Réservé	
1. 11	/11
2. 7.5	/8
3. 10	/11
4. 9.5	/10
TOTAL	
38	/40

Sigle et titre du cours	Groupe	Trimestre
MTH1102 – Calcul II	TOUS	Hiver 2017
Professeur	**Local**	**Téléphone**
Jean Guérin	A-520.23	4098

Jour	Date	Durée	Heures
Dimanche	26 février 2017	2h00	13h00-15h00

Documentation	Calculatrice	
☐ Aucune	☐ Aucune	Les cellulaires, agendas électroniques ou téléavertisseurs sont interdits.
☐ Toute	☐ Toutes	
☒ Voir directives particulières	☒ Non programmable	

Directives particulières

- Un aide-mémoire de deux pages est fourni avec le questionnaire.
- Seules les calculatrices portant l'autocollant de l'AEP sont autorisées.
- **Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons (données manquantes, données erronées, etc.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) puis passez à la question suivante.**

Important

Cet examen contient 4 questions sur un total de 11 pages **(excluant cette page)**

La pondération de cet examen est de 35 %

Vous devez répondre sur : ☒ le questionnaire ☐ le cahier ☐ les deux

Vous devez remettre le questionnaire : ☒ oui ☐ non

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Question 1 [11 points]

Évaluez les intégrales suivantes. Vous devez donner une réponse exacte (et non une approximation décimale).

a) $J_1 = \displaystyle\int_0^2 \int_{y^2/2}^2 y^3\sqrt{8+x^3}\,dxdy.$

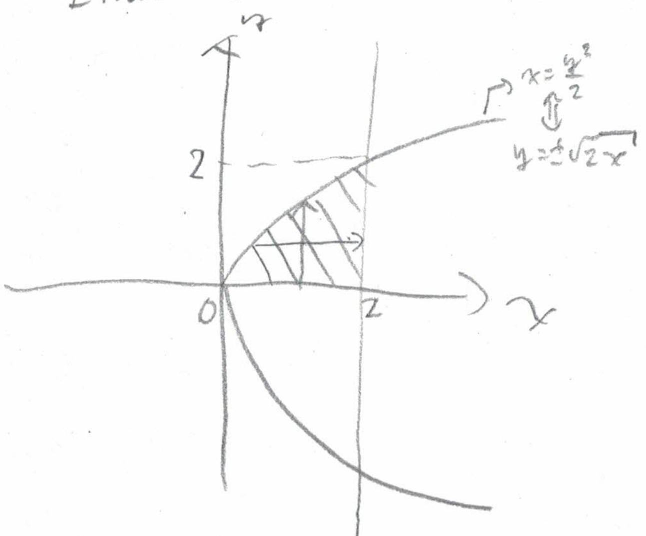
b) $J_2 = \displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$, où D est la région du plan située à l'intérieur du cercle $x^2+y^2=4$ et au-dessus de la droite $y=1$.

Rappel : $\int \sec(x)\,dx = \ln(\sec(x)+\tan(x))$ *et* $\int \operatorname{cosec}(x)\,dx = -\ln(\operatorname{cosec}(x)+\operatorname{cotan}(x))$.

Réponse :

a) Il faut inverser l'ordre d'intégration, car $\int y^3\sqrt{8+x^3}\,dx$ ne possède pas une primitive simple.

Illustrons le domaine :



On réécrit l'intégrale J_1 :

$$J_1 = \int_0^2\int_0^{\sqrt{2x}} y^3\sqrt{8+x^3}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{y^4}{4}\sqrt{8+x^3}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{2x}} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{4}\left(\sqrt{2x}\right)^4\sqrt{8+x^3}\,dx$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4}\int_0^2 x^2\sqrt{8+x^3}\,dx$$

