Logique du premier ordre (HAI504I)

Licence 3
Département Informatique
Faculté des Sciences de Montpellier

TD N°2

Exercice 1

Soient le prédicat P et la relation Q définis comme suit :
- $P(x) \equiv x$ a réussi son examen ;
- $Q(x, y) \equiv x$ a posé des questions à y.

1. Traduire en formules les énoncés suivants :
   - Quelqu'un a raté l'examen et n'a été questionné par personne ;
   - Tous ceux qui ont réussi à l'examen ont posé des questions à quelqu'un ;
   - Tous ceux qui ont réussi à l'examen ont été questionnés par quelqu'un ;
   - Personne n'a posé de question à tous ceux qui ont réussi à l'examen ;
   - Tous ceux qui ont posé des questions à quelqu'un, ont posé des questions à quelqu'un qui a réussi l'examen.
2. Soit l'interprétation I avec $D_I = \{Anatole, Boris, Catarina, Diana\}$. Dans cette interprétation, seuls $Boris$ et $Catarina$ ont réussi l'examen. Les garçons ($Anatole$ et $Boris$) ont posé des questions aux filles ($Catarina$ et $Diana$), $Diana$ a posé des questions à $Boris$, $Catarina$ à $Diana$ et ce sont les seuls cas d'entraide.
   - Donner les définitions de $I(P)$ et $I(Q)$;
   - Donner la sémantique des formules précédentes dans cette interprétation.

Exercice 2

Soient a une constante et P un prédicat (unaire).

1. Trouver différentes interprétations (si c'est possible) telles que :
   - La formule $P(a)$ soit vraie et la formule $\exists x.P(x)$ soit vraie ;
   - La formule $P(a)$ soit fausse et la formule $\exists x.P(x)$ soit vraie ;
   - La formule $P(a)$ soit vraie et la formule $\exists x.P(x)$ soit fausse ;
   - Les deux formules $P(a)$ et $\exists x.P(x)$ soient fausses.
2. Pour chacune des interprétations trouvées précédemment, quelle est la sémantique des formules suivantes (faire le calcul) ?
   - $(\exists x.P(x)) \Rightarrow P(a)$;
   - $\forall x.P(x)$.

   Que dire de ces formules ?
3. Que dire des formules suivantes (le démontrer) ?
   - $P(a) \Rightarrow \exists x.P(x)$;
   - $P(a) \wedge \neg\exists x.P(x)$.

Exercice 3

Démontrer la validité des formules suivantes :

1. $\forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.P(y) \vee Q(y)$
2. $(\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$
3. $(\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x)) \Rightarrow \forall x.P(x) \wedge Q(x)$
4. $(\forall x.P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x))$
5. $(\forall x.\neg P(x)) \Rightarrow \neg(\exists x.P(x))$
6. $\neg(\forall x.P(x)) \Rightarrow \exists x.\neg P(x)$

Exercice 4

Soit l'énoncé suivant :

« Si quelqu'un résout ce problème, alors tout mathématicien le résout.
Cabot est mathématicien et ne résout pas ce problème. »

Peut-on en conclure que personne ne résout ce problème ?
Quelle que soit la réponse, le démontrer.

Exercice 5

Démontrer que le raisonnement suivant est incorrect (autrement dit que la conclusion n'est pas conséquence logique des hypothèses) :

Hypothèses	*Conclusion*
1. $\exists x.P(x)$;	— $\exists x.R(x)$.
2. $\exists x.Q(x)$;	
3. $\forall x.P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow R(x)$.	