Ordres, treillis et Induction

Enseignants 2022-2023

- Marianne Huchard (6 cours/TD répartis sur 5 semaines -1h50)
- David Delahaye (6 semaines cours/TD - 1h30)

Notions abordées dans le module

- Structures : ordres, ordres particuliers, treillis
- Raisonnement par induction

Modalités de contrôle des connaissances

- Session 1 : 100 % Ecrit, organisé par la Faculté Des Sciences
- Session 2 : 100 % Ecrit, organisé par la Faculté Des Sciences

Importance de la notion d'ordre

- Rangement, classification, ordonnancement
- Quelques exemples
  - Biologie : classification de plantes ou d'animaux
  - Sciences humaines et sociales : domination d'un individu par un autre
  - Recherche opérationnelle : ordonnancement entre tâches
  - Génie logiciel : hiérarchie d'héritage dans un langage de programmation par objets

Première partie : Ordres et treillis

Notions abordées

- relations et leurs propriétés, ensembles ordonnés, isomorphisme et type d'ordre
- chaînes, anti-chaînes, extensions, extensions linéaires, morphismes
- ordres particuliers (exemple de cette année : ordres produits)
- treillis et leurs éléments particuliers
- correspondance de Galois et treillis de Galois, réduction au cas des relations binaires (analyse formelle de concepts)

Applications en génie logiciel

- relation d'héritage
- relation de sous-typage
- structuration des classes

Relation binaire entre deux ensembles

Définition

Soient deux ensembles E et F,
une relation binaire R est une partie du produit cartésien $E \times F$
On note $R \subseteq E \times F$
Il s'agit aussi d'un ensemble de couples (e, f) avec $e \in E$ et $f \in F$.
On écrira $(e, f) \in R$ ou eRf.

Exemple (1. Associer une ville à un pays dont elle est la capitale)

$E_v = \{Paris, Berlin, Rome, Montpellier\}$
$F_p = \{Allemagne, France, Italie, Espagne\}$
$R_{vp} = \{(Paris, France), (Berlin, Allemagne), (Rome, Italie)\}$

Exemple (2. Associer une variété de fleur à une couleur qu'elle peut avoir)

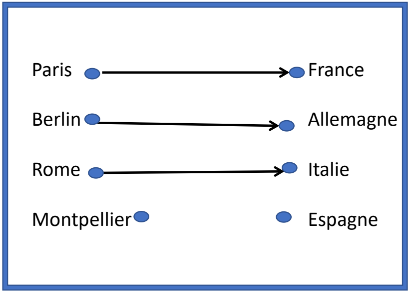
$E_f = \{jasmin, muguet, petunia\}$
$F_c = \{blanc, jaune, rouge, rose, violet, vert\}$
$R_{fc} = \{(jasmin, blanc), (jasmin, jaune), (muguet, blanc), (petunia, blanc),$
$(petunia, rouge), (petunia, rose), (petunia, violet)\}$

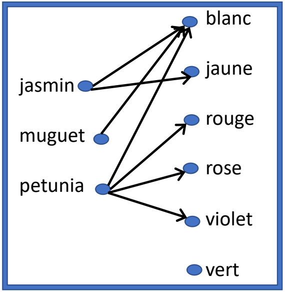
Représentation d'une relation binaire pour $E \neq F$ par un graphe

Définition

À une relation binaire $R \subseteq E \times F$, $E \neq F$, on associe un graphe orienté $G = (E \cup F, R)$. Ses sommets sont les éléments de E et les éléments de F et ses arcs sont les couples de la relation R.

Exemple (Graphes associés aux relations R_{vp} (gauche) et R_{fc} (droite))





Relation binaire sur un ensemble

Définition

Soit un ensemble E, une relation binaire R sur E est une partie du produit cartésien $E \times E$.
On note $R \subseteq E \times E$.
Il s'agit aussi d'un ensemble de couples (e_1, e_2) avec $e_1 \in E$ et $e_2 \in E$.
On écrira $(e_1, e_2) \in R$ ou $e_1 R e_2$.

