

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Modelování a simulace Model pomocí celulárního automatu

12. decembra 2021

Adam Fabo (xfaboa00)
Stanislav Gabriš (xgabri18)

Obsah

1	Úvod	2
2	Fakty	3
3	Koncepcia	4
3.1	Kuramoto model	4
3.2	Rozšírenie o blikanie svetlušky	5
3.3	Rozšírenie o váhovanie svetlušiek	5
3.4	Návrat k vnútornej frekvencii	6
3.5	Zakomponovanie do celulárneho automatu	6
3.6	Okolie bunky	7
3.7	Synchronizácia modelu	8
3.8	Koeficient viazanosti	8
3.9	Koeficient svitu svetlušky	8
3.10	Počiatkové hodnoty svetlušiek	8
3.11	Spustenie programu	8
3.12	Video ukážka synchronizácie svetlušiek	9
4	Experimenty	10
4.1	Experiment 1	10
4.2	Experiment 2	11
4.3	Experiment 3	11
5	Záver	13

1 Úvod

Druhý termodynamický zákon hovorí, že všetko vo vesmíre inklinuje ku chaosu [5] a v komplexných systémoch (three body problem, double pendulum) je chaos normou. Podľa tohto tvrdenia by sa dalo očakávať, že vesmír bude chaotický a neusporiadaný. Ale aj tak môžeme pozorovať javy spontánnej synchronizácie, ako napríklad synchronizáciu metronómov, viazanú rotáciu nebeských telies alebo zladené blikanie svetlušiek na strome. [4] [7] Ako je možné, že aj napriek vlastnostiam vesmíru v ktorom žijeme, je možné pozorovať takéto fascinujúce úkazy?

Táto simulačná štúdia sa zaoberá zladeným blikaním svetlušiek *Pteroptyx malacca*, ktoré pochádzajú z Thajských lesov. Tieto svetlušky majú v určitom okolí schopnosť zosynchronizovať sa tak, aby všetky blikali naraz aj napriek rozličným počiatočným frekvenciám blikania. Simulačný model je koncipovaný na štýl celúrneho automatu, ktorý sa opiera o základy synchronizácie, ktoré položil pán Kuramoto v roku 1975 [1]. Model, ktorý tu je prezentovaný, je rozšírením Kuramoto modelu (1) o rôzne charakteristiky svetlušiek, ktoré, dúfajúc, môžu poskytnúť dodatočné informácie o tom ako a kedy dochádza k synchronizácii svetlušiek.

V kapitole 2 je vysvetlenie základnej formy Kuramoto modelu a klasifikácie a charakteristiky synchronizácie viazaných oscilátorov, ktoré sú využívané v neskorších kapitolách. Tretia kapitola sa zaoberá prezentovaním koncepcie modelu tejto simulačnej štúdie. Tu je možné dočítať sa o rozšíreniach pôvodného modelu a jeho zakomponovanie do celúrneho automatu. Štvrtá kapitola sa zaoberá experimentami ktorých zmyslom je v prvom rade zistiť, či ide modelovať synchronizáciu svetlušiek pomocou celúrneho automatu a demonštrovať synchronizáciu pri rôznych počiatočných podmienkach. V poslednej kapitole je možné sa dočítať o závere tejto modelačnej štúdie.

2 Fakty

Synchronizácia sa v prírode naturálne vyskytuje. Či už pri synchronizácii tlieskania davu, synchronizácii metronómov alebo v neposlednom rade pri blikaní svetlušiek. [4] [7] [1]

Hlavná rovnica Kuramoto modelu synchronizácie [7] [1]

$$\theta_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

Tento model pozostáva z N vzájomne rovnako viazaných oscilátorov so svojou vlastnou vnútornou frekvenciou (ω). Tieto frekvencie sú distribuované podľa nejakej pravdepodobnostnej funkcie. $K \geq 0$ udáva silu viazanosti oscilátorov a $1/N$ usmerňuje model pre $N \rightarrow \infty$. [7]

Kuramoto model je netriviálny, dokáže ukázať rôzne synchronizačné vzory a je dostatočne flexibilný aby sa dal adaptovať do rôznych situácií [1], ako napríklad synchronizácia svetlušiek.

Svetlušky sú schopné synchronizácie vďaka malým úpravám svojho cyklu blikania. [4] [6] Rôzne druhy svetlušiek využívajú rôzne mechanizmy na dosiahnutie tohto javu a to urýchlenie fázového posunu, oneskorenie fázového posunu alebo ako v prípade druhu *Pteroptyx malaccae* perfektnú synchronizáciu. [4]

Zákon prevrátených štvorcov hovorí, že intenzita svetla klesá s druhou mocnicou vzdialenosti od zdroja. [3] Pre výpočet intenzity v 2-dimenzionálnom priestore:

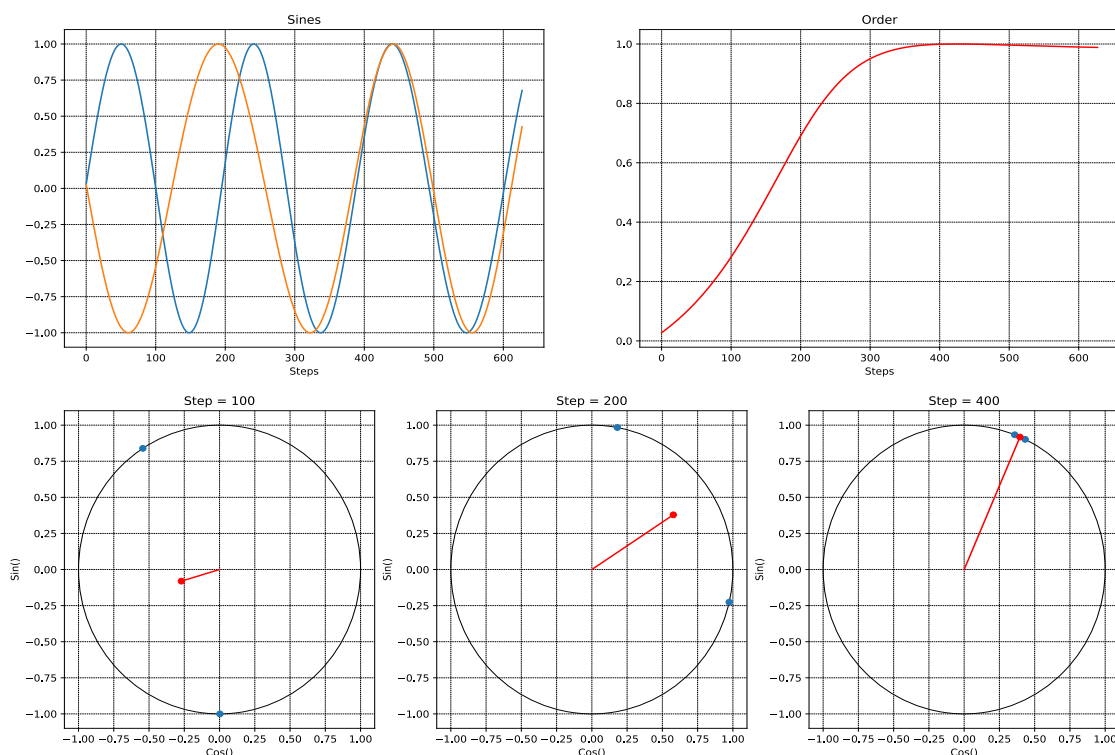
$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2)$$

3 Konceptia

Model synchronizácie svetlušiek sa dá koncipovať ako model synchronizácie previazaných oscilátorov. Svetluška, ktorá bliká, predáva informácie ostatným svetluškám o svojej frekvencii blikania, ktoré poupraví svoju frekvenciu blikania tak aby bola bližšie k frekvencii svetlušky ktorej svetlo zaregistrovali. Takýmto spôsobom je možné, že po určitom čase budú všetky svetlušky blikáť naraz [6]. Model synchronizácie, na ktorom je postavená táto simulačná štúdia sa nazýva Kuramoto model.

3.1 Kuramoto model

Základný Kuramoto model (1) robí niekoľko predpokladov [1]. Medzi ne patrí predpoklad, že sa všetky oscilátory ovplyvňujú v každom kroku a predpoklad, že sila akou sa ovplyvňujú je rovnaká medzi všetkými oscilátormi. Tento model je názorne ukázaný na správaní sa viacerých metronómov, každý s inou fázou, na pohyblivom podklade¹. Po určitom čase je možné pozorovať zosynchronizovanie metronómov.



Obr. 1: Kuramoto model

Na obrázku 1 je možné vidieť niekoľko vlastností systému oscilátorov pri Kuramoto modeli (1). V ľavom hornom rohu je možné vidieť ako sa oscilátory postupom krokov synchronizujú. Ak zakreslíme priebeh oscilátorov do komplexnej roviny, a zoberieme súčet vektorov, ktorý znorlizujeme, dostaneme vektor znázorňujúci *Poriadok*. *Poriadok* ukazuje ako dobre zosynchronizovaný je systém oscilátorov postupom krokov, a teda ideálny poriadok je 1. Na výpočet súradníc tohto vektora teda slúžia vzorce 3 [2]. V pravom hornom rohu graf ukazuje absolútnu hodnotu *Poriadku* vypočítanú podľa vzorca 4. Toto bude hlavná metrika merania synchronizácie systému v modeli.

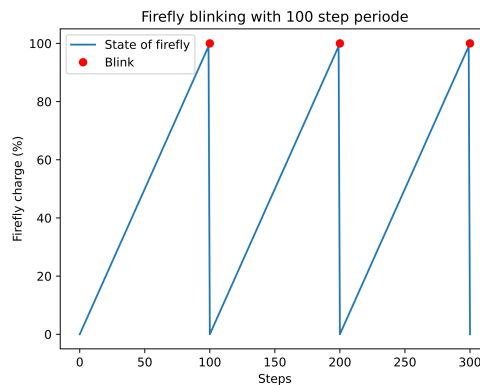
¹ Video ukazujúce synchronizáciu metronómov: <https://www.youtube.com/watch?v=Aaxw4zbULMs>.

$$x = \frac{1}{N} \sum_n \cos(\theta_n), \quad y = \frac{1}{N} \sum_n \sin(\theta_n) \quad (3)$$

$$poriadok = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4)$$

3.2 Rozšírenie o blikanie svetlušky

Model, ktorý tu je prezentovaný sa líši od modelu v štúdiu o ktorú sa táto modelačná štúdia opiera [4]. Ako je možné vidieť v kuramoto modeli (1), tak všetky oscilátory (svetlušky) sa ovplyvňujú v každom kroku. Tento predpoklad ale nie je pravdivý, pretože svetluška získava informácie iba ak registruje bliknutie inej svetlušky.

