Logique - Calculabilité - Complexité

Université de Montpellier
Partiel de calculabilité - 2022
19 octobre 2022

Durée 1h30
Aucun document n'est autorisé
Pas de calculatrice, téléphone portable, montre programmable,
appel à un ami, consultation de l'avis du public, *etc.*

Justifiez vos réponses avec grand soin !

Dans tout ce qui suit, comme dans le cours, le symbole $\prec$ désigne la *réduction many-one* ; les ensembles considérés sont des ensembles d'entiers, qu'ils contiennent des données ou des programmes.

Exercice 1 énumérations

1. Montrez que A est énumérable si et seulement si $A \prec \mathbb{K}$.
2. Soit g une fonction récursive totale croissante (au sens large) et tendant vers l'infini. Montrez que si un ensemble A admet une fonction d'énumération f injective qui vérifie $\forall x\ f(x) \geq g(x)$, alors il est récursif.

Exercice 2 réductions

Soit A l'ensemble des programmes x tels que x s'arrête sur au moins une entrée et, sur deux entrées distinctes où x s'arrête, il ne donne jamais le même résultat.

1. Ecrivez A sous la forme d'une formule du type $A = \{x,\ \dots\}$.
2. En utilisant avec soin le théorème de Rice, montrez que A n'est pas récursif.
3. Montrez que $\mathbb{K} \prec A$.
4. Montrez que $\mathbb{K} \prec \overline{A}$ (où $\overline{A}$ est le complémentaire de A).
5. Montrez que ni A ni $\overline{A}$ ne sont énumérables.

Exercice 3 points fixes

On dit qu'un programme est *minimal* s'il est le plus petit dans l'ensemble de tous les programmes qui calculent la même fonction.
En d'autres termes n est minimal si $\forall m\ [m \mid \cdot] = [n \mid \cdot] \implies m \geq n$; ou encore n est minimal si pour tout (code de) programme m calculant la même fonction que le programme n on a $m \geq n$.
On note M l'ensemble des programmes minimaux et on souhaite montrer que M n'est pas récursif.

1. Expliquez pourquoi on ne peut pas utiliser le théorème de Rice pour traiter le cas de cet ensemble.
2. Montrez que si la propriété d'être minimal était décidable, alors pour chaque entier, on pourrait trouver un entier strictement plus grand que le premier et qui soit minimal.
3. Montrez (on peut utiliser ce qui précède) que la minimalité n'est pas décidable.