POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Questionnaire
Contrôle périodique

MTH1102

Sigle du cours

Identification de l'étudiant(e)		
Nom : Brauillard	Prénom : Philippe	
Signature :	Matricule : 1788298	Groupe : 11

Réservé	
1.	10 /10
2.	12 /12
3.	8 /8
4.	9.25 /10
TOTAL	39.75 /40

Sigle et titre du cours	*Groupe*	*Trimestre*
MTH1102 – Calcul II	TOUS	Hiver 2016
Professeur	*Local*	*Téléphone*
Jean Guérin	A-520.23	4098

Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Dimanche	21 février 2016	2h00	13h00-15h00

Documentation	*Calculatrice*	
☐ Aucune	☐ Aucune	Les cellulaires, agendas électroniques ou téléavertisseurs sont interdits.
☐ Toute	☐ Toutes	
☒ Voir directives particulières	☒ Non programmable	

Directives particulières

- Un aide-mémoire de deux pages est fourni avec le questionnaire.
- Seules les calculatrices portant l'autocollant de l'AEP sont autorisées.

- **Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons (données manquantes, données erronées, etc.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) puis passez à la question suivante.**

Important

Cet examen contient 4 questions sur un total de 12 pages **(excluant cette page)**

La pondération de cet examen est de 40 %

Vous devez répondre sur : ☒ le questionnaire ☐ le cahier ☐ les deux

Vous devez remettre le questionnaire : ☒ oui ☐ non

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Question 1 [10 points] 10/10

Les questions a) et b) sont indépendantes.

a) Soit le rectangle $R = [-1/2, 1/2] \times [0, 1/2]$. Démontrez les inégalités suivantes :

$$e \leq 2 \iint_R e^{1+x^2+y^2}\, dA \leq e^{3/2}.$$

b) Évaluez l'intégrale ci-dessous.

$$\int_0^2 \int_{x^2}^4 x^3 \cos(y^3)\, dy dx$$

Réponse :

a) 5/5

$$2e^{1+x^2+y^2} \quad \Big|\, -\tfrac{1}{2} \leq x \leq \tfrac{1}{2}, \; 0 \leq y \leq \tfrac{1}{2}$$

$$2e^{1+0^2+0^2} \leq 2e^{1+x^2+y^2} \leq 2e^{1+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}$$ ✓ 2/2

l'aire du rectangle R est $A(R) = \left(\frac{1}{2} - -\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} - 0\right) : \frac{1}{2}$

Selon le théorème 11 ✓ 1/1 ; $a \leq f(x,y) \leq b \rightarrow A(R)\cdot a \leq \iint_R f(x,y)\,dA \leq A(R)\cdot b$

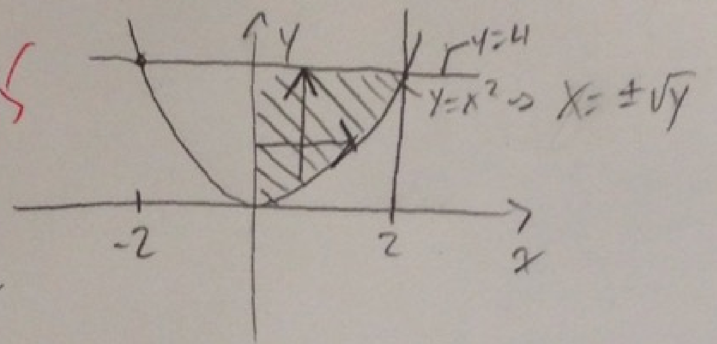
$$2A(R)e^{1+0+0} \leq 2\iint_R e^{1+x^2+y^2}\,dA \leq 2A(R)e^{1+\frac{2}{4}}$$

$$2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot e \leq 2\iint_R e^{1+x^2+y^2}\,dA \leq 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot e^{3/2}$$

$$e \leq 2\iint_R e^{1+x^2+y^2}\,dA \leq e^{3/2}$$ ✓ 4/4 $\boxed{\text{CQFD}}$

b)

5/5



Trouvons les pts d'intersections:

$4=x^2 \rightarrow x=\pm 2$

L'intégrale peut donc se réécrire de la façon suivante

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} x^3\cos(y^3)\,dx\,dy$$ ✓2/2 ✓1/1

Résolvons:

$$\int_0^4 \left[\frac{x^4}{4}\cos(y^3)\right]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \frac{(\sqrt{y})^4}{4}\cos(y^3) - \frac{0^4}{4}\cos(y^3)\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 y^2\cos(y^3)\,dy$$