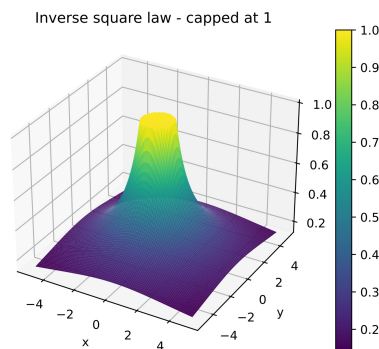


Obr. 2: Blikanie svetlušky

Možno ide tento fakt zanedbať, ale v rámci rozšírenia pôvodnej štúdie sme sa rozhodli zakomponovať aj tento poznatok. Na obrázku 2 je možné vidieť priebeh blikania jednej svetlušky, pričom svetluška blikne až po čase nabitia, pričom dĺžka nabitia je daná jej vnútorným oscilátorom. Keď svetluška blikne, tak sa vybíja a cyklus sa opakuje.

3.3 Rozšírenie o váhovanie svetlušiek

Ďalším rozdielom je riešenie väzby medzi oscilátormi. V Kuramoto modeli (1) sa všetky viazané oscilátory ovplyvňujú navzájom rovnakou silou. Keďže svetlušky v realite majú medzi sebou nenulové vzdialenosti a spôsob synchronizácie medzi nimi prebieha pomocou svetla, tak je možné modelovať aj rozptyl tohto svetla v priestore. Ako je možné vidieť z fyziky, tak intenzita svetla (energie) klesá druhou mocninou vzdialenosti od zdroja. [3]



Obr. 3: Graf zákona prevrátených štvorcov

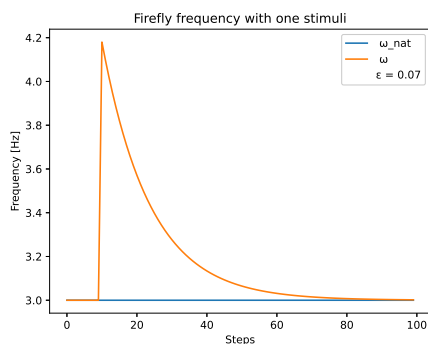
V modeli svetlušky vedia určiť koľko svetla na ne dopadlo a podľa toho upraviť svoju frekvenciu blikania (čím je zdroj svetla silnejší/bližšie tým viacej svetluška upraví svoju frekvenciu blikania). Hoci je toto modelovanie fyzikálne správne, znamenalo by to že v nulovej vzdialenosti je intenzita nekonečná. Z tohoto dôvodu je intenzita limitovaná hodnotou 1 ako je možné vidieť na obrázku 3.

3.4 Návrat k vnútornej frekvencii

Ako je možné vidieť z kuramoto modelu (1), má každá svetluška svoju vlastnú vnútornú frekvenciu ω_{nat} podľa ktorej bliká. V prípade externého stimulu (svetla z iných svetlušiek) sa však táto frekvencia mení. Ako sa zachová frekvencia blikania svetlušky, ak prestane registrovať blikanie ostatných svetlušiek? Podľa štúdie na ktorej je táto simulačná šudia založená [4], sa svetluška postupne vracia ku svojej pôvodnej frekvencii blikania podľa nasledujúceho vzorca:

$$\omega_{next} = \varepsilon(\omega_{nat} - \omega) \quad (5)$$

kde ω_{nat} predstavuje pôvodnú frekvenciu, ω súčasnú frekvenciu a ε rýchlosť akou sa oscilátor (svetluška) vracia k pôvodnej frekvencii. [4]



Obr. 4: Návrat frekvencie k ω_{nat}

Na obrázku 4 je vidieť možný graf priebehu navrátenia frekvencie svetlušky pri jednorazovom externom stimule.

3.5 Zakomponovanie do celulárneho automatu

Model celuárneho automatu pozostáva z 2-dimenzionálneho pola buniek, pričom každá bunka predstavuje jednu svetlušku. Každá bunka má v sebe uloženú vlastnú frekvenciu blikania, fázový posun a môže nadobudnúť jeden zo stavov *svieti*/*nesvieti*. Do stavu *svieti* sa dostane po uplynutí jednej periódy, tento stav si zachová po dobu jedného kroku simulácie. Počas tohto kroku ovplyvní frekvencie blikania okolitých svetlušiek, ako je znázornené v 1, a následne svetluška mení stav na *nesvieti*.

