

La méthode de résolution pour le calcul des prédicats

HLIN602 Logique II Christian Retoré

31 mars 2021

29. Exemple résolution

1. Toutes les personnes qui entrent en voiture dans la faculté doivent avoir une carte ou être accompagnées par un membre du personnel.
2. Certains étudiants entrent en voiture dans la faculté sans être accompagnés de personnes qui ne sont pas des étudiants.
3. Aucun étudiant n'a de carte.

Montrer que certains étudiants sont membres du personnel

30. Formalisation en logique des prédicats

On considère les prédicats suivants :

- $V(x)$ x entre en voiture dans la faculté.
- $C(x)$ x possède une carte
- $P(x)$ x est membre du personnel de la faculté.
- $E(x)$ x est étudiant.
- $A(x, y)$ x est accompagné par y

31. Traduction logique

$$1. \forall x \left(V(x) \Rightarrow \left[C(x) \vee \left(\exists y [A(x, y) \wedge P(y)] \right) \right] \right)$$

$$2. \exists x \left(E(x) \wedge V(x) \wedge \neg \left[\exists y A(x, y) \wedge (\neg E(y)) \right] \right)$$

$$3. \forall x \left(E(x) \Rightarrow \left[\neg C(x) \right] \right)$$

Le but se traduit par :

$$4. \exists x \left(E(x) \wedge P(x) \right)$$

32. Transformation des énoncés et de la négation du but en clauses

Il faut transformer chaque énoncé (en fait la conjonction des énoncés) en un ensemble de clauses. Le dernier énoncé est bien sûr la négation du but : lorsqu'on procède par résolution, on montre que les hypothèses augmentées de la négation du but sont contradictoires, ce qui montre que la conjonction des hypothèses entraîne le but.

33. Enoncé 1 \rightarrow forme clauseale 1/3

$$1. \forall x \left(V(x) \Rightarrow \left[C(x) \vee \left(\exists y \left[A(x, y) \wedge P(y) \right] \right) \right] \right)$$

$$2. \forall x \left(V(x) \Rightarrow \left[\exists y \left(C(x) \vee [A(x, y) \wedge P(y)] \right) \right] \right)$$

(remontée du $\exists y$)

$$3. \forall x \left(\exists y \left[V(x) \Rightarrow \left(C(x) \vee [A(x, y) \wedge P(y)] \right) \right] \right)$$

(remontée du $\exists y$)

$$4. \forall x \left(\exists y \left[\left(\neg V(x) \right) \vee C(x) \vee \left(A(x, y) \wedge P(y) \right) \right] \right)$$

(transformation de $A \Rightarrow B$ en $(\neg A) \vee B$)

34. Enoncé 1 → forme clause 2/3

5. $\forall x \left(\left[\left(\neg V(x) \right) \vee C(x) \right] \vee \left[A(x, f(x)) \wedge P(f(x)) \right] \right)$
(mise sous forme de Skolem : remplacement du y de $\forall x \exists y$,
par $f(x)$ où f est un nouveau symbole de fonction)
6. $\forall x \left(\left[\left(\neg V(x) \right) \vee C(x) \right] \vee \left[A(x, f(x)) \wedge P(f(x)) \right] \right)$
(reparenthésage)

35. Enoncé 1 \rightarrow forme clausale 3/3

$$7. \forall x \left(\left[\left(\neg V(x) \right) \vee C(x) \vee A(x, f(x)) \right] \right. \\ \left. \wedge \left[\left(\neg V(x) \right) \vee C(x) \vee P(f(x)) \right] \right)$$

(distributivité de \vee sur \wedge)

$$8. \left(\forall x \left[\left(\neg V(x) \right) \vee C(x) \vee A(x, f(x)) \right] \right) \\ \wedge \left(\forall x \left[\left(\neg V(x) \right) \vee C(x) \vee P(f(x)) \right] \right)$$

(distributivité de $\forall x$ sur \wedge)