Posons $u=y^3$
$du=3y^2dy$

$$= \frac{1}{12}\int_0^4 3y^2\cos(y^3) = \frac{1}{12}\int_{0^*}^{4^*}\cos(u)\,du = \frac{1}{12}\cdot\left[\sin(u)\right]_{0^*}^{4^*}$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\left[\sin(y^3)\right]_0^4 = \frac{1}{12}\left[\sin(4^3)-\sin(0)\right] = \frac{1}{12}\sin(4^3)$$

$$\int_0^2\int_{x^2}^4 x^3\cos(y^3)\,dy\,dx = \frac{\sin(4^3)}{12} \approx 0{,}076669$$ ✓2/2

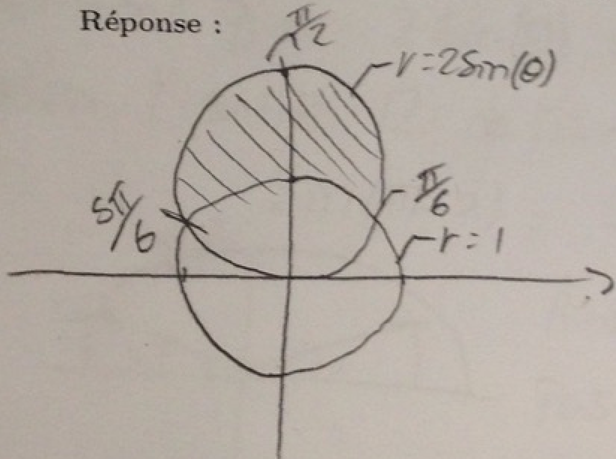
Question 2 [12 points]

Une plaque mince occupe la région D du plan située à l'extérieur de la courbe polaire $r = 1$ et à l'intérieur de la courbe polaire $r = 2\sin(\theta)$. La densité de la plaque est l'inverse de la distance à l'origine.

a) Sachant que $M_x = \sqrt{3}$, déterminez les coordonnées du centre de masse de la plaque. Justifiez soigneusement votre démarche et simplifiez votre réponse.

b) Le centre de masse est-il situé sur la plaque ou bien en dehors de la plaque ?

Réponse :



$r=2\sin(\theta)$	θ
0	0
$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$
2	$\frac{\pi}{2}$
$\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
0	π
$-\sqrt{2}$	$\frac{5\pi}{4}$
-2	$\frac{3\pi}{2}$
$-\sqrt{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
0	2π

Trouvons l'intersection :

$1 = 2\sin\theta$

$\frac{1}{2} = \sin\theta$

$\theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Le centre de masse $(\bar{x}, \bar{y})$ est donné par les éq. suivantes.

$\bar{x} = \frac{M_y}{m}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$.

Le croquis suggère que les courbes sont symétriques par rapport à $\frac{\pi}{2}$

En effet, Puisque la densité $\delta = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$M_y = \iint_D x \, \delta \, dA = \iint_D x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dA .$$

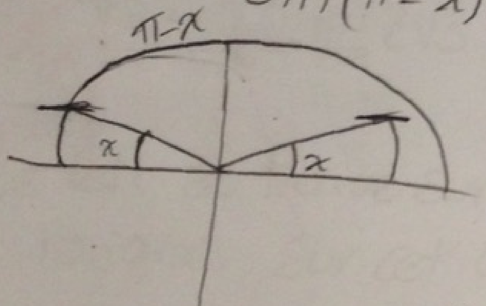
On a aussi

$$r = 2\sin(\theta)$$

Montrons que $2\sin(\theta)$ est symétrique par rapport à $\theta = \frac{\pi}{2}$

Selon l'identité 12. de l'annexe jointe à la fin de cet examen,

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \to \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + x)$$



Ainsi, il y a symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$.

Puisque $r = 1$ est un cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ centré à l'origine, cette courbe est symétrique par rapport aux 2 axes (x et y).

La région D est donc symétrique par rapport à $\frac{\pi}{2}$.

Ainsi, il y a symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$. Montrons la fonction est impair par rapport à x

$f(x,y) = x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad f(-x,y) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -f(x,y)$ 2

Ainsi, région symétrique p/r à $\frac{\pi}{2}$ et fonction impair p/r à x.

Puisque D est symétrique par rapport à $\frac{\pi}{2}$ et que la fonction $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est impaire par rapport à x, $M_y = 0$.

