POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Questionnaire
Contrôle périodique

MTH1102

Sigle du cours

Réservé	
1. 5	/10
2. 5	/10
3. 5	/8
4. 5	/12
TOTAL	
20	/40

Sigle et titre du cours	*Groupe*	*Trimestre*
MTH1102 – Calcul II	TOUS	Automne 2016

Professeur	*Local*	*Téléphone*
Jean Guérin	A-520.23	4098

Jour	*Date*	*Durée*	*Heures*
Dimanche	9 octobre 2016	1h50	9h30-11h20

Documentation	*Calculatrice*	
☐ Aucune	☐ Aucune	**Les cellulaires, agendas électroniques ou téléavertisseurs sont interdits.**
☐ Toute	☐ Toutes	
☒ Voir directives particulières	☒ Non programmable	

Directives particulières

Un aide-mémoire deux pages est fourni avec le questionnaire.
Justifiez toutes vos réponses.

Important

Cet examen contient [4] questions sur un total de [12] pages **(excluant cette page)**

La pondération de cet examen est de [40] %

Vous devez répondre sur : ☒ le questionnaire ☐ le cahier ☐ les deux

Vous devez remettre le questionnaire : ☒ oui ☐ non

Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question pour diverses raisons (données manquantes, données erronées, etc.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) puis passez à la question suivante.

Question 1 [10 points]

Les questions a) et b) sont indépendantes.

a) On considère la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^4+y^4}$ sur le carré $R = [0,1] \times [0,1]$. Sachant que

$$f(x,y) \leq \tfrac{8}{81}(13-4x-4y)$$

pour tout $(x,y) \in R$, démontrez les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{3} \leq \iint_R f(x,y)\,dA \leq \frac{8}{9}.$$

b) Évaluez l'intégrale ci-dessous et simplifiez votre réponse.

$$\int_0^6 \int_{y/3}^2 y\sqrt{1+x^3}\,dxdy$$

Réponse:

$\frac{1}{3} \leq$ ——— $\leq 8/9$

$\iint 1/3$

$\frac{8}{81}(13-4x-4y) \leq \frac{1}{1+x^2+y^2} \leq \frac{8}{81}(13-4x-4y)$

$\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dA \leq \frac{8}{81}(13-4x-4y)\,dA$

$\frac{1}{1+x^2+y^2}(1) \leq \frac{8}{81}(13-4x-4y)$

$13-4x-4y \leq \frac{81}{8(1+x^2+y^2)} \leq 13-4x-4y$

$$\int_0^2 \int_0^{3x} y\sqrt{1+x^3}\, dy\, dx$$

$0 \leq y \leq 3x$

$0 \leq x \leq 2$

$$= \int_0^2 \frac{y^2}{2}\sqrt{1+x^3}\Big]_{y=0}^{y=3x} dx = \int_0^2 \frac{9x^2}{2}\sqrt{1+x^3}\, dx = \frac{3}{2}\int 3x^2\sqrt{1+x^3}\, dx$$

$u = 1+x^3$

$du = 3x^2$

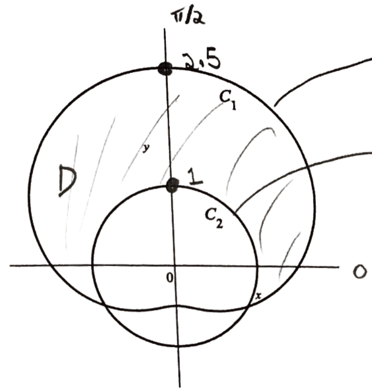
$$\frac{3}{2}\int \sqrt{u}\, du = \frac{3}{2}\left[\frac{2u^{3/2}}{3}\right]$$

$$= 1\left[(1+x^3)^{3/2}\right]_0^2 = 9^{3/2} - 1^{3/2} = \underline{26}$$

5/5

Question 2 [10 points]

La figure ci-dessous illustre les courbes polaires d'équations $r = 1$ et $r = \frac{3}{2} + \sin\theta$.



