Cas discret : à chaque évènement on associe une valeur par sa mesure de probabilité : $P(X=3)$ ...

Cas Continue : On associe des mesures à des intervalles de valeurs prises par la v.a : $P(X<3)$, $P(Y\geq 5)$ ...

Linéarité espérance : $Y = ag(X) + bh(X)$ a et b sont deux constantes et g et h deux fonctions. Alors on a : $E(Y) = aE(g(x)) + bE(h(x))$. x vaut $\mathcal{N}(1,1)$, $Y = 3x+1$ donc $E(Y) = 3\times1+1 = 4$.

Moment simple d'ordre r : $\mu r = E(X^r)$ | **Écart type** : $\sqrt{Var(x)}$ | Coefficient de corrélation $Corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

Var (aX+b) $= a^2 V(X)$ **Loi Poisson**

$p(k) = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ / $E(X) = \lambda$ / $V(x) = \lambda$

Var indépendantes : X et Y sont deux variables indépendantes ssi : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$

Valeur clé loi de Gauss : $P(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma) = 0{,}95$

Moyenne Empirique échantillon : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$E(\bar{X}) = \mu$ $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Loi exponentielle : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ $P(X>t) = e^{-\lambda t}$

Variance Empirique : $\bar{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ $E(\bar{S}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$

Si la loi mère est $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\bar{X}$ est gaussienne de loi $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$\bar{X}$ et S^2 sont de v.a indé TCL2

Variance de l'échantillon : $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ **écart type empirique** $\sqrt{\bar{S}^2}$

$cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$

écart type échantillon : $\sqrt{S^2}$

Moment centré d'ordre r $M'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^r$: $\mu'_r = E(X-\mu)^r)$

Décentrage variance empirique $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$

Chi-Deux : Soit $Z_1 \dots Z_n$ une suite de va iid de loi mère $\mathcal{N}(0,1)$. Alors la va $T = \sum_{i=1}^{v} Z_i^2$ suit une loi du Chi-deux à v degrés de liberté notée $\chi^2(v)$

$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$ **Moment d'ordre r** : $\mu_r = E(X^r)$

$E(T) = v$ $V(T) = 2v$

Loi Student : Soient Z et Q deux v.a indépendantes de loi $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Q \rightsquigarrow \chi^2(v)$. Alors la va $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Q}{v}}}$ suit une loi Student de degré v. notée $t(v)$. Soit $T \rightsquigarrow t(v)$. $E(t) = 0$ si $v \geq 2$ et $V(T) = \frac{v}{v-2}$ si $v \geq 3$

Viid : v.a indé identiquement distrib.

Fisher : soit $U \rightsquigarrow \chi^2(v_1)$ et $V \rightsquigarrow \chi^2(v_2)$ deux v.a indépendantes. alors la v.a $F = \frac{U/v_1}{V/v_2}$ suit une loi Fisher à v_1 degrés de liberté au numérateur et v_2 au dénominateur, notée $F(v_1, v_2)$. Si $v_2 \geq 3$ la moyenne théorique est $v_2 / (v_2 - 2)$, si $v_2 \geq 5$ la variance théorique est $\frac{2v_2^2 (v_1 + v_2 - 2)}{v_1 (v_2 - 2)^2 (v_2 - 4)}$

Loi forte des grands nombres. Soit $\{X_n\}$ une suite de va iid de moyenne théorique μ et de variance théorique σ^2. Alors la suite des moyennes empiriques $\{\bar{X}_n\}$ converge presque sûrement vers μ : $\bar{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{ps} \mu$

Soit $X_1 \dots X_n$ n va i normales suivant $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ on note $\bar{x} = \frac{1}{n} \Sigma \dots x_i$ la moy empirique :

Par récurrence sur la propriété de la somme X_i suit une loi normale $\mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$. Par liné $\bar{X}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$. Le TCL généralise le résultat précé à une v.a X quelconque. Si $X_1 \dots X_n$ est une suite de v.a de même loi et indé, ayant moy thé m et un écart type σ, alors la moyemp suit la loi approximativement la loi normale $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$

TCL : $(\bar{X}_n - \mu / (\sigma / \sqrt{n}))$ $\mathcal{N}(0,1)$

Erreur première espèce : Rejeter Ho lorsqu'elle est vraie. On suppose que Ho est vraie

Test bilatéral : On considère des valeurs extrêmes avant et après la moyenne.

Test unilatéral : Un coté par exemple un médicament réduit le temps de Réact

Les tests param ont par but de décider sur la base d'un échantillon si une caractéristique de la loi mère répond ou non à une certaine spécification que l'on appelle hypothèse.