Exemple (Relation binaire sur un ensemble)

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
$R = \{(e_1, e_1), (e_1, e_2), (e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_3, e_5), (e_4, e_5), (e_5, e_4)\}$

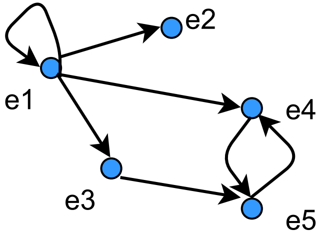
Représentation d'une relation binaire sur un ensemble par un graphe

Définition

À une relation binaire sur E, $R \subseteq E \times E$, on associe un graphe orienté $G = (E, R)$. Ses sommets sont les éléments de E et les éléments de F et ses arcs sont les couples de la relation R.

Exemple (Relation binaire sur un ensemble)

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
$R = \{(e_1, e_1), (e_1, e_2), (e_1, e_3), (e_1, e_4), (e_3, e_5), (e_4, e_5), (e_5, e_4)\}$

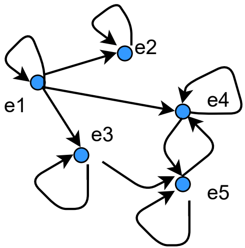
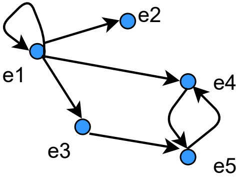


Relation réflexive

Définition

Soient un ensemble E et une relation binaire R sur E, R est réflexive si :
$\forall e \in E, (e, e) \in R$ *(que l'on note aussi eRe)*

Exemple

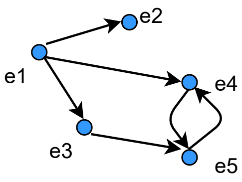
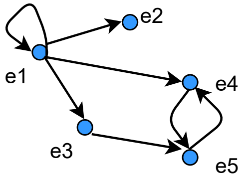
Une relation réflexive	*Une relation non réflexive*
	

Relation irréflexive

Définition

Soient un ensemble E et une relation binaire R sur E, R est irréflexive si : $\forall e \in E$, $(e, e) \notin R$

Exemple

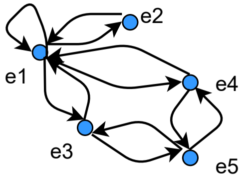
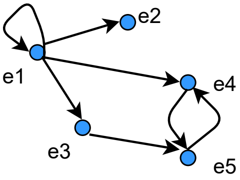
Une relation irréflexive	*Une relation non irréflexive*
	

Relation symétrique

Définition

Soient un ensemble E et une relation binaire R sur E, R est symétrique si :
$\forall e_1, e_2 \in E$, *si* $(e_1, e_2) \in R$, *alors* $(e_2, e_1) \in R$

Exemple

Une relation symétrique	*Une relation non symétrique*
	

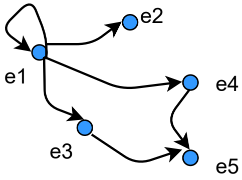
Relation antisymétrique

Définition

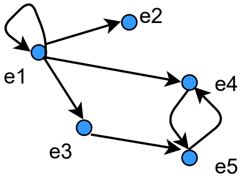
Soient un ensemble E et une relation binaire R sur E, R est anti-symétrique si :
$\forall e_1, e_2 \in E$, *si* $(e_1, e_2) \in R$ *et* $(e_2, e_1) \in R$, *alors* $e_2 = e_1$

Exemple

Une relation antisymétrique



Une relation non antisymétrique

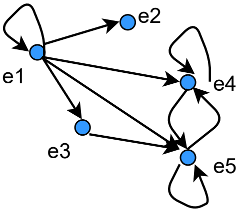
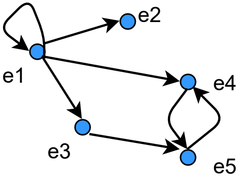


