TD n°3 - Réductions et Theorème de Rice

1 Exercice 1 : Réductions

Soit $A = \{x,\ \forall y\ [x|y] \downarrow\}$.

1. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que A n'est pas récursif.
2. Montrez que $\mathbb{K} \prec$ A.
3. Montrez que $\mathbb{K} \prec \bar{A}$ (où $\bar{A}$ est le complémentaire de A).
4. Montrez que ni A ni $\bar{A}$ ne sont énumérables.

1.1 Question n°1 : A non récursif par le théorème de Rice

> On a A l'ensemble des (codes de) programmes qui convergent pour chaque entrée y.

> On utilise donc le théorème de Rice, tel que $\mathcal{C} = \forall y\ [x|y] \downarrow$ soit une propriété de la fonction $c : z \mapsto [x|z]$, tel que $dom(c) = \mathbb{N}$.

> D'après le théorème de Rice, on cherche à montrer que A est non trivial. Alors, on doit trouver un programme qui est dans A (A $\neq \emptyset$) et un programme qui n'est pas dans A (A $\neq \mathbb{N}$) :

1. Soit Id un programme tel que : $Id : x \mapsto x$ et $Id \in A$.
2. Soit bot un programme tel que : $bot : x \mapsto \perp$ et $bot \notin A$

> On doit maintenant prouver que ces deux programmes respectent la propriété $\mathcal{C}$ ou non :

1. Id converge sur toutes entrées alors $dom(Id) = \mathbb{N}$, on en déduit que $Id \in A$ donc $A \neq \emptyset$.
2. bot diverge sur toutes entrées alors $dom(bot) = \emptyset$ soit $dom(bot) \neq \mathbb{N}$, on en déduit que $bot \notin A$ donc $A \neq \mathbb{N}$.

> On vient de prouver que A n'est pas trivial alors par le theorème de Rice, A n'est pas récursif.

1.2 Question n°2 : $\mathbb{K} \prec$ A

> On doit trouver une fonction de réduction calculable totale telle que $x \in \mathbb{K} \Rightarrow f(x) \in A$.

> Soit le programme suivant :

$$a < x, z >: si\ [x|x] \downarrow alors\ return\ z$$

(z doit être indépendant de l'ensemble $\mathbb{K}$ car $dom(c) = \mathbb{N}$ avec c vu à la question 1)

La fonction de réduction est donc :

$$f : x \mapsto S_1^1 < a, x >: z \mapsto si\ [x|x] \downarrow alors\ return\ z$$

> f est calculable totale car on associe à f le code d'un programme pour toute entrée. Cependant, cela ne veut pas dire que ce dernier est totale.

> F est bien la fonction de réduction car :

1. $x \in \mathbb{K} \Rightarrow [x|x] \downarrow \Rightarrow [f|x] = z \Rightarrow f(x) \in A$
2. $x \notin \mathbb{K} \Rightarrow [x|x] \uparrow \Rightarrow [f|x] = \perp \Rightarrow f(x) \notin A$

> On vient donc de montrer que $\mathbb{K} \prec$ A

1.3 Question n°3 : $\mathbb{K} \prec \bar{A}$

- On doit trouver une fonction de réduction calculable totale tel que $x \in \mathbb{K} \Rightarrow f(x) \in \bar{A}$ (avec $\bar{A} = x, x$ programme qui converge des fois.
- Soit le programme suivant :

$$b < x, z >: si\ step < x, x, z >= 0\ alors\ return\ z$$

(step = 0, on teste si le programme diverge)

La fonction de réduction est donc :

$$f : x \mapsto S_1^1 < b, x >: z \mapsto si\ step < x, x, z >= 0\ alors\ return\ 0\ sinon\ \perp$$

- f est calculable totale car on associe à f le code d'un programme pour toute entrée. Cependant, cela ne veut pas dire que ce dernier est total.
- F est bien la fonction de réduction car :
  1. $x \in \mathbb{K} \Rightarrow [x|x] \downarrow \ \Rightarrow [f|x] = \perp \Rightarrow f(x) \notin A \Rightarrow f(x) \in \bar{A}$
  2. $x \notin \mathbb{K} \Rightarrow [x|x] \uparrow \ \Rightarrow [f|x] = 0 \Rightarrow f(x) \in A \Rightarrow f(x) \notin \bar{A}$
- On vient donc de montrer que $\mathbb{K} \prec \bar{A}$.

1.4 Question n°4 : A et $\bar{A}$ ne sont pas énumérables.

- On sait que $K \prec A$, donc $\bar{K} \prec \bar{A}$ et on sait que $K \prec \bar{A}$, donc $\bar{K} \prec A$.
- On sait également que K est énumérable alors $\bar{K}$ n'est pas énumérable.
- Alors, $\bar{A}$ n'est pas énumérable et A n'est pas non plus énumérable.

2 Exercice 2 : classique

Soit $B = \{x, [x|0] \downarrow et\ [x|1] \uparrow\}$.

1. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que B n'est pas récursif.
2. B et son complémentaire $\bar{B}$ sont-ils énumérables ?

