



Analyse Numérique - MO102

1ère année Techniques Avancées

Rapport de TP1

Réalisé par :

BEN AMIRA Aziz

GASSEM Adam

Encadré par :

M. AMDOUNI Saber

Année universitaire : 2023/2024

Exercice 1 : Le schéma décentré

$$H_n(u, v, w) = \begin{cases} v - \frac{\Delta t(n)}{h}(f(v) - f(u)), & \text{si } a(v) \geq 0 \\ v - \frac{\Delta t(n)}{h}(f(w) - f(v)), & \text{si } a(v) < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Question 1 :

Dans le cas linéaire (1) $a(v) = c$, c'est une constante, le schéma s'écrit :

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} u_j^n - \frac{\Delta t(n)}{h}c(u_j^n - u_{j-1}^n), & \text{si } c \geq 0 \\ u_j^n - \frac{\Delta t(n)}{h}c(u_{j+1}^n - u_j^n), & \text{si } c < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Si c est positive, le schéma est décentré à gauche, sinon le schéma est décentré à droite. Le schéma est donc décentré quel que soit le cas.

Question 2 :

Dans le cas linéaire avec $x_0 = -2$ et $x_1 = 2$. Avec une condition initiale de type rampe, discontinue :

$$u_0(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{si } x \in [-2, -\frac{1}{2}] \\ x, & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, 1] \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases} \quad (3)$$

On va comparer la solution approchée avec la solution exacte pour $\alpha \in \{0.8, 1, 1.1\}$

FIGURE 1 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 0,8$

La solution numérique ne converge pas vers la solution exacte.

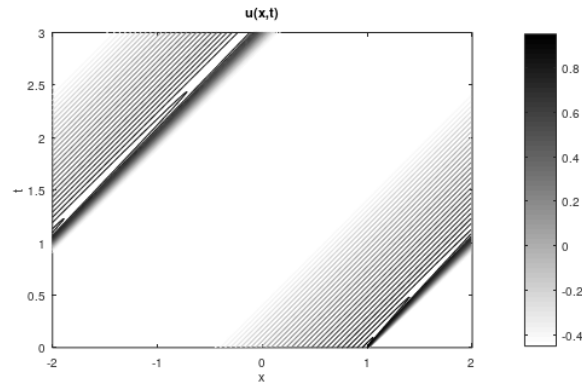


FIGURE 2 – Fibrage Correspondant

FIGURE 3 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 1$

La solution numérique converge exactement vers la solution exacte.

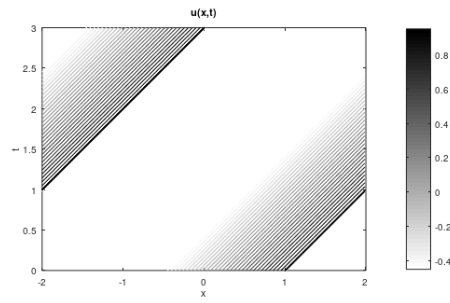


FIGURE 4 – Fibrage Correspondant

FIGURE 5 – Évolution de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 1.1$

La solution numérique ne converge pas, elle explose.

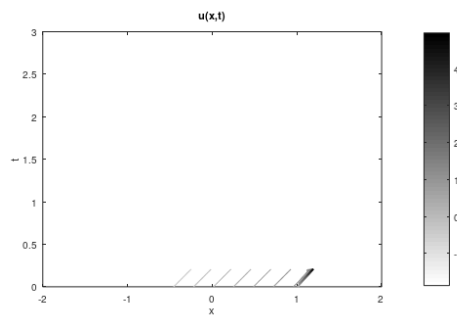


FIGURE 6 – Fibrage Correspondant

Question 3 :

On se place maintenant dans le cas non linéaire avec le flux de Bürger défini par : $f(u) = \frac{u^2}{2}$ et dans ce cas $a(u) = u$. On calcule la solution exacte et on trouve :

$$u(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{si } x < \sigma(t) \\ \frac{x}{t+1}, & \text{si } x \in [\frac{t+1}{2}, \sigma(t)] \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } x > \sigma(t) \end{cases} \quad (4)$$

Exercice 2 : Schéma conservatif

Question 1 :

Le schéma de Murman-Roe est une variante du schéma décentré qui adapte les différences finies décentrées à la direction de propagation de l'onde, ce qui permet d'améliorer la précision et la stabilité de la méthode numérique.

