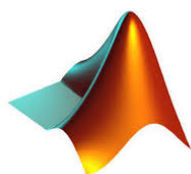




Projet d'Analyse Numérique - MO102

1ère année Techniques Avancées

Projet Matlab : Résolution numérique du système de la dynamique des gaz isentropique en une dimension dans le cas de deux ondes détente



Réalisé par :

BEN AMIRA Aziz
GASSEM Adam

Encadrant :

M. AMDOUNI Saber

Année universitaire : 2023/2024

Remerciement

Nous souhaitons exprimer nos sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué au succès de notre projet et nous ont apporté leur aide et leurs conseils pratiques pour la réalisation de ce projet.

Nous tenons tout d'abord à remercier chaleureusement notre enseignant à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, M. Saber AMDOUNI, pour son soutien et son expertise. Ses conseils et sa disponibilité ont grandement contribué à l'amélioration de notre projet et à notre choix judicieux de la direction à suivre.

Nous tenons également à remercier vivement Mme. CHAKER Hedia, responsable de la filière Techniques Avancées à l'ENIT, pour son soutien moral et ses encouragements, qui ont été une source de motivation essentielle.

Enfin, nous tenons à remercier nos amis et camarades de classe qui nous ont soutenus et conseillés tout au long du projet.

Résumé

Ce rapport de projet présente la résolution numérique du système de dynamique des gaz isentropique en une dimension d'espace. Nous nous proposons de résoudre numériquement le problème de Riemann à deux états en utilisant MATLAB pour effectuer la résolution numérique. Les schémas numériques utilisés incluent les schémas de Lax-Friedrichs, Rusanov et HLL (Harten, Lax, van Leer). L'objectif est d'analyser les variations des variables dynamiques telles que la densité, la vitesse et la pression du gaz à travers ces différents schémas numériques. Les résultats obtenus fournissent des informations précieuses sur le comportement des solutions au problème de Riemann et permettent de mieux comprendre les phénomènes physiques associés aux écoulements isentropiques. Cette étude contribue ainsi à l'amélioration de la modélisation et de la compréhension des systèmes d'équations hyperboliques 1D, avec des implications potentielles dans des domaines tels que l'aérodynamique et la dynamique des fluides compressibles.

Table des matières





Table des figures	2
Introduction	3
1 Modélisation du problème	4
1.1 Problématique	4
1.2 Résolution	4
2 Approches numériques pour déterminer la solution exacte	10
2.1 La fonction <code>fsolve</code>	10
2.2 La fonction <code>fzero</code>	10
2.3 La fonction <code>fminbnd</code>	11
3 Solution Exacte 	12
3.1 Les courbes $R_1^a(U_G)$ et $R_2^a(U_D)$	12
3.2 Le point d'intersection U^*	13
3.3 La solution analytique $\rho(x, t)$ et $u(x, t)$	13
4 Solution numérique	14
4.1 Schéma de Lax-Friedrichs 	14
4.2 Schéma de Rusanov 	15
4.3 Schéma HLL 	16

Table des figures

1.1	Graphe de $R_1^\alpha(U_g)$ et $R_2^\alpha(U_d)$ pour différentes valeurs de U_g, U_d, ρ_g et ρ_d	8
1.2	Courbe de la solution exacte à $t = 0.20036$ pour $U_g = 1, U_d = 4, \rho_g = 1$ et $\rho_d = 4$	9
3.1	$R_1^\alpha(U_g)$ et $R_2^\alpha(U_d)$	12
3.2	Évolution de ρ et $u(x, t)$ en fonction de x à $t = 0.2$	13
4.1	Schéma de Lax-Friedrichs pour différentes valeurs de α	15
4.2	Schéma de rusanov pour différentes valeurs de α	16
4.3	Schéma HLL pour différentes valeurs de α	17

Introduction

De nos jours, la modélisation des phénomènes physiques est une compétence essentielle pour les ingénieurs. Cependant, il est rare de pouvoir trouver des solutions exactes pour des systèmes complexes. Les phénomènes physiques sont souvent caractérisés par leur complexité et un grand nombre de paramètres, ce qui rend presque impossible la recherche de solutions exactes. C'est dans ce contexte que la résolution numérique prend tout son intérêt et vient en aide aux ingénieurs.

La modélisation numérique permet d'obtenir des résultats rigoureux et proches de la solution exacte, dans la mesure où les modèles utilisés sont appropriés. Aujourd'hui, la rigueur se mesure par la pertinence d'une modélisation donnée. Ce projet nous a offert une occasion précieuse de nous familiariser avec les attentes auxquelles nous, ingénieurs de demain, serons confrontés. Il nous a également permis d'appliquer nos connaissances en MATLAB et en dynamique des fluides.

Nous considérons le système de dynamique des gaz isentropique en une dimension d'espace. Pour ce projet, nous proposons de résoudre numériquement le problème de Riemann à deux états en utilisant différentes méthodes de discrétisation. Les équations du système ont été discrétisées et traduites en code MATLAB. Nous avons soigneusement choisi les schémas numériques de Lax-Friedrichs, Rusanov et HLL, en tenant compte des spécificités du problème physique.

La résolution numérique a été réalisée en appliquant ces schémas, permettant d'obtenir des résultats de plus en plus pertinents et se rapprochant de la solution exacte. Cette approche nous a permis d'analyser de manière approfondie les variations de la densité, de la vitesse et de la pression du gaz à travers le problème de Riemann. Cette étude contribue ainsi à l'amélioration de la modélisation et de la compréhension des systèmes d'équations hyperboliques 1D, avec des implications importantes dans divers domaines tels que l'aérodynamique et la dynamique des fluides compressibles.

