

Traitement avancé du signal - Partie 1

Nicolas Boutry¹

✉ nicolas.boutry@lrde.epita.fr

¹ Laboratoire de Recherche et Développement de l'EPITA (LRDE), France

Novembre-Décembre 2023



Outline

1 Rappels sur Fourier

2 La transformée de Fourier fenêtrée

3 La transformée en ondelettes

4 Le principe d'incertitude d'Heisenberg

5 Pavages temps-fréquence

Outline

- 1 Rappels sur Fourier
- 2 La transformée de Fourier fenêtrée
- 3 La transformée en ondelettes
- 4 Le principe d'incertitude d'Heisenberg
- 5 Pavages temps-fréquence

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle d'énergie finie, on peut écrire sa transformée de Fourier :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp^{-i\omega t} dt,$$

où les coefficients $\hat{f}(\omega)$ correspondent à l'amplitude de la sinusoïde $\exp^{-i\omega t}$ dans le signal f .

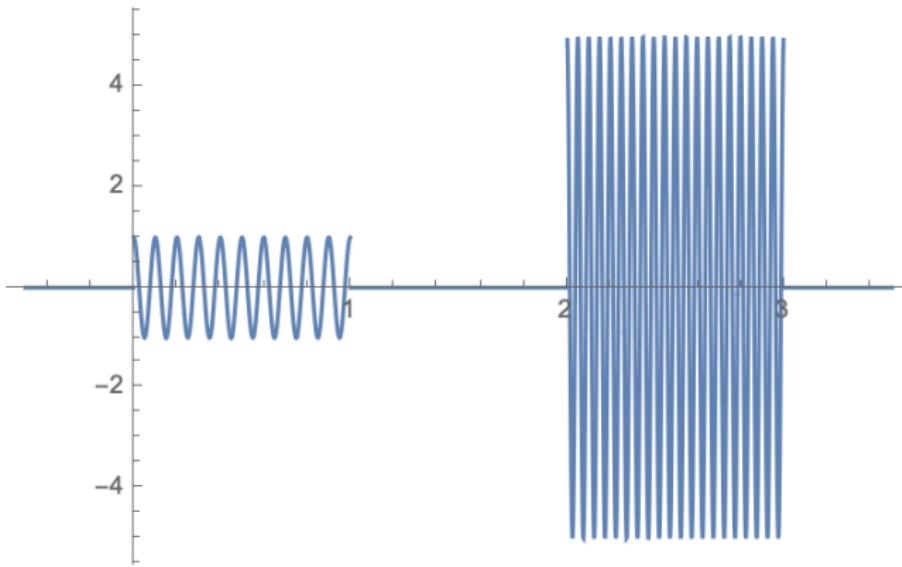
Si la transformée de Fourier de f est aussi d'énergie finie, on peut reconstruire f ainsi :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \exp^{i\omega t} d\omega.$$

La TF est un outil idéal pour la transmission ou le traitement des signaux **stationnaires**, c'est-à-dire dont les propriétés statistiques (moyenne, variance, etc.) sont constantes dans le temps.

Pour calculer une TF, on corrèle une fonction avec un signal infini dans le temps, ainsi on ne capture PAS comme il nous arrangerait l'**information transitoire** (les changements).

Menons une expérience:



On insère dans un silence deux notes de musiques "do" puis "ré" consécutivement (Signal 1).

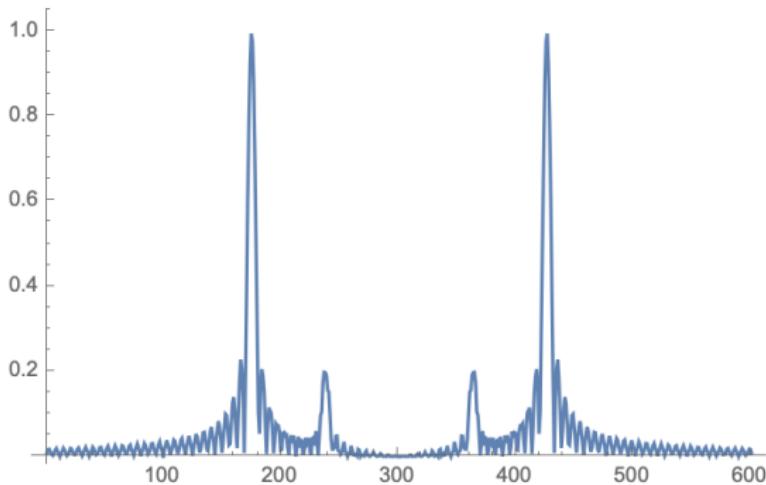


Figure: Spectre du signal 1

On calcule le spectre (module de la TF) du Signal 1.