$$= \left[\frac{2(8+x^3)^{3/2}}{3}\cdot\frac{1}{3}\right]_0^2$$

$x = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y^2 = 2x$ $\quad x=2$

$y = \pm\sqrt{2x}$

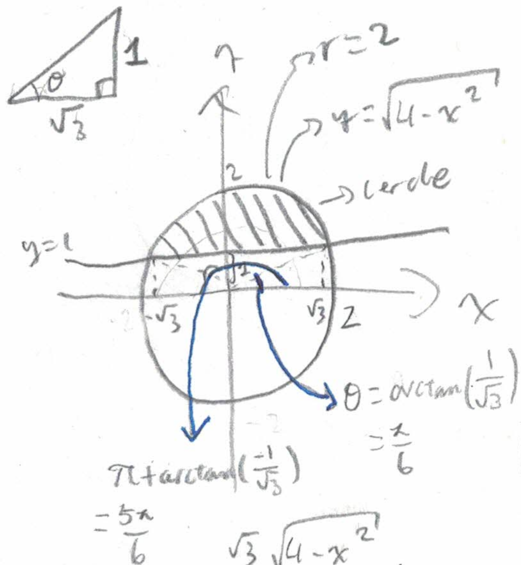
$\frac{2(8+x^3)^{3/2}}{9}$

5/5

$(\sqrt{2x})^4 = ((2x)^{1/2})^4 = 2^2x^2$

$$= \frac{2(8+8)^{3/2}}{9} - \frac{2(8)^{3/2}}{9} = \boxed{\frac{2}{9}\left(64-8^{3/2}\right)} \simeq 9{,}19$$

b) Représentons D :



Intersections : $\sqrt{4-x^2}=1$

$4-x^2=1$

$x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Équation du cercle en polaire :

$x^2+y^2=4$

$r=2$

Représentons D en cartésien :

$$D=\{(x,y) \mid 1\leq y\leq \sqrt{4-x^2}\ ;\ -\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3}\}$$

Donc, $I_2=\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{1}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx$

(x est constant)

$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\Rightarrow \dfrac{\cos\theta}{x}=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x} \Rightarrow y=x\tan\theta$

$dy=x\sec^2\theta\,d\theta$

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$

$\displaystyle=\int \frac{\cos\theta}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$\displaystyle=\int\sec\theta\,d\theta$

$=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$

$=\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}+\dfrac{y}{x}\right|+C$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}\right)\right]_{y=1}^{y=\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+4-x^2}+\sqrt{4-x^2}}{x}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}\right)dx$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\ln\left(2+\sqrt{4-x^2}\right)\cancel{-\ln x}-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\cancel{+\ln x}\,dx$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2+1}+1}\right)dx \quad \text{Ouf!}$$

Ou en polaire

$$J_2 = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_{\csc\theta}^{2} \frac{1}{\cancel{r}} \cdot \cancel{r}\, dr\, d\theta \quad (x^2+y^2=r^2)$$

Équation de la droite

$y=1$

$\Rightarrow r\sin\theta = 1$

$r = \frac{1}{\sin\theta}$

→ voir schéma

$$D = \left\{(r,\theta) \mid \csc\theta \leq r \leq 2 ;\ \pi/6 \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}\right\}$$

$$= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} 2 - \csc\theta \, d\theta$$

→ valeur abs. enlevée selon suggéré dans la question

$$= \Big[2\theta + \ln(\csc\theta + \cot\theta)\Big]_{\pi/6}^{5\pi/6}$$

$$= 2\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \ln\left(\csc\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cot\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) - 2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \ln\left(\csc\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{5\pi}{3} + \ln\left(2 + (-\sqrt{3})\right) - \frac{\pi}{3} - \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

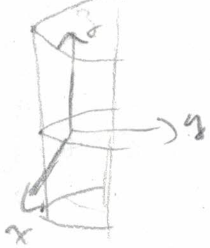
$$\boxed{= \frac{4\pi}{3} + \ln(2-\sqrt{3}) - \ln(2+\sqrt{3})} \approx 1,5549$$

6/6

Question 2 [8 points]

Calculez le volume de la région E de l'espace bornée par les surfaces $y = x^2 - 1$, $z = 2y$ et $z = 6 - y$.

Réponse :



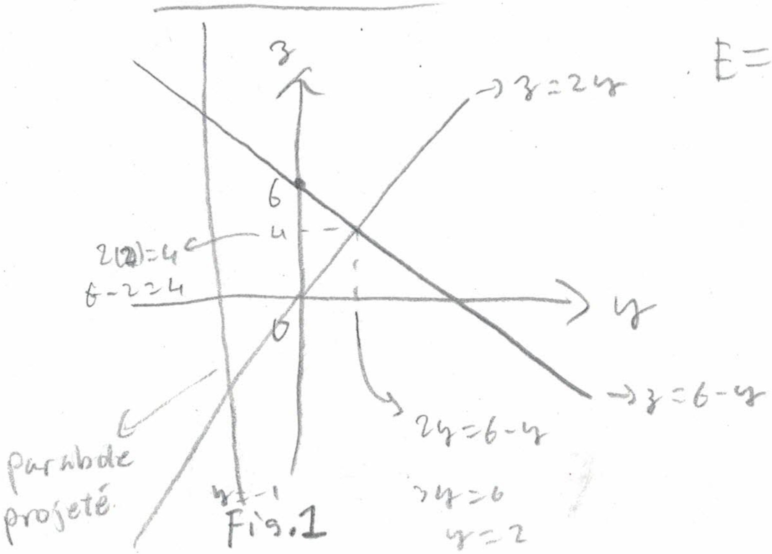
$V = \iiint_E dV$

Décrivons la région E en cartésiennes

Pour l'intégrale triple, l'ordre d'intégration sera le suivant : $dx\,\underbrace{dz\,dy}_{dA}$