Chapitre 1

Modélisation du problème

1.1 Problématique

On considère le système de la dynamique des gaz isentropique en une dimension d'espace :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P(\rho)) = 0. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

avec ρ représentant la densité du gaz, u sa vitesse et $P(\rho) = \rho^\gamma$ la pression ($\gamma > 1$ est la constante du gaz parfait qu'on prendra dans la solution numérique $\gamma = 1.4$).

Nous nous proposons de résoudre numériquement le problème de Riemann à deux états associé à ce système :

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial f(W)}{\partial x} = 0, \\ W(x; 0) = \begin{cases} W_G & \text{si } x < 0 \\ W_D & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1.1.2)$$

avec

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P(\rho) \end{pmatrix}$$

1.2 Résolution

Le système 1.1 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \\ U(x; 0) = \begin{cases} U_G & \text{si } x < 0 \\ U_D & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

avec

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(U) = \begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{\rho'(\rho)}{\rho} & u \end{pmatrix}$$

En calculant les valeurs propres distinctes de $A(U)$, on trouve que $\lambda_1(U) = u - \sqrt{P'(\rho)}$ et $\lambda_2(U) = u + \sqrt{P'(\rho)}$ (avec A et W sont auto-semblables). Cela nous permet de démontrer que le problème de Riemann associé à l'écoulement des gaz isentropiques (3) admet une solution unique, composée de deux ondes (choc ou détente) séparées par un état intermédiaire

$$U^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ u^* \end{pmatrix}$$

Selon le choix de U_G et U_D quatre solutions sont possibles.

Cas 1 : deux ondes de chocs

Si la première et la seconde ondes sont des chocs alors $U^* = S_1^\alpha(U_G) \cap S_2^\alpha(U_D)$ et la solution est donnée par :

$$U(x, t) = \begin{cases} U_G & \text{si } x/t < s_1 \\ U^* & \text{si } s_1 < x/t < s_2 \\ U_D & \text{si } x/t > s_2 \end{cases}$$

$$s_1 = u_G - \frac{1}{\rho_G} \frac{P(\rho_G) - P(\rho^*)}{u^* - u_G},$$

$$s_2 = u_D - \frac{1}{\rho_D} \frac{P(\rho^*) - P(\rho_D)}{u_D - u^*},$$

Cas 2 : deux ondes de détente

Si la première et la seconde ondes sont des détenteurs alors $U^* = R_1^\alpha(U_G) \cap R_2^\alpha(U_D)$ et la solution analytique de 1.2 est donnée par :

$$U(x, t) = \begin{cases} U_G & \text{si } \frac{x}{t} < \lambda_1(U_G), \\ U_{1-\text{det}} & \text{si } \lambda_1(U_G) < \frac{x}{t} < \lambda_1(U^*), \\ U^* & \text{si } \lambda_1(U^*) < \frac{x}{t} < \lambda_2(U^*), \\ U_{2-\text{det}} & \text{si } \lambda_2(U^*) < \frac{x}{t} < \lambda_2(U_D), \\ U_D & \text{si } \frac{x}{t} \geq \lambda_2(U_D), \end{cases} \quad (1.2.2)$$

avec

$$u_{1-\text{det}} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{x}{t} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_G - \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma+1} \rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}},$$

$$\begin{aligned}\rho_{1-det} &= \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(u_{1-det} - \frac{x}{t} \right) \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \\ u_{2-det} &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{x}{t} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_D - \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma+1} \rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}}, \\ \rho_{2-det} &= \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{x}{t} - u_{2-det} \right) \right)^{\frac{2}{\gamma-1}},\end{aligned}$$

Cas 3 : la première onde est un choc et la deuxième onde est une détente

$U^* = S_1^\alpha(U_G) \cap R_2^\alpha(U_D)$ et la solution analytique de 1.2 est définie par

$$U(x, t) = \begin{cases} U_G & \text{si } \frac{x}{t} < s_1, \\ U^* & \text{si } s_1 < \frac{x}{t} < \lambda_2(U^*), \\ U_{2-det} & \text{si } \lambda_2(U^*) < \frac{x}{t} < \lambda_2(U_D), \\ U_D & \text{si } \frac{x}{t} \geq \lambda_2(U_D), \end{cases} \quad (1.2.3)$$

avec :

$$\begin{aligned}s_1 &= u_G - \frac{1}{\rho_G} \frac{P(\rho_G) - P(\rho^*)}{u^* - u_G}, \\ u_{2-det} &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{x}{t} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_D - \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma+1} \rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}}, \\ \rho_{2-det} &= \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{x}{t} - u_{2-det} \right) \right)^{\frac{2}{\gamma-1}},\end{aligned}$$

Cas 4 : la première onde est une détente et la deuxième onde est un choc

$U^* = R_1^\alpha(U_G) \cap S_2^\alpha(U_D)$ et la solution analytique de 1.2 est définie par

$$U(x, t) = \begin{cases} U_G \cdot Si & \frac{x}{t} < \lambda_1(U_G), \\ U_{1-det} \cdot Si & \lambda_1(U_G) < \frac{x}{t} < \lambda_1(U^*), \\ U^* \cdot Si & \lambda_1(U^*) < \frac{x}{t} < s_2, \\ U_D \cdot Si & \frac{x}{t} > s_2. \end{cases}$$

avec

$$u_{1-det} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{x}{t} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_G + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma+1} \rho_G^{\frac{\gamma-1}{2}},$$

$$\rho_{1-det} = \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(u_{1-idet} - \frac{x}{t} \right) \right)^{\frac{2}{\gamma-1}},$$

$$s_2 = u_D - \frac{1}{\rho_D} \frac{P(\rho^*) - P(\rho_D)}{u_D - u^*}.$$

Remarque :