Algoritmus 1: KROK - OVPLIVNENIE

```

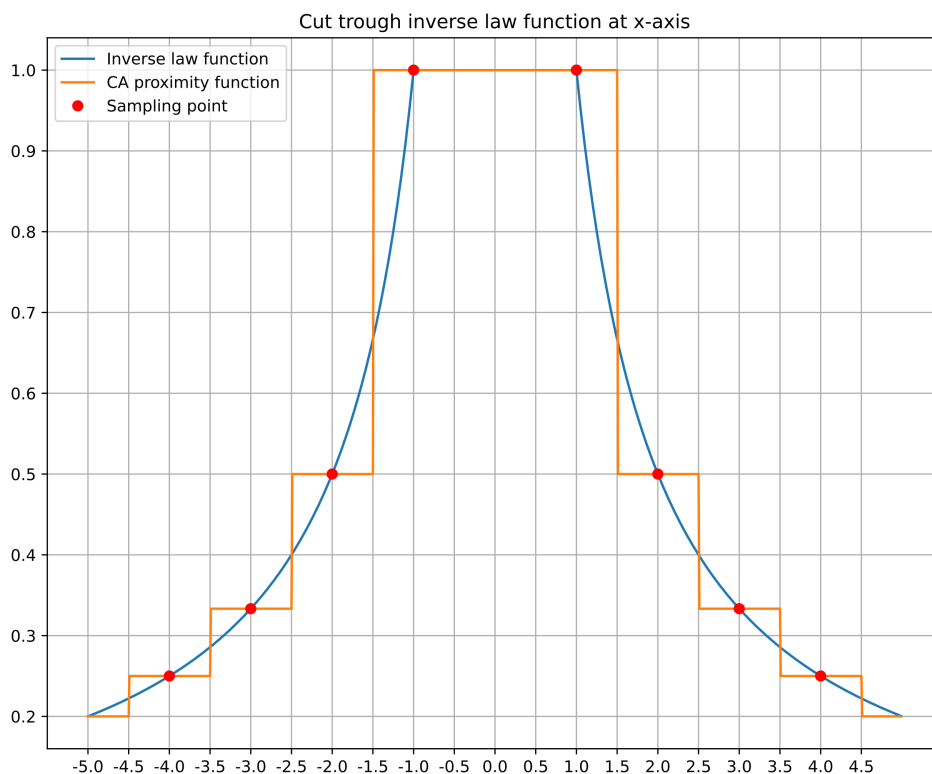
1 for Každá svetluška do
2   if Svetluška zasvietila then
3     |   Ovplyvni ostatné svetlušky
4   end if
5 end for

```

3.6 Okolie bunky

Z priamočiareho pohľadu má bunka nekonečné okolie, t.j. každá bunka má dosah na každú bunku. Čo je ale podstatné na okolí bunky sú koeficienty priradené každej bunke jej okolia. Koeficienty vychádzajú už zo spomenutého zákona prevrátených štvorcov. Lenže funkcia popisujúca tento fyzikálny jav je spojitá a treba ju namapovať na funkciu okolia bunky.

Výpočet koeficientu prebieha jednoduchým spôsobom. Najprv sa vypočítajú relatívne vzdialenosti oboch svetlúšiek na x a y ose a tieto hodnoty sa dosadia do vzorca 2.

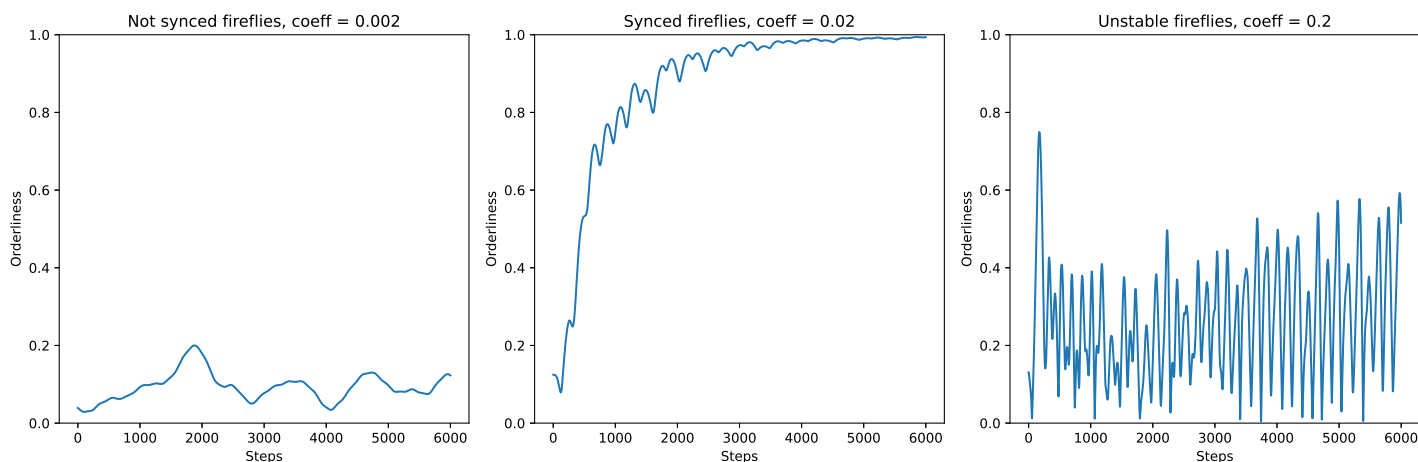


Obr. 5: Okolie

Obrázok 5 ilustruje rez funkciou na x-ovej ose a namapovanie vypočítanej hodnoty zo stredu bunky svetlušky na celú jednotkovú dĺžku.