6/6

Vue du plan YZ



De ces 2 figures, on a

$$E = \{(x,z,y) \mid -\sqrt{y+1} \le x \le \sqrt{y+1}$$
$$2y \le z \le 6-y$$
$$-1 \le y \le 2\}$$

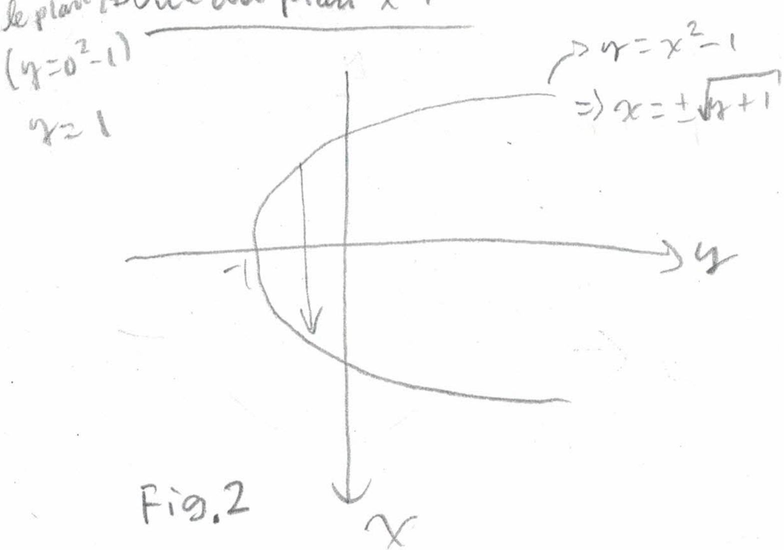
$$\text{Donc, } V = \int_{-1}^{2}\int_{2y}^{6-y}\int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} dx\,dz\,dy$$

$$= \int_{-1}^{2}\int_{2y}^{6-y} 2\sqrt{y+1}\,dz\,dy$$

$$= 2\int_{-1}^{2} \sqrt{y+1}\,(6-y-2y)\,dy$$

$$= 2\int_{-1}^{2} 6\sqrt{y+1} - 3y\sqrt{y+1}\,dy$$

Vue du plan XY



Suite... →

$$= 2\int_{-1}^{2} 6\sqrt{y+1} - 3y\sqrt{y+1}\,dy$$

$$= 2\left(\int_{-1}^{2} 6\sqrt{y+1}\,dy - 3\left\{\int_{-1}^{2} y\sqrt{y+1}\,dy\right\}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2} 6\sqrt{y+1}\,dy = \left[\frac{6\cdot 2(y+1)^{3/2}}{3}\right]_{-1}^{2} = 4(3^{3/2})$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2} y\sqrt{y+1}\,dy = \int_{u=-1+1}^{u=2+1} (u-1)\cdot u^{1/2}\,du = \int_{0}^{3} u^{3/2} - u^{1/2}\,du$$

$u = y+1$

$du = dy$

$y = u-1$

$$= \left[\frac{2u^{5/2}}{5} - \frac{2u^{3/2}}{3}\right]_0^3$$

$$= \frac{2(3^{5/2})}{5} - \frac{2(3^{3/2})}{3}$$

$$= 2\left(4(3^{3/2}) - 3\left(\frac{2(3^{5/2})}{5} - \frac{2(3^{3/2})}{3}\right)\right) = \frac{72}{5}\sqrt{3}$$

$\approx 24{,}94$ ✓ =

$1.5/2$

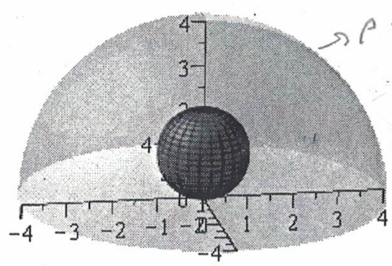
Question 3 [11 points]

Un solide B occupe la région de l'espace située au-dessus du plan $z = 0$ et entre les sphères d'équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

La densité de B est égale à la distance à sa base, c'est-à-dire le plan $z = 0$. La masse du solide B est $m = 188\,\pi/3$.