→ $r = 3/2 + \sin\theta$

→ $r = 1$

Justification:

θ	r_1	r_2
π/2	1	2.5

la Valeur de $\theta = \pi/2$ (l'axe des y) de C1 est 2,5 et celle de C2 est 1, 2.5 > 1

a) Identifiez les courbes sur la figure en écrivant leur équation. Justifiez brièvement vos réponses.

b) Soit D la région du plan située à l'intérieur de C_1 et à l'extérieur de C_2. Évaluez l'intégrale

$$J = \iint_D \frac{y}{x^2 + y^2}\, dA.$$

2.0

Réponse:

a)

Équation de la courbe C_1 : $r = 3/2 + \sin\theta$

Équation de la courbe C_2 : $r = 1$

b)

$1 \leq r \leq 2/3 + \sin\theta$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$x^2 + y^2 = r$

$y = r\sin\theta$

$dA = r\,dr\,d\theta$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^{2/3+\sin\theta} \frac{r\sin\theta}{r}\, r\,dr\,d\theta$$

$x = \frac{M_y}{m}$ $y = \frac{M_x}{m}$

$\bar{X}$ sera = à 0 car $r = 2\sin\theta$ et $r=1$ sont symétrique par rapport à l'axe des y, alors

$m = \iint \rho(x,y)\,dA$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^{2/3+\sin\theta} r\sin\theta \, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}(\sin\theta)\right]_{r=1}^{r=2/3+\sin\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{(2/3+\sin\theta)^2}{2}(\sin\theta) - \frac{1}{2}(\sin\theta)\, d\theta$$

2 1

$\frac{\pi}{6} \leq$

$$= \int_0^{2\pi} 1/6\sin\theta + 2/3\sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin^3\theta \, d\theta =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta + \frac{2}{3}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 3\theta\, d\theta \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{6}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} + \frac{1}{3}\int 1-\cos 2\theta\, d\theta + \frac{1}{4}\int \sin\theta - \sin\theta\, d\theta$$

$$\frac{1}{6}(1-(-1)) + \frac{1}{3}\left[\theta - \sin 2\theta\right]_0^{\pi}$$

$$1/3 + 1/3(\pi) = 1/3 + \pi/3 \approx 1.3805$$

$\bar{X} = \frac{M_y}{m}$ $\bar{Y} = \frac{M_x}{m}$

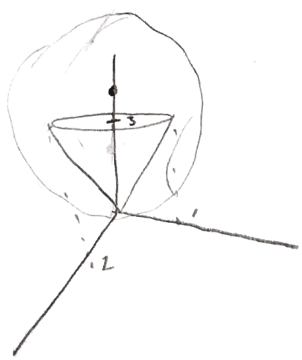
$\bar{X}$ sera = à 0 car $r = 2\sin\theta$ et $r=1$ sont symétrique par rapport à y, alors

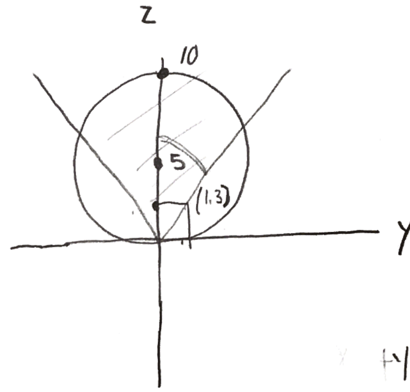
5

Question 3 [8 points]

Calculez le volume de la région E de l'espace qui est à l'intérieur de la sphère $x^2+y^2+(z-5)^2 = 25$ et au-dessus du cône $x^2+y^2 = 3z^2$.

Réponse: z





$(z-5)(z-5)$

$z^2 - 10z + 25$

$y^2 + (z-5)^2 = 25$

$y^2 + z^2 - 10z + 25 = 25$

$y^2 + z^2 = 10z$

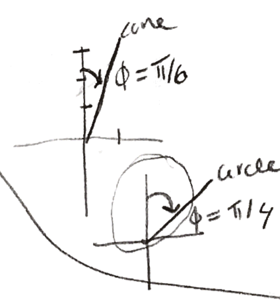
$y^2 = 10z - z^2$

$y = \sqrt{10z - z^2}$

$y^2 = 3z^2$

$y = \sqrt{3z^2}$

$\sqrt{3z^2} \leq y \leq \sqrt{10z - z^2}$



Sphérique

~~$\pi/6 \leq \phi \leq \pi/4$~~

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq \rho \leq 10\cos\phi$

3

$x^2+y^2+z^2-10z+\cancel{25}=\cancel{25}$

$\rho^2 = 10z$

$\rho^2 = 10(\rho\cos\phi)$

$\rho = 10\cos\phi$

$x^2+y^2 = 3z^2$

$x^2+y^2=3z^2$ $\quad x=\rho\sin\phi\cos\theta \quad z=\rho\cos\phi$
$y=\rho\sin\phi\sin\theta$

$\rho^2\sin^2\phi\cos\theta+\rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta = 3\rho^2\cos^2\phi$

$\boxed{* \ 2\sin x\cos x = \sin 2x}$

$\rho_{min}=0$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^{10\cos\phi}\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = \int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\sin\phi\right]_{\rho=0}^{\rho=10\cos\phi}$$