Loi uniforme param r : $E(X) = \frac{r+1}{2}$ $V(X) = \frac{r^2-1}{12}$ $P(X=x) = \frac{1}{r}$

Bernoulli : 0 ou 1. Param n et p. $P(X=x) = p^x (1-p)^{1-x}$ $E(X) = p$ $V(x) =$

$P(X=1) = p$, $p(X=0) = 1-p$,

Bernoulli et Binomiale : $P(X=x) = p(x) = \binom{n}{x} p^x * (1-p)^{n-x}$

Soit $X_1 \dots X_n$ une suite de va iid de loi $B(p)$ alors $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit $B(n,p)$

Si $X \rightsquigarrow B(n_1, p)$, $Y \rightsquigarrow B(n_2, p)$ alors $X+Y \rightsquigarrow B(n_1+n_2, p)$

$E(X) = np$ $V(X) = np(1-p)$.

Loi Gauss : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\frac{X-\mu}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$Z\mathcal{N}(0,1) \rightarrow \mu + \sigma Z$.

Cadre paramétrique : les hypothèses portent sur un échantillon inconnu θ ou sur une fonction de ce paramètre $h(\theta)$, correspondant à une caracté d'intérêt de la loi.

La fonction de répartition est notée $F(x, \theta)$. L'ensemble Θ est l'espace paramétrique

Un test statistique consiste à décider d'accepter ou rejeter une hypothèse spécifiant que θ appartient à un ensemble de valeurs Θ_0. Cette hypothèse de référence est appelée hypothèse nulle et est notée Ho. L'hypothèse alternative, notée H_1 est l'hypothèse par laquelle $\theta \in \Theta \setminus \Theta_0$. On teste donc : $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta_1$

$P(U < u) = x$
$P(U > u) = 1 - x$
$P(U < -u) = 1 - x$
$P(U > -u) = x$

Moyenne échantillonnage : $\bar{X} = \frac{1}{n} \Sigma X_i$ $E(\bar{X}) = \mu$

$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ Soit $X_1 \dots X_n$ une suite de va iid de probabilité ayant par moyenne théorique μ de variance théorique σ^2. On a, par **la somme** $S_n = X_1 \dots X_n$

$E(S_n) = n\mu$ $V(S_n) = n\sigma^2$

Risque Première espèce la valeur α telle que $P_{H_0}(T \in \bar{A}) = \alpha$ soit la proba de rejeter Ho alors qu'elle est vraie

Cas simple : l'hypothèse spécifie une valeur ou un intervalle de valeurs pour θ (ou $h(\theta)$). Un test décide si un ensemble de valeurs spécifié est plausible ou non. 3 cas :

1) Hypo nulle simple et alternative simple : $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$
2) Hypo nulle simple et alternative multiple : $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$
3) Hypo nulle multiple et alternative multiple : $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta_1$

Risque 2e espèce. valeur β telle que $P_{H_1}(T \in A) = \beta$, accepter Ho alors que fausse

TCL : convergence en loi de la somme d'une suite de variables vers la loi normale

Processus de Bernoulli : Soit S_n le nombre total de succès aux cours de n répétitions, comme $E(S_n) = np$ et $V(S_n) = np(1-p)$ on a par la fréquence relative $\frac{S_n}{n}$ une moyenne théorique p et une variance théorique $\frac{p(1-p)}{n}$. Du TCL on déduit que pour n suffisament grand $\frac{S_n}{n}$ suit approximativement une loi normale $\mathcal{N}(p, \frac{p(1-p)}{n})$ ou encore que S_n suit approx une loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$. C'est l'approx de la loi binom $B(n,p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$. Pour $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Dans le cas d'hypothèse simple, l'espace paramétrique est $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$ et le test veut décider : $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$. Un test pour Ho est une règle de décision fondée sur la valeur réalisée t sur un échantillon, d'une statistique T, appelée statistique de test, à valeur dans R.

Région d'acceptation : La règle de décision pour le test est la suivante.
- si $t \in A$ (partie de R) on accepte Ho
- Si $t \in \bar{A}$ on rejette Ho.

Lorsque A est un intervalle, il est appelé **intervalle de confiance**. Cette règle recèle deux types d'erreur du fait que la vraie valeur du paramètre est inconnue

Loi uniforme densité de proba $\frac{1}{b-a}$ pour $a \leq x \leq b$, 0 sinon. Fonction de répartition $\frac{x-a}{b-a}$ par $a \leq x \leq b$. 1 par $x \geq b$.

