Adam Biśta, 28.02.2023

Laboratorium 01
Arytmetyka komputerowa

1 Treść zadań

1. Znaleźć "maszynowe epsilon", czyli najmniejszą liczbę a, taką że a+1>1
2. Rozważamy problem ewaluacji funkcji sin(x), m.in. propagację błędu danych wejściowych, tj. błąd wartości funkcji ze względu na zakłócenie h w argumencie x:
   (a) Ocenić błąd bezwzględny przy ewaluacji sin(x)
   (b) . Ocenić błąd względny przy ewaluacji sin(x)
   (c) Ocenić uwarunkowanie dla tego problemu
   (d) Dla jakich wartości argumentu x problem jest bardzo czuły ?
3. Funkcja sinus zadana jest nieskończonym ciągiem:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

   (a) Jakie są błędy progresywny i wsteczny jeśli przybliżamy funkcję sinus biorąc tylko pierwszy człon rozwinięcią, tj.$sin(x) \approx x$, dla x = 0.1, 0.5 i 1.0 ?
   (b) Jakie są błędy progresywny i wsteczny jeśli przybliżamy funkcję sinus biorąc pierwsze dwa człony rozwinięcią, tj.$sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$, dla x = 0.1, 0.5 i 1.0 ?
4. Zakładamy że mamy znormalizowany system zmiennoprzecinkowy z = 10, p = 3, L = -98
   (a) Jaka jest wartość poziomu UFL (underflow) dla takiego systemu ?
   (b) Jeśli $x = 6.87 \cdot 10^{-97}$ i $y = 6.81 \cdot 10^{-97}$, jaki jest wynik operacji x–y?

2 Rozwiązania zadań

1. Wykładnik maszynowego epsilona musi być taki sam jak liczby 1, a jego mantysa musi być jak najmniejsza, czyli równa 1. Biorąc to pod uwagę, maszynowe epsilon będzie określone wzorem:

$$\epsilon = \beta^{1-p}$$

p - precyzja
β - podstawa systemu liczbowego

2.

(a) błąd bezwzględny przy ewaluacji sin(x):

$$\Delta \sin(x) = |\sin(x)(1+h) - \sin(x)|$$

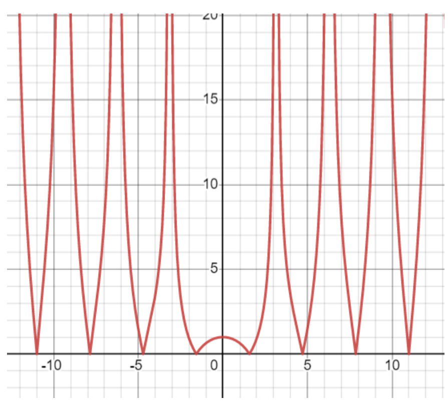
(b) błąd względny przy ewaluacji sin(x):

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \frac{\Delta \sin(x)}{\sin(x)} = \frac{|\sin(x)(1+h) - \sin(x)|}{\sin(x)}$$

(c) uwarunkowanie dla sin(x):

$$cond(f(x)) \approx |\frac{\frac{f'(x)\Delta x}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}}| = |\frac{xf'(x)}{f(x)}|$$

$$cond(f(x)) = cond(\sin(x)) \approx |\frac{xf'(x)}{f(x)}| = |\frac{x\cos(x)}{\sin(x)}| = |x\cot(x)|$$



wykres funkcji $f(x) = |xcotx|$
wygenerowany za pomocą programu Desmos

(d) Problem będzie bardzo czuły w punktach, w których funkcja $cot(x)$ zmierza do nieskonczonosci tzn. dla $x = k\pi, k \in Z \wedge k \neq 0$.
Problem będzie najlepiej uwarunkowany w punktach, w których cosx się zeruje, a więc dla $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$

Wnioski:

Zauważmy, że funkcja sinus jest najmniej dokładna w miejscach zerowych, natomiast najdokładniejsza w miejscach, gdzie osiąga wartość 1.
Wynika to oczywiście z faktu, że dla miejsc zerowych funkcji sinus, cosinus osiąga wartości ekstremalne, a dla ekstremów funkcji sinus, cosinus przyjmuje zerowe wartości.