$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{0}{m} = 0 \quad \bar{x} = 0!$

Trouvons maintenant $\bar{y}$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sqrt{3}}{m}$$

Trouvons m. $m = \iint_D \delta \, dA = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dA$

En coordonnées polaires, on a $D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq 2\sin\theta, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}\}$

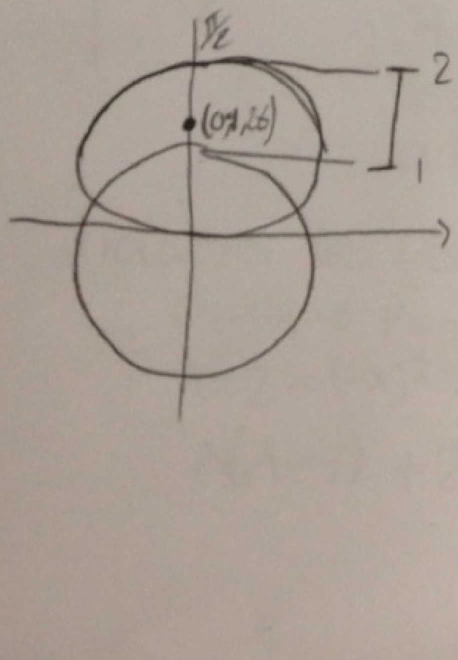
$$m = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_1^{2\sin\theta} \frac{1}{r} r \, dr \, d\theta = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_1^{2\sin\theta} dr \, d\theta = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} 2\sin\theta - 1 \, d\theta =$$

$$\left[-2\cos\theta - \theta\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \left(-2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \frac{5\pi}{6}\right) - \left(-2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\right) = \left(\sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}\right) - \left(-\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{4\pi}{6}. \quad m = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \quad \bar{y} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}} \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}}\right) \approx (0; 1{,}26)$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) \approx (0; 1{,}26)$$

b) Le CM se trouve sur l'axe $\frac{\pi}{2}$ à une distance de $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}}$ de l'origine. Sur cet axe, la plaque est bornée par $1 \leq r \leq 2$



Puisque $\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}}\right) \approx 1{,}26$ et que $1 \leq 1{,}26 \leq 2$,

$$1 \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}}\right) \leq 2$$

$$1 \leq \bar{y} \leq 2$$

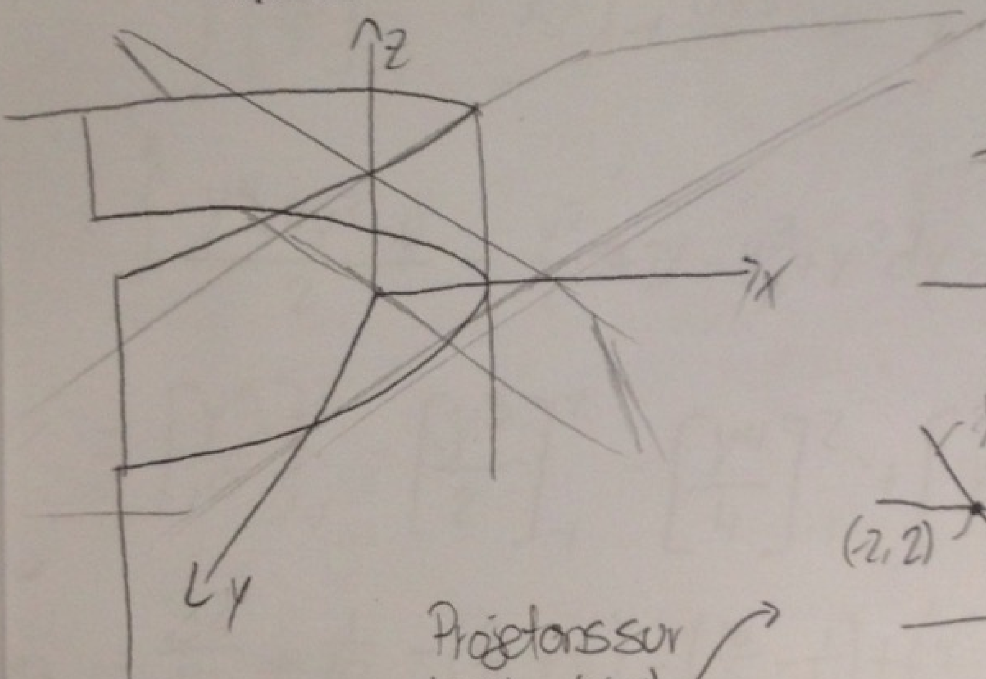
Le CM est sur la plaque.