On calcule aussi sa phase:

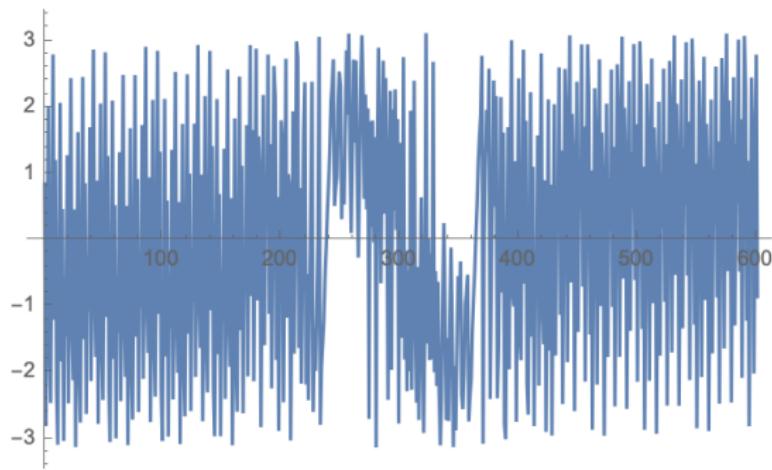


Figure: Phase du signal 1

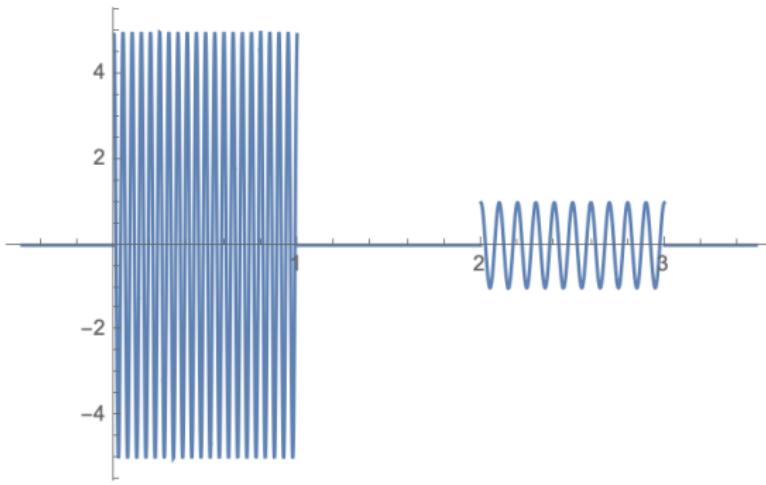


Figure: Les mêmes deux notes mais dans le sens inverse (Signal 2)

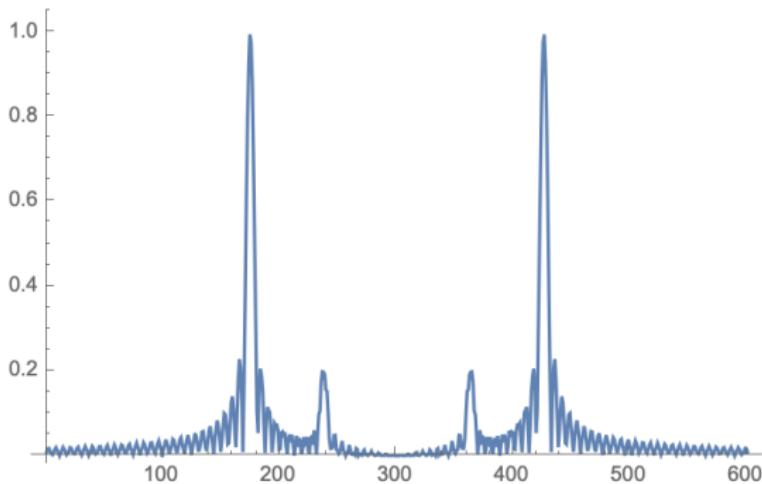


Figure: Spectre du signal 2, identique à celui du signal 1 !

Le spectre ne suffit donc pas à détecter l'inversion des fréquences dans le temps ...

On obtient les mêmes spectres (et donc les mêmes pics aux deux fréquences concernées !),
~> comment savoir dans quel ordre les deux notes ont été jouées grâce à Fourier ?

