Laboratorium 03

Interpolacja

Adam Biśta, 18.03.2023

1 Treść zadań

Zadania

1. Dane są trzy węzły interpolacji (-2.9,1), (0,1.5), (2.3,3.9), proszę obliczyć wielomian interpolacyjny 2-go stopnia, wykorzystując:
   (a) jednomiany
   (b) wielomiany Lagrange'a
   (c) wielomiany wg wzoru Newton'a
   Pokazać że trzy reprezentacje dają ten sam wielomian
2. Wyrazić następujący wielomian metodą Hornera: p(t) = $3t^{3}\text{˘}7t^{2} + 5t\text{˘}4$
3. Ile mnożeń trzeba wykonać do ewaluacji wielomianu p(t) stopnia n-1 w danym punkcie t jeżeli wybieramy jako reprezentacje:
   (a) jednomiany
   (b) wielomiany Lagrange'a
   (c) wielomiany Newtona

Zadania domowe

1. (a) Obliczyć wielomian interpolacyjny dla danych (0.5,5.5), (1,14.5), (1.5,32.5), (2,62.5) przy pomocy jednomianów
   (b) obliczyć wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla tych samych danych i pokazać, że wielomian będzie ten sam co w (a)
   (c) obliczyć wielomian interpolacyjny Newtona dla tych samych danych korzystając z metody używającej trójkąta różnic i metody różnic skończonych i pokazać, że każda metoda daje ten sam wynik

2. Dowieść, że wzór używający różnic skończonych yi= f [x1, x2, ..., xj] rzeczywiście daje współczynnik j-tej funkcji bazowej w interpolującym wielomianie Newtona
3. Wykonać interpolację funkcji f(x) = |sin(x)| w przedziale [-4,4] przy użyciu wielomianów Lagrange'a 2-go, 5-go oraz 10-go stopnia, dla równoodległych węzłów interpolacji. Narysować wykres na papierze w kratkę oraz go zinterpretować

2 Rozwiązania zadań

1. węzły interpolacji (-2.9,1), (0,1.5), (2.3,3.9)

   (a) Jednomiany:
   Za bazę przyjąłem funkcje: $1, x, x^2$. Funkcja interpolująca:

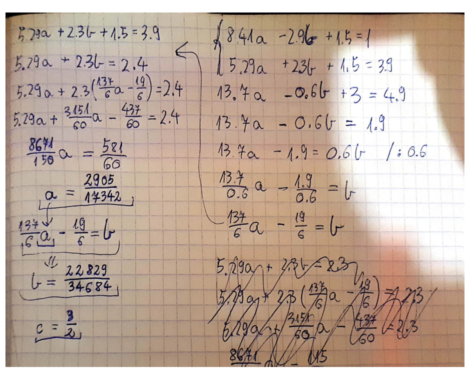
   $$w(x) = ax^2 + bx + c$$

   Tworzymy układ równań:

   $$\begin{cases} w(-2.9) = 1, \\ w(0) = 1.5, \\ w(2.3) = 3.9 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} 8.41a - 2.9b + c = 1, \\ c = 1.5, \\ 5.29a + 2.3b + c = 3.9 \end{cases}$$

   Obliczenia:



$$a = \frac{2905}{17342}$$
$$b = \frac{22829}{34684}$$

$$c = \frac{3}{2}$$

Postać funkcji interpolującej:

$$w(x) = \frac{2905}{17342}x^2 + \frac{22829}{34684}x + \frac{3}{2}$$

(b) Wielomiany Lagrange'a
Wiemy, że:

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Trzy funkcje L_i stanowią bazę:

$$\begin{cases} L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\ L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{cases}$$

Wielomian interpolujący:

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$$

$$w(x) = 1 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + 1.5 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + 3.9 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\frac{(x - 0)(x - 2.3)}{(-2.9 - 0)(-2.9 - 2.3)} + 1.5 \cdot \frac{(x + 2.9)(x - 2.3)}{(0 + 2.9)(0 - 2.3)} + 3.9 \cdot \frac{(x + 2.9)(x - 0)}{(2.3 + 2.9)(2.3 - 0)}$$

$$\frac{x^2 - 2.3x}{15.08} - \frac{150}{667}(x + 2.9)(x - 2.3) + \frac{15}{46}(x + 2.9)(x - 0)$$

$$\frac{25}{377}x^2 - \frac{115}{754}x - \frac{150}{667}x^2 - \frac{90}{667}x + \frac{3}{2} + \frac{15}{46}x^2 + \frac{87}{92}x$$

$$w(x) = \frac{2905}{17342}x^2 + \frac{22829}{34684}x + \frac{3}{2}$$

(c) Wielomiany Newtona
wielomian interpolujący:

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

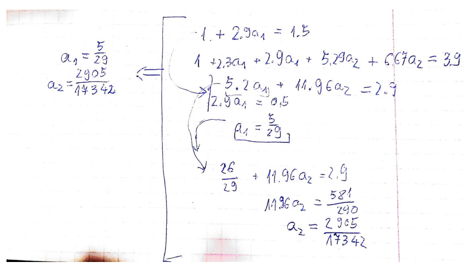
$$w(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Podstawiając punkty:

$$w(x) = a_0 + a_1 x + 2.9a_1 + a_2 x^2 + 2.9a_2 x$$

$$\begin{cases} w(-2.9) = a_0 - 2.9a_1 + 2.9a_1 + 8.41a_2 + -8.41a_2 = 1 => a_0 = 1, \\ w(0) = a_0 + 2.9a_1 = 1.5, \\ w(2.3) = a_0 + 2.3a_1 + 2.9a_1 + 5.29a_2 + 6.67a_2 = 3.9 \end{cases}$$

Obliczenia:



$a_0 = 1$, $a_1 = \frac{5}{29}$, $a_2 = \frac{2905}{17342}$
Podstawiamy do równania $w(x)$:

$$w(x) = 1 + \frac{5}{29}(x + 2.9) + \frac{2905}{17342}(x^2 + 2.9x) = \frac{2905}{17342}x^2 + \frac{22829}{34684}x + \frac{3}{2}$$

Jak widać w powyższych reprezentacjach wyliczone wielomiany są takie same.

2. Metoda Hornera
   $3t^3 - 7t^2 + 5t - 4 = t(t(3t - 7) + 5) - 4$:

3.

   (a) Jednomiany:
   Wielomian stopnia n-1:

   $$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_{n-1} x^{n-1}$$

   Załóżmy, że obliczając wyraz x^i , trzeba wykonać i mnożeń. Jest to metoda prosta dla potęgowania. Warto wspomnieć, że istnieje również szybka metoda dla potęgowania liczb, wtedy dla x^i można wykonać maksymalnie $2 \log_2 i$ mnożeń. Przyjmując pierwszą metodę, całe wyrażenie będzie wymagać $1 + 2 + \cdots + n - 1 = \frac{1+n-1}{2}(n-1) = \frac{n^2+n}{2}$ wymnożeń.
   Usprawnieniem może być zastosowanie metody Hornera, która wymaga maksymalnie n wymnożeń.

(b) Wielomiany Lagrange'a

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i L_i(x)$$

Zarówno w liczniku, jak i w mianowniku L_i występuje $k = n - 1$ elementów oraz ułamek mnożymy przez rzędną, czyli trzeba wykonać $2k + 1 = 2(n - 1) + 1 = 2n - 1$ wymnożeń, aby obliczyć wartości L_i. Sumujemy n takich składników. Ostatecznie trzeba wykonać $n * (2n - 1) = 2n^2 - n$ mnożeń.

(c) Wielomiany Newtona

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Mamy n skladnikow. Kolejne z nich wymagają 0,1,...n wymnożeń. Powstaje ciąg arytmetyczny liczby wymnożeń:

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

3 Rozwiązania zadań domowych

1. Dane: (0.5,5.5), (1,14.5), (1.5,32.5), (2,62.5)

   (a) za bazę przyjmijmy funkcje $1, x, x^2, x^3$. Wobec tego szukany wielomian będzie postaci:

   $$w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

   układ równań:

   $$\begin{cases} w(0.5) = \frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c + d = 5.5, \\ w(1) = a + b + c + d = 14.5, \\ w(1.5) = \frac{27}{8}a + \frac{9}{4}b + \frac{3}{2}c + d = 32.5 \\ w(2) = 8a + 4b + 2c + d = 62.5 \end{cases}$$