36. Enoncé 2 \rightarrow forme clause 1/2

1. $\exists x \left(E(x) \wedge V(x) \wedge \left[\neg \left(\exists y \left[A(x, y) \wedge \neg E(y) \right] \right) \right] \right)$
2. $\exists x \left(\left[E(x) \wedge V(x) \right] \wedge \left[\forall y \left(\left[\neg A(x, y) \right] \vee E(y) \right) \right] \right)$
(de Morgan : $(\neg(\exists y (X \wedge Y))) \equiv (\forall y ((\neg X) \vee (\neg Y)))$)
3. $\exists x \left(\forall y \left[\left(E(x) \wedge V(x) \right) \wedge \left(\left[\neg A(x, y) \right] \vee E(y) \right) \right] \right)$
(remontée du $\forall y$)

37. Enoncé 2 \rightarrow forme clauseale 2/2

$$4. \forall y \left(\left[E(a) \wedge V(a) \right] \wedge \left[(\neg A(a, y)) \vee E(y) \right] \right)$$

(mise sous sforme de Skolem, nouvelle constante a remplaçant le x de $\exists x$)

$$5. \left(\forall y \left[E(a) \wedge V(a) \right] \right) \wedge \left(\forall y \left[(\neg A(a, y)) \vee E(y) \right] \right)$$

(distributivité de \forall sur \wedge)

$$6. E(a) \wedge V(a) \wedge \left(\forall y \left[(\neg A(a, y)) \vee E(y) \right] \right)$$

(Si la formule X ne contient pas de y alors $(\forall y \ X) \equiv X$)

38. Enoncé 3 \rightarrow forme clauseale 1/1

$$1. \forall x \left(E(x) \Rightarrow \left[\neg C(x) \right] \right)$$

$$2. \forall x \left(\left[\neg E(x) \right] \vee \left[\neg C(x) \right] \right)$$

(transformation de $A \Rightarrow B$ en $(\neg A) \vee B$)

39. Enoncé 4 \rightarrow forme clausale 1/1

$$1. \neg \left(\exists x \left[E(x) \wedge P(x) \right] \right)$$

$$2. \forall x \left(\left[\neg E(x) \right] \vee \left[\neg P(x) \right] \right)$$

(de Morgan)

40. Mise sous forme clausale

La conjonction des quatre formules (trois hypothèses et la négation du but) donne donc la liste de clauses suivantes.

Vous remarquerez remarquez que la première formule donne deux clauses et la deuxième formule trois.

41. Clauses correspondant à l'énoncé 1

$$\text{I. } \forall x \left(\left[\neg V(x) \right] \vee C(x) \vee A(x, f(x)) \right)$$

$$\text{II. } \forall x \left(\left[\neg V(x) \right] \vee C(x) \vee P(f(x)) \right)$$

42. Clauses correspondant à l'énoncé 2

III. $E(a)$

IV. $V(a)$

V. $\forall y \left(\left[\neg A(a, y) \right] \vee E(y) \right)$

43. Clauses correspondant à l'énoncé 3

$$\text{VI. } \forall x \left(\left[\neg E(x) \right] \vee \left[\neg C(x) \right] \right)$$

44. Clauses correspondant à l'énoncé 4

$$\text{VII. } \forall x \left(\left[\neg E(x) \right] \vee \left[\neg P(x) \right] \right)$$

45. Résolution

- 8. $\neg C(a)$ (résolution sur les clauses III et VI)
- 9. $C(a) \vee A(a, f(a))$ (résolution sur les clauses I et IV)
- 10. $A(a, f(a))$ (résolution sur les clauses 8 et 9)
- 11. $C(a) \vee P(f(a))$ (résolution sur les clauses II et IV)
- 12. $P(f(a))$ (résolution sur les clauses 8 et 11)
- 13. $E(f(a))$ (résolution sur les clauses V et 10)
- 14. $\neg P(f(a))$ (résolution sur les clauses VII et 13)
- 15. \perp (résolution sur les clauses 12 et 14)

les trois hypothèses plus la négation du but sont contradictoires.
Les trois hypothèses entraînent le but.