Travaux pratiques de traitement d'images par ondelettes

Nicolas Boutry

2023

1 Les failles de Fourier

1. Générez un premier signal fait d'une sinusoïde de fréquence $freq1 = 0.1$ de t = 0 à t = 99 puis d'une sinusoïde de fréquence $freq2 = 0.3$ de t = 100 à t = 199, puis un deuxième signal avec les mêmes fréquences mais dans le sens inverse.

2. Faites ensuite leurs transformées de Fourier respectives, pour déduire les modules et les phases dans les 2 cas.

3. Qu'observez vous au niveau du module des deux signaux ? et de leurs phases ?

4. Comment peut-on différencier ces deux signaux si l'on ne dispose que de leur transformée de Fourier ?

5. Que se passe-t-il si on (re)construit le signal temporel dont le module est celui du premier signal et dont la phase est celle du deuxième signal ? (utilisez ifft) Expliquez.

2 Séparation temporelle des fréquences

1. Prenez connaissance de ce qu'est une *fenêtre* en traitement du signal: `https://en.wikipedia.org/wiki/Window_function` En quelques mots, une fenêtre sert à être multipliée à un signal pour localiser un petit morceau de ce signal. L'étude de cette output permettra donc un étude fréquentielle du signal d'origine mais en ce laps de temps.

2. Partant du premier signal de l'exercice 1 fait d'une première partie à $freq1$ puis de la deuxieme partie à $freq2$, cherchez une fenêtre de Hamming qui soit suffisamment étroite pour ne pas couvrir trop de signal en même temps, et suffisamment large pour couvrir **séparément** plusieurs oscillations du morceau de sinusoïde à la fréquence $freq1$ mais aussi plusieurs oscillations du morceau de la sinusoide à la fréquence $freq2$.

3. Créez une fonction qui génère une fenêtre de Hamming de largeur voulue sur un segment de taille voulu et centré en un x donné

4. Calculez ensuite le produit "point à point" entre le signal et Hamming centrée en t = 50 et en t = 150.

5. Calculez séparément les transformées de Fourier de:

   - quand on a $freq1$ et $freq2$ dans le signal (signal d'origine)
   - quand on a seulement $freq1$ (car la fenêtre n'a conservé qu'un bout de cette fréquence),
   - quand on a seulement $freq2$ (car la fenêtre n'a conservé qu'un bout de cette fréquence).

6. Que peut-on lire sur les modules des transformées de Fourier respectives ?

7. Qu'a-t-on réussir à faire grâce à ces fenêtres ? A-t-on été capable de savoir en quelque sorte **où se trouve chaque fréquence** ? C'est-à-dire, a-t-on réussi à faire une étude temporelle et fréquentielle en même temps ?

3 Transformée de Fourier fenêtrée et spectrogramme

On rappelle sa formule:

$$Sf(\mu, \xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ g^*_{\mu,\xi}(t)dt$$

avec $g_{\mu,\xi}$ une fenêtre de Hamming de la largeur de votre choix, modulée en fréquence et translatée en temps comme vu en cours.

1. Ré-implémentez là en vous aidant de l'exercice 2.

2. Calculez-la pour un des signaux vus dans l'exercice 1 pour des intervalles de μ et de ξ sur lesquels cela vous parait pertinent (autrement dit, là où l'on voit qu'il y a de l'énergie).

3. Affichez l'image 2D, appelée spectrogramme, de $|Sf(\mu, \xi)|^2$ pour ces intervalles de valeurs.

4. Comment repérez-vous les deux fréquences sur cette image ?

5. Comparez les spectrogrammes pour les deux signaux de l'exercice 1.

6. Arrivez-vous maintenant à les différencier aisément (spectralement parlant) ? C'est-a-dire, arrivez-vous à dire grâce à la transformée de Fourier si on avait $freq1$ ou $freq2$ en premier? Rappel : on n'y arrivait pas avec juste le module de la transformée de Fourier dans le cours !

4 Transformée en ondelettes et scalogramme

1. Générez un signal $s(x)$ pour $x \in [0, L-1]$ avec $L = 600$ de la forme :

$$s(x) = \begin{cases} Sign(\sin(0.001 * x^2)) & \text{de 0 à L/3 - 1,} \\ 0 & \text{de L/3 à 2*L/3 - 1,} \\ Sign(\sin(0.0003 * (x - 2 * L/3)^2)) & \text{de 2*L/3 à L-1} \end{cases}$$

   pour lequel vous observerez que le comportement varie très fortement dans le temps (non stationnarité en plus des discontinuités).

2. On rappelle l'ondelette mère (centrée) de Haar :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -1/2 \leq t < 0, \\ -1 & \text{pour } 0 \leq t < 1/2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

   ainsi que sa paramétrisation pour $\gamma = 0.125$ fixé :

$$\left\{ \psi_{j,n}(t) := \frac{1}{\sqrt{2^{\gamma * j}}} \psi\left(\frac{t-n}{2^{\gamma * j}}\right) \right\}_{(j,n)},$$

   avec $j \in \mathbb{N}^*$, $n \in [0, L-1]$ et $t \in [0, L-1]$. Vous noterez deux différences par rapport au cours : (1) on travaille en puissances de 2^γ pour afficher une TFO plus progressive que si on avait choisi des échelles dyadiques (on a donc redondance !), et (2) le décalage temporel se fait directement sur t (pour faciliter l'interprétation finale).