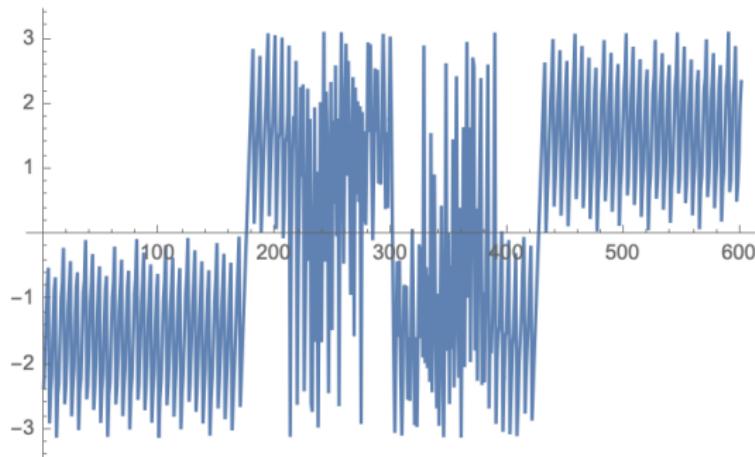


Figure: Phase du signal 2

On peut la différencier de la phase du signal 1 mais comment décrypter que l'une est la suite de fréquences f_1 et f_2 et l'autre la suite de fréquences f_2 et f_1 ?

En fait l'information permettant de savoir si on a "do" et "ré" ou "ré" et "do" est "cachée" dans la phase!

On verra plus tard comment [lire/déchiffrer](#) ce signal.

EXERCICE 1 : Les failles de Fourier

- ➊ Générez un premier signal fait d'une sinusoïde de fréquence $freq1 = 0.1$ de $t = 0$ à $t = 99$ puis d'une sinusoïde de fréquence $freq2 = 0.3$ de $t = 100$ à $t = 199$, puis un deuxième signal avec les mêmes fréquences mais dans le sens inverse.
- ➋ Faites ensuite leurs transformées de Fourier respectives, pour déduire les modules et les phases dans les 2 cas.
- ➌ Qu'observez-vous au niveau du module des deux signaux ? et de leurs phases ?
- ➍ Comment peut-on différencier ces deux signaux si l'on ne dispose que de leur transformée de Fourier ?
- ➎ Que se passe-t-il si on (re)construit le signal temporel dont le module est celui du premier signal et dont la phase est celle du deuxième signal ? (utilisez ifft) Expliquez.

EXERCICE 2 : Séparation temporelle des fréquences

- ➊ Prenez connaissance de ce qu'est une **fenêtre** en traitement du signal:
https://en.wikipedia.org/wiki/Window_function En quelques mots, une fenêtre sert à être multipliée à un signal pour localiser un petit morceau de ce signal. L'étude de cette output permettra donc un étude fréquentielle du signal d'origine mais en ce laps de temps.
- ➋ Partant du premier signal de l'exercice 1 fait d'une première partie à *freq1* puis de la deuxième partie à *freq2*, cherchez une fenêtre de Hamming qui soit suffisamment étroite pour ne pas couvrir trop de signal en même temps, et suffisamment large pour couvrir **séparément** plusieurs oscillations du morceau de sinusoïde à la fréquence *freq1* mais aussi plusieurs oscillations du morceau de la sinusoïde à la fréquence *freq2*.
- ➌ Créez une fonction qui génère une fenêtre de Hamming de largeur voulue sur un segment de taille voulu et centré en un *x* donné
- ➍ Calculez ensuite le produit "point à point" entre le signal et Hamming centrée en *t = 50* et en *t = 150*.
- ➎ Calculez séparément les transformées de Fourier de:
 - ➏ quand on a *freq1* et *freq2* dans le signal (signal d'origine)
 - ➏ quand on a seulement *freq1* (car la fenêtre n'a conservé qu'un bout de cette fréquence),
 - ➏ quand on a seulement *freq2* (car la fenêtre n'a conservé qu'un bout de cette fréquence).
- ➏ Que peut-on lire sur les modules des transformées de Fourier respectives ?
- ➐ Qu'a-t-on réussi à faire grâce à ces fenêtres ? A-t-on été capable de savoir en quelque sorte **où se trouve chaque fréquence** ? C'est-à-dire, a-t-on réussi à faire une étude temporelle et fréquentielle en même temps ?