Question 2 :

On a :

$$g(u, v) = \begin{cases} f(u), & \text{si } \tilde{a} \geq 0 \\ f(v), & \text{si } \tilde{a} < 0 \end{cases} \quad (5)$$

avec :

$$\tilde{a}(u, v) = \begin{cases} \frac{f(u)-f(v)}{u-v}, & \text{si } u \neq v \\ f'(u), & \text{si } u = v \end{cases} \quad (6)$$

posons :

$$\tilde{a}^*(u, v) = \begin{cases} \text{signe}(f(u) - f(v)) * \text{signe}(u - v), & \text{si } u \neq v \\ \text{signe}(f'(u)), & \text{si } u = v \end{cases} \quad (7)$$

I. **Cas 1 :** si $u = v$ si $\tilde{a}(u, v) = f'(u)$ et $\tilde{a}^*(u, v) = \text{signe}(f'(u))$ alors

$$\tilde{a}(u, v) \geq 0 \Leftrightarrow f'(u) = \text{signe}(\tilde{a}^*(u, v))$$

alors

$$\tilde{a}(u, v) \geq 0 \Leftrightarrow \text{signe}(f'(u)) = \tilde{a}^*(u, v) = 0 \text{ ou } 1$$

$$\text{d'où } \tilde{a}(u, v) < 0 \Leftrightarrow \tilde{a}^*(u, v) = 0 \text{ ou } 1 \text{ et } \tilde{a}(u, v) < 0 \Leftrightarrow \text{signe}(f'(u)) = -1 = \tilde{a}^*(u, v)$$

d'où le résultat pour $u = v$

II. **Cas 2 :**

$$u \neq v : \text{si } u \neq v \text{ on a } \tilde{a}(u, v) = \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \text{ et } \tilde{a}^*(u, v) = \text{signe}(f(u) - f(v)) * \text{signe}(u - v)$$

$$\text{donc } \tilde{a}(u, v) \geq 0 \Leftrightarrow \text{signe}(f(u) - f(v)) = 0 = \text{signe}(f(u) - f(v)) * \text{signe}(u - v)$$

$$\text{ou } \text{signe}(f(u) - f(v)) = \text{signe}(u - v) \neq 0$$

$$\text{Donc } \tilde{a}(u, v) \geq 0 \Leftrightarrow \tilde{a}^*(u, v) = 0 \text{ ou } 1$$

et $(u, v) < 0 \Leftrightarrow \text{signe}(\frac{f(u)-f(v)}{u-v}) = -1$ Or $\text{signe}(\frac{f(u)-f(v)}{u-v}) = -1 \Leftrightarrow \text{signe}(f(u) - f(v)) \neq \text{signe}(u - v)$ et $\text{signe}\frac{f(u)-f(v)}{u-v} \neq 0$ donc $\tilde{a}(u, v) < 0 \Leftrightarrow \tilde{a}^* = -1$

donc on peut déduire :

$$g(u, v) = \begin{cases} f(u) & \text{si } \tilde{a}(u, v) \geq 0 \\ f(v), & \text{si } \tilde{a}(u, v) < 0 \end{cases} \quad (8)$$

avec :

$$\tilde{a}(u, v) = \begin{cases} \frac{f(u)-f(v)}{u-v}, & \text{si } u \neq v \\ f'(u), & \text{si } u = v \end{cases} \quad (9)$$

