Logique du premier ordre (HAI504I)

Licence 3
Département Informatique
Faculté des Sciences de Montpellier

TD N°3

Exercice 1

Soient les prédicats unaires A, B, et C. Faire les preuves des formules suivantes dans le calcul des séquents (système LK) :

1. $\forall x.A(x) \Rightarrow B(x) \Rightarrow A(x)$
2. $\forall x.(A(x) \Rightarrow B(x) \Rightarrow C(x)) \Rightarrow (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow A(x) \Rightarrow C(x)$
3. $\forall x.A(x) \wedge B(x) \Rightarrow B(x)$
4. $\forall x.B(x) \Rightarrow A(x) \vee B(x)$
5. $\forall x.(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow (A(x) \Rightarrow C(x)) \Rightarrow (B(x) \Rightarrow C(x)) \Rightarrow C(x)$
6. $\forall x.A(x) \Rightarrow \bot \Rightarrow \neg A(x)$
7. $\forall x.\bot \Rightarrow A(x)$
8. $\forall x.(A(x) \Leftrightarrow B(x)) \Rightarrow A(x) \Rightarrow B(x)$
9. $\forall x.(A(x) \Leftrightarrow B(x)) \Rightarrow B(x) \Rightarrow A(x)$
10. $\forall x.(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow (B(x) \Rightarrow A(x)) \Rightarrow (A(x) \Leftrightarrow B(x))$

Exercice 2

Soient les prédicats unaires P et Q. Faire les preuves des formules suivantes dans le calcul des séquents (système LK) :

1. $\forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.P(y) \vee Q(y)$
2. $(\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$
3. $(\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x)) \Rightarrow \forall x.P(x) \wedge Q(x)$
4. $(\forall x.P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x))$
5. $(\forall x.\neg P(x)) \Rightarrow \neg(\exists x.P(x))$
6. $\neg(\forall x.P(x)) \Rightarrow \exists x.\neg P(x)$

Exercice 3

Dans cet exercice, nous allons voir comment raisonner efficacement modulo théories en logique du premier ordre. Pour les besoins de l'exercice, nous considérons la théorie des ensembles, mais l'approche est généralisable à toute théorie.

1. Soit l'axiome définissant l'inclusion ensembliste :

$$\forall a, b.a \subseteq b \Leftrightarrow \forall x.x \in a \Rightarrow x \in b$$

   En utilisant cet axiome, faire la preuve que : $\forall a.a \subseteq a$.

2. En 1965, Dag Prawitz eut l'idée d'intégrer les axiomes de théorie aux règles de déduction du système de preuve. Par exemple, dans le calcul des séquents (système LK), l'axiome de l'inclusion devient les deux règles suivantes (une règle gauche et une règle droite) :

$$\frac{\Gamma, \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b \vdash \Delta}{\Gamma, a \subseteq b \vdash \Delta} \subseteq_{\mathsf{left}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b}{\Gamma \vdash \Delta, a \subseteq b} \subseteq_{\mathsf{right}}$$

   où a et b représentent n'importe quels termes, et où (si on regarde les règles abductivement) la définition de l'inclusion est simplement « dépliée » à gauche ou à droite.

   Avec ces nouvelles règles, faire la preuve que : $\forall a. a \subseteq a$.

3. En 2007, Brauner, Houtmann et Kirchner eurent l'idée d'aller plus loin en observant qu'une fois intégrée comme une règle de déduction, on pouvait continuer à « déstructurer » la formule dépliée et ensuite éliminer les étapes de déstructuration. On obtient ainsi une règle « compilée », plus compacte, qu'on appelle règle de superdéduction. Par exemple, pour $\subseteq_{\mathsf{right}}$, on obtient :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, x \in a \vdash \Delta, x \in b}{\Gamma \vdash \Delta, x \in a \Rightarrow x \in b} \Rightarrow_{\mathsf{right}}}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x. x \in a \Rightarrow x \in b} \forall_{\mathsf{right}},\ x \notin \Gamma, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, a \subseteq b} \subseteq_{\mathsf{right}}$$

   Ce qui devient en éliminant les étapes de déstructuration intermédiaires :

$$\frac{\Gamma, x \in a \vdash \Delta, x \in b}{\Gamma \vdash \Delta, a \subseteq b} \subseteq_{\mathsf{right}},\ x \notin \Gamma, \Delta$$

   Faire de même pour la règle $\subseteq_{\mathsf{left}}$.
   Avec ces nouvelles règles, faire la preuve que : $\forall a. a \subseteq a$.

4. Produire les règles (gauches et droites) de superdéduction correspondant aux axiomes suivants :
   — $\forall a, b. a \cup b \Leftrightarrow \forall x. x \in a \vee x \in b$
   — $\forall a, b. a - b \Leftrightarrow \forall x. x \in a \wedge x \notin b$