1.5

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\frac{(10\cos\phi)^3}{3}\sin\phi\, d\theta\, d\phi = 2\pi\frac{1000}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos^3\phi\sin\phi\, d\phi$$

0.5 X

$$\frac{2000\pi}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{1+\cos(2\phi)}{2}(\cos\phi)(\sin\phi) = \frac{2000\pi}{6}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos\phi\sin\phi+\cos 2\phi\cos\phi\sin\phi$$

$\cos 2\phi = u$
$\sin 2\phi = du$ $\quad \int u\,du = \frac{u^2}{2}$

$$\frac{500\pi}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}2\cos\phi\sin\phi \quad + \frac{500\pi}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}2\cos 2\phi\cos\phi\sin\phi \rightarrow \frac{500\pi}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos 2\phi\sin 2\phi$$

$$\frac{500\pi}{3}\left[\frac{(\cos 2\phi)^2}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/4}$$

$$\frac{500\pi}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin 2\phi$$

$$\frac{500\pi}{3}\left[-\cos 2\phi\right]_{\pi/6}^{\pi/4} \quad \frac{500\pi}{3}\left[0+\frac{1}{2}\right] \quad \frac{250\pi}{3}$$

$$\frac{500\pi}{3}\left(0-\frac{1}{8}\right) = -\frac{125\pi}{6}$$

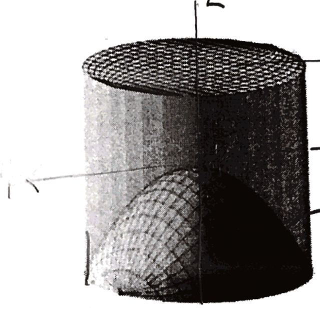
$$\boxed{\frac{250\pi}{3}-\frac{125\pi}{6} = \frac{125\pi}{2}\ u^3}$$

$\bar{y} = \frac{M_x}{m}$ $\bar{X}$ sera = à 0 car $r = 2\sin\theta$ et $r=1$ sont symétriques par y, alors

Question 4 [12 points]

Un solide B a la forme d'un cylindre solide comportant une cavité de forme parabolique, tel qu'illustré sur la figure. La région de l'espace occupée par le solide est bornée par les surfaces $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 10$ et $x^2 + y^2 = 4$. La densité du solide est proportionnelle à la distance au plan $z = 0$.

$Z + x^2 + y^2 = 4$
$x^2 + y^2 = 4 - Z$
$4 - Z = 4$
$-z = 0$
* intersection des solides en 0
$Z_{min} = 0$



$\to Z = 10$
$\to x^2 + y^2 = 4$
$\to z = 4 - x^2 - y^2$

a) Déterminez le centre de masse du solide B. Justifiez soigneusement votre réponse.

b) Le centre de masse calculé en a) est-il situé à l'intérieur du solide?

Réponse:

Faites-le $\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_B x k z \, dV = 0$, car...

* le solide est symetric autour de l'axe de Z alors le centre de masse ~~sera~~ Non coincident avec l'axe des Z.
$\bar{y} = 0$ et $\bar{x} = 0$ +0/2

$x^2 + y^2 = 4$
$r^2 = 4$
$r = \pm 2$

$z = 4 - x^2 - y^2$
$z + \underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} = 4$
$z + r^2 = 4$
$r^2 = 4 - z$
$r = \pm\sqrt{4-z}$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$
$\sqrt{4-z} \leq r \leq 2$
$0 \; z \leq 10$

et $0 \leq r \leq 2$, $4 \leq z \leq 10$,

$m = \iiint_E \rho(x,y,z) \, dA$

$$m = \int_0^{10}\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{4-z}}^{10} r\,dr\,d\theta\,dz$$

Densité? $+2/4$

$$= \int_0^{10}\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=\sqrt{4-z}}^{r=10} = \int_0^{10}\int_0^{2\pi} \frac{100}{2} - \left(\frac{4-z}{2}\right) d\theta\,dz$$

2e intégrale?

$$48\int_0^{10}\int_0^{2\pi} +\frac{z}{2}\,d\theta\,dz = \frac{2\pi(48)}{2}\int_0^{10} +z\,dz = \frac{2\pi 48}{2}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{10}$$

$+1/2$

$$\frac{\pi 48}{2}\left[z^2\right]_0^{10} \qquad \frac{100\times\pi\times 48}{2} = \cancel{2400\pi} = m$$

$$M_{xy} = \iiint z\,\rho(x,y,z)\,dV \qquad M_{xy} = \int_0^{10}\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{4-z}}^{10} z\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