Les demis courbes $R_1^\alpha(U_G)$, $R_2^\alpha(U_D)$, $S_1^\alpha(U_G)$ et $S_2^\alpha(U_D)$ sont définis par

$$S_1^\alpha(U_G) = \{(\rho, u_C^1(\rho)); \rho > \rho_G\},$$

$$S_2^\alpha(U_D) = \{(\rho, u_C^2(\rho)); \rho > \rho_D\},$$

$$R_1^\alpha(U_G) = \{(\rho, u_D^1(\rho)); \rho < \rho_G\},$$

$$R_2^\alpha(U_D) = \{(\rho, u_D^2(\rho)); \rho < \rho_D\},$$

$$u_C^1(\rho) = u_G + \sqrt{\frac{(\rho - \rho_G)(P(\rho) - P(\rho_G))}{\rho \rho_G}}, V \rho > \rho_G$$

$$u_C^2(\rho) = u_D + \sqrt{\frac{(\rho_D - \rho)(P(\rho_D) - P(\rho))}{\rho \rho_D}}, V \rho > \rho_D$$

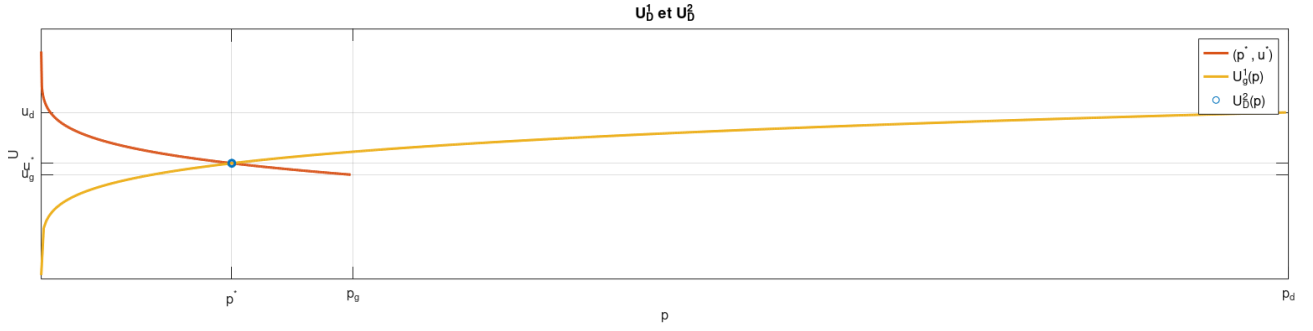
$$u_D^1(\rho) = u_G + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma - 1} (\rho_G^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}), V \rho < \rho_G$$

$$u_D^2(\rho) = u_D + \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma - 1} (\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho_D^{\frac{\gamma-1}{2}}), V \rho < \rho_D$$

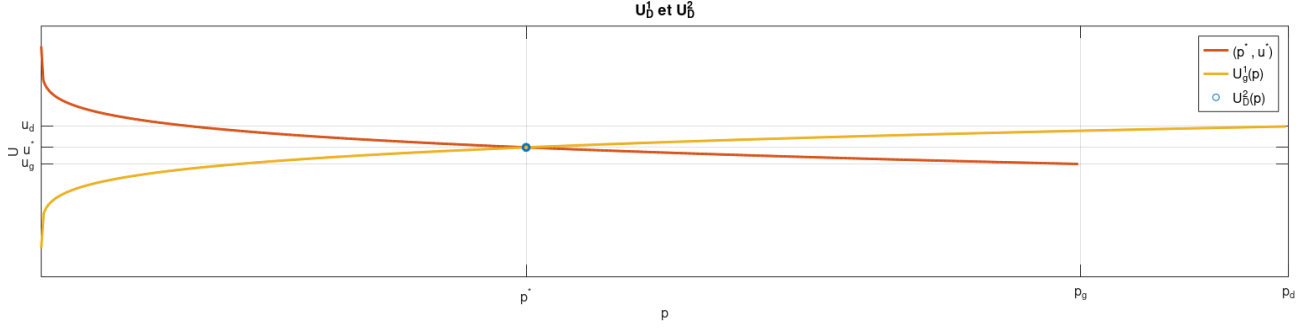
où :

- u_C est la vitesse du centre de masse du mélange diphasique
- u_D est la vitesse de l'onde de détente
- u_C est la vitesse de l'onde de choc
- ρ est densité du gaz
- ρ_D est la densité du gaz à droite
- ρ_G est la densité du gaz à gauche
- γ est la constante du gaz parfait
- P est la pression

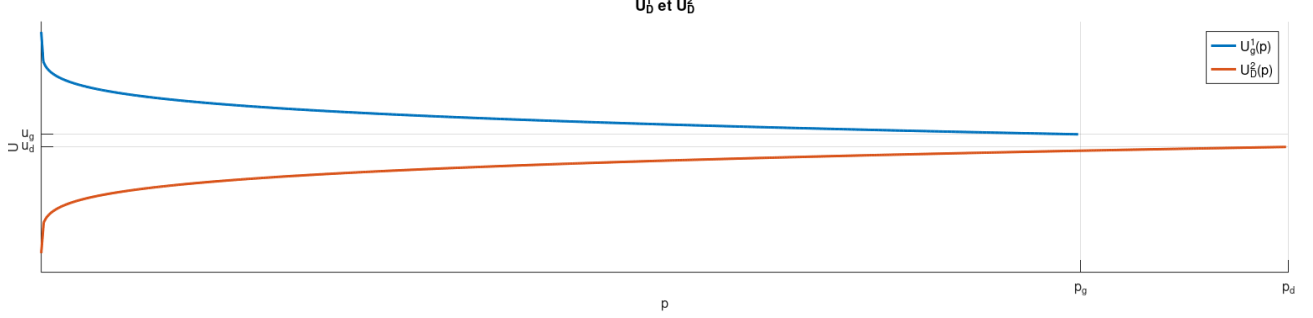
Dans notre projet, on va s'intéresser au **cas 2** , où les deux ondes sont de détentes. Voici des différents graphes de $R_1^\alpha(U_G)$ et $R_2^\alpha(U_D)$ pour différentes valeurs de U_g, U_d, ρ_g et ρ_d