Outline

- 1 Rappels sur Fourier
- 2 La transformée de Fourier fenêtrée
- 3 La transformée en ondelettes
- 4 Le principe d'incertitude d'Heisenberg
- 5 Pavages temps-fréquence

Supposons que l'on ait donc un atome temps-fréquence $g_{u,\xi}(t)$ centré en (u, ξ) (c'est-à-dire en u en temps et en ξ en fréquence), alors la **Transformée de Fourier à fenêtre (TFF)** est définie en terme de corrélation par :

$$S f(u, \xi) := \int_{\mathbb{R}} f(t) g_{u,\xi}^*(t) dt$$

Notons que l'on est passé d'une fonction temporelle **1D** à une fonction temps-fréquence **2D** :

temps → temps + fréquence !

Ces deux représentations (initiale et temps-fréquentielle) codent le même signal mais de façon différente.

Les intégrales:

$$\begin{aligned} S f(u, \xi) &:= \int_{\mathbb{R}} f(t) g_{u,\xi}^*(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \hat{g}_{u,\xi}^*(\omega) d\omega \end{aligned}$$

montrent que :

- Temporellement on ne considérera que les valeurs de f autour de u ,
- Fréquentiellement, on ne considérera que les valeurs de \hat{f} autour de ξ .

EXERCICE 3 : Transformée de Fourier fenêtrée et spectrogramme

On rappelle sa formule:

$$Sf(\mu, \xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g_{\mu, \xi}^*(t) dt$$

avec $g_{\mu, \xi}$ une fenêtre de Hamming de la largeur de votre choix, modulée en fréquence et translatée en temps comme vu en cours.

- ❶ Ré-implémentez là en vous aidant de l'exercice 2.
- ❷ Calculez-la pour un des signaux vus dans l'exercice 1 pour des intervalles de μ et de ξ sur lesquels cela vous paraît pertinent (autrement dit, là où l'on voit qu'il y a de l'énergie).
- ❸ Affichez l'image 2D, appelée spectrogramme, de $|Sf(\mu, \xi)|^2$ pour ces intervalles de valeurs.
- ❹ Comment repérez-vous les deux fréquences sur cette image ?
- ❺ Comparez les spectrogrammes pour les deux signaux de l'exercice 1.
- ❻ Arrivez-vous maintenant à les différencier aisément (spectralement parlant) ? C'est-a-dire, arrivez-vous à dire grâce à la transformée de Fourier si on avait *freq1* ou *freq2* en premier?
Rappel : on n'y arrivait pas avec juste le module de la transformée de Fourier dans le cours !

Outline

- 1 Rappels sur Fourier
- 2 La transformée de Fourier fenêtrée
- 3 La transformée en ondelettes
- 4 Le principe d'incertitude d'Heisenberg
- 5 Pavages temps-fréquence

La transformée en ondelettes est issue de la collaboration en 1984 de:

- Morlet ([sismologie par réflexion](#)),
- Grossman ([physique théorique](#)),
- Gabor,
- Ville,
- Wigner.

Une **ondelette** $\psi : t \in \mathbb{R} \rightarrow \psi(t) \in \mathbb{R}$ est une fonction de moyenne nulle:

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0,$$

qui est dilatée par un **paramètre d'échelle** $s > 0$ et translatée de $u \in \mathbb{R}$:

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right).$$

Cela constitue ce que l'on appelle une **famille d'ondelettes** $(\psi_{u,s})_{u,s}$

On appelle alors TFO de f à l'échelle s et à la position u la corrélation entre f et l'ondelette correspondante :

$$W f(u, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{u,s}^*(t) dt.$$

Dans le domaine fréquentiel, on obtient par la formule de Parseval :

$$W f(u, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \hat{\psi}_{u,s}^*(\omega) d\omega,$$

Regardons la TF de $\psi_{u,s}$:

$$\hat{\psi}_{u,s}(\omega) = \exp^{-iu\omega} \sqrt{s} \hat{\psi}(s\omega),$$

- ~ Le facteur d'échelle de s en temporel devient un facteur d'échelle en $1/s$ en fréquentiel !
- ~ Plus on s'étale en temps, le moins on s'étale en fréquence, et inversement.
- ~ Préservation de l'aire de la boîte d'Heisenberg en fonction de sa position !

