Contents

Dimensions et unités

Définitions

Deux grandeurs physiques ont la même dimension si elles peuvent être comparées entre elles, ont dit alors qu'elles sont homogènes. Les grandeurs sont notées entre [].

L'unité est une grandeur de référence qui se trouve après la valeur numérique. Ne pas se tromper avec les degrés et radians, qui sont des rapports, pas des unités, et n'ont ainsi pas d'unités.

Une formule physique doit nécessairement être homogène, et les deux membres de l'égalité doivent être de même dimension

Unités du système international (SI)

7 dimensions de base, associées à 7 unités de base

Dimension	Symbole	Unité
Temps	T	Seconde (s)
Longueur	L	Metre (m)
Masse	M	Kilogramme (kg)
Température	ρ	Kelvin (K)
Quantité de matière	N	Mole (mol)
Intensité électrique	I	Ampère (A)
Intensité lumineuse	J	Candela (cd)

La dimension de toute grandeur physique est un produit de ces 7 dimensions fondamentales avec éventuellement des coefficients en puissance.

L'écriture de la dimension d'une grandeur physique se fait en fonction des 7 grandeurs de base du système international

On apelle l'étude d'une relation physique en termes de dimensions "analyse dimensionelle"

Exemple : $e = mc^2$ donne $[E] = [m][c]^2$, qui donne la dimension

$M L^2 T^{-2}$, soit les unités $kg \cdot m^2 s^{-2}$

- Puissance, $E = P \delta T$ -> $M L^2 T^{-2} = [P] T$, donc $[P] = M L^2 T^{-3}$

- Résistance, $P = RI^2$ a une unité de $kg \cdot m^2 s^{-1} A ^ {-2}$

Opérations mathématiques sur les grandeurs dimensionées

Somme et différence

Tous les termes d'une somme ou d'une différence sont de même dimension; le résultat aussi

Produit et quotient

On peut multiplier ou diviser des grandeurs de n'importe quelle dimension. La dimension d'un produit est le produit des dimensions, la dimension d'un quotient est le quotient des dimensions

Dérivation

$[\frac{dY}{dX}] = \frac Y X$

Exemple : Force, $F = ma$ est de dimension $[\frac dv dt] = \frac LT^{-1} T$

Intégration

Pour deux grandeurs Y et X, $[\int Y(x)dx] = [Y][x]$

Fonctions transcendantes

En physique, une "fonction transcendante" englobe les exponentielles et logarithmes, ainsi que toutes les fonctions trigonométriques

L'argument d'une fonction transcendante est sans dimension; Une fonction transcendante est sans dimension

Exemple : Décharge d'un condensateur : $U = E e^{\frac t \tau}$, $\tau] = $

Présentation d'un résultat numérique

Calcul numérique et calcul littéral

Commandement 1 : Tous les calculs sont d'abord effectués de façon littérale, ce qui signifie que les seuls nombres qui apparaissent doivent être sans dimensions et que les grandeurs qui apparaissent sont représentées par leur symbole (une lettre)

Ordres de grandeur et chiffres significatifs

Soit un résultat numérique correspondant au chiffre compté à partir du premier chiffre non nul en partant de la gauche, sans indication autre, le nombre de chiffres significatifs d'un résultat numérique doit correspondre à celui de la grandeur possédant le plus petit nombre de chiffres significatifs.

Commandement 2 : Un résultat numérique sera systématiquement écrit en écriture scientifique en respectant le nombre de chiffres significatifs et en indiquant impérativement unité, si le résultat est dimensionné.

L'ordre de grandeur d'un résultat numérique correspond à la puissance de 10 la plus proche de la valeur numérique dans une unité donnée.

Exemple : Pour C (vitesse de la lumière) $\approx 2.99792458 \times 10^8$,

l'ordre de grandeur est 10^8.

Analyse dimensionelle comme outil de prédiction

Principe

> Les grandeurs sont dites dimensionellement indépendantes si on ne peut pas construire de grandeur sans dimension à partir du produit de ces dernières ou portant au moins un exposant au milieu

Si une grandeur X est succeptible de dépendre d'un certain nombre de grandeurs dimensionnées A, B, C et D, caractéristiques du problème et dimensionellement indépendantes, alors X peut se mettre sous la forme $X = k A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} D^{\delta}$

Applications

Méthode :

1. Déterminer la grandeur recherchée (X par exemple), ainsi que sa dimension en fonction de dimensions de base (voir plus haut)
2. Lister les grandeurs caractéristiques
3. "On suppose que X peut s'écrire sous la forme $X = k A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} D^{\delta}$"
4. Utiliser l'équation de dimension pour obtenir un système pour alpha, beta, gamma et delta, puis le résoudre
5. Conclure et déterminer k

Exemple : Vitesse dans une chute verticale (formule $v = \sqrt{2gh}$)

