vecteurs propres orthonormés de V associés aux valeurs propres non nulles se trouvent en normalisant les vecteurs propres correspondants.
6. La représentation graphique du nuage des points dans le sous-espace engendré par les 2 vecteurs propres orthonormés se fait en projetant chaque point sur ces vecteurs et en représentant les coordonnées projetées.