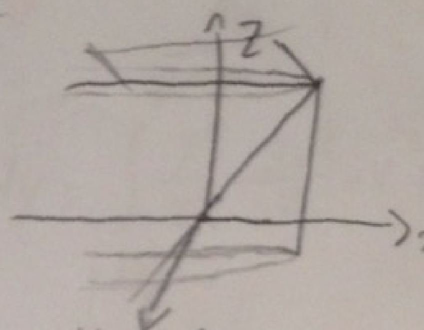
$\frac{2}{2}$

Question 3 [8 points]

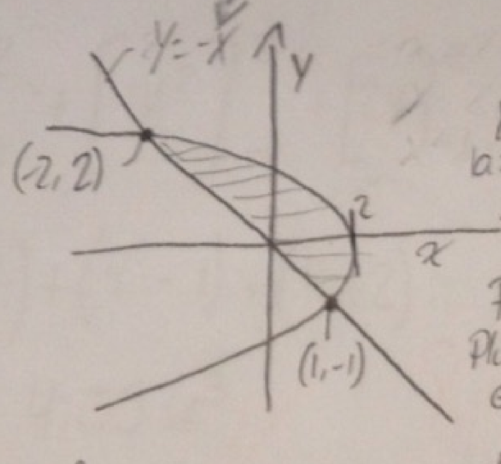
Calculez le volume du solide B occupant la région de l'espace bornée par les surfaces $x = 2 - y^2$, $z = x + y$ et $z = 0$.

Réponse :





Projetons sur le plan (X, Y) à $Z=0$



La droite $Y=-X$ représente la projection du plan $Z=X+Y$ à $Z=0$. Plus (X,Y) augmente, plus Z augmente, et plus le plan se rapproche du paraboloïde

Trouvons les pts d'intersection du plan et du paraboloïde à $Z=0$

$0 = X+Y \rightarrow Y = -X$

$X = 2-(-X)^2 \rightarrow X = 2-X^2 \rightarrow X^2+X-2=0 \rightarrow X^2-X+2X-2=0$

$X(X-1)+2(X-1)=0 \quad (X-1)(X+2)=0 < \begin{matrix} X=1 \rightarrow Y=-1 \\ X=-2 \quad Y=2 \end{matrix}$

$$D = \left\{ (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (0 \leq Z \leq x+Y), (-Y \leq x \leq 2-Y^2), (-1 \leq Y \leq 2) \right\}$$

$$\int_{-1}^{2}\int_{-y}^{2-y^2}\int_{0}^{x+y} dz\,dx\,dy = \int_{-1}^{2}\int_{-y}^{2-y^2} x+y\,dx\,dy =$$

$$\int_{-1}^{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-y}^{2-y^2} + y\left[x\right]_{-y}^{2-y^2} dy = \int_{-1}^{2} \frac{\overbrace{(2-y^2)^2}^{y^4-4y+4}}{2} - \frac{(-y)^2}{2} + \underbrace{y(2-y^2)}_{2y-y^3} - y(-y)\,dy$$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{y^4-4y^2+4}{2} - \frac{y^2}{2} + 2y - y^3 + y^2\,dy = \int_{-1}^{2} \frac{y^4}{2} - \frac{3y^2}{2} - y^3 + 2y + 2\,dy$$

$$= \left[\frac{y^5}{10}\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{y^3}{2}\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{y^4}{4}\right]_{-1}^{2} + \left[y^2\right]_{-1}^{2} + \left[2y\right]_{-1}^{2} =$$

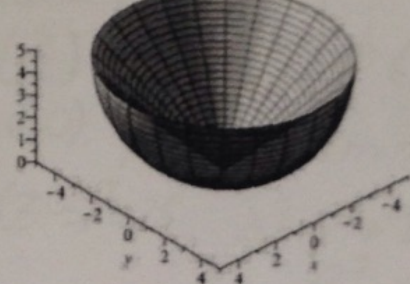
$$\frac{32}{10} + \frac{1}{10} - \left(\frac{8}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) + (4-1) + (4+2) =$$

$$\frac{33}{10} - \frac{9}{2} - \frac{15}{4} + 3 + 6 = 4{,}05\,u^3 \checkmark \qquad 8/8$$

Le volume du solide est de $4{,}05\,u^3$. ✓

Question 4 [10 points]

Soit E la région de l'espace, représentée ci-dessous, qui est située en dessous du cône $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et à l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + (z-5)^2 = 25$. La région E est donc une sphère solide dans laquelle une cavité conique a été creusée.