(a) $U_g = 1, U_d = 4, \rho_g = 1$ et $\rho_d = 4$



(b) $U_g = 14, U_d = 17, \rho_g = 10$ et $\rho_d = 12$



(c) $U_g = 6, U_d = 5, \rho_g = 5$ et $\rho_d = 6$ (pas d'intersection)

FIGURE 1.1 – Graphe de $R_1^\alpha(U_g)$ et $R_2^\alpha(U_d)$ pour différentes valeurs de U_g, U_d, ρ_g et ρ_d

- Dans l'exemple 1.1a on trouve $\rho^* = 0.611$ et $u^* = 1.5549$.
- Dans l'exemple 1.1b on trouve $\rho^* = 4.6655$ et $u^* = 15.326$.
- Mais dans la figure 1.1 il n'y a pas d'intersection. Il ne s'agit pas du cas de deux ondes détentes.

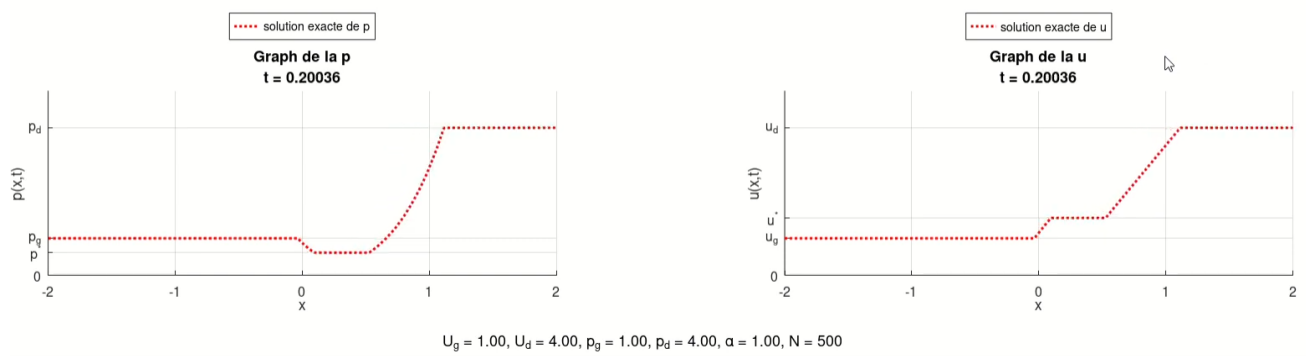


FIGURE 1.2 – Courbe de la solution exacte à $t = 0.20036$ pour $U_g = 1, U_d = 4, \rho_g = 1$ et $\rho_d = 4$

Chapitre 2

Approches numériques pour déterminer la solution exacte

2.1 La fonction `fsolve`

La fonction `fsolve` est un outil employé dans Octave pour résoudre des systèmes d'équations non linéaires. Elle s'avère particulièrement utile pour trouver les racines d'un ensemble de fonctions à plusieurs variables. Son utilisation est simple : en faisant appel à `fsolve(@fonctions, x0)`, où `@fonctions` représente une fonction renvoyant un vecteur d'équations à résoudre, et x_0 désigne un vecteur d'estimations initiales.

Cette fonction s'appuie principalement sur la méthode de Newton pour résoudre les systèmes d'équations non linéaires. Elle itère à partir d'une estimation initiale, utilisant la méthode de Newton pour linéariser le système autour de chaque point, puis pour déterminer le zéro du système linéarisé.

La méthode repose sur l'approximation locale de la fonction par sa tangente pour converger vers le zéro. À chaque étape, la formule suivante est employée :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

où x_n représente une estimation du zéro de la fonction, $f(x_n)$ est la valeur de la fonction à x_n , et $f'(x_n)$ est sa dérivée.

En cas de non-convergence ou d'instabilité de la méthode de Newton, `fsolve` peut également recourir à d'autres méthodes itératives telles que la méthode de la sécante.

2.2 La fonction `fzero`

La fonction `fzero` est conçue pour déterminer les zéros d'une fonction univariée dans Octave. Elle mobilise diverses méthodes numériques pour converger vers les zéros de la fonction en question. Son utilisation est simple : en utilisant la syntaxe `fzero(@fonction, x0)`, où `@fonction` est la fonction pour laquelle on cherche les zéros, et x_0 constitue une estimation initiale de la solution.

Cette fonction utilise une combinaison de méthodes itératives telles que la méthode de la bisection et la méthode de la sécante pour trouver les zéros d'une fonction univariée. Généralement, elle commence par une méthode simple comme la bisection, puis bascule vers des méthodes plus sophistiquées pour converger rapidement vers la solution.

La méthode de la bisection divise récursivement l'intervalle contenant le zéro de la fonction en deux parties égales, choisissant celle conservant un signe opposé par rapport à l'autre moitié. Ce processus se répète jusqu'à ce que la taille de l'intervalle soit suffisamment réduite. À chaque étape, la formule suivante est utilisée :

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

où a_n et b_n désignent les bornes de l'intervalle à l'étape n .

La méthode de la sécante, similaire à celle de Newton mais n'utilisant pas la dérivée exacte de la fonction, est également employée. Dans cette méthode, la dérivée est estimée par une différence finie entre deux points proches. La formule de récurrence est alors :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

2.3 La fonction `fminbnd`

La fonction `fminbnd` est utile pour déterminer le minimum d'une fonction univariée dans un intervalle spécifié. Elle combine la recherche de la section dorée et l'interpolation parabolique pour converger vers le minimum.

Pour l'utiliser, il suffit de saisir $x_{\min} = \text{fminbnd}(@\text{fonction}, a, b)$, où `@fonction` représente la fonction à minimiser, et a et b sont les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle respectivement.