3.7 Synchronizácia modelu

Vyhodnocovanie úspešnosti synchronizácie prebieha už podľa spomenutého výpočtu poriadku. Pokiaľ sa zoradenosť modelu blíži k jednotke, svetlušky môžeme považovať za úspešne zosynchronizované. Ak sa zoradenosť neblíži k jednotke model sa považuje za nezosynchronizovaný a ak osciluje medzi hodnotami, tak sa považuje za nestabilný. Ako príklad je uvedený obrázok 6 ktorý ukazuje 3 priebehy simulácie, pričom v jednom sú svetlušky nezosynchronizované (graf vľavo), v druhom sú zosynchronizované (graf v strede) a v treťom (graf vpravo) nestabilné.



Obr. 6: Synchronizácia pri rôznych koeficientoch

3.8 Koeficient viazanosti

Koeficient viazanosti (ďalej už len koeficient) spomenutý pri vzorci Kuramoto modelu je hlavným vstupom simulácie. Koeficient hovorí o sile viazanosti medzi oscilátormi, t.j ako moc upraví svetluška svoju frekvenciu pri rozsvietení inej svetlušky. Veľkosť koeficientu značí ako moc ideálne podmienky sú medzi svetluškami. Nízky koeficient môže znamenať napríklad hustú korunu stromu na ktorej svetlušky sedia alebo hmlu ktorá tlmi svetlo vyžarované svetluškami, ale môže znamenať aj veľké vzdialenosti medzi svetluškami. Väčší koeficient značí ideálne podmienky a moc veľký koeficient hovorí o prehnanom reagovaní svetlušiek na svetlo.

Ako je možné vidieť na obrázku 6 simulácie majú rôzne priebehy pričom sa lýšia v koeficiente viazanosti.

3.9 Koeficient svitu svetlušky

Pre zavedenie modelovania svitu svetlušky sa zaviedol do rovnice 2 koeficient m do čitateľa, ktorý hovorí o tom ako silno svetluška svieti. Stále platí, že výstupná hodnota funkcie je limitovaná hodnotou 1, ako je spomenuté v časti 3.3.

3.10 Počiatočné hodnoty svetlušiek

Ako je spomenuté v časti 3.5, tak svetlušky majú v sebe uloženú vlastnú frekvenciu blikania a fázový posun. Keďže žiadne dve svetlušky nie sú rovnaké, tak vlastné frekvencie a počiatočné fázové posuny svetlušiek sú generované náhodne pomocou normálneho rozdelenia so stredom v hodnote μ a rozptylom σ .

3.11 Spustenie programu

Program pozostáva zo súborov *fireflies.h* a *fireflies.cpp*, ktoré popisujú triedu svetluška, a z hlavného súboru *fireflies_main.cpp*, v ktorom sa nachádza funkcia *main*. Pre preklad programu slúži súbor *Makefile*

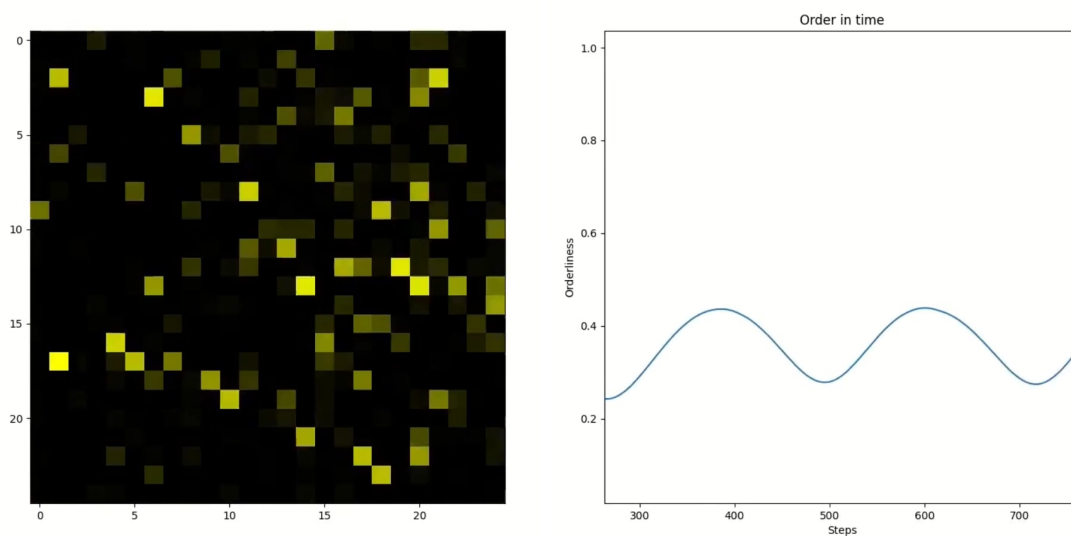
a príkaz make.