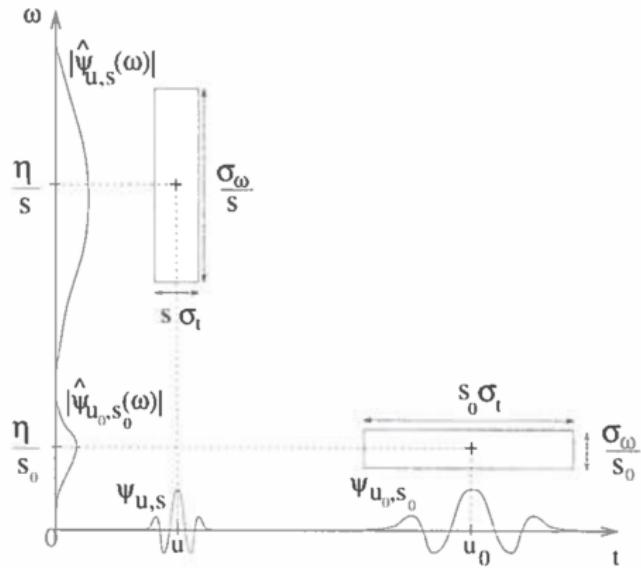
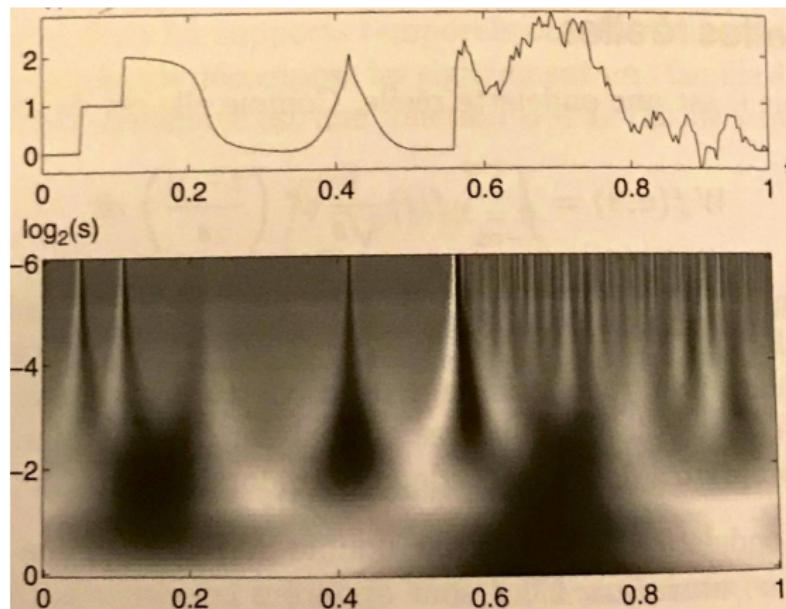


Figure: Boîtes d'Heisenberg dans le cas d'une TFO.

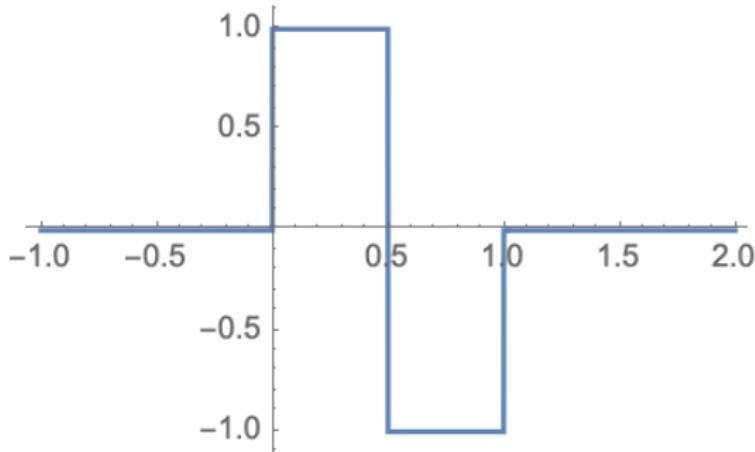
Intuition de la TFO : les **variations brutales** d'un signal impliquent de gros coefficients d'ondelettes (comme pour une dérivée !!),

Inversement, plus f est **régulière**, c'est-à-dire le moins f contient de discontinuités, plus les coefficients correspondant aux hautes fréquences décroissent:



D'un signal **1D** (c'est-à-dire f), on est passé à une représentation **2D**, que ce soit pour la TF fenêtrée $Sf(u, \xi)$ ou pour la TFO $Wf(u, s)$) \Rightarrow redondance d'information.

