Logique - Calculabilité - Complexité

Université de Montpellier

TD logique n°2 - 2022

Exercice 1 modèles, théories et propriétés

1. Pour le modèle $(\mathbb{R}, |x-y|=1)$, c'est-à-dire $\mathbb{R}$ avec un prédicat binaire d tel que $d(x,y)$ si et seulement si x et y sont à distance 1 dans $\mathbb{R}$, donnez une formule qui exprime $|x-y|=2$.
2. Pour le modèle $(\mathbb{R}, |x-y|=1)$ montrez que la fonction $x \to x+1$ est un automorphisme. En déduire que dans ce modèle on ne peut pas exprimer la propriété $x=0$.
3. Montrez que dans $(\mathbb{R}, |x-y|=1)$ on ne peut pas exprimer la propriété x est un entier.
4. Montrez que dans $(\mathbb{Z}, x+y=z)$ on peut exprimer les propriétés $x=0$ et x est pair.
5. Montrez que dans $(\mathbb{Z}, x+y=z)$ on ne peut pas exprimer la propriété $x>0$.

Exercice 2 compacité - ordres complétés

Soit $\mathcal{A} = (A, <, a_1, a_2, \dots)$ un modèle dénombrable où chaque élément de A apparaît comme une constante a_i. La relation $<$ est un ordre (partiel) quelconque. On note T la théorie de l'ordre partiel (voir précédents exercices) et on a donc $\mathcal{A} \models T$. Nous allons démontrer qu'on peut étendre l'ordre de A en un (nouvel) ordre total. On appelle $f_{i,j}$ la formule $a_i < a_j \vee a_j < a_i$.

1. Pour $i \neq j$, trouvez un modèle $\mathcal{A}_{i,j}$ de même langage que $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}_{i,j} \models T \cup \{f_{i,j}\}$ et où l'ordre sur $\mathcal{A}_{i,j}$ étend celui sur $\mathcal{A}$.
2. Trouvez un modèle $\mathcal{A}_n$ de même langage que $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}_n \models T \cup \{\bigwedge_{i\leq n, j\leq n, i\neq j} f_{i,j}\}$ et où l'ordre sur $\mathcal{A}_n$ étend celui sur $\mathcal{A}$.
3. En déduire qu'on peut étendre l'ordre en un ordre total sur $\mathcal{A}$.

Exercice 3 compacité et $\mathbb{Z}$

On dispose ici d'une théorie T de l'ordre total strict et d'une fonction S vérifiant $\forall x\ x < S(x)$ et $\neg(\exists x, y\ x < y < S(x))$.

1. Pour tout n trouver une formule $F_n(a,b)$ qui exprique $a+n<b$.
2. Pour tout n trouver un modèle d'univers $\mathbb{Z}$ où $F_n(a,b)$ est vrai , a, b étant des constantes du modèle.
3. Montrez que tout ensemble fini de formules F_n ajouté à la théorie T est cohérent.
4. Montrez que l'ensemble infini des formules F_n ajouté à la théorie T est cohérent. Imaginez à quoi ressemble un modèle de cette théorie.