Ce qui signifie que

$$g(u, v) = \begin{cases} f(u) & \text{si } \tilde{a}(u, v) \geq 0 \text{ ou } 1 \\ f(v), & \text{si } \tilde{a}(u, v) = -1 \end{cases} \quad (10)$$

avec

$$\tilde{a}(u, v) = \begin{cases} \text{signe}(f(u) - f(v)) * \text{signe}(u - v), & \text{si } u \neq v \\ \text{signe}(f'(u)), & \text{si } u = v \end{cases} \quad (11)$$

Question 4 :

Pour $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 1$ la solution numérique converge vers la solution exacte. Mais pour $\alpha = 2$, la solution explose. La condition de Rankine - Hugoniot est vérifiée : la vitesse de choc est $s(t) = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$ représenté par $\tilde{a}(u, v)$ ($\tilde{a}(u, v)$ correspond à la vitesse du choc de la solution faible entropique)

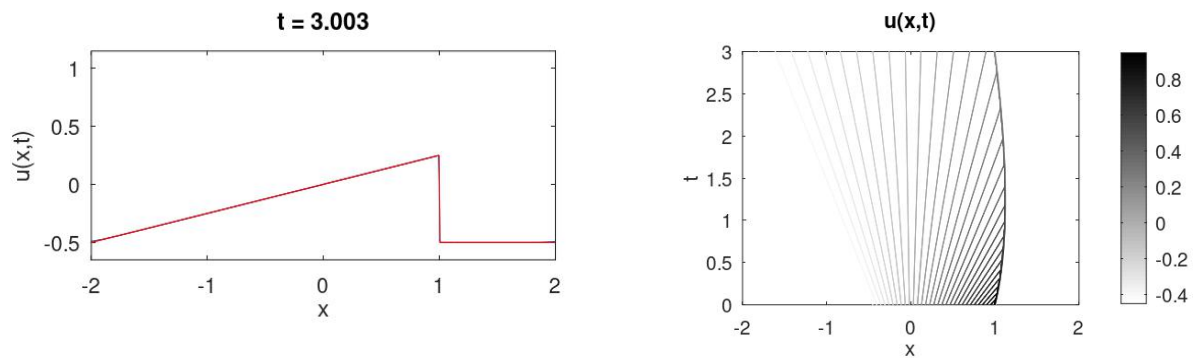


FIGURE 7 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 0,5$ ainsi que le fibrage

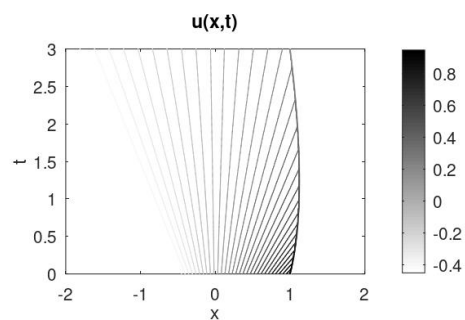


FIGURE 8 – Évolution dans l’espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 1$ ainsi que le fibrage

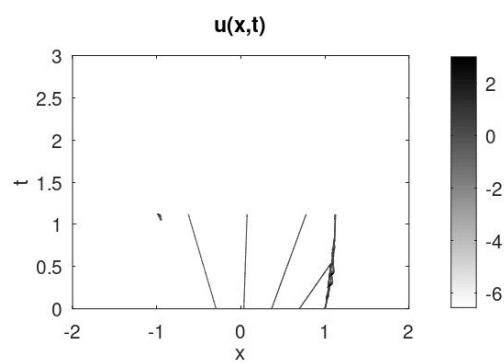


FIGURE 9 – Évolution dans l’espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 2$ ainsi que le fibrage

Question 5 :

La solution numérique ne converge pas vers la solution exacte, on n'observe pas une onde de détente car la solution numérique est discontinue en $x = -\frac{1}{2}$.

