TD 3 :

Exercice 10 Soit X1,...,Xn n variables al´eatoires normales N(m,σ2) et ind´ependantes. On note X¯= n1
□ni=1 Xi la moyenne empirique. Quelle est la loi de X¯?

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ → moyenne empirique

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ → quelle loi elle suit en

sachant que $\forall i$ X_i suit $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ → on a n valeurs

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit $\mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$

par linéarité

$$\sum X_i \quad \mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum x_i \qquad \operatorname{var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i)$$

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum E[X_i)$$

$\bar{X}$ suit une $\mathcal{N}\left(m, \boxed{\frac{\sigma^2}{n}}\right)$

$$\to \frac{\sigma^2 \times n}{n^2}$$

exo 11 Pile ou face

$\mathcal{B}e(p)$ $\quad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ _

$P(X = 1) = p \qquad P(X=0) = q = 1-p$

$S = \sum_{i=1}^{n} x_i) \Rightarrow E\ ? \qquad Var\ ?$

$E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = n \cdot p \qquad Var(S) = np(1-p)$

$E\left(\frac{S}{n}\right) = \frac{\cancel{n} \cdot p}{\cancel{n}} = p \qquad Var(S) = \frac{p(1-p)}{n}$

$= m \qquad\qquad = \sigma^2$

$$\operatorname{var}(X) = E\left(X - E(X)\right)^2 = \sigma_X^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{var}(X)}$$

définition

Prop : $\operatorname{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$

TCL

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Si X_i ... $X_1 \dots X_n$ est une suite de v.a ind de même loi (de moyenne m, variances σ^2)

alors

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - m}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Prop $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (i)

$X - m \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$\frac{X}{\sigma} \sim \mathcal{N}\left(\frac{m}{\sigma}, 1\right)$

$\frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

⚠ $\bar{a}$ connaître par ♥

$\bar{X} = \sum_{i=1} X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}e(p)$ $m = p$ $\sigma^2 = \frac{p\cdot(1-p)}{n}$ $p\cdot(1-p)$

d'après $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(p, \frac{p\cdot(1-p)}{n}\right)$

Si on fait n tirages de la loi binomiale de $n\overline{X}$ on a

$$\mathcal{N}\left(n \times p\, ,\ \frac{n^2 p(1-p)}{n}\right)$$

$$= n \times p(1-p)$$

Exo : pile face

100 tirages $n = 100$ $\mathcal{B}(n, p)$

$\mathcal{B}(100, 0{,}5)$

$$\frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$m = n \times p = 50$

$\sigma^2 = n \times p(1-p) = 100 \times 0{,}5 \times 0{,}5$

$= 25$

$\sigma = 5$

$P(X < 30)$

$X \leq 30 \Leftrightarrow$

$$P(X \leq 30) = P\left(Z \leq \frac{30 - m}{\sigma}\right)$$

$$\frac{30-50}{5} = \frac{-20}{5} = -4$$

$P(Z \leq -4) = 32 \cdot 10^{-6}$

$P(29{,}5 < X \leq 30{,}5) = P$

$P(X < 29{,}5) = P(U < -4{,}1)$

$= 26 \cdot 10^{-6}$

$P(X < 30{,}5) = P(U \leq 3{,}9) = 72 \cdot 10^{-6}$

Calcul avec correction -

face compris entre 40 et 60

$P(40 \leq x \leq 60) = P(\quad \leq Z \leq \quad)$

$m = 50 \qquad \sigma = 5$

$\frac{X - m}{\sigma} = Z$

$40 \leq \frac{x - 50}{5} \leq 60$

$-2 \leq x \leq 2$

$40 - 50 \leq x \leq 60 - 50$

$\frac{-10}{5} \leq x \leq \frac{10}{5}$

$P(40 \leq x \leq 60) = 95{,}44\%$

$$[P(X \geq n)] \leq 1\% \Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{n-50}{5}\right) \leq 1\%$$

$$\frac{n-50}{5} \geq 2{,}3263$$

$$n \geq (2{,}3263) \times 5 + 50$$

$$\geq \underbrace{\simeq 12}_{} + 50$$

$$\simeq 62$$

$$n = 62$$

$\mu = 70$ kg $\quad \sigma = 5$ kg $\quad 75 < X \leq 80$

$\hookrightarrow$? Quelle est la loi normale ?

$\rightarrow \mathcal{N}(70, 25)$

$$P(75 < X < 80) = P\left(\frac{75-70}{5} < Z < \frac{80-70}{5}\right)$$

$$= P(1 < Z < 2)$$

$$= P(Z < 2) - P(Z < 1)$$

$$= 0{,}1359$$

- $P(X > 85) = P(Z > 3) = 0{,}00135 = 1 - P(Z < 3)$

un échantillon de 25

Proba que la moyenne soit > 85

$\frac{1}{n}\sum X_i$

$n = \boxed{25}$

$\bar{X} = \frac{1}{\boxed{25}} \sum X_i$

$\mathcal{N}(70, 25)$

$\mathcal{N}\left(\underbrace{70}_{m}, \underbrace{\frac{25}{25}}_{\frac{\sigma^2}{n}}\right) = \mathcal{N}(70, 1)$

$P(\bar{X} > 85) = P\left(Z > \frac{85-70}{1}\right)$

$= P(Z > 15) = 1 - P(Z < 15)$

= presque