1. On cherche la vitesse v du corps (c'est une vitesse), de dimension $L T^{-1}$
2. g (attraction gravitationelle) (dimensions d'une accélération, donc $L \cdot T^{-2})$ et la hauteur de laquelle on lâche l'objet (dimension L), ainsi que sa masse (dimension M)
3. On suppose que v va s'écrire $v = k h^\alpha m^\beta g^\gamma$, de dimension $v = k L^\alpha M^\beta L^\gamma T^{-2\gamma}$
4. On obtient le système $\left{\begin{matrix} 1 = \alpha + \gamma \ 0 = \beta \ -1 = -2y \end{matrix}\right.$, qui se résout par $\left{\begin{matrix} \alpha = \frac{1}{2} \ \gamma = \frac{-1}{2} \ \beta = 0 \end{matrix}\right.$
5. Ainsi, $v = k \sqrt{gh}$ avec $k = \sqrt{2}$

Exemple : Période d'un pendule simple (formule $2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$)

1. On cherche la période T_0, de dimension T
2. g (attraction gravitationelle) (dimensions d'une accélération, donc $L \cdot T^{-2})$ et la longueur du fil (dimension L), ainsi que sa masse (dimension M)
3. On suppose que v va s'écrire $T\_0 = k l^\alpha m^\beta g^\gamma$, de dimension $T\_0 = k L^\alpha M^\beta L^\gamma T^{-2\gamma}$
4. On obtient le système $\left{\begin{matrix} \alpha = 0 \ \beta + \gamma = 0 \ \delta = -2\gamma \end{matrix}\right.$
5. Ainsi, $T\_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Exemple : vitesse d'un satellite (formule $v = \sqrt{\frac{G M\_s}{R}}$)

1. On cherche la vitesse v, de dimension $L \cdot T^{-1}$
2. On considère les grandeurs suivantes : masse de la planète M_s (dimension M), rayon de l'orbite R (dimension L), et la constante de gravitation universelle G (de dimension $M^{-1} L^{3} T^{-2}$) (voir formule d'attraction gravitationnelle, dont le résultat en N est de dimension $M L T^{-2}$)
3. On suppose qu'on a ainsi $v = k M\_s^\alpha R^\beta G^\gamma$, de dimension $L T^{-1} = k M^\alpha L^\beta M^{-\gamma} L^{3\gamma} T^{-2\gamma}$
4. On obtient le système suivant : $\left{\begin{matrix} 0 = \alpha - \gamma \ 1 = \beta + 3\gamma \ -1 = -2\gamma \end{matrix}\right.$ $\left{\begin{matrix} \alpha = \frac{1}{2} \ \beta = \frac{-1}{2} \ \gamma = \frac{1}{2} \end{matrix}\right.$
5. On a donc $v = k \sqrt{\frac{G M\_s}{R}}$, avec k = 1

Exemple : Rayon cyclotron (formule : $R = \frac{m_e v_0}{e B_0}$)

1. On cherche le rayon R de rotation de l'électron, de dimension L
2. On considère la charge de l'électron e (en coulons, soit une dimension de IT), la masse m_e de l'électron (dimension M), la vitesse de l'électron v_0 (de dimension $L \cdot T^{-1}$), et le champ magnétique B_0, de dimension $M T^{-2} I^{-1}$
3. On suppose qu'on peut écrire $R = k e^{\alpha} m_e^\beta v_0^\gamma B_0^\delta$, de dimension $L = k I^\alpha T^\alpha M^\beta L^\gamma T^{-\gamma} M^\delta T^{-2\delta} I^{-\delta}$
4. On obtient le système suivant : $\left\{\begin{matrix} 0 = \beta + \gamma \\ 1 = \gamma \\ 0 = \alpha - \gamma -2\delta \\ 0 = \alpha - \delta \end{matrix}\right.$
5. $R = k \frac{m_e v_0}{e B_0}$ avec k = 1

Limitations

Oubli de grandeurs caractéristiques

Si on oublie une grandeur caractéristique, l'équation en dimension n'admet généralement pas de solutions

Grandeur caractéristique sans dimension

Si la valeur X recherchée dépend en outre de d'une grandeur sans dimension x, cette dernière est invisible à l'analyse dimensionnelle.

Exemple : Dans le cas où une grandeur dépend d'une fonction sans dimension

(comme dans le cas du balancement d'un pendule, celui-ci dépend de l'amplitude angulaire $f(\theta)$).

Formules de base pour l'analyse dimensionnelle

Mécanique

Vitesse : $v = \frac{d}{t}$ Accélération : $a = \frac{v}{t}$ Deuxième loi de Newton : $F = ma$ Poids : $P = mg$

Électricité

Force électrostatique : $F = qE$ Champ électrique : $E = \frac{U}{d}$ Loi d'ohm : $U = RI$ Intensité : $I = \frac{dq}{dt} = \frac{Q}{t}$ Puissance : $P = UI = RI^2$ Champ électrique : $E = P \bigtriangleup t$ Condensation : $q = C U_c$ (C la capacité, une énergie, et U_c la tension du condensateur) Tension de la bobine : $U_l = L \frac{d_i}{d_t}$

Ondes

Fréquence : $f = \frac{1}{t}$ Longueur d'onde : $\lambda = cT = \frac{c}{f}$

Autres

Énergie : $E = m c^2$