FIGURE 10 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 0.5$

Exercice 3 : Schéma monotone**Question 1 :**

Le schéma de Lax-Friedrichs est monotone avec un flux $g(u, v) = \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) + \frac{h}{\Delta t}(u - v)$. g est régulière puisque f est régulière donc le schéma est conservatif.

Question 2 :

On a $H_n(u, v, w) = \frac{1}{2}(u + v) - \frac{\Delta t(n)}{2h}(f(w) - f(u))$

sous la condition CFL on a $\alpha = \frac{a(u)\Delta t}{h} \leq 1$

Si on dérive H_n par rapport à u on aura $H'_n(u, v, w) = \frac{1}{2} + \frac{\Delta t(n)}{2h}a(u) > 0$ donc H_n est croissante par rapport à u . Il est clair que H_n est croissante par rapport à v . Si on dérive

H_n par rapport à w on aura $H'_n(u, v, w) = \frac{1}{2} - \frac{\Delta t(n)}{2h}a(w) > 0$ sous les conditions CFL On en conclut que le schéma de Lax-Friedrichs est monotone.

Question 3.

Le fichier contenant le code sera inclus avec le compte rendu

Question 4.

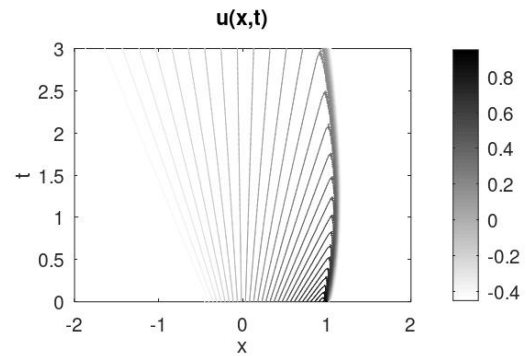


FIGURE 11 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 0.5$

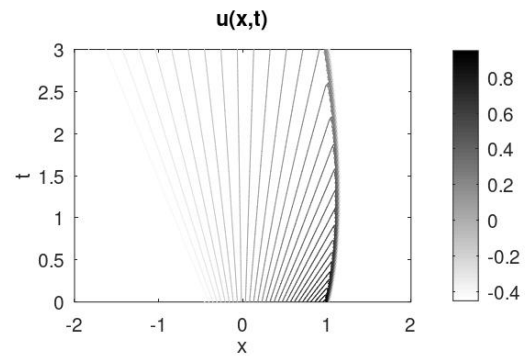


FIGURE 12 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 1$

Pour $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 1$ la condition CFL est satisfaite et plus qu'on se rapproche de 1 la solution converge vers la solution exacte. Le schéma est stable.

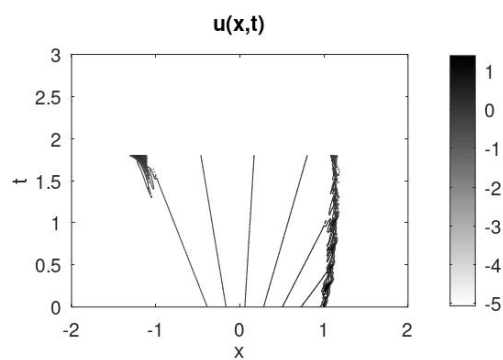


FIGURE 13 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 2$ ainsi que le fibrage

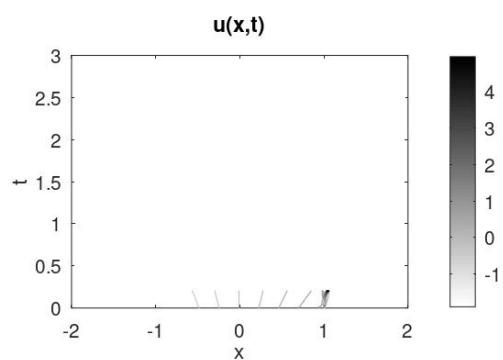


FIGURE 14 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 2$ ainsi que le fibrage

Alors que pour $\alpha > 1$ la condition CFL n'est pas satisfaite ainsi. le schéma est instable et la solution ne converge pas vers la solution exacte.