Construction d'un test : Étapes :
1) Déterminer les hypothèses Ho et H1
2) Rechercher une statistique pertinente dont on connait la loi sous Ho
3) Fixer un α niveau
4) Determiner l'intervalle de conf associé à α, en utilisant la loi de la statistique de test
5) Prendre une décision en considérant la réalisation de la stat sur l'échantillon

Lecture table :
Student : $P(T_{13} < t) = 0{,}9$ on regarde 0,9 en haut et 13 à gauche : 1,350.
Fisher : $P(F_{10,15} < a) = 0{,}95$ 10 en haut, 15 à gauche 2,54.

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$X - m \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$\frac{X}{\sigma} \sim \mathcal{N}(\frac{m}{\sigma}, 1)$

$\frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

TCL

moyenne loi binomiale $n \times p$

Loi uniforme continue : $X \rightsquigarrow U([a,b])$ $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

On appelle puissance d'un test la probabilité de rejeter Ho alors qu'elle est effectivement fausse, soit $P(T \in \bar{A} | H_1)$

La puissance est la capacité à détecter qu'une hypothèse nulle est fausse et égale à $1 - \beta$. **Un test est sans biais si sa puissance est** supérieure ou égale à son niveau α : $P(T \in \bar{A} | H_1) \geq P(T \in \bar{A} | H_0)$

cher le test le plus puissant parmi tous.

$_5C_2 = C_2^5 = 10$ 2 parmi 5.

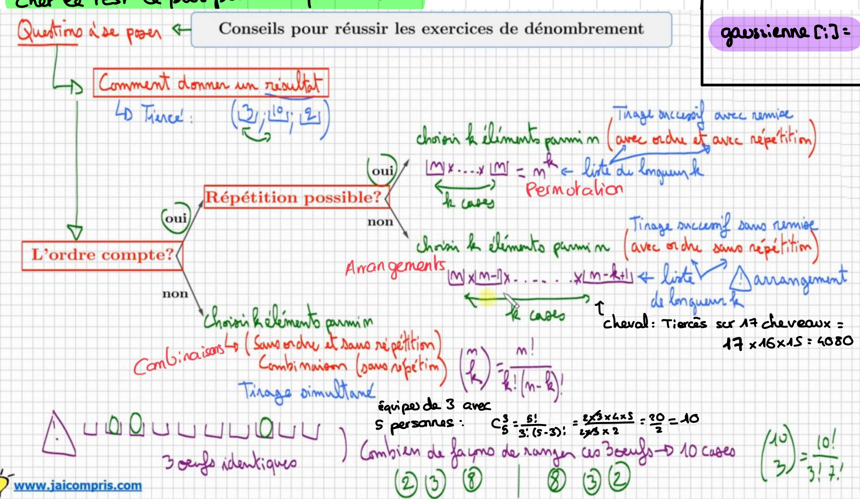
$P(X < x) = 0{,}01$
$P(X < -x) = 1 - 0{,}01$
$P(X < -x) = 0{,}99$

Calcul de gaussienne :

gaussienne[i] = $\frac{1}{\sqrt{Var} * \sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2} * \left(\frac{i - moy}{\sqrt{Var}}\right)^2}$

Laplacienne :

laplacienne[i] = $\frac{1}{2b} * e^{-1 \frac{|i - moy|}{b}}$



Différence : pixel Image Modif - Pixel image Origi

Blur = Moyenne des 9 pixels

Frac Normale : par $P(-t < x < t)$ = Aire.

Exercice 2 : Une urne contient n boules blanches ($n \geq 5$) et 10 boules noires. On tire 10 boules de l'urne.

Pour 5 boules noires on a

pn : $\frac{\text{nombre de tirages 5 boules noires}}{\text{nombre de tirages totaux}}$.

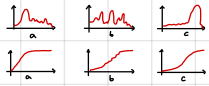
Les 10 boules sont tirées simultanément cela revient donc à choisir 10 boules parmi n+10, il y a donc C_{n+10}^{10}.

Avec 5 boules noires : $C_{10}^5 \times C_n^5$, pn = $\frac{C_{10}^5 \times C_n^5}{C_{n+10}^{10}}$

Image I (N pixels) :

ddp (x)

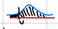
F(x)



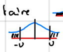
Centrer réduire :

x tq $P(X<x) = 0,05$ si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(200, 25)$ $\quad Z = \frac{X-200}{\sqrt{25}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$P(x<x) = 0,05 = P(x>x) = 0,95$ par complémentaire



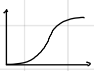
$P(x>x) = 0,95 = P(x<-x) = 0,95$ par symétrie



$-u = 1,645$ donc $u = -1,645$

$\frac{x-200}{5} = -1,645$ donc $x = (5\times -1,645) + 200 = 191,8$

Fonction de Répartition croissante de 0 à 1 :

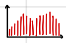


$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{\mu - x}{b}} & \text{si } x<u \\ 1 - \frac{1}{2} e^{\frac{x-\mu}{b}} & \text{sinon} \end{cases} = 0,5\left[1 + \sin(x-\mu)\left(1 - e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}\right)\right]$$

Calcul de la distance : Divergence entre 2 distributions.