Relation transitive

Définition

Soient un ensemble E et une relation binaire R sur E, R est une relation transitive si $\forall e_1, e_2, e_3 \in E,\ e_1 R e_2 \text{ et } e_2 R e_3 \implies e_1 R e_3$

Exemple

Une relation transitive	*Une relation non transitive*
	

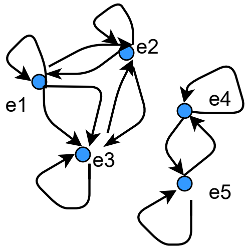
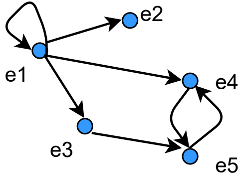
Relation d'équivalence

Définition

Soient un ensemble E une relation binaire R sur E, R est une relation d'équivalence si :

- *réflexive*
- *symétrique*
- *transitive*

Exemple

Une relation d'équivalence	*Une relation qui n'est pas une relation d'équivalence*
	

Préordre

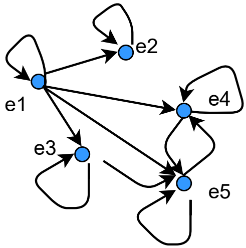
Définition

Soient un ensemble E une relation binaire R sur E est un pré-ordre si :

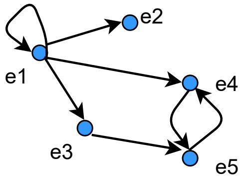
- *réflexive*
- *transitive*

Exemple

Un pré-ordre



Une relation qui n'est pas un préordre



Ordre

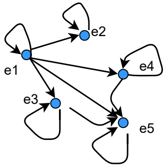
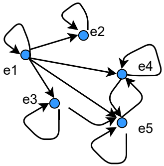
Définition

Soient un ensemble E une relation binaire R (notée $\leq$) sur E est un ordre si elle est :

- *réflexive*
- *antisymétrique*
- *transitive*

$(E, \leq)$ *est appelé un ensemble ordonné. On écrit* $x \leq y$ *plutôt que* $(x, y) \in \leq$.

Exemple

Un ordre	*Une relation qui n'est pas un ordre*
	
$e_1 \leq e_1$, $e_1 \leq e_2$, $e_1 \leq e_5$	

Vocabulaire

- y couvre x si $x \neq y$, $y \geq x$ et $\forall z$, si $y \geq z$ et $z \geq x$, on a $x = z$ ou $y = z$
- x est un minorant de y si $x \leq y$ (resp. majorant si $y \leq x$)
- x et y sont comparables si $x \leq y$ ou $y \leq x$
- x et y sont incomparables si $x \nleq y$ et $y \nleq x$ (notation m $x||y$)

Exemple

e_2 majore et couvre e_1, e_5 majore mais ne couvre pas e_1, e_2 et e_4 sont incomparables

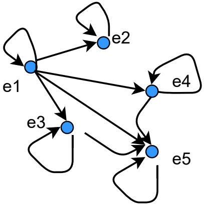


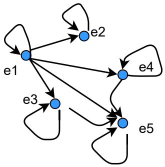
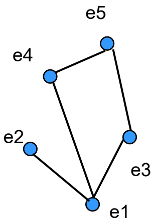
Diagramme de Hasse

Définition

Soit un ensemble ordonné $(E, \leq)$ *son diagramme de Hasse est une représentation graphique de sa relation de couverture telle que chaque élément* x *de* E *est représenté par un point* $p(x)$ *du plan avec :*

- *si* $x \leq y$*, la droite horizontale passant par* $p(x)$ *est au-dessous de la droite horizontale passant par* $p(y)$*.*
- *lorsque* y *couvre* x*, un segment de droite joint* $p(x)$ *et* $p(y)$*.*

Exemple

Un ordre	*Son diagramme de Hasse*
	

Relation d'ordre strict

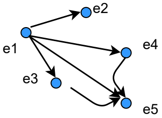
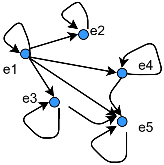
Définition

Soit un ensemble E, une relation binaire R sur E est une relation d'ordre strict (notée $<$) si elle est :

- *irréflexive*
- *transitive*

Elle est alors asymétrique : quand xRy, on n'a pas yRx.