Exemple d'ondelette:



$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < 1/2, \\ -1 & \text{pour } 1/2 \leq t < 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Les translations et dilatations engendrent une **base orthonormale** dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$\left\{ \psi_{j,n}(t) := \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2},$$

On peut donc **décomposer** tout signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n},$$

où le **produit scalaire** $\langle f, g \rangle$ se définit par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) g^*(t) dt.$$

On obtient donc une formule de **reconstruction** de f à partir de sa TFO !

EXERCICE 4 : Transformée en ondelettes et scalogramme I

- 1 Générez un signal $s(x)$ pour $x \in [0, L - 1]$ avec $L = 600$ de la forme :

$$s(x) = \begin{cases} \text{Sign}(\sin(0.001 * x^2)) & \text{de } 0 \text{ à } L/3 - 1, \\ 0 & \text{de } L/3 \text{ à } 2*L/3 - 1, \\ \text{Sign}(\sin(0.0003 * (x - 2 * L/3)^2)) & \text{de } 2*L/3 \text{ à } L-1 \end{cases}$$

pour lequel vous observerez que le comportement varie très fortement dans le temps (non stationnarité en plus des discontinuités).

- 2 On rappelle l'ondelette mère (centrée) de Haar :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -1/2 \leq t < 0, \\ -1 & \text{pour } 0 \leq t < 1/2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ainsi que sa paramétrisation pour $\gamma = 0.125$ fixé :

$$\left\{ \psi_{j,n}(t) := \frac{1}{\sqrt{2^{\gamma*j}}} \psi\left(\frac{t-n}{2^{\gamma*j}}\right) \right\}_{(j,n)},$$

avec $j \in \mathbb{N}^*$, $n \in [0, L - 1]$ et $t \in [0, L - 1]$. Vous noterez deux différences par rapport au cours : (1) on travaille en puissances de 2^γ pour afficher une TFO plus progressive que si on avait choisi des échelles dyadiques (on a donc redondance !), et (2) le décalage temporel se fait directement sur t (pour faciliter l'interprétation finale).

EXERCICE 4 : Transformée en ondelettes et scalogramme II

- ❸ Calculez alors pour les échelles j allant de 1 à 32 chaque séquence $(Tf(j, n))_{n \in [0, L-1]}$ avec :

$$Tf(j, n) = \int_0^{L-1} f(t) \psi_{j,n}^*(t) dt,$$

et observez-les. Observez par la même occasion l'image 2D $(Tf(j, n))_{j,n}$ (TFO).

- ❹ Y a-t-il un lien entre la dérivée temporelle du signal que vous étudiez et le signal $(Tf(j, n))_n$ quand j est fixé ? Si oui, pourquoi ?

Note : on rappelle que sous certaines conditions d'évanescence de deux fonctions u et v :

$$\int u(t)v'(t)dt = - \int u'(t)v(t)dt,$$

et que l'ondelette de Haar est à peu de choses près la dérivée d'une fonction porte !

- ❺ Calculez ensuite le scalogramme, c'est-à-dire le module au carré de la transformée en ondelettes :

$$(|Tf(j, n)|^2)_{j,n}$$

et remarquez que lorsqu'on l'affiche en 2D (c'est-à-dire le décalage n en x et l'échelle j en y), on peut suivre l'évolution des discontinuités dans le temps.

EXERCICE 4 : Transformée en ondelettes et scalogramme III

- 6 Changez la valeur maximale de j par 73 (normalement, au delà, votre ondelette sort du support), et observez l'étalement des coefficients des grandes pentes (gros coefficients) au fur et à mesure que l'échelle croît.
- 7 Notez que plus les grandes pentes du signal sont proches dans le temps, plus elles rentrent vite en "conflit" dans le scalogramme (souci de visibilité), d'où l'intérêt de pouvoir lire les coefficients à plusieurs échelles.
- 8 Recherchez visuellement les maxima locaux dans l'espace 2D du scalogramme, et déduisez-en à peu près le nombre de pentes détectées par la TFO que donnerait un algorithme de recherche de maxima locaux dans l'espace temps-fréquence.
- 9 Observez que ces maxima locaux ne sont pas tous à la même échelle, et ainsi une forte pente est parfois mieux détectée à une échelle plutôt qu'à une autre. De quoi cela peut-il dépendre ? (pensez intercorrélations et donc matching de pattern).