$p(x)$ = données mesurées $\quad x \in \{0, 255\}$

$q(x)$ = probabilité modèle.



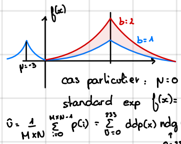
- Distance de Bhattacharyya : $D_B(p,q) = -\ln(BC(p,q))$ $\quad BC(p,q) = \sum_{0}^{n-1} \sqrt{p(i)q(i)}$ $\quad (0 \leq BC \leq 1)$
- Distance de Jaccard : $J(A,B) = \frac{|A\cup B| - |A \cap B|}{|A \cup B|}$ $\quad J(p,q) = \frac{p+q-|p-q|}{p+q}$ si : $p=q$, $J(p,q) = 1$
- Divergence de Kullback-Leiber : $D_{KL}(p,q) = \sum_{0}^{n-1} p(i).\log\left(\frac{p(i)}{q(i)}\right)$ $\quad D_{KL}(p,q) \neq D_{KL}(q,p)$

② Distribution Laplacienne :

ddp continue : loi double exponentielle ($\alpha = 1$)
(2 lois exp-accolés dos à dos)

$$f(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} = \frac{1}{2b} : \begin{cases} e^{-\frac{\mu - x}{b}} & \text{si } x<\mu \\ e^{-\frac{x-\mu}{b}} & \text{si } x \geq \mu \end{cases}$$

μ : param de position (valeur moyenne)
b : param d'échelle $b \geq 0$



cas particulier : $\mu = 0$, $b = 1$: loi standard exp $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

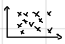
$$\hat{U} = \frac{1}{M \times N} \sum_{i=0}^{M\times N - 1} p(i) = \sum_{U=0}^{255} ddp(x)\, ndg(x)$$
0-255

Variance = $2b^2$

ecart Type = $\sqrt{2}b$.

③ Algorithme EM . Expection Minimization.

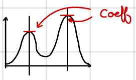
1er exemple : K-NN
k : nombre de classe



Algo :
- Tirer K centroïdes aléatoirement.
- Par chaque point, calculer la distance aux centroïdes et les placer dans le groupe du plus proche.
- Puis calculer le vrai centre chaque groupe
- On s'arrête quand plus aucun ne change de classe.

2eme exemples : Mélange des gaussienne.

k gausiennes : $\sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$



Quelle loi suivent de vaiid de Chi deux ?

Soit deux vaiid X_v^2 et Y_z^2 tel que v, z soient les degrés de libertés respectif de ces variable. X et Y étant indépendantes, X suit la loi de $\sum_{i=1}^{v} X_i$ où les X_i sont des variable aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée réduite. De manière analogue, Y suit une loi de $\sum_{i=1}^{z} Y_i$ où les Y_i sont des va indépendantes suivant une LNCR. Alors X+Y suit une loi de z+v va indépendantes suivant une LNCR. Donc elle suivent une loi du Chi-deux à p+q degrés.

Exercice 14

Ascenseur

1) Loi $\mathcal{N}(\mu n, \sigma^2 n)$ $\quad \mathcal{N}(75n, 16^2 n)$

2) $1 - P(T < \frac{t-75}{16\sqrt{n}}) \leq 10^{-6}$ $\quad 1 - P(T < \frac{1000-75n}{16\sqrt{n}}) \leq 0,999999$ $\quad t = 4,8$

3) n doit vérifier : $4,8 = \frac{1000-75n}{16\sqrt{n}}$

4) $76,8\sqrt{n} = 1000 - 75n$

$0 = 1000 - 75n - 76,8\sqrt{n}$

$0 = 1000 - 75x^2 - 76,8x$

$0 = -75x^2 - 76,8x + 1000$

$\Delta = b^2 - 4ac = -76,8^2 - (4\times -75) \times 1000$

Δ : 294101,76

$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{76,8 - \sqrt{305898,24}}{2\times -75} = 3,175$

$x = 10,08$ soit 10

Calcul avec Bernoulli :

Soit $X \rightsquigarrow B(20, 0.3)$. On a $np = 6 \geq 5$ et $n(1-p) = 14 \geq 5$. Considérons $P(X=8)$ et $P(X \leq 8)$:

$P(X=8) \simeq P(7,5 < U < 8,5)$ $\quad$ où $U \rightsquigarrow \mathcal{N}(6, 4,2)$

$\simeq P(\frac{7,5-6}{\sqrt{4,2}} < U < \frac{8,5-6}{\sqrt{4,2}})$ $\quad$ où $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$\simeq P(0,73 < Z < 1,22) = 0,8888 - 0,7673 = 0,1215$ $\quad$ La valeur exacte dans la table est 0,1144

$P(X \leq 8) \simeq P(U < 8,5) \simeq P(Z < 1,22) = 0,8888$

Utiliser les stats : $\boxed{\text{stat}}$
- vider les listes
- Remplir les listes
- Calculer en indiquant L_1, L_2

Be(p)

Appliquer ce th à n v.a de Bernoulli. Que vaut $\bar{X}$? En déduire une approx ...

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ où les X_i suivent une loi Be(p).
D'après le TCL, $\bar{X}$ suit approx la loi normale $\mathcal{N}(p, \frac{p(1-p)}{n})$. La loi binom à n tirages peut alors être approximée par l'approx de $n\bar{X}$, cad une loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$

Fonction de répartition $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{L} p(x)\,dx = \sum_{i=0}^{L-1} p(x_i)$

② Distributions $f(x) = C\exp^{-K|x|^{\alpha}}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ approche par une gaussienne.

Ex : Egalisation d'histogrammes

$I \to ddp \to f(x) \to F(x)$ $\quad x \in]x_{min}, x_{max}[$.

Rappel :

Signal : a) histogramme - O(x)

b) Densité probabilité ddp(x)

c) $x=0 \to x = L$, $F_L(x)$

d) Approcher une ddp. par une fonction $f(x)$: $\underset{\text{constante}}{c} . e^{-K|x|^{\alpha}}$

$\alpha = 0$: Uniforme $\quad \alpha = 1$: exponentielle $\quad \alpha = 2$ Gausienne.

Exercice 16 : 5 degrés

Student

On veut $P > \ldots$ et on divise par 2
ou $|P| > \ldots$ et on a n

$P(|T| > 0,408) = 0,7$

$P(T < 0,408) = 1 - P(T > 0,408) = \frac{1-0,7}{2} = 0,15$

$P(T > 0,132) = 0,9/2 = 0,45$

$P(|T| < 4,032) = 1 - P(|T| > 4,032) = 1 - 0,01 = 0,99$

2) $P(T < t) = 0,5$ $\quad 0,5 \times 2 = 1$ $\quad = 0$

$P(T > t) = 0,9$ $\quad 1 - P(T > t) = 0,1$ $\quad 0,1 \times 2 = 0,2$ $\quad t = 1,4759$

$P(T < t) = 0,05$ $\quad P(T > -t) = 0,05$ $\quad 0,05 \times 2 = 0,1$ $\quad t = -2,0150$

$P(|T| < t) = 0,1$ $\quad P(|T| > -t) = 0,1$ $\quad 2 \times 0,1 = 0,2$ $\quad -1,4759$

$P(2-x < X < 2+x) = 0,9$ $\quad t = 1,29$

$P(-\frac{x}{2} < x < \frac{x}{2}) = 0,9$ $\quad 1 - 2P(Z > \frac{x}{2}) = 1 - 2(1 - P(Z < \frac{x}{2})) = -1 + 2P(Z < \frac{x}{2})$ $\quad P(Z < \frac{x}{2}) = \frac{0,9+1}{2}$ $\quad P(Z < \frac{x}{2}) = 0,95$ $\quad \frac{x}{2} = 1,65$

donc $x = 1,65$

2) $\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{0 + 16(2-2,5)^2 + \cdots}{60}$

$V = \frac{\Sigma((x_i - \bar{x})^2)}{N}$

$P(x > 2,5)$: borne inf = 2,5 $\quad$ borne sup : 10000

$P(-u < x < u) = 0,95$
$1 - P(-u < u < u) = 0,05$
$P(u < -u) = 0,05/2$
$P(u < u) = 1 - 0,025 = 0,975$

Mode 1 : 19,33

Mode 2 : 27,475

$$\frac{2(16-19,33)^2 + 3\times(17-19,33)^2 + 10(18-19,33)^2 + 19(19-19,33)^2 + 15(20-19,33)^2 + 7(21-19,33)^2 + 3(22-19,33)^2 (23-19,33)^2}{60}$$

M1 = Var = 1,9889 $\quad \sigma = 1,41$