Le solide B est illustré ci-dessus.



$\rightarrow \rho = 4$

a) Déterminez les coordonnées du centre de masse du solide B. Justifiez soigneusement votre réponse.

b) Le centre de masse de B est-il situé à l'intérieur du solide ? Justifiez brièvement votre réponse.

Réponse :

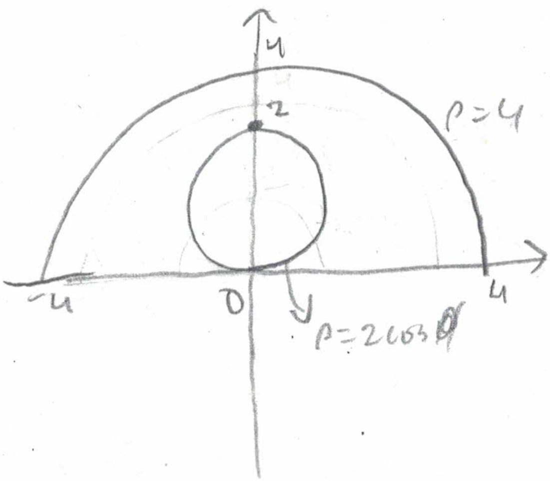
a) on a les formules $\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_E x\,\rho(x,y,z)\,dV$, $\bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_E y\,\rho(x,y,z)\,dV$

et $\bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_E z\,\rho(x,y,z)\,dV$, où $\rho(x,y,z) = z$ (Pas besoin de mettre $|z|$ car on est au-dessus du plan $z=0$)

où $m = \frac{188\pi}{3}$

$= \iiint_E \rho(x,y,$

Utilisons les coordonnées sphériques pour décrire la région E :



Exprimons l'équation de chaque sphère en coordonnées sphériques :

$x^2+y^2+z^2=16 \Rightarrow \rho=4$

$x^2+y^2+(z-1)^2=1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2z+\cancel{1}=\cancel{1}$

$\Rightarrow \rho^2=2z$

$\Rightarrow \rho^2=2\rho\cos\phi$

$\rho=2\cos\phi$

Selon ce qui est suggéré sur le schéma, $\phi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ et $\theta\in[0,2\pi]$

Donc, $E=\{(\rho,\phi,\theta)\mid 2\cos\phi\le\rho\le 4\ ;\ 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\le\theta\le 2\pi\}$

$\Rightarrow \bar{x}=\frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{2\cos\phi}^{4}\rho\sin\phi\cos\theta\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\frac{1}{m}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta}_{\text{Indépendant de theta (bornes et intégrande)}}\int_0^{\pi/2}\int_{2\cos\phi}^{4}\rho\sin\phi\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi$

2/2

$\Rightarrow \bar{y}=\frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{2\cos\phi}^{4}\rho\sin\phi\sin\theta\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\frac{1}{m}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta}_{\text{Idem pour }\bar{x}}\int_0^{2}\int_{2\cos\phi}^{4}\rho\sin\phi\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi$

Dans les 2 cas, $\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta$ et $\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta$ est égale à 0, car on intègre une fct trigonométrie sur une période complète. Alors, $\boxed{(\bar{x},\bar{y})=(0,0)}$

Pour $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{2\cos\phi}^{4} \underbrace{\rho\cos\phi}_{z\ (\rho\cos\phi)}\ \underbrace{\rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta}_{dV}$$

$$= \frac{3}{188\pi}\cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^5}{5}\sin\phi\cos^2\phi\right]_{\rho=2\cos\phi}^{\rho=4} d\phi$$

$$= \frac{3}{94}\int_0^{\pi/2} \frac{4^5}{5}\sin\phi\cos\phi - \frac{1}{5}(2\cos\phi)^5 \sin\phi\cos^2\phi \, d\phi$$

$$= \frac{3}{94}\int_0^{\pi/2}\frac{1024}{5}\sin\phi\cos\phi\, d\phi - \int_0^{\pi/2}\frac{2^5}{5}\cos^7\phi\sin\phi\, d\phi$$