La méthode `fminbnd` divise récursivement l'intervalle spécifié en segments plus petits, en conservant celui contenant le minimum. Elle emploie la recherche de la section dorée pour déterminer les points à évaluer, et l'interpolation parabolique pour estimer la position du minimum en utilisant la formule suivante :

$$x_{\min} = \frac{1}{2} \left(x_0 + x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2 f(x_0) - (x_2 - x_0)^2 f(x_1) + (x_1 - x_0)^2 f(x_2)}{2(x_2 - x_1)f(x_0) - 2(x_2 - x_0)f(x_1) + 2(x_1 - x_0)f(x_2)} \right)$$

où x_0 , x_1 , et x_2 sont trois points distincts dans l'intervalle de recherche, et $f(x_0)$, $f(x_1)$, et $f(x_2)$ représentent les valeurs de la fonction évaluées en ces points respectifs.

Cette méthode s'avère efficace pour trouver le minimum d'une fonction univariée dans un intervalle donné et peut être utilisée dans divers contextes d'optimisation.

Chapitre 3

Solution Exacte

Notre travail consiste à faire l'étude de cas 2 (La première onde est une détente et la deuxième onde est une détente). En fait, il faut dessiner les deux courbes $R_a(U_G)$ et $S_a(U_D)$ et identifier le point d'intersection U^* tel que :

$$U^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ u^* \end{pmatrix}$$

Puis il faut aussi dessiner la solution analytique $u(x, t)$ et la courbe de $\rho(x, t)$.

On prend dans cette partie :

- $U_g = 1$
- $\rho_g = 1$
- $U_d = 4$
- $\rho_d = 4$
- $\gamma = 1.4$

3.1 Les courbes $R_1^a(U_G)$ et $R_2^a(U_D)$

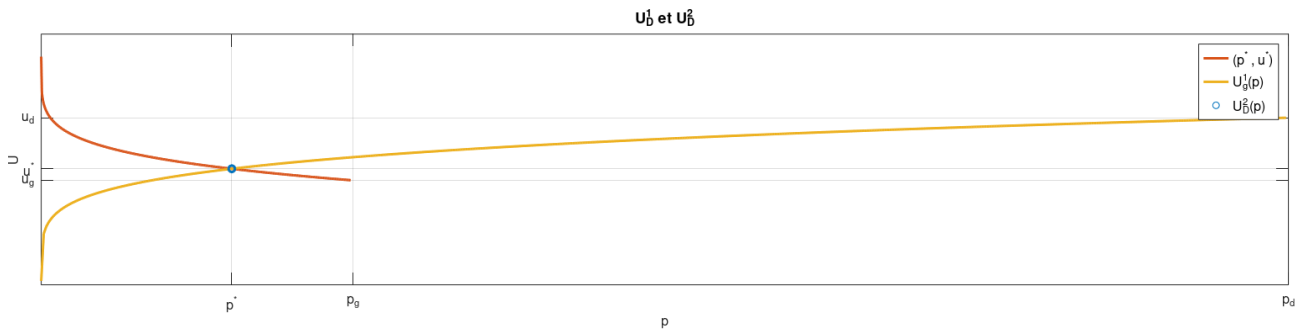


FIGURE 3.1 – $R_1^a(U_g)$ et $R_2^a(U_d)$

3.2 Le point d'intersection U^*

Pour déterminer le point d'intersection entre deux courbes $R_1^a(U_G)$ et $R_2^a(U_D)$ en utilisant MATLAB, on a utilisé la fonction **fzero**.

On a suivi ces étapes pour trouver le point d'intersection :

1. Tout d'abord, on crée une fonction anonyme qui représente la différence entre les deux fonctions $u_{c1}(p)$ et $u_{c2}(p)$.
2. On utilise la fonction **fzero** pour trouver le point d'intersection en passant la fonction différence $u_{c1}(p) - u_{c2}(p)$.
3. On identifie la plage de valeurs de p que vous souhaitez explorer.
4. Le résultat de **fzero** sera le point d'intersection des deux courbes comme l'indique la figure 3.1.

On a trouvé comme résultat :

$$p^* = 0.611$$

$$u^* = 1.5549$$

$$U^* = \begin{pmatrix} 0.611 \\ 1.5549 \end{pmatrix}$$

3.3 La solution analytique $\rho(x, t)$ et $u(x, t)$

La solution implémentée en MATLAB pour $\rho(x, t)$ et $u(x, t)$ à partir de la solution exacte 1.2 est :

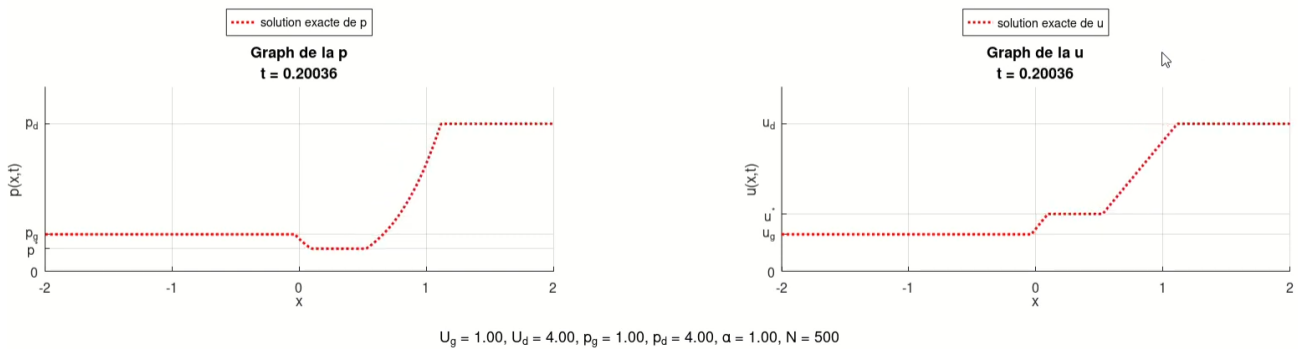


FIGURE 3.2 – Évolution de ρ et $u(x, t)$ en fonction de x à $t = 0.2$

Chapitre 4

Solution numérique

On considère des schémas Volumes Finis :

$$W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [G(W_j^n, W_{j+1}^n) - G(W_{j-1}^n, W_j^n)]$$