3. Rozpatrujemy funkcję następującą: $y = \sin(x)$

- Błąd progresywny - wartość bezwględna z różnicy wartości wyliczonej i rzeczywistej: $\Delta y = |\hat{y} - y|$
- Błąd wsteczny - wartość bezwględna z różnicy argumentu wstawionego do funkcji oraz takiego, dla którego wartość funkcji jest wartością rzeczywistostą: $\Delta x = |\hat{x} - x|$

(a) skoro $y = \sin(x) \approx x$ to wtedy $\hat{y} = x$
błąd progresywny: $|\hat{y} - y| = |x - \sin(x)|$
błąd wsteczny: $|\hat{x} - x| = |\arcsin \hat{y} - x| = |\arcsin x - x|$

i. Dla $x = 0.1$ otrzymujemy:
$\hat{y} = 0.1$
$\hat{x} = \arcsin \hat{y} = \arcsin 0.1 \approx 0.1001674$
$|x - sinx| = |0.1 - \sin(0.1)| \approx 0.000166583$ - błąd progresywny
$|\arcsin \hat{y} - x| = |0.1001674 - 0.1| = 0.0001674$ - błąd wsteczny

ii. Dla $x = 0.5$ otrzymujemy:
$\hat{y} = 0.5$
$\hat{x} = \arcsin \hat{y} = \arcsin 0.5 \approx 0.5235988$
$|x - sinx| = |0.5 - \sin(0.5)| \approx 0.020574461$ - błąd progresywny
$|\arcsin \hat{y} - x| = |0.5235988 - 0.5| = 0.0235988$ - błąd wsteczny

iii. Dla $x = 1.0$ otrzymujemy:
$\hat{y} = 1.0$
$\hat{x} = \arcsin \hat{y} = \arcsin 1.0 \approx 1.57079633$
$|x - sinx| = |1.0 - \sin(1.0)| \approx 0.158529015$ - błąd progresywny
$|\arcsin \hat{y} - x| = |1.57079633 - 1.0| = 0.57079633$ - błąd wsteczny

(b) skoro $y = \sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$ to wtedy $\hat{y} = x - \frac{x^3}{6}$
błąd progresywny: $|\hat{y} - y| = |x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)|$
błąd wsteczny: $|\hat{x} - x| = |\arcsin \hat{y} - x| = |\arcsin(x - \frac{x^3}{6}) - x|$

i. Dla $x = 0.1$ otrzymujemy:
$\hat{y} = 0.1 - \frac{0.1^3}{6} \approx 0.09983333$

$\hat{x} = \arcsin \hat{y} \approx 0.099999913$
$|x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)| =\approx 0.000000083$ - błąd progresywny
$|\arcsin \hat{y} - x| = 0.0000000874$ - błąd wsteczny

ii. Dla $x = 0.5$ otrzymujemy:
$\hat{y} = 0.5 - \frac{0.5^3}{6} \approx 0.47916667$
$\hat{x} = \arcsin \hat{y} \approx 0.49970504$
$|x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)| \approx 0.00025887$ - błąd progresywny
$|\arcsin \hat{y} - x| = 0.00029496$ - błąd wsteczny

iii. Dla $x = 1.0$ otrzymujemy:
$\hat{y} = 1.0 - \frac{1.0^3}{6} \approx 0.8333333$
$\hat{x} = \arcsin \hat{y} \approx 0.98511078$
$|x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)| =\approx 0.00813765$ - błąd progresywny
$|\arcsin \hat{y} - x| = 0.01488922$ - błąd wsteczny

Wnioski:
Rozszerzenie funkcji sinus z szeregu Taylora z większą ilością wyrazów powoduje zwiększenie dokładności wyników.

4.
Dane:
$\beta = 10$
$p = 3$
$L = -98$

(a) Poziom UFL - minimalna liczba dodatnia możliwa do zapisania w jakimś systemie. Cechy tej liczby:

- mantysa jest równa 1
- wykładnik jest jak najmniejszy

Korzystamy ze wzoru:

$$UFL = \beta^L = 10^{-98}$$

(b) Dane:
$x = 6.87 \cdot 10^{-97}$
$y = 6.81 \cdot 10^{-97}$
$x - y = 0.06 \cdot 10^{-97} = 6 \cdot 10^{-99}$
Zauważmy, że: $6 \cdot 10^{-99} < 10^{-98} = UFL$
Z tego wynika, że w danym systemie wynik operacji wyniesie 0.

Wnioski:
Ze względu na to, że UFL to miara dokładności systemu zmiennoprzecinkowego, system operujący na niewielkich liczbach, aby być jak najbardziej precyzyjnym, powinien mieć minimalny parametr L.

3 Bibliografia

- Katarzyna Rycerz: "Wykład z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice"
- https://en.wikipedia.org/wiki/IEEE-754-1985
- https://en.wikipedia.org/wiki/Machine-epsilon