7/8

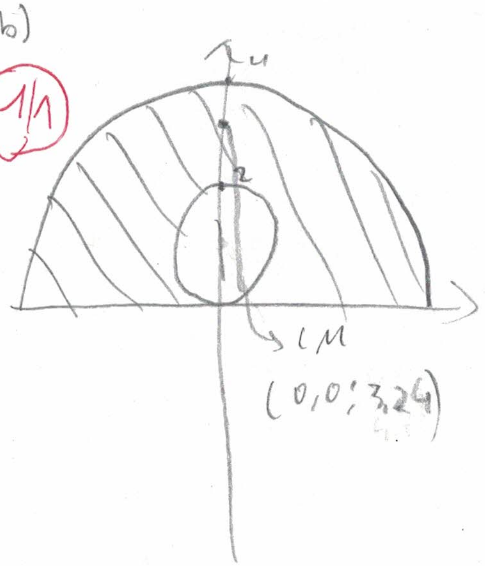
$$= \frac{3}{94}\left(\left[\frac{1024}{5}\cdot\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{32}{5}\frac{\cos^8\phi}{8}\right]_0^{\pi/2}\right)$$

$$= \frac{3}{94}\left(\frac{1024}{5}\cdot\frac{1^2}{2} - \frac{32}{40}\right) = \frac{762}{235} \cancel{\approx 3{,}24}\ !$$

Donc, $(\bar{x}, \bar{y}; \bar{z}) = (0, 0; 3{,}24)$

b)

1/1



Comme le schéma l'indique,
le CM est situé sur le solide B.

$2 < \bar{z} \leq 4$!

Question 4 [10 points]

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

a) Soit C la courbe paramétrée par

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j} + \sin(3t)\,\vec{k},$$

avec $0 \leq t \leq 2\pi$. Donnez une paramétrisation de la droite tangente à C au point $(-1, 0, 0)$.

b) Soit C une courbe paramétrée par la fonction vectorielle $\vec{r}(t)$. Montrez que si $||\vec{r}(t)||$ est constante alors le vecteur position $\vec{r}(t)$ et le vecteur tangent $\vec{r}\,'(t)$ sont perpendiculaires pour tout t.

Réponse :

a) $\vec{r}\,'(t) = -\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j} + 3\cos(3t)\,\vec{k}$

Soit le point $A(-1,0,0)$

La paramétrisation $\vec{g}(t)$ est égale à $A + K \cdot \vec{T}$ (où $K \in \mathbb{R}$)

où $\vec{T}$ est le vecteur directeur de la droite qui est tangent à la courbe C.

Trouvons la valeur de t qui correspond au point A :

($t \in [0, 2\pi]$)

$\cos t = -1 \Rightarrow t = \pi$

$\sin t = 0 \Rightarrow t = 0, \pi$

$\sin(3t) = 0 \Rightarrow 3t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$

$\Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$

Puisque la valeur π est commune aux trois équations, alors $t = \pi$

Trouvons $\vec{r}\,'(\pi) = -\sin\pi\,\vec{i} + \cos\pi\,\vec{j} + 3\cos(3\pi)\,\vec{k}$

(qui sera égale à $\vec{T}$) $= 0\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} = -\vec{j} - 3\vec{k} = \vec{T}$

Donc, $\vec{g}(t) = A + k \cdot \vec{T}$

$= (-1, 0, 0) + k \cdot (0, -1, -3)$

$= (-1, -k, -3k)$

$\boxed{\Rightarrow \vec{g}(t) = -\vec{i} - k\vec{j} - 3k\vec{k}}$

$\hookrightarrow$ paramétrisation de la droite, nommée $\vec{g}(t)$

$5.5/6$

$k \in \mathbb{R}$ $(-0,5)$

b) Il s'agit de démontrer que si $\|\vec{r}(t)\| = C$, alors $\underbrace{\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)}_{\text{produit scalaire}}$ qui s'annule

Par définition, selon l'algèbre linéaire : $\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ ✓

$\Rightarrow \|\vec{r}(t)\|^2 = \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)$

$\|\vec{r}(t)\|^2 = C^2$ (Élever au carré de chaque bord)

$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = C^2$ (Par définition)

$\frac{d}{dt}(\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)) = \frac{d}{dt}(C^2)$ (Dériver de chaque bord p.r. à t) ✓

$\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$ (La dérivée d'une fonction vectorielle s'effectue comme la dérivée d'une fct réelle) ✓

$2\,\vec{r}'(t)\vec{r}(t) = 0$ $\rightarrow$ (produit scalaire commutatif)

$\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$ ✓

$\boxed{\text{CQFD}}$

$4/4$