Le schéma de Lax-Friedrich permet d'aboutir à une solution approchée qui converge vers la solution faible entropique lors d'une détente et qui explose lors d'un choc lorsque la condition CFL n'est pas vérifiée.

Exercice 4 : Le schéma de Godunov

Question 1 :

On considère un problème de Riemann à deux états :

Cas 1 : $u_g < u_d$

Après avoir effectué un calcul des caractéristiques, on trouve que l'équation des caractéristiques s'écrit :

$$X(t) = \begin{cases} u_g t + x_0, & \text{si } x \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_j] \\ u_d t + x_0, & \text{si } x \in [x_j, x_{j+\frac{1}{2}}] \end{cases} \quad (12)$$

On trouve après un calcul de la solution que

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x < x_j + u_g t \\ \frac{x - x_j}{t} & \text{si } x \in [x_j + u_g t, x_j + u_d t] \\ u_d, & \text{si } x > x_j + u_d t \end{cases} \quad (13)$$

Il suffit d'appliquer le flux de Burgers.

Cas 2 : $u_g > u_d$

On va avoir un choc, il faut vérifier la condition Rankine Hugoniot : $\sigma'(t) = \frac{u_g + u_d}{2}$ et $\sigma(t_n) = x_j$
 alors $\sigma(t) = \frac{u_g + u_d}{2}t + x_j$
 donc

$$\begin{cases} u_g, & \text{si } x < \sigma(t) \\ u_d, & \text{si } x > \sigma(t) \end{cases}$$

Il suffit d'appliquer le flux de Bürger.

Question 2 :

Le fichier contenant le code sera inclus avec le compte rendu.

Question 3 :

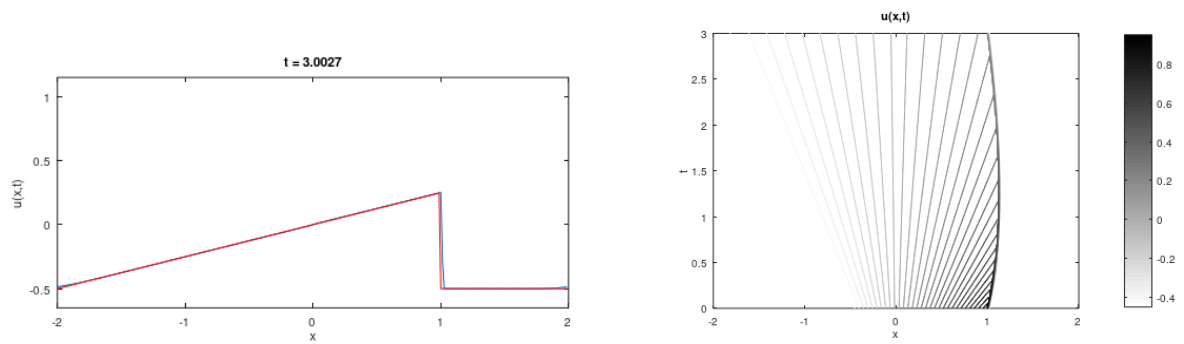


FIGURE 15 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 0.4$ ainsi que le fibrage