   Aby usprawnić obliczenia skorzystałem z programu napisanego w Pythonie:

```
import numpy as np
from fractions import Fraction
x1 = 0.5 y1 = 5.5
```

```
x2 = 1 y2 = 14.5
x3 = 1.5 y3 = 32.5
x4 = 2 y4 = 62.5
A = np.array([[x1**3, x1**2, x1,1],
        [x2**3, x2**2,x2, 1],
        [x3**3, x3**2,x3, 1],
        [x4**3,x4**2,x4,1]])
B = np.array([y1, y2, y3,y4])
X = np.linalg.solve(A, B)
print('a=', Fraction(X[0]).limit_denominator())
print('b=', Fraction(X[1]).limit_denominator())
print('c=', Fraction(X[2]).limit_denominator())
print('d=', Fraction(X[3]).limit_denominator())
```

Wyniki: $a = 4, b = 6, c = 2, d = \frac{5}{2}$ Wielomian jest równy:

$$w(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x + \frac{5}{2}$$

(b) Wielomiany Lagrange'a

Skorzystam ze wzorów podanych wcześniej: (0.5,5.5), (1,14.5), (1.5,32.5), (2,62.5)

$$\begin{aligned} w(x) &= 5.5\frac{(x-1)(x-1.5)(x-2)}{(0.5-1)(0.5-1.5)(0.5-2)} + 14.5\frac{(x-0.5)(x-1.5)(x-2)}{(1-0.5)(1-1.5)(1-2)} \\ &+32.5\frac{(x-0.5)(x-1)(x-2)}{(1.5-0.5)(1.5-1)(1.5-2)} + 62.5\frac{(x-0.5)(x-1)(x-1.5)}{(2-0.5)(2-1)(2-1.5)} = \\ &= -\frac{22}{3}(x-1)(x-1.5)(x-2) + 58(x-0.5)(x-1.5)(x-2) \\ &-130(x-0.5)(x-1)(x-2) + \frac{250}{3}(x-0.5)(x-1)(x-1.5) = 4x^3 + 6x^2 + 2x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Ostateczny wynik: $w(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x + \frac{5}{2}$

(c) Wielomiany Newtona

Stosujemy wzory na wyrażenia ilorazów różnicowych:

$$f(x_i) = y_i$$

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

wzór ogólny:

$$f(x_i; x_{i+1}; \cdots; x_{i+j}) = \frac{f(x_i; x_{i+1}; \cdots; x_{i+j}) - f(x_i; x_{i+1}; \cdots; x_{i+j-1})}{x_{i+j} - x_i}$$

$f(x_i;x_{i+1};x_{i+2};x_{i+3})$				4			
$f(x_i;x_{i+1};x_{i+2})$			18		24		
$f(x_i;x_{i+1})$		18		36		60	
$f(x_i)$	5.5		14.5		32.5		62.5
x_i	0.5		1		1.5		2

Poszukiwany wielomian będzie mieć postać następującą:

$$w(x) = 5.5 + 18(x-0.5) + 18(x-0.5)(x-1) + 4(x-0.5)(x-1)(x-1.5)$$

Po doprowadzeniu do postaci ogólnej otrzymujemy:

$$w(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x + \frac{5}{2}$$

Podsumowując wszyskie metody dały ten sam wynik

2. **Dowód metody różnic skończonych w wielomianach Newtona**
Wielomian Newtona jest określony wzorem:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Różnica dzielona funkcji f oparta na różnych węzłach $x_0, x_1 \cdots, x_k$:

$$f(x_0;x_1;\cdots;x_k) = \frac{f(x_1;x_2;\cdots;x_k) - f(x_0;x_1;\cdots;x_{j-1})}{x_k - x_0}$$