Outline

- 1 Rappels sur Fourier
- 2 La transformée de Fourier fenêtrée
- 3 La transformée en ondelettes
- 4 Le principe d'incertitude d'Heisenberg
- 5 Pavages temps-fréquence

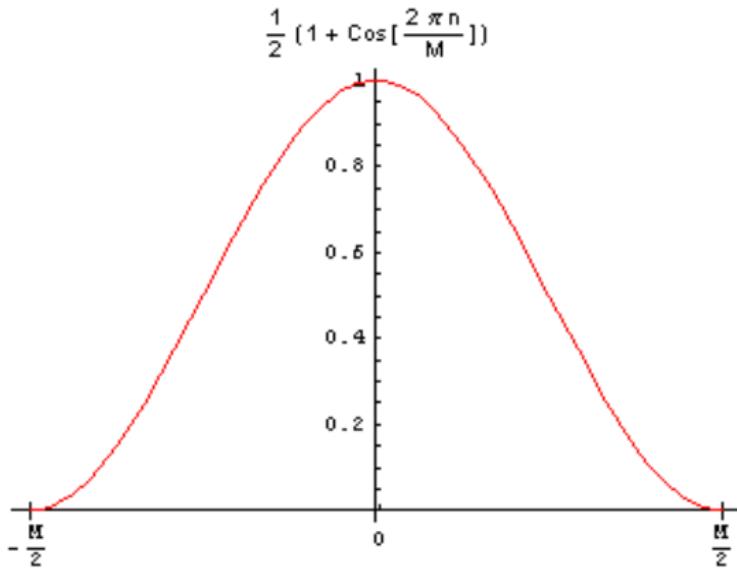
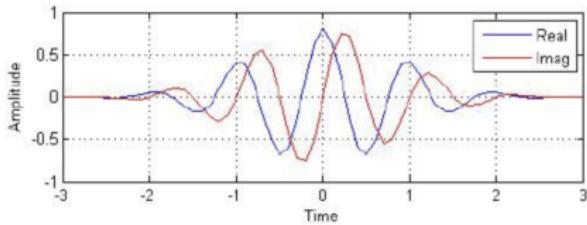


Figure: Fenêtre de Hanning

Une **fenêtre** en traitement du signal est une fonction à support compact, symétrique autour du milieu de ce support, généralement maximale ou près de son maximum au centre, et évanescante.

Observons $g(t) \exp^{i\xi t}$:



De cette fenêtre, on peut déduire l'atome de Gabor par exemple:

$$g_{u,\xi}(t) = g(t - u) \exp^{i\xi t}.$$

Cet atome est centré temporellement en u .

De plus, par la TF de cet atome, on obtient :

$$\hat{g}_{u,\xi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \xi) \exp^{-iu(\omega - \xi)},$$

Ainsi, cet atome est centré fréquentiellement en ξ .

Soit les **étalements** temporels/fréquentiels:

$$\sigma_t = \text{StandardDeviation}(|g(t)|^2),$$

$$\sigma_\omega = \text{StandardDeviation}(|\hat{g}(\omega)|^2),$$

alors l'étalement de l'énergie de l'atome dans le plan temps-fréquence est symboliquement représenté par un **rectangle d'Heisenberg** de centre (u, ξ) , de largeur temporelle σ_t et de largeur fréquentielle σ_ω .

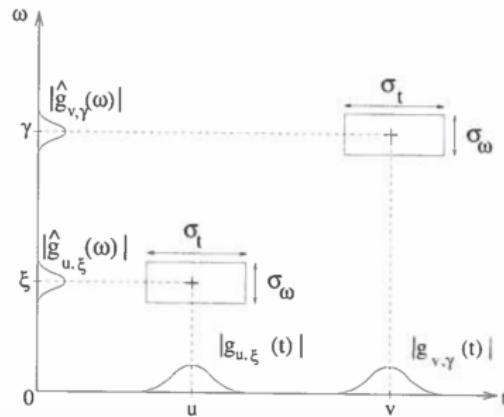


Figure: Diagramme d'Heisenberg d'une TFF

Principe d'incertitude d'Heisenberg : les énergies d'une fonction et de sa transformée de Fourier ne peuvent être concentrées en même temps sur des intervalles arbitrairement petits:

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}.$$

Autrement dit : une grande **précision** en temps \Rightarrow faible précision en fréquence, et inversement !

Exemple 1 : un Dirac temporel $\delta(t - t_0)$ est concentré temporellement en t_0 mais son spectre est à support infini (et ne décroît même pas dans le temps !).