Spúšťanie programu má nasledovnú formu: `fireflies X Y KOEF MI SIGMA`

kde X a Y udávajú veľkosť pola (množstvo svetlušiek), $KOEF$ udáva silu akou sa svetlušky ovplyvňujú. Parametre MI a $SIGMA$ predstavujú strednú hodnotu a rozptyl pri normálnom rozdelení frekvencií medzi svetluškami.

3.12 Video ukážka synchronizácie svetlušiek

Názorná ukážka toho ako môže synchronizácia vyzeráť. Vľavo je možné vidieť blikanie svetlušiek, pričom pre lepšie znázornenie im bola pridaná zotrvačnosť blikania (v simulácii blikajú len po dĺžku jedného kroku). Vpravo je možné vidieť priebeh synchronizácie simulácie, pričom na začiatku svetlušky blikajú chaoticky a postupne sa dostávajú do jednotného blikania. Video má približne 1 min a je ho možné nájsť na Youtube ([Link](#)) alebo na Google Drive ([Link](#))



Obr. 7: Náhľad videa

4 Experimenty

Experimenty sú cieľené na získanie znalostí o správaní sa modelu pri rozličných počiatočných podmienkach. Prvé dva experimenty sú zamerané na normálne rozdelenie počiatočných frekvencií jednotlivých svetlušiek a zvyšné sú zamerané na koeficient viazanosti, počet svetlušiek (veľkosť pola), a intenzitu svitu svetlušky.

Experimenty majú x-ovú os udávanú v krokoch, pričom svetluška ktorá bliká rýchlosťou 1, tak blikne raz za 618 krokov ($2 \cdot \pi \cdot 100$). Jednotky sú relatívne a nepovažujeme za nevyhnutné prevádzať tieto čísla v reálnych jednotkách, keďže ani štúdia o ktorú sa opierame [4] ich neuvádza, pretože cieľom je zistiť znalosti o synchronizácii skôr ako o svetluškách ako takých.

Všetky možné vstupy simulácie:

- X → počet svetlušiek na x ose
- Y → počet svetlušiek na y ose
- coeff → sila viazanosti svetlušiek
- σ → rozptyl normálneho rozdelenia počiatočných frekvencií svetlušiek
- μ → stred normálneho rozdelenia počiatočných frekvencií svetlušiek
- m → koeficient svitu svetlušky
- ε → koeficient rýchlosti návratu k vnútornej frekvencii

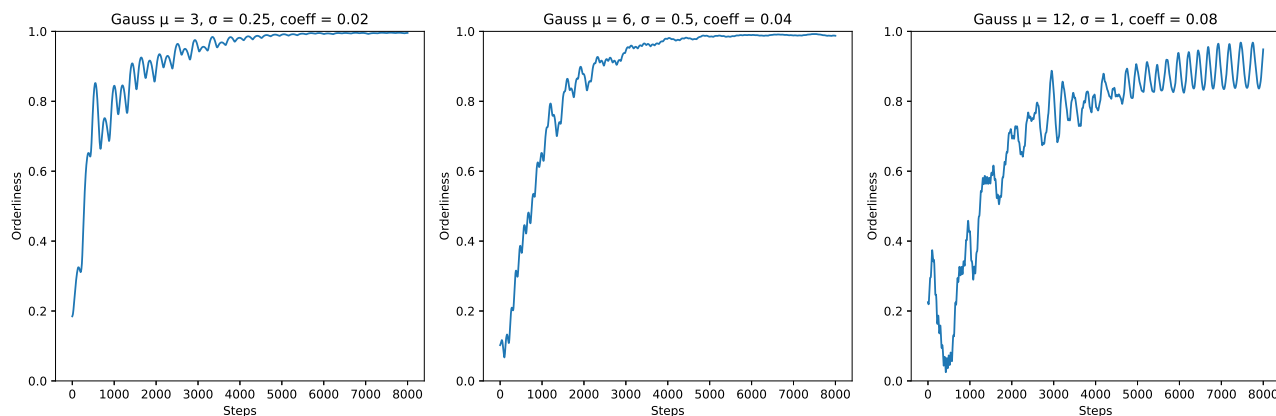
Vo všetkých experimentoch je koeficient rýchlosti návratu ε , spomenutý v časti 3.4, nastavený na hodnotu 0.1 a pole svetlušiek je tvaru štvorca, t.j. $X = Y$.

4.1 Experiment 1

Cieľom experimentu je pozrieť sa na chovanie systému pri násobkoch μ a σ určujúcich normálne rozdelenie počiatočných frekvencií svetlušiek. Násobí sa aj σ aj μ narovnať aby relatívne rozdelenie zostávalo rovnaké. Koeficient sa taktiež násobí. Hypotéza je, že sa svetlušky zosynchronizujú nezávisle na násobkoch vstupných hodnôt.