2.1 Question n°1 : B non récursif par théorème de Rice

- On a B l'ensemble des (codes de) programmes qui convergent pour l'entrée 0 et diverge pour l'entrée 1.
- On utilise donc le théorème de Rice, tel que $\mathcal{C} = \{[x|0] \downarrow \&\& \ [x|1] \uparrow\}$ soit une propriété de la fonction $c : z \mapsto [x|z]$, tel que $0 \in dom(c)$ et $1 \notin dom(c)$.
- D'après le théorème de Rice, on cherche à montrer que B est non trivial. Alors, on doit trouver un programme qui est dans B (B $\neq \emptyset$) et un programme qui n'est pas dans B (B $\neq \mathbb{N}$) :
  1. Soit $zero$ un programme tel que : $zero : x \mapsto if\ x = 0\ return\ 0$ et $zero \in B$.
  2. Soit un un programme tel que : $un : x \mapsto return\ 1$ et $un \notin B$
- On doit maintenant prouver que ces deux programmes respectent la propriété $\mathcal{C}$ ou non :
  1. $zero$ converge sur l'entrée 0 et diverge sur toutes les autres entrées dont 1, alors $0 \in dom(zero)$ et $1 \notin dom(zero)$, on en déduit que $zero \in B$ donc $B \neq \emptyset$.
  2. un converge sur toutes entrées dont l'entrée 1, alors $dom(un) = \mathbb{N}$ soit $0 \notin dom(un)$, on en déduit que $un \notin B$ donc $B \neq \mathbb{N}$.
- On vient de prouver que B n'est pas trivial alors par le théorème de Rice, B n'est pas récursif.

2.2 Question n°2 : B et $\bar{B}$ non énumérables

> On doit procéder comme l'exercice précédent : 1. Prouver $\mathbb{K} \prec B$, et $\mathbb{K} \prec \bar{B}$.

> $\mathbb{K} \prec B$:

- On doit trouver une fonction de réduction calculable totale tel que $x \in \mathbb{K} \Rightarrow f(x) \in B$.
- Soit le programme suivant :

$$b < x, z >: si\ [x|x] \downarrow\ \&\&\ z = 0\ alors\ return\ z$$

  (z doit être indépendant de l'ensemble $\mathbb{K}$ car $dom(c) = \mathbb{N}$ avec c vu à la question 1)

  La focntion de réduction est donc :

$$f : x \mapsto S_1^1 < b, x >: z \mapsto si\ [x|x] \downarrow\ \&\&\ z = 0\ alors\ return\ z$$

- f est calculable totale car on associe à f le code d'un programme pour toute entrée. Cependant, cela ne veut pas dire que ce dernier est totale.
- F est bien la fonction de réduction car :
  1. $x \in \mathbb{K} \Rightarrow [x|x] \downarrow\ \Rightarrow [f|x] = z = 0 \Rightarrow f(x) \in B$
  2. $x \notin \mathbb{K} \Rightarrow [x|x] \uparrow\ \Rightarrow [f|x] = \perp \Rightarrow f(x) \notin B$
- On vient donc de montrer que $\mathbb{K} \prec$ B

> On fait de même avec $\mathbb{K} \prec \bar{B}$:

- On doit trouver une fonction de réduction calculable totale tel que $x \in \mathbb{K} \Rightarrow f(x) \in \bar{B}$ (avec $\bar{B}$, le programme qui converge sur 1 mais qui diverge sur 0.
- Soit le programme suivant :

$$b < x, y, z >: si\ step < x, x, y >= 0\ \&\&\ z = 0\ alors\ return\ z\ sinon \perp$$

  (on a 3 variables car y est le temps et z une variable independante)

  La foontion de réduction est donc :

$$f : x \mapsto S_1^2 < b, x >: y, z \mapsto si\ step < x, x, y >= 0\ \&\&\ z = 0\ alors\ return\ z\ sinon \perp$$

- f est calculable totale car on associe à f le code d'un programme pour toute entrée. Cependant, cela ne veut pas dire que ce dernier est totale.
- f est bien la fonction de réduction car :
  1. $x \in \mathbb{K} \Rightarrow [x|x] \downarrow\ \Rightarrow [f|x] = \perp \Rightarrow f(x) \in \bar{B} \Rightarrow f(x) \notin B$
  2. $x \notin \mathbb{K} \Rightarrow ([x|x] \uparrow\ \Rightarrow [f|x] = z = 0 \Rightarrow f(x) \notin \bar{B} \Rightarrow f(x) \in B$
- On vient donc de montrer que $\mathbb{K} \prec \bar{B}$

> Maintenant, prouvons que B et $\bar{B}$ ne sont pas énumérable :

- On sait que $K \prec B$, donc $\bar{K} \prec \bar{B}$ et on sait que $K \prec \bar{B}$, donc $\bar{K} \prec B$.
- On sait également que K est énumérable alors $\bar{K}$ n'est pas énumérable.
- Alors, $\bar{B}$ n'est pas énumérable et B n'est pas non plus énumérable.