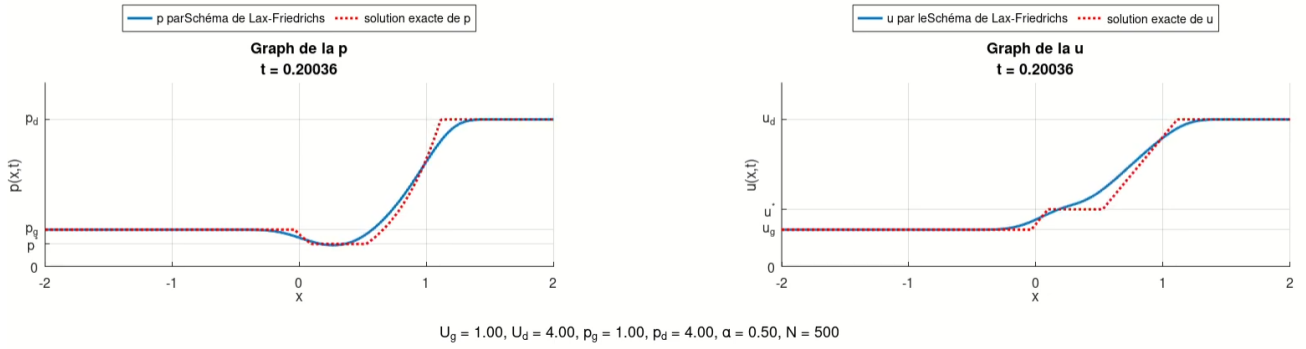
4.1 Schéma de Lax-Friedrichs

Pour le schéma de Lax-Friedrichs :

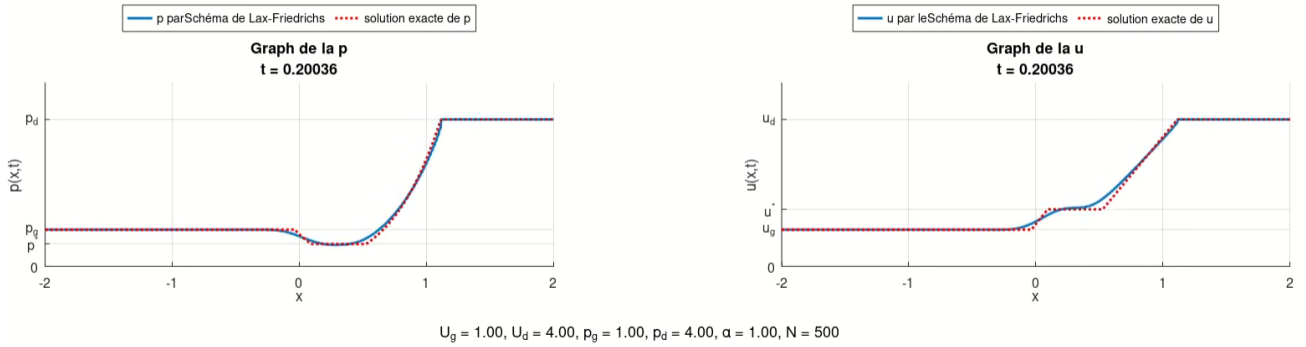
$$G(a, b) = \frac{F(a) + F(b) - \frac{\Delta x}{\Delta t^n}(b - a)}{2}$$

On associe aux différents schémas la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy :

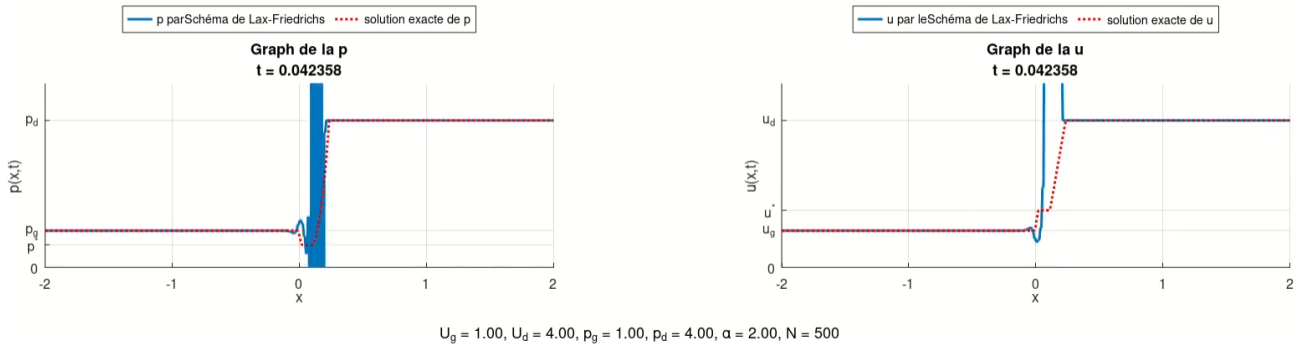
$$\Delta t^n \leq \frac{\Delta x}{2 \max_{j \in \mathbb{Z}} \{|\lambda_1(W_j^n)|, \dots, |\lambda_p(W_j^n)|\}}.$$



