Adam Andrei

TEOREMA LUI ROLLE. ȘIRUL LUI ROLLE.

27.12.2024

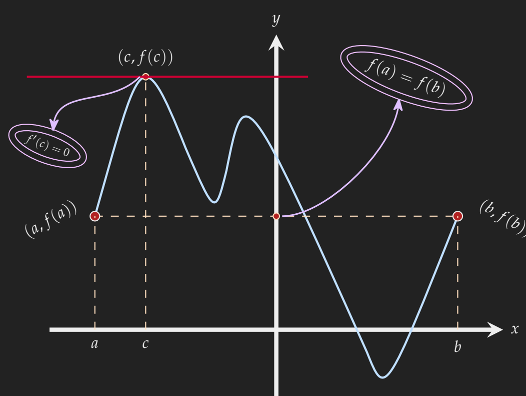
TEOREMA LUI ROLLE

ENUNȚ

Fie o funcție $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:
- f este continuă pe $[a,b]$
- f este derivabilă pe (a,b)
- $f(a) = f(b)$

atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

DEMONSTRAȚIE



Dacă f e o funcție constantă $\Rightarrow$ concluzia e evidentă.

Presupunem în continuare că f nu este o funcție constantă. Cum f este o funcție continuă pe un interval închis, atunci conform *teoremei lui Weierstrass* știm că f este mărginită și își atinge marginile. Cu alte cuvinnte, f admite punct de minim și punct de maxim.

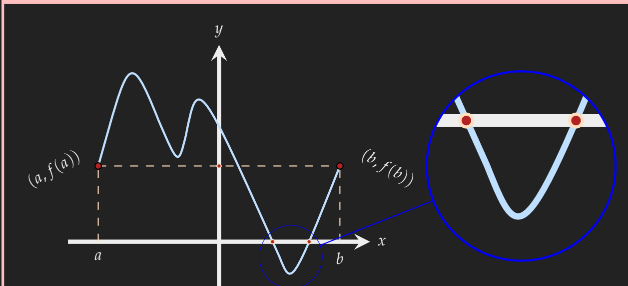
Fie $m, M \in [a,b]$ punctul de *minim*, respectiv de *maxim* a funcției f și fie $v := f(a) = f(b)$.

f nu este constantă $\Rightarrow m \neq M$ și $f(m) \neq f(M) \Rightarrow f(m) \neq v$ sau $f(M) \neq v \Rightarrow$
$\Rightarrow m \notin \{a,b\}$ sau $M \notin \{a,b\} \Rightarrow m \in (a,b)$ sau $M \in (a,b) \Rightarrow f$ are un punct de extrem în intervalul deschis (a,b).

Dar din *teorema lui Fermat* știm că punctele de extrem dintr-un interval deschis ale unei funcții derivabile se găsesc printre punctele critice ale funcției (a.k.a punctele x cu proprietatea că $f'(x) = 0$), deci fie $f'(m) = 0$ fie $f'(M) = 0$.

În concluzie există $c \in (a,b)$ (cel puțin unul dintre m și M) astfel încât $f'(c) = 0$.

CAZ DE INTERES



Un caz particular în care se poate aplica *teorema lui Rolle* este asupra restricției unei funcții la intervalul cuprins între două *zerouri* (*rădăcini ale funcției*).

Fie $x_1 \neq x_2 \in [a,b]$ două rădăcini ale funcției $f \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = 0$. Aplicând *teorema lui Rolle* restricției funcției f la intervalul $[x_1, x_2]$ obținem:

$$(\exists)\, x_0 \in (x_1, x_2) \text{ a.î. } f'(x_0) = 0$$

Deci între două rădăcini ale unei funcții există cel puțin o rădăcină a derivatei.

CONSECINȚĂ

Fie acum $x_1' < x_2' \in (a,b)$ două rădăcini *consecutive* ale derivatei f'. Presupunem prin absurd că există *două rădăcini distincte* ale funcției f în intervalul $[x_1', x_2']$. Dar atunci există un $x_0 \in (x_1', x_2')$ astfel încât $f'(x_0) = 0$ (deoarece între două rădăcini ale funcției există o rădăcină a derivatