Logique - Calculabilité - Complexité

Université de Montpellier
TD logique - 2022

Exercice 1 formules

1. Montrez que les deux formules suivantes sont équivalentes

$$(\forall x F(x)) \;\to\; (\exists y G(y))$$

$$(\forall x \neg G(x)) \;\to\; (\exists x \neg F(x))$$

.

2. Mettre sous forme prénexe la formule

$$\exists x \forall y\ (y < x) \;\to\; \forall x \exists y\ (x < y)$$

Exercice 2 petits modèles

1. Proposez une théorie T (un ensemble de formules avec un seul prédicat binaire noté $<$) exprimant que $<$ correspond à un ordre total strict.
2. Proposez un modèle de T ayant exactement 2 éléments.
3. Soit $F_n = (\exists x_0, x_1\ \ldots x_n\ x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$.
Considérons la théorie $T' = T \cup \{F_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Quelle propriété a-t-on ainsi imposée aux modèles de T' comparés à ceux de T ?
4. Proposez 3 modèles différents de T' dans le sens où ils ne sont pas élémentairement équivalents : considérez-les deux à deux et trouvez une formule vraie dans l'un et pas dans l'autre.

Exercice 3 petits modèles bis

1. Proposez une théorie T (un ensemble de formules) avec 2 prédicats binaires $<, v$ exprimant que le prédicat binaire $x < y$ correspond à un ordre (pas forcément total) et $v(x, y)$ exprimant que x et y sont des voisins immédiats dans l'ordre avec $x < y$.
2. Exprimez dans T que deux éléments sont à distance 2.
3. Exprimez dans T que seuls deux éléments sont en relation par v. Trouvez-en un modèle d'univers $\mathbb{R}$.
4. Ajoutons à T les formules $\forall x \exists y\ x < y$ et $\forall x \exists y, z\ (y < z \wedge v(y, x) \wedge v(x, z))$ pour obtenir la théorie T'. Trouvez-en un modèle d'univers $\mathbb{R}$.
5. Montrez que dans tout modèle de T' d'univers $\mathbb{R}$ la clôture symétrique et transitive de la relation v forme des classes d'équivalences dénombrables.

Exercice 4 modèles non bornés de l'ordre dense

1. Proposez une théorie T (un ensemble de formules) avec 1 prédicat binaire $<$ exprimant que $<$ correspond à un ordre total dense (strict).
2. Montrez que pour tout modèle il existe un modèle élémentairement équivalent (qui satisfait les mêmes formules du premier ordre) dont l'univers est dénombrable.
3. Montrez que deux modèles dénombrables de T qui n'ont pas de points extrémaux sont isomorphes.
4. Montrez que $(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})$ et $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$ sont élémentairement équivalents mais pas isomorphes.