3. Calculez alors pour les échelles j allant de 1 à 32 chaque séquence $(Tf(j,n))_{n \in [0,L-1]}$ avec :

$$Tf(j,n) = \int_0^{L-1} f(t)\ \psi^*_{j,n}(t) dt,$$

   et observez-les. Observez par la même occasion l'image 2D $(Tf(j,n))_{j,n}$ (TFO).

4. Y a-t-il un lien entre la dérivée temporelle du signal que vous étudiez et le signal $(Tf(j,n))_n$ quand j est fixé ? Si oui, pourquoi ?

   Note : on rappelle que sous certaines conditions d'évanescence de deux fonctions u et v :

$$\int u(t) v'(t) dt = -\int u'(t) v(t) dt,$$

   et que l'ondelette de Haar est à peu de choses près la dérivée d'une fonction porte !

5. Calculez ensuite le scalogramme, c'est-à-dire le module au carré de la transformée en ondelettes :

$$(|Tf(j,n)|^2)_{j,n}$$

et remarquez que lorsqu'on l'affiche en 2D (c'est-à-dire le décalage n en x et l'échelle j en y), on peut suivre l'évolution des discontinuités dans le temps.

6. Changez la valeur maximale de j par 73 (normalement, au delà, votre ondelette sort du support), et observez l'étalement des coefficients des grandes pentes (gros coefficients) au fur et à mesure que l'échelle croît.

7. Notez que plus les grandes pentes du signal sont proches dans le temps, plus elles rentrent vite en "conflit" dans le scalogramme (souci de visibilité), d'où l'intérêt de pouvoir lire les coefficients à plusieurs échelles.

8. Recherchez visuellement les maxima locaux dans l'espace 2D du scalogramme, et déduisez-en à peu près le nombre de pentes détectées par la TFO que donnerait un algorithme de recherche de maxima locaux dans l'espace temps-fréquence.

9. Observez que ces maxima locaux ne sont pas tous à la même échelle, et ainsi une forte pente est parfois mieux détectée à une échelle plutôt qu'à une autre. De quoi cela peut-il dépendre ? (pensez intercorrélation et donc matching de pattern).

5 Pyramide Gaussienne (1D)

1. Reprenez le premier signal de la section 4 que l'on va nommer $g_0(t)$ et calculez les signaux:

$$g_i(t) = g_0(t) * \left(\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_i^2} \right) \right)_{N_1}$$

avec $\sigma_i = 2^i$ pour $i \in [1,3]$ (note : $*$ représente l'opérateur de convolution, et $(.)_{N_1}$ représente ici l'opérateur normalisation par la norme $\|\|_1$).

2. Comment appelle-t-on le signal $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}$?

3. Que représente chaque g_i fréquentiellement parlant ?

4. Combien a-t-on d'échelles ? Détaillez.

5. Concaténez ces 4 signaux et les afficher.

6 Pyramide Laplacienne (1D)

1. Reprenez l'énoncé de la section précédente mais cette fois-ci générez en plus de $g_3(t)$ les signaux:

$$h_i(t) = g_0(t) * \left((t^2 - \sigma_i^2) \ . \exp \left(\frac{-t^2}{2\sigma_i^2} \right) \right)_{N_2}$$

   pour $i \in [1, 3]$ (attention, on normalise ce coup-ci par la norme 2, cf. le N_2).

2. Comment appelle-t-on le signal $\{h_1, h_2, h_3, g_3\}$?

3. Que représente chaque h_i fréquentiellement parlant ?

4. Que représente $g_3(t)$?

5. Combien a-t-on d'échelles au total ? Détaillez.

6. Comment peut-on calculer ces 4 signaux pour minimiser les temps de calculs ?

7. Concaténez ces 4 signaux et les afficher.

7 Pyramide Laplacienne (2D)

1. Trouvez une image de votre choix de taille maximale 512 par 512.

2. Calculez sa pyramide Laplacienne comme vu en cours (en vous aidant donc des images issues de la pyramide Gaussienne) avec 3 niveaux d'échelles.

3. Rappelez ce que veulent dire les sous-images HH, HL, LH, LL.

4. De quelle image peut on se servir pour calculer plus vite les HH, HL, LH de la résolution suivante quand on augmente d'un niveau la pyramide Laplacienne ?

5. Bonus : affichez la pyramide Laplacienne en respectant les différentes échelles.

8 TFO 2D

Reprendre les fonctions 2D séparables sur x et y vues en cours (fonction d'échelle et ondelettes), et calculez la transformée d'ondelettes de Haar d'ordre 5 d'une image en niveaux de gris de votre choix. Attention à bien prendre une image de dimensions en multiple de 2^5 (paddez si besoin) pour pouvoir sous-échantillonner d'un facteur 2 à chaque étape. Profitez-en pour compresser vos images de coefficients pour étudier l'efficacité de la TFO 2D (pensez à la quantification pour l'aspect compression avec perte).

Note : pour la TFO, pensez à bien faire les calculs sur la nouvelle LL obtenue quand c'est possible (durant la récursion), pour ne pas faire des calculs inutiles.