(a) Cas $\alpha = 0.5$



(b) Cas $\alpha = 1$



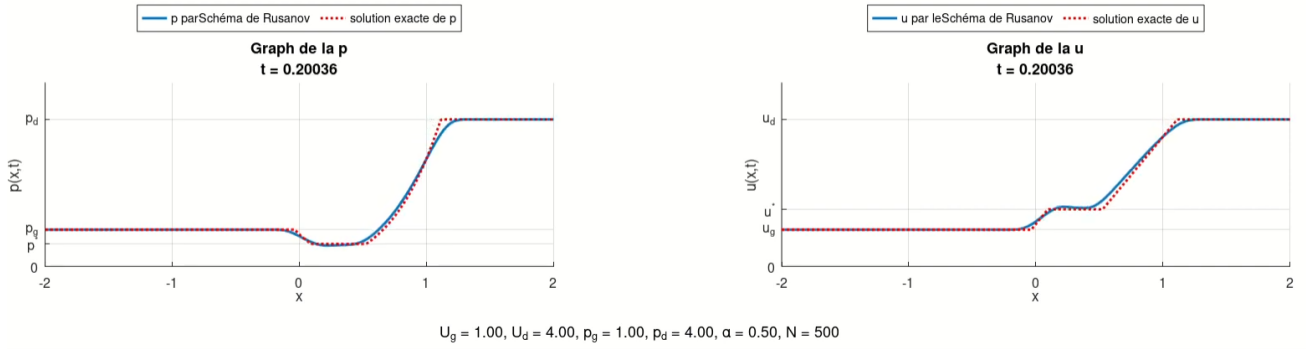
(c) Cas $\alpha = 2$ (divergence)

FIGURE 4.1 – Schéma de Lax-Friedrichs pour différentes valeurs de α

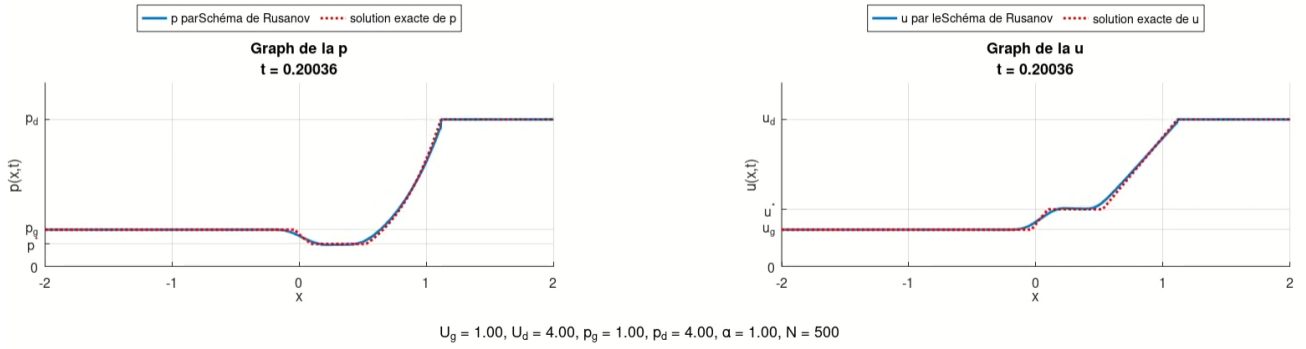
4.2 Schéma de Rusanov

Pour le schéma de Rusanov :

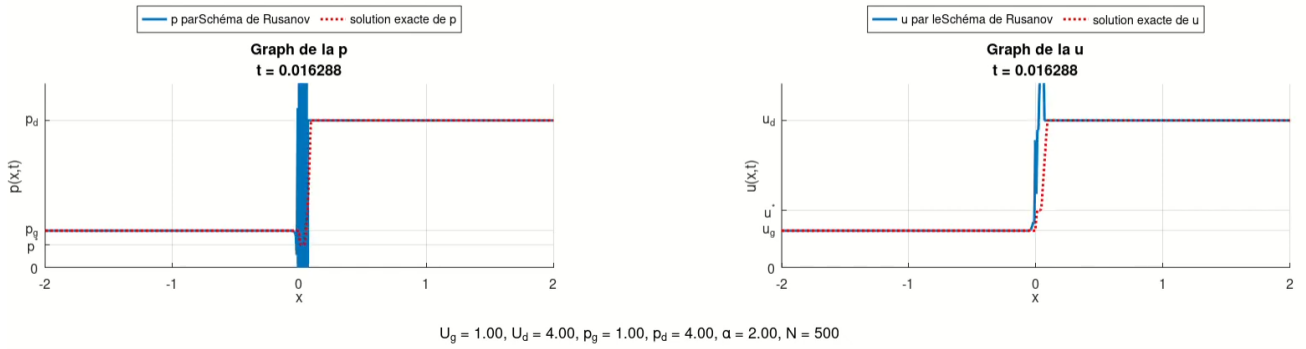
$$G(a, b) = \frac{F(a) + F(b)}{2} - c \frac{b - a}{2}$$



(a) Cas $\alpha = 0.5$



(b) Cas $\alpha = 1$



(c) Cas $\alpha = 2$ (divergence)

FIGURE 4.2 – Schéma de rusanov pour différentes valeurs de α

4.3 Schéma HLL

Pour le schéma HLL

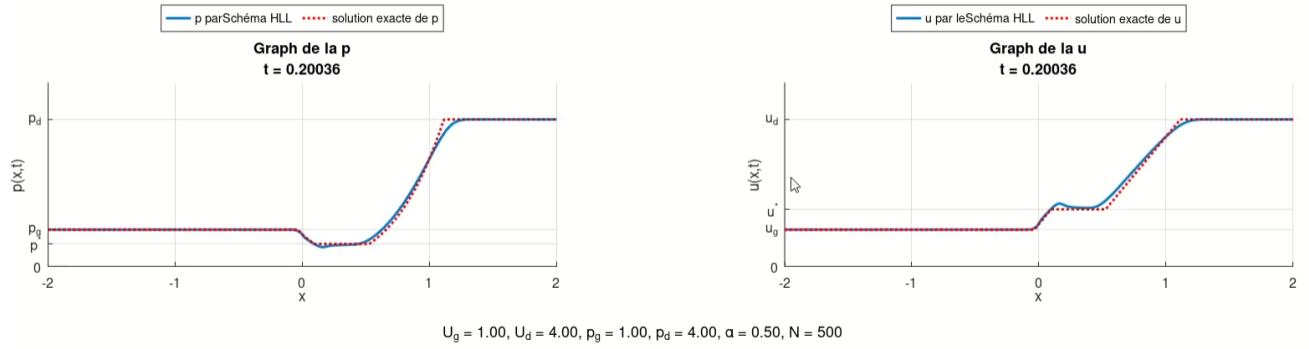
$$G(a, b) = \begin{cases} F(a) & \text{si } c_1 \geq 0 \\ \frac{c_2 F(a) - c_1 F(b)}{c_2 - c_1} + \frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1} (b - a) & \text{si } c_1 < 0 < c_2 \\ F(b) & \text{si } c_2 \leq 0 \end{cases}$$