Vstupy pre experiment 1:

X	Y	coeff	μ	σ	m	ε
10	10	0.02; 0.04; 0.08	3; 6; 12	0.25; 0.5; 1	20	0.1



Obr. 8: Rôzne hodnoty σ , μ a coeff

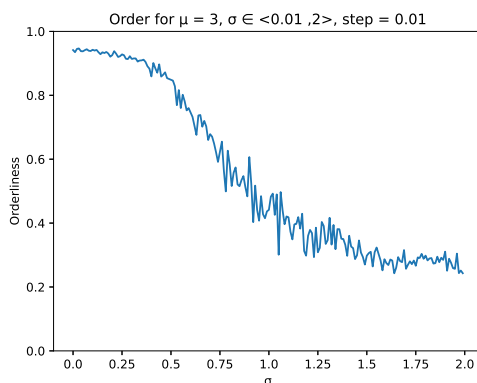
Z experimentu je vidno, že nezáleží na počiatkovej frekvencii svetlušiek. Toto tvrdenie by sme nepovažovali za absolútne, keďže charakteristiky usporiadania simulácií nie sú rovnaké. Ako je možné vidieť v obrázku 8 pri 3. simulácii dochádza k miernym osciláciám usporiadania. To by sme skôr priradili k artefaktu rozlúšenia simulácie, keďže čím vyššia frekvencia - tým menej vzorkov na periódu - tým menej presná simulácia. Preto sa v ďalších simuláciach bude pokračovať výhradne s $\mu = 3$.

4.2 Experiment 2

Cieľom experimentu je získať závislosť medzi σ normálneho rozdelenia počiatkovej frekvencie a synchronizácie, ktorú tento model nadobudne po určitom počte krokov. Hypotéza je, že s rastúcou σ bude postupne klesať zoradenosť systému. Podstatou experimentu je teda iterovať σ na určitom intervale bez zmeny ostatných koeficientov a získať priemernú hodnotu zoradenia počas behu programu. Aby sa zamedzilo štatistickým chybám, tak sa pri každej iterácii vykoná simulácia 5x a hodnoty zoradenia sa spriemerujú.

Vstupy pre experiment 2:

X	Y	coeff	μ	σ	m	ε
10	10	0.02	3	<0.01,2>	20	0.1



Obr. 9: Poriadok pri rôznych σ

Z experimentu vyplýva, že hypotéza bola správna. V ďalších experimentoch budeme pokračovať s hodnotou $\sigma = 0.25$.

4.3 Experiment 3

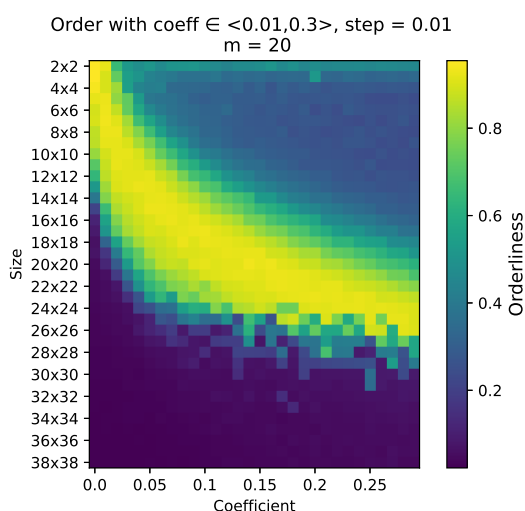
Experiment č. 3 je hlavný experiment tejto štúdie. Cieľom experimentu je pozrieť sa na správanie rôzne veľkých skupín svetlušiek pri rôznych hodnotách koeficientu sili viazanosti svetlušiek.

Vstupy pre experiment 3a:

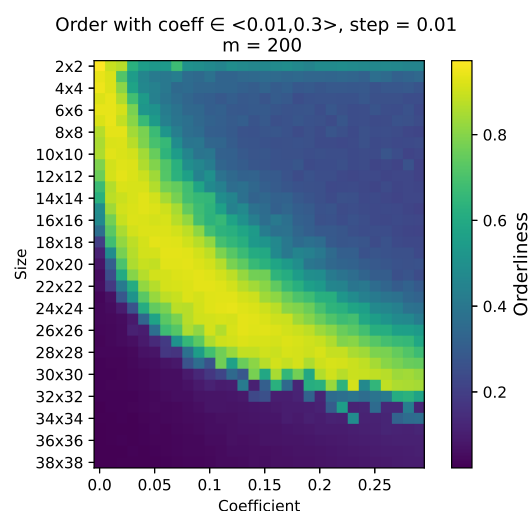
X	Y	coeff	μ	σ	m	ε
<2,38>	<2,38>	<0.01,0.3>	3	0.25	20	0.1

Výstup experimentu: Pre každú kombináciu veľkosti pola a koeficientu sili viazanosti svetlušiek sa získa priemerná hodnota zoradenosti. Pre to aby sa zamedzilo štatistickým chybám z normálneho rozdelenia, tak sa každá simulácia s každým koeficientom pustila 10-krát a výsledky sa spriemerovali. Výstupom je graf na štýl tepelnej mapy, pričom svetlé miesta na grafe značia vysokú synchronizáciu svetlušiek a tmavé malú synchronizáciu svetlušiek.

Čo je možné pozorovať na experimente 3a je, že svetlušky sa synchronizovali iba do určitého kritického počtu svetlušiek, i keď medzi nimi bola veľká viazanosť. Na základe tohto experimentu sme vykonali ďalší experiment s rovnakými parametrami ale so zmenou parametru m - sila svietenia svetlušky.