$\rho = ?$ $+1/2$

$$\int_0^{10}\int_0^{2\pi} \left[z\frac{r^2}{2}\right]_{r=\sqrt{4-z}}^{r=10} d\theta\,dz = \int_0^{10}\int_0^{2\pi} (z\,50) - \frac{(4-z)z}{2}\,d\theta\,dz = \int_0^{10}\int_0^{2\pi} 50z - \frac{4z}{2} - \frac{z^2}{2}\,d\theta\,dz$$

$$= \int_0^{10}\int_0^{2\pi} 48z - \frac{z^2}{2}\,d\theta\,dz = 2\pi\int_0^{10} 48z - \frac{z^2}{2}\,dz = 2\pi\left[24z^2 - \frac{z^3}{6}\right]_0^{10}$$

$$2\pi\left(24(10^2) - \frac{(10)^3}{6}\right) = 2\pi\left(2400 - 500/3\right) = 2\pi\left(\frac{6700}{3}\right) = M_{xy}$$

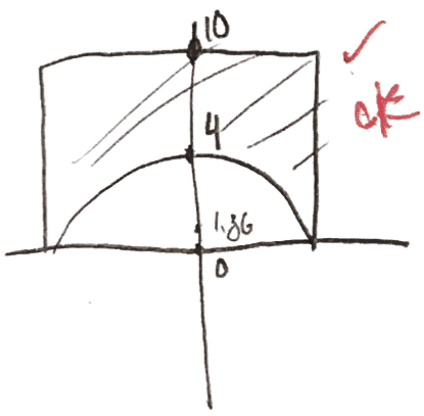
a) $\bar{X} = \frac{M_y}{m}$ $\bar{Y} = \frac{M_x}{m}$ $\bar{X}$ sera = à 0 car $r = 2\sin\theta$ et $r=1$ sont symétrique par rapport à l'axe des Y, alors

$m = \iint \rho(x,y)\,dA$

$$\bar{Z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{13400\pi/3}{2400\pi} \approx \cancel{1.86}$$

Pas vraiment de sens (plus dense en haut)

b)



✓ ok

le centre de masse (0, 0, 1,86) et n'est pas sur la surface

+1/2

$\leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$

1 Intégrales doubles et triples

1. $\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \lim\limits_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\,\Delta A$

2. $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$

3. $m = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dA$

4. $M_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)\,dA$, $M_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)\,dA$

5. $\bar{x} = \frac{M_y}{m}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{m}$

6. $I_x = \iint\limits_D y^2\rho(x,y)\,dA$, $I_y = \iint\limits_D x^2\rho(x,y)\,dA$, $I_0 = \iint\limits_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dA$

7. $\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dV = \lim\limits_{m,n,p\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\,\Delta V$

8. $m = \iiint\limits_E \rho(x,y,z)\,dV$

9. $M_{yz} = \iiint\limits_E x\rho(x,y,z)\,dV$, $M_{xz} = \iiint\limits_E y\rho(x,y,z)\,dV$, $M_{xy} = \iiint\limits_E z\rho(x,y,z)\,dV$

10. $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}$, $\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}$, $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$

11. $I_x = \iiint\limits_E (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$, $I_y = \iiint\limits_E (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dV$, $I_z = \iiint\limits_E (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dV$

12. $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $z = z$

13. $x = \rho\sin(\phi)\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\phi)\sin(\theta)$, $z = \rho\cos(\phi)$

14. $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{||\vec{r}\,'(t)||}$, $\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{||\vec{T}'(t)||}$

2 Dérivées

1. $\frac{d}{dx}c = 0$
2. $\frac{d}{dx}[af(x) \pm bg(x)] = af'(x) \pm bg'(x)$
3. $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
5. $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$
6. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
7. $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln(a)$
8. $\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$
9. $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$
10. $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$

3 Intégrales

1. $\int [af(u) \pm bg(u)]\,du = a\int f(u)\,du \pm b\int g(u)\,du$
2. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
3. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
4. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$
5. $\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$
6. $\int \cos(u)\,du = \sin(u) + C$
7. $\int \sin(u)\,du = -\cos(u) + C$
8. $\int \tan(u)\,du = \ln|\sec(u)| + C$
9. $\int \sec(u)\,du = \ln|\sec(u) + \tan(u)| + C$
10. $\int \sec^2(u)\,du = \tan(u) + C$
11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C$
12. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$

4 Trigonométrie

1. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
2. $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$
3. $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
4. $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$
5. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
6. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
7. $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
8. $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1