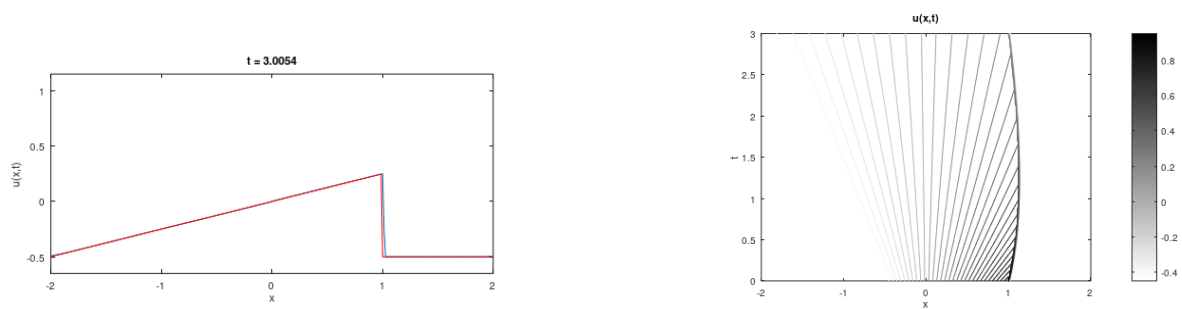


FIGURE 16 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 1$ ainsi que le fibrage

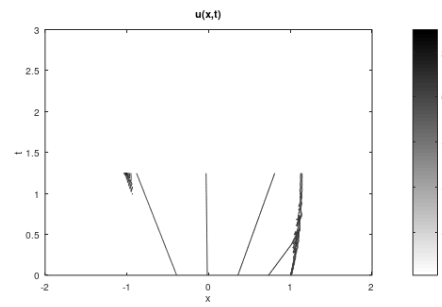
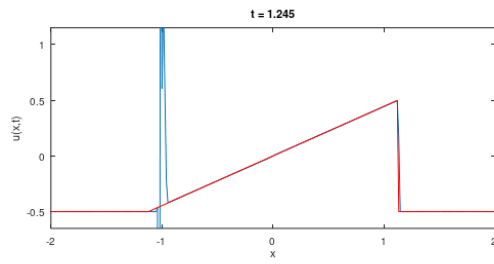


FIGURE 17 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 2$ ainsi que le fibrage

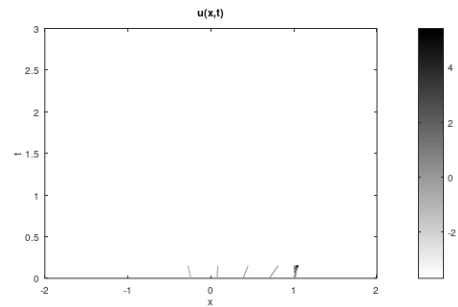
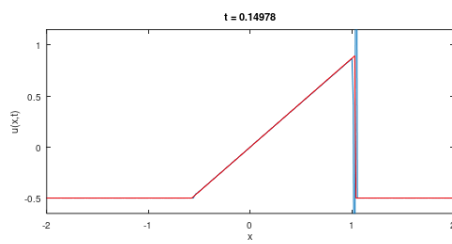


FIGURE 18 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 3$ ainsi que le fibrage

Question 4 :