Należy udowodnić, że $a_j = f(x_0,\cdots,x_j)$. Aby tego dokonać najpierw trzeba udowodnić, że jeśli $w_{i,j}(x)$ - wielomian interpolujący dla węzłów $x_i,\cdots,x_j$ to zachodzi:

$$w_{i,j}(x) = \frac{(x - x_i)w_{i+1,j}(x) - (x - x_j)w_{i,j-1}(x)}{x_j - x_i}$$

Należy udowodnić, że w węzłach inerpolacji $x_i \cdots x_j$ przyjmuje wartości $f(x_i)\cdots f(x_j)$.
Dla $x = x_i$:

$$w_{i,j}(x_i) = \frac{(x_i - x_i)w_{i+1,j}(x_i) - (x_i - x_j)w_{i,j-1}(x_i)}{x_j - x_i} =$$

$$= \frac{-(x_i - x_j)w_{i,j-1}(x_i)}{x_j - x_i} = w_{i,j-1}(x_i) = f(x_i)$$

Dla $x = x_j$:

$$w_{i,j}(x_j) = \frac{(x_j - x_i)w_{i+1,j}(x_j) - (x_j - x_j)w_{i,j-1}(x_j)}{x_j - x_i} =$$

$$= \frac{(x_j - x_i)w_{i+1,j}(x_j)}{x_j - x_i} = w_{i+1,j}(x_j) = f(x_j)$$

Dla $x = x_c \in \{\mathrm{x}_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{j-1}\}$:

$$w_{i,j}(x_c) = \frac{(x_c - x_i)w_{i+1,j}(x_c) - (x_c - x_j)w_{i,j-1}(x_c)}{x_j - x_i} =$$

$$= \frac{(x_c - x_i)f(x_c) - (x_c - x_j)f(x_c)}{x_j - x_i} = \frac{x_c f(x_c) - x_i f(x_c) - x_c f(x_c) + x_j f(x_c)}{x_j - x_i} =$$

$$= \frac{f(x_c)(x_j - x_i)}{x_j - x_i} = f(x_c)$$

Wobec tego zależność rekurencyjna dla $w_{i,j}$ jest prawdziwa. Indukcyjnie ze względu na stopień wielomianu:
Zał: $a_j = f(x_0, \cdots, x_j)$
Jeśli st. wielomianu n = 0:
$a_0 = f(x_0)$
Zauważmy, że:

$$w_{0,n} = w_{0,n-1} + a_n(x_0 \cdot x_1 \cdots x_{n-1})$$

Wcześniej udowodniliśmy, że:

$$w_{0,n}(x) = \frac{(x - x_0)w_{1,n}(x) - (x - x_n)w_{0,n-1}(x)}{x_n - x_0}$$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że współczynniki przy $x^n - 1$ w wielomianie $w_{1,n}$ oraz $w_{0,n-1}$ są oparte o ilorazy różnicowe $f(x_1 \cdots x_n)$ oraz $f(x_0, x_{n-1})$, dlatego

$$a_n = \frac{f(x_1 \cdots x_n) - f(x_0, x_{n-1})}{x_n - x_0} = f(x_0, \cdots, x_n)$$

Co należało udowodnić.

3. **interpolacja funkcji** $|sin(x)|$
   Dla wielomianu stopnia 2 potrzebne będą 3 węzły interpolacji
   Dla wielomianu stopnia 5 potrzebnych będzie 6 węzłów interpolacji
   Dla wielomianu stopnia 10 potrzebnych będzie 11 węzłów interpolacji

   Wiemy, że muszą być równo odległe od siebie, poniższy program w Pythonie określa odpowiednie punkty i ich wartości:

```python
import numpy as np
def f(x):
    return np.round(np.abs(np.sin(x)), 3)
# Dla 3 punktow:
points1 = np.linspace(-4, 4, num=3)
# Dla 6 punktow:
points2 = np.linspace(-4, 4, num=6)
# Dla 11 punktow:
points3 = np.linspace(-4, 4, num=11)
print(points1,"->",f(points1))
print(points2,"->",f(points2))
print(points3,"->",f(points3))
```

   (a) Dla wielomianu stopnia 2-go:

-4	0	4
0.757	0	0.757

   Ponieważ dla $x = 0 f(x) = 0$, to drugie wyrażenie się zeruje dla funkcji w(x):

$$w(x) = 0.757\frac{(x-0)(x-4)}{(-4-0)(-4-4)} + 0.757\frac{(x+4)(x-0)}{(4+4)(4-0)} \approx 0.0473x^2$$

   (b) Dla wielomianu stopnia 5-go:

-4	-2.4	-0.8	0.8	2.4	4
0.757	0.675	0.717	0.717	0.675	0.757

$$w(x) = 0.757\frac{(x+2.4)(x+0.8)(x-0.8)(x-2.4)(x-4)}{(-4+2.4)(-4+0.8)(-4-0.8)(-4-2.4)(-4-4)}+$$

$$+0.675\frac{(x+4)(x+0.8)(x-0.8)(x-2.4)(x-4)}{(-2.4+4)(-2.4+0.8)(-2.4-0.8)(-2.4-2.4)(-2.4-4)}+$$

$$+0.717\frac{(x+4)(x+2.4)(x-0.8)(x-2.4)(x-4)}{(-0.8+4)(-0.8+2.4)(-0.8-0.8)(-0.8-2.4)(-0.8-4)}+$$

$$+0.717\frac{(x+4)(x+2.4)(x+0.8)(x-2.4)(x-4)}{(0.8+4)(0.8+2.4)(0.8+0.8)(0.8-2.4)(0.8-4)}+$$

$$+0.675\frac{(x+4)(x+2.4)(x+0.8)(x-0.8)(x-4)}{(2.4+4)(2.4+2.4)(2.4+0.8)(2.4-0.8)(2.4-4)}+$$

$$+0.757\frac{(x+4)(x+2.4)(x+0.8)(x-0.8)(x-2.4)}{(4+4)(4+2.4)(4+0.8)(4-0.8)(4-2.4)} =$$

$$-4.518\cdot 10^{-20}x^5+0.001x^4+8.673\cdot 10^{-19}x^3-0.015x^2+3.469x+0.726$$

(c) Dla wielomianu stopnia 10-go:

-4	-3.2	-2.4	-1.6	-0.8	0	0.8	1.6	2.4	3.2	4
0.757	0.058	0.675	1	0.717	0	0.717	1	0.675	0.058	0.757

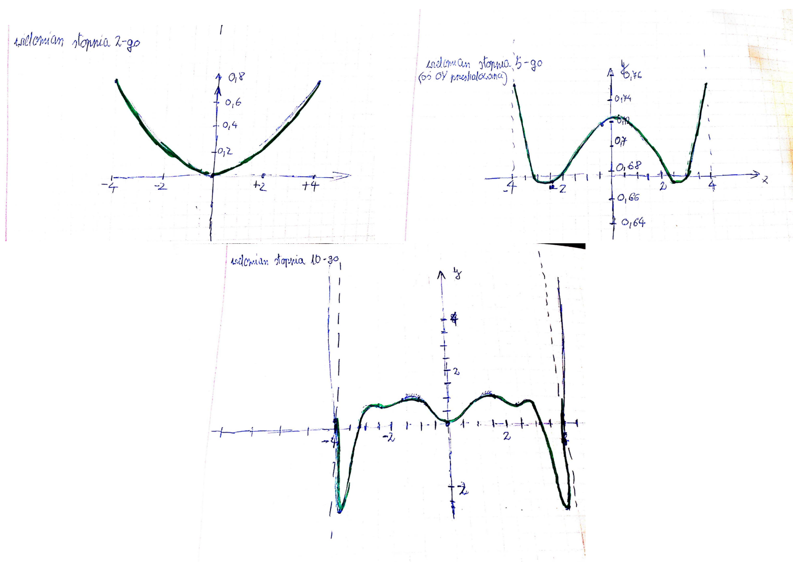
Przeprowadzone obliczenia będą analogiczne do poprzednich, ostateczny wzór:

$$0.0003x^{10}+2.1684\cdot 10^{-19}x^9-0.011196x^8-6.93889\cdot 10^{-18}x^7+0.138964x^6+$$

$$+5.551\cdot 10^{-17}x^5-0.735417x^4-1.11\cdot 10^{-16}x^3+1.536x^2-1.11\cdot 10^{-16}x$$

W powyższych obliczeniach wykorzystałem program Wolfram.

Wykresy:



Rysunek 1: Wykresy wielomianów

Wielomian 2-go stopnia jest zwykłą parabolą. Zwiększając punkty interpolacji zwiększamy dokładność naszego wykresu. W zależności od liczby węzłów równoodległych od siebie wielomiany mogą się znacznie różnić od siebie. Zauważmy, że każdy z powyższych wielomianów jest funkcją parzystą.

4 Bibliografia

- Katarzyna Rycerz: "Wykład z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice"

- https://www.algorytm.edu.pl/algorytmy-maturalne/potegowanie-szybkie.html