Laboratorium 04

Aproksymacja

Adam Biśta, 28.03.2023

1 Treść zadań

Zadania

1. Aproksymować funkcję $f(x) = 1 + x^3$ w przedziale [0,1] wielomianem pierwszego stopnia metodą średniokwadratową ciągłą dla $w(x) = 1$.
2. Aproksymować funkcję $f(x) = 1 + x^3$ w przedziale [0,1] wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre'a.

Zadania domowe

1. Napisz procedurę realizującą metodę aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia
2. Oblicz wartości funkcji f(x)= 1-x2 w dyskretnych punktach xi: xi=-1+ 0.5*i, i=0,1..4, a następnie aproksymuj funkcję wielomianami Grama stopnia trzeciego

2 Rozwiązania zadań

1. Metoda średniokwadratowa, ciągła, $w(x) = 1$, wielomian pierwszego stopnia:

$$\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x.$$

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_0(x)dx & \int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)dx \\ \int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_0(x)dx & \int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)dx \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 w(x)\varphi_0(x)f(x)dx \\ \int_0^1 w(x)\varphi_1(x)f(x)dx \end{bmatrix}$$

Podstawiając $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x, w(x) = 1$ do powyższego układu otrzymamy:

$$\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_0(x)dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_0(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)f(x)dx = \int_0^1 (1+x^3)dx = \frac{5}{4}$$

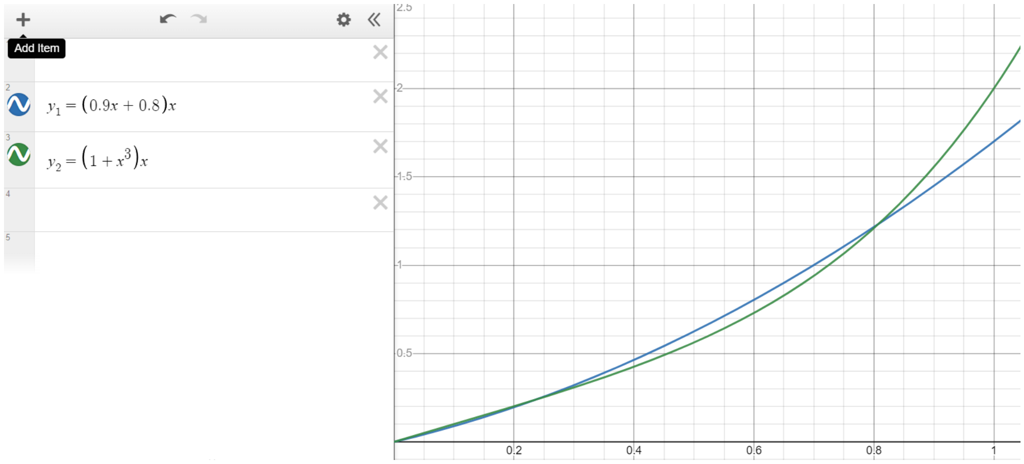
$$\int_0^1 w(x)\varphi_1(x)f(x)dx = \int_0^1 x(1+x^3)dx = \frac{7}{10}$$

Wobec tego nasz układ równań przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$

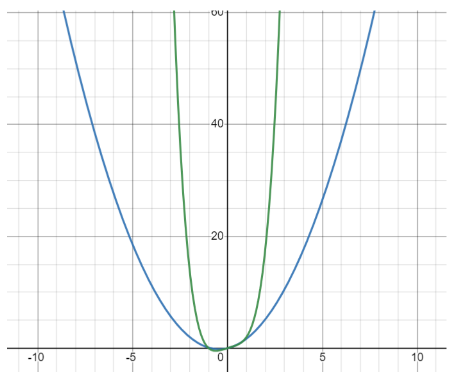
Z tego otrzymujemy: $a_0 = \frac{4}{5}, a_1 = \frac{9}{10}$
aproksymacja:

$$a(x) = \frac{9}{10}x + \frac{4}{5}$$



Rysunek 1: przybliżenie funkcji na przedziale od 0 do 1 (wykonane przy użyciu programu Desmos)

Obydwie funkcje są najbardziej podobne do siebie tylko dla przedziału $[0, 1]$. Dla porównania weźmy przedział $[-10, 10]$



Rysunek 2: Różnice dla przedziału od -10 do 10 (wykonane przy użyciu programu Desmos)

2. Metoda średniokwadratowa, ciągła,$w(x) = 1$, wielomian drugiego stopnia (Lagendre'a):

$$\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x, \varphi_2 = \frac{3x^2-1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_0(x)dx & \int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)dx & \int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_2(x)dx \\ \int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_0(x)dx & \int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)dx & \int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)dx \\ \int_0^1 w(x)\varphi_2(x)\varphi_0(x)dx & \int_0^1 w(x)\varphi_2(x)\varphi_1(x)dx & \int_0^1 w(x)\varphi_2(x)\varphi_2(x)dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 w(x)\phi_0(x)f(x)dx \\ \int_0^1 w(x)\phi_1(x)f(x)dx \\ \int_0^1 w(x)\phi_2(x)f(x)dx \end{bmatrix}$$

Z tego powstaje:

$\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_0(x)dx = \int_0^1 dx = 1$

$\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$

$\int_0^1 w(x)\varphi_0(x)\varphi_2(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{3x^2-1}{2}\right) dx = 0$

$\int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_0(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$

$\int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$

$\int_0^1 w(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{3x^2-1}{2}\right) xdx = \frac{1}{8}$