Obr. 10: Experiment 3a



Obr. 11: Experiment 3b

Vstupy pre experiment 3b:

X	Y	coeff	μ	σ	m	ε
<2,38>	<2,38>	<0.01,0.3>	3	0.25	200	0.1

V experimente je možné pozorovať, že kritický počet svetlušiek sa posunul z približne 730 (27x27) na 1100 (33x33). Dovoľme si tvrdiť, hoci čerpáme dáta iba z týchto dvoch experimentov, že zo zvyšujúcim sa koeficientom m - koeficient svitu svetlušky - sa budú svetlé miesta na grafe posúvať smerom dole, teda kritický počet svetlušiek sa bude zvyšovať.

V oboch experimentoch je možné vidieť že svetlušky, najmä pri malých počtoch, sa prestávajú synchronizovať pri zväčšujúcom sa koeficiente a začínajú oscilovať. Toto chovanie bolo už opísané v kapitole 3.7 na obrázku 6. Čo je ale zaujímavé na výsledkoch experimentov je to, že sa hranica koeficientu pri ktorom sa prestanú synchronizovať zvyšuje. Toto by sa dalo vysvetliť tým, že systém s menším počtom svetlušiek (oscilátorov) má menší moment energie a tým pádom je náchylnejší na zmeny.

Opak tohto javu je možné pozorovať pri malých koeficientoch a pri zvyšujúcom sa počte svetlušiek. Model so zväčšujúcom sa počtom svetlušiek potrebuje svetlušky s väčším koeficientom viazanosti na to aby sa svetlušky synchronizovali.

5 Záver

Myslíme si, že sme splnili prvý cieľ simulačnej štúdie a to ten, či sa synchronizácia svetlušiek dá modelovať pomocou celúrneho automatu. Taktiež máme za to, že náš model je v istom smere rozšírením štúdie o ktorú sa opierame a to v tom, že svetlušky na seba pôsobia iba v prípade ak zablikajú, a sila akou pôsobia na svoje vnútorné oslátoary je ovplyvnená aj vzájomnou vzdialenosťou medzi svetluškami.

Z prvých dvoch experimentov vyplývajú celkom priamočiare závery. Nezáleží na frekvencii blikania a čím väčšie sú rozdiely medzi frekvenciami blikania svetlušiek, tým ťažšie sa zosynchronizujú, až sa napokon nezosynchronizujú vôbec.

Z tretieho experimentu vyplýva zaujímavý poznatok, ktorý sme neočakávali a to ten, že svetlušky sa nezosynchronizujú nad istý kritický počet. Naše pôvodné predpoklady boli, že svetlušky sa zosynchronizujú nezávisle na počte, pričom pri veľkých počtoch svetlušiek by vznikali lokálne skupiny zosynchronizovaných svetlušiek a tieto skupiny by sa postupne synchronizovali až pokiaľ by sa nezosynchronizoval celý systém.

Dodatočný experiment 3b ukázal, že je možné posunúť tento kritický počet tak aby sa zosynchronizoval aj väčší počet svetlušiek. To sa teda dá dosiahnuť zväčšením svietivosti svetlušky, čo má za efekt, že jedna svetluška ovplyvňuje svetlušky vo väčšej vzdialenosti viac.

Z týchto simulačných experimentov teda vyplýva, že svetlušky *Pteroptyx malaccae* na ktorých bola táto simulačná štúdia založená musia byť evolučne naprogramované tak aby zapadali do svetlej zóny z experimentov 3a a 3b.

Literatúra

- [1] ACEBRÓN, J. A.; BONILLA, L. L.; VICENTE, C. J. P.; aj.: The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Reviews of modern physics*, ročník 77, è. 1, 2005: s. 138–183, ISSN 1539-0756.
- [2] BROCKMANN, D.; STROGATZ, S.: Ride my Kuramotocycle! [online], pub. 14. apríl 2018.
URL <https://www.complexity-explorables.org/explorables/ride-my-kuramotocycle/>
- [3] DAUNER, J.: Understanding the Inverse-Square Law of Light. [online], pub. 2. jún 2016.
URL <https://petapixel.com/2016/06/02/primer-inverse-square-law-light/>
- [4] ERMENTROUT, B.: An adaptive model for synchrony in the firefly *Pteroptyx malacca*. *Journal of Mathematical Biology*, ročník 29, è. 1, 1991: s. 571–585, ISSN 1432-1416.
- [5] LUCAS, J.: What is the Second Law of Thermodynamics? [online], pub. 22. máj 2015.
URL <https://www.livescience.com/50941-second-law-thermodynamics.html>
- [6] MAIN, D.: Every year, hundreds of thousands of fireflies begin their mating dance in the pine forests of Mexico. [online], pub. 24. máj 2019.
URL <https://www.nationalgeographic.com/animals/article/watch-how-mexican-fireflies-synchronize-light-shows>
- [7] STROGATZ, S. H.: From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*, ročník 143, è. 1, 2000: s. 1–20, ISSN 0167-2789.