Exemple

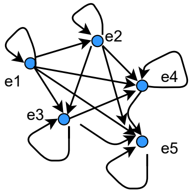
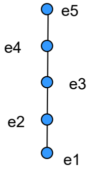
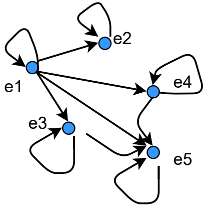
Un ordre strict	*Une relation qui n'est pas un ordre strict*
	

Relation d'ordre total

Définition

Soit un ensemble ordonné $(E, \leq)$, $\leq$ *est un ordre total si* $\forall x, y \in E$ *on a* $x \nleq y \implies y \leq x$

Exemple

Un ordre total et son diagramme de Hasse	*Un ordre qui n'est pas total*
 	

Morphisme entre relations binaires sur un ensemble E

Definition (Morphisme entre relations binaires sur un ensemble E)

Si R_p et R_q sont deux relations binaires sur E, un morphisme de R_p vers R_q est une application m de E vers E vérifiant : $\forall x, y \in E$, $xR_py \implies m(x)R_qm(y)$.
Un morphisme préserve les couples et peut en ajouter.

Isomorphismes et types d'ordre, Morphismes

Définition (morphisme d'ordre)

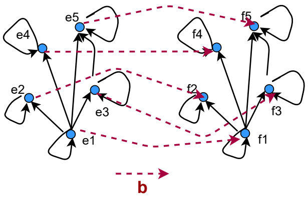
Soient deux ensembles ordonnés $P = (E_P, \leq_P)$ et $Q = (E_Q, \leq_Q)$, une application a de E_P vers E_Q vérifiant : $\forall x, y \in E_P,\ x \leq_P y \implies a(x) \leq_Q a(y)$. *a est appelée un morphisme d'ordre. a préserve l'ordre $\leq_P$.*

Définition (isomorphisme d'ordre)

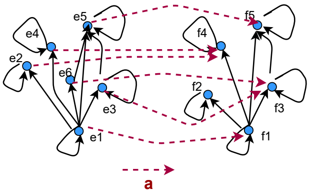
Deux ensembles ordonnés $P = (E_P, \leq_P)$ et $Q = (E_Q, \leq_Q)$ sont isomorphes (on dira aussi qu'ils sont du même type) lorsqu'il existe une bijection b de E_P and E_Q vérifiant : $\forall x, y \in E_P,\ x \leq_P y \Leftrightarrow b(x) \leq_Q b(y)$. *b est appelée un isomorphisme d'ordre. b préserve l'ordre $\leq_P$ et sa réciproque b^{-1} préserve l'ordre $\leq_Q$.*

Exemple

Un isomorphisme d'ordre

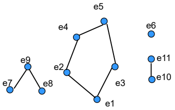


Un morphisme d'ordre qui n'est pas un isomophisme



Exercices

1. Dessiner des modèles UML pour les notions rencontrées et discuter des modélisations et de la sémantique apportée par la sémantique mathématique sous-jacente.
2. On donne le diagramme de Hasse ci-dessous, reconstruire l'ordre qu'il représente.



3. Formaliser la relation « est isomorphe à » et indiquer ses propriétés.
4. Formaliser pour Java les relations suivante et indiquer leurs propriétés :
   1. les relations *extends* et *implements*
   2. la relation *extends*$+$ qui relie une classe à elle-même ou à chacune de ses super-classes ; ou une interface à elle-même ou à chacune de ses super-interfaces
5. Soit un programme Java contenant des classes et des interfaces, existe-t-il un morphisme de la relation *extends* restreinte aux classes vers la relation *extends* $\cup$ *implements* ? Et inversement ? Poser formellement les éléments en jeu.
6. Formaliser la relation d'inclusion entre paquetages en Java et indiquer ses propriétés.