Exemple 2 : un Dirac fréquentiel $\delta(\omega - \omega_0)$, c'est à dire une sinusoïde temporelle $\exp^{-j\omega_0 t}$, a son énergie centrée en ω_0 mais son module vaut 1 partout dans le temps !

Outline

- 1 Rappels sur Fourier
- 2 La transformée de Fourier fenêtrée
- 3 La transformée en ondelettes
- 4 Le principe d'incertitude d'Heisenberg
- 5 Pavages temps-fréquence

Pavages temps-fréquence I

Complétude d'une base: on peut représenter tout signal par une combinaison linéaire de vecteurs de cette base,

Ceci s'observe par le **pavage** des boîtes d'Heisenberg de l'espace temps-fréquence,

Orthogonalité d'une base : le produit scalaire de deux vecteurs différents est nul,

Ceci s'observe par le fait que les boîtes d'Heisenberg ne se recouvrent pas dans l'espace temps-fréquence.

Ainsi, on représente la **complétude** et l'**orthogonalité** des bases d'ondelettes par un pavage du plan temps-fréquence avec les **boîtes d'Heisenberg** correspondantes,

Pavages temps-fréquence II

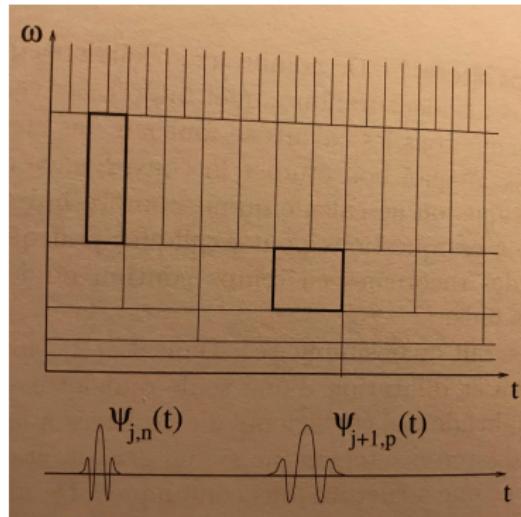


Figure: Pavage temps-fréquence d'une base d'ondelettes dyadiques

Pavages temps-fréquence III

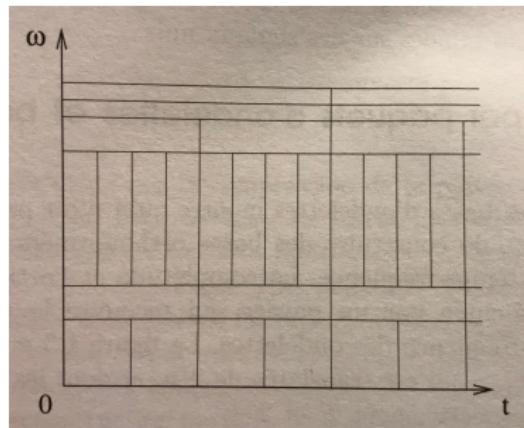


Figure: Pavage temps-fréquence d'une base de paquets d'ondelettes (adaptativité)

Pavages temps-fréquence IV

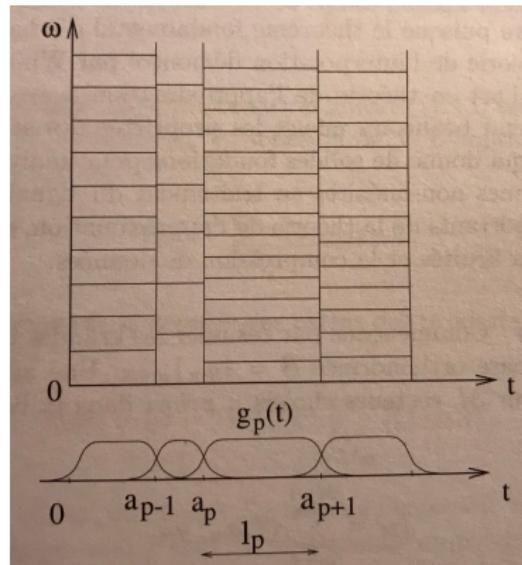


Figure: Pavage temps-fréquence d'une base de cosinus locaux

Références

-  Gasquet, C. and Witomski, P. (2013).
Fourier analysis and applications: filtering, numerical computation, wavelets, volume 30.
Springer Science & Business Media.
-  Mallat, S. (1999).
A wavelet tour of signal processing.
Elsevier.
-  Mallat, S. (2009).
A wavelet tour of signal processing, The Sparse Way.
Elsevier.