Logique du premier ordre (HAI504I)

Licence 3
Département Informatique
Faculté des Sciences de Montpellier

TD N°0

Exercice 1

Soient les formules suivantes :
- $\mathcal{F}_1 = A \wedge B \Rightarrow C$;
- $\mathcal{F}_2 = A \wedge \neg B \vee C \Rightarrow D$;
- $\mathcal{F}_3 = A \Rightarrow B \Leftrightarrow C \wedge D$;

1. Parenthéser les formules $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_3$ au maximum de manière à lever toutes les ambiguïtés liées à l'associativité et à la précédence des connecteurs.
2. Dessiner les arbres syntaxiques des formules $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_3$.

Exercice 2

Soient les formules suivantes :
- $\mathcal{F}_1 = A \wedge B \Rightarrow C$;
- $\mathcal{F}_2 = A \wedge \neg B \vee C \Rightarrow D$;
- $\mathcal{F}_3 = A \Rightarrow B \Leftrightarrow C \wedge D$;

1. Écrire la fonction *sub*, qui, étant donnée une formule $\mathcal{F}$, rend l'ensemble des sous-formules de $\mathcal{F}$.
2. Écrire la fonction *nbc*, qui, étant donnée une formule $\mathcal{F}$, rend l'ensemble des connecteurs de $\mathcal{F}$.
3. Appliquer les fonctions *sub* et *nbc* sur les $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_3$.
4. Vérifier que : $|sub(\mathcal{F}_i)| \leq 2 \times nbc(\mathcal{F}_i) + 1$, pour $i = 1, 2, 3$.
5. Démontrer que : $|sub(\mathcal{F})| \leq 2 \times nbc(\mathcal{F}) + 1$, pour toute formule $\mathcal{F}$.

Exercice 3

Formaliser les énoncés suivants (au préalable, donner les variables de propositions utilisées pour la formalisation, ainsi que leur sémantique) :

1. Il suffit à Éric d'assister aux cours et aux TD pour qu'il ait la moyenne.
2. R est une relation d'équivalence si et seulement si R est réflexive, symétrique et transitive.
3. Si Rose n'est pas vaccinée, il suffit d'une coupure pour qu'elle attrape le tétanos.
4. Si Pierre est chez lui, il lit ou il écoute de la musique.
5. Le sida ne sera pas éradiqué à moins qu'un nouveau vaccin ne soit découvert.
6. Il est nécessaire d'avoir du courage et de l'habileté pour escalader cette paroi.

Exercice 4

Soient les formules suivantes :

— $\mathcal{F}_1 = A \wedge (\neg B \Rightarrow B \Rightarrow A)$

— $\mathcal{F}_2 = A \vee B \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

1. Étant donnée une interprétation ρ, déterminer (si c'est possible) $[\![\mathcal{F}_1]\!]_\rho$ et $[\![\mathcal{F}_2]\!]_\rho$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $\rho(A) = F$ et $\rho(B) = T$;
   (b) $\rho(A) = T$ et $\rho(B) = F$;
   (c) $\rho(A) = F$;
   (d) $\rho(B) = T$.
2. Les formules $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont-elles satisfiables ? Valides ?

Exercice 5

Faire les preuves des formules suivantes dans le calcul des séquents (système LK_0) :

1. $A \Rightarrow B \Rightarrow A$
2. $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow C$
3. $A \wedge B \Rightarrow B$
4. $B \Rightarrow A \vee B$
5. $(A \vee B) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow C$
6. $A \Rightarrow \bot \Rightarrow \neg A$
7. $\bot \Rightarrow A$
8. $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow A \Rightarrow B$
9. $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow B \Rightarrow A$
10. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$

Exercice 6

Soient les hypothèses suivantes :

— $(\mathcal{H}_1)$ Jules n'est jamais en vacances quand il lit le journal.

— $(\mathcal{H}_2)$ Pour que Jules soit à la mer, il suffit qu'on soit en été.

— $(\mathcal{H}_3)$ Si Jules est à la mer mais qu'il n'est pas en forme alors il lit le journal.

— $(\mathcal{H}_4)$ Il est impossible qu'on ne soit pas en été et que Jules ne soit pas à la mer.

— $(\mathcal{H}_5)$ Quand Jules n'est pas en vacances alors il ne lit pas le journal.

1. Modéliser ces hypothèses en logique propositionnelle.
2. Démontrer, en utilisant la résolution, que : Jules est en forme.