où

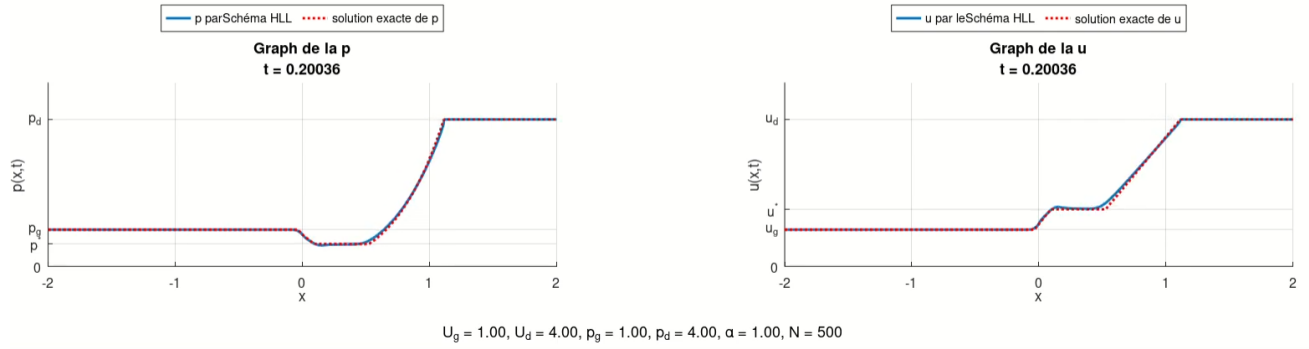
$$c(a, b) = \max_{k=1, \dots, p} \{|\lambda_k(a)|, |\lambda_k(b)|\}$$

$$c_1(a, b) = \min_{k=1, \dots, p} \{\lambda_k(a), \lambda_k(b)\}$$

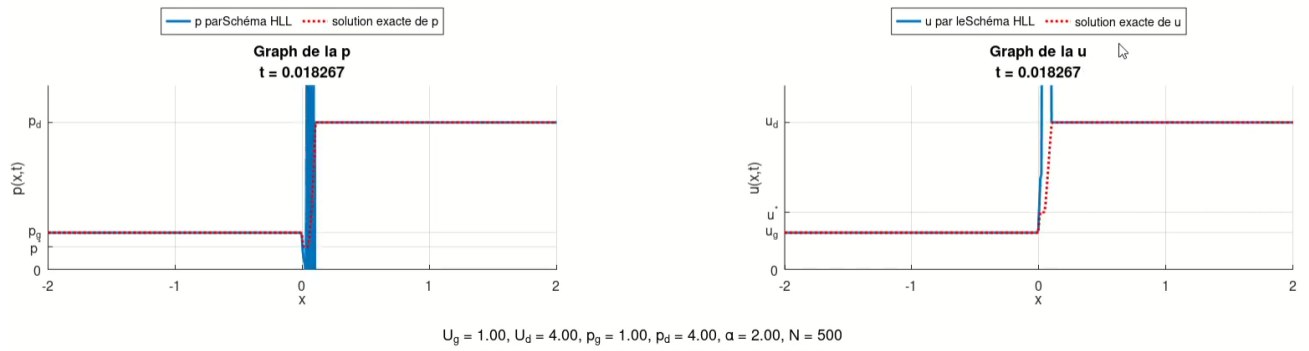
$$c_2(a, b) = \max_{k=1, \dots, p} \{\lambda_k(a), \lambda_k(b)\}$$



(a) Cas $\alpha = 0.5$



(b) Cas $\alpha = 1$



(c) Cas $\alpha = 2$ (divergence)

FIGURE 4.3 – Schéma HLL pour différentes valeurs de α

Conclusion

Ce travail nous a offert l'opportunité de mettre en pratique les connaissances acquises lors du cours MA103 tout en utilisant MATLAB comme outil. Nous avons pu expérimenter différents schémas numériques et appréhender leur utilité respective. En effet, il est primordial de choisir le schéma adapté en fonction des propriétés de la solution, ainsi que des avantages et des limitations de chaque méthode. Aucun schéma ne peut prétendre être parfait pour toutes les équations. Ainsi, avant de commencer à implémenter le code, il est essentiel de prendre le temps d'évaluer ces aspects et de faire un choix éclairé.

En mettant en pratique les concepts de résolution numérique des équations, nous avons pu constater l'importance d'une approche réfléchie dans la sélection des schémas. Cette démarche nous a permis d'obtenir des résultats plus précis et efficaces dans notre travail. De plus, cette expérience nous a ouvert de nouvelles perspectives et nous a permis d'approfondir nos compétences en résolution numérique.

Finalement, ce projet a été une occasion enrichissante d'appliquer nos connaissances théoriques, de découvrir de nouveaux schémas numériques et de prendre conscience de l'importance d'un choix judicieux pour obtenir des résultats fiables. Nous sommes convaincus que cette expérience sera bénéfique pour notre développement professionnel et académique dans le domaine de la résolution numérique des équations.