$\int_0^1 w(x)\varphi_2(x)\varphi_0(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{3x^2-1}{2}\right) dx = 0$

$\int_0^1 w(x)\varphi_2(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{3x^2-1}{2}\right) xdx = \frac{1}{8}$

$\int_0^1 w(x)\varphi_2(x)\varphi_2(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{3x^2-1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{5}$

$\int_0^1 w(x)\phi_0(x)f(x)dx = \int_0^1 (1+x^3)dx = \frac{5}{4}$

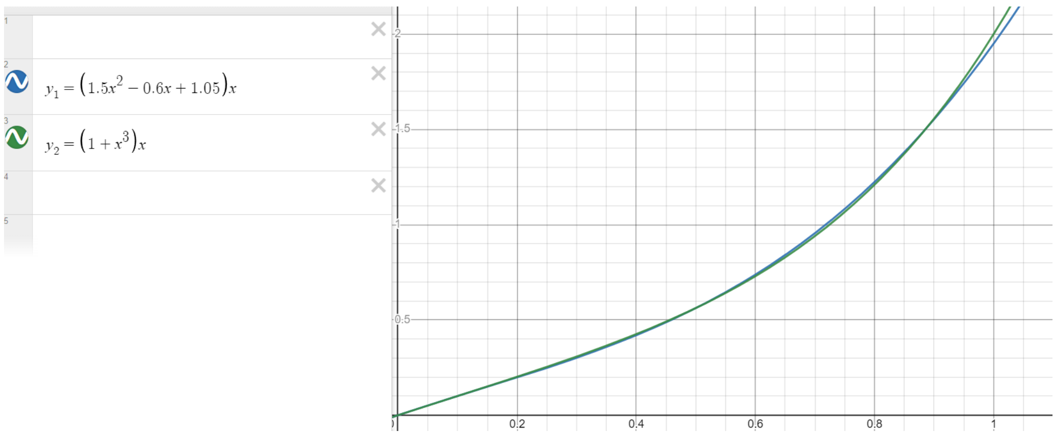
$\int_0^1 w(x)\phi_1(x)f(x)dx = \int_0^1 x(1+x^3)dx = \frac{7}{10}$

$\int_0^1 w(x)\phi_2(x)f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{3x^2-1}{2}\right)(1+x^3)dx = \frac{1}{8}$

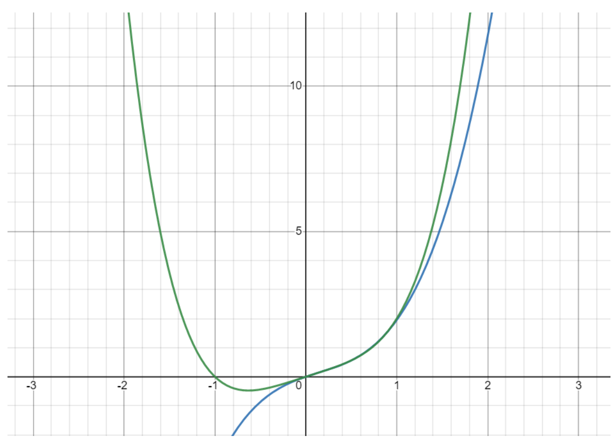
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{10} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$a_0 = 1.55$, $a_1 = -0.6$, $a_2 = 1$

Aproksymacja: $a(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} - 0.6x + 1.55 = 1.5x^2 - 0.6x + 1.05$



Rysunek 3: przybliżenie funkcji na przedziale od 0 do 1 (wykonane przy użyciu programu Desmos)



Rysunek 4: Różnice dla przedziału od -3 do 3 (wykonane przy użyciu programu Desmos)

3 Rozwiązania zadań domowych

1. Metoda aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 & \sum_{i=0}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \\ \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^2 \end{bmatrix}$$

Teraz należy policzyć sumy i rozwiązać podany układ równań. Rozwiązanie:

$$a(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

2. $f(x) = 1 - x^2$, dyskretne punkty $xi : xi = -1 + 0.5 * i, i = 0, 1..4$

Obliczenia najlepiej przedstawić w arkuszu kalkulacyjnym: Wielomiany:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2						i	0	1	2	3	4	
3						x	-1	-0,5	0	0,5	1	
4						y	0	0,75	1	0,75	0	
5												
6												
7												
8												
9	f=0	f=1	f=2	f=3								
10	F0(i)	F1(i)	F2(i)	F3(i)		F0(xi)	F1(xi)	F2(xi)	F3(xi)			
11	1	1	1	1		1	1	1	1			
12	1	0,5	-0,5	-2		1	0,5	-0,5	-2			
13	1	0	-1	0		1	0	-1	0			
14	1	-0,5	-1	2		1	-0,5	-0,5	2			
15	1	-1	1	-1		1	-1	1	-1			
16												
17												
18												
19												
20				g0	g1	g2	g3					
21				5	2,5	3,5	10					
22				h0	h1	h2	h3					
23				2,5	0	-1,75	0					
24				j0	j1	j2	j3					
25				0,5	0	-0,5	0					
26												

Rysunek 5

$F_0(x) = 1$
$F_1(x) = -x$
$F_2(x) = 2x^2 - 1$
$F_3(x) = -\frac{20}{3}x^3 + \frac{17}{3}x$

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$a(x) = 1 - x^2$$

.

4 Bibliografia

- Katarzyna Rycerz: "Wykład z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice"
- https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965912001607