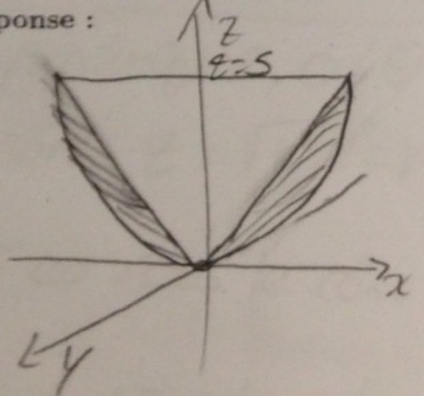
a) Décrivez la région E en coordonnées cylindriques.
b) Décrivez la région E en coordonnées sphériques.
c) Évaluez l'intégrale

$$\iiint_E z \, dV$$

dans le système de coordonnées de votre choix.

Attention!
b) est résolu avant a)

Réponse :



Le rayon de la sphère est $r = \sqrt{25} = 5$ car toujours positif.

Trouvons le cercle d'intersection entre le cône et la sphère.

Par l'éq. du cône, $z^2 = x^2 + y^2$

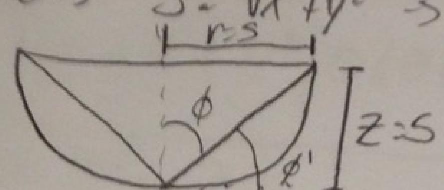
En insérant dans l'éq de la sphère : $z^2 + (z-5)^2 = 25$

$$z^2 + z^2 - 10z + \cancel{25} = \cancel{25}$$
$$2z^2 - 10z = 0$$
$$(2z)(z-5) = 0 \rightarrow \boxed{z = 5,\ z = 0.}$$

ceci représente les hauteurs, en z, où se croisent la sphère et le cylindre.

On sait donc que la sphère et le cône se croise à $z=5$

Dans l'éq du cône $\rightarrow$ $5=\sqrt{x^2+y^2}$ $\rightarrow$ $25 = x^2+y^2$. C'est un cercle de rayon $r=5$.



car $z \geq 0$

On a donc $\phi = \arctan\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$

Il y a une intersection en $(0,0,0)$. ρ vaut au minimum 0 et au max rejoint la sphère:

$$x^2+y^2+(z-5)^2=25 \qquad x^2+y^2+z^2-10z+25=25$$

$$\rho^2 - 10\rho\cos\phi = 0$$

$$\rho - 10\cos\phi = 0$$

$$\rho = 10\cos\phi$$

on a donc $0 \leq \rho \leq 10\cos\phi$.

3/3

Puisque le solide est défini tout autour de l'axe z, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\boxed{\text{b) En sphérique, } E = \left\{(\theta,\phi,\rho)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\leq\theta\leq 2\pi, \frac{\pi}{4}\leq\phi\leq\frac{\pi}{2}, 0\leq\rho\leq 10\cos\phi\right\}}$$

c) En cylindrique, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Pour le cône, $z = \sqrt{r^2} = r$. Pour la sphère, $r^2+(z-5)^2=25$

$$z = \sqrt{25-r^2}+5$$

Puisque E est sous le cône et au dessus de la sphère, $\sqrt{25-r^2}+5 \leq z \leq r$

Pour r, il y a intersection en $(0,0,0)$, donc $r \geq 0$

Par contre, la valeur max que peut prendre r est le rayon du cercle d'intersection entre le cône et la sphère, calculé plus haut.

$$25 = x^2+y^2 = r^2$$

donc,

$$0 \leq r \leq 5$$

$\frac{2,75}{3}$

Ainsi, en cylindrique,

$$\boxed{E = \left\{(r,z,\theta)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq r\leq 5,\ \cancel{\sqrt{25-r^2}+5}\leq z\leq r\right\}}$$

c) Intégrons en sphérique

$$\iiint_E z\,dV = \iiint_E \rho\cos\phi\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{10\cos\phi} \rho^3\cos\phi\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{10\cos\phi}\cos\phi\sin\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{10^4\cos^5\phi\sin\phi}{4}\,d\phi\,d\theta$$ Posons $u=\cos\phi$ $du=-\sin(\phi)d\phi$

$$= \frac{-10^4}{4}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} u^5\,du\,d\theta = \frac{-10^4}{4}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\cos^6\phi}{6}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta = \frac{-10^4}{4}\int_0^{2\pi} 0-\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{6}\,d\theta$$

$$= \frac{+10^4}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1}{48}\,d\theta = \frac{10^4}{192}\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{625\pi}{6}$$

$\frac{3}{3}$

$$\iiint_E z\,dV = \frac{625\pi}{6}$$