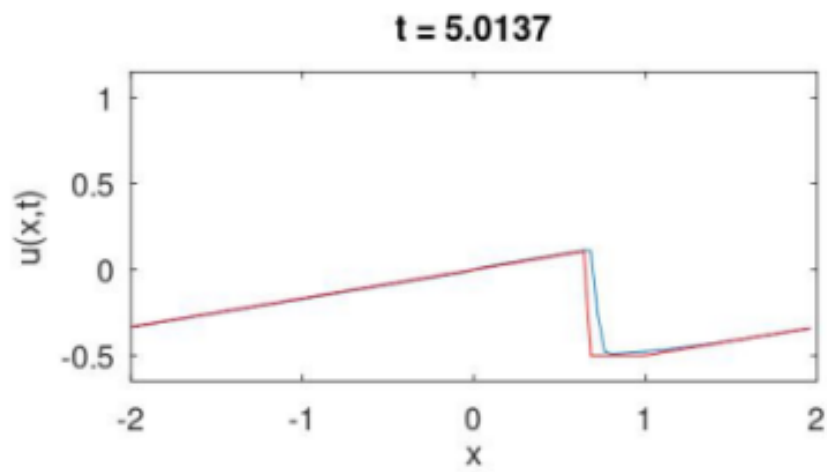


FIGURE 19 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 0.4$

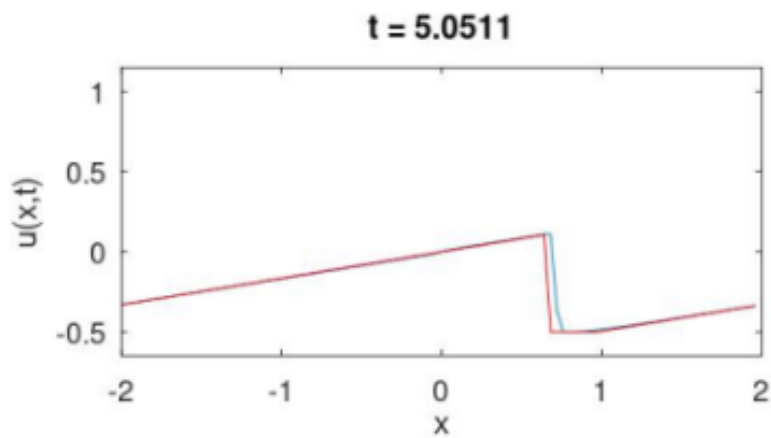


FIGURE 20 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 1$

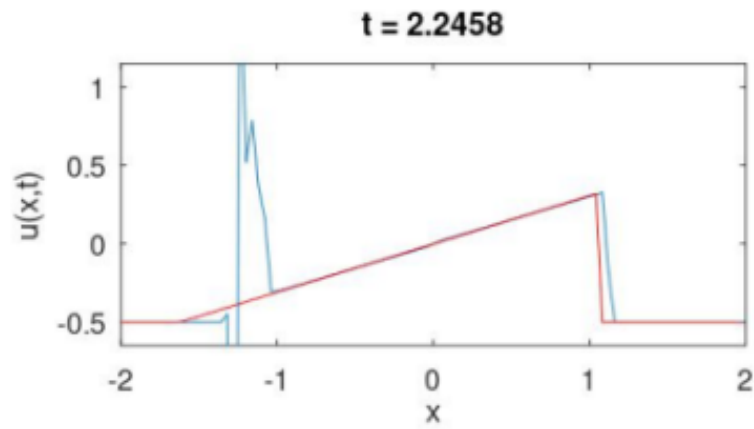


FIGURE 21 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 2$

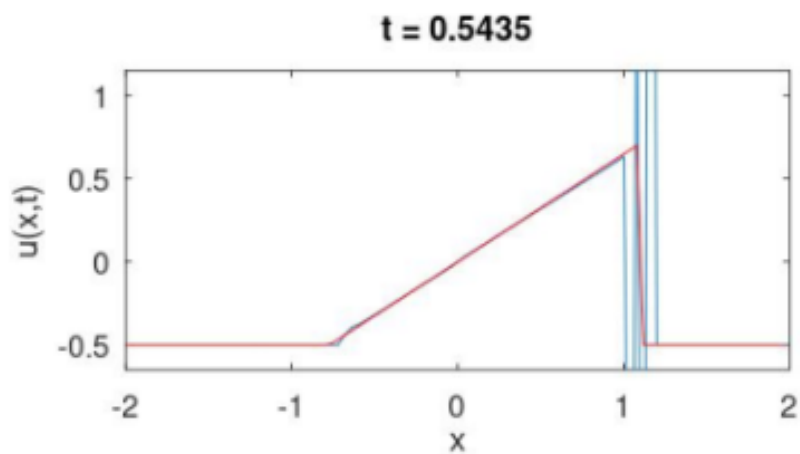


FIGURE 22 – Évolution dans l'espace de la solution approchée et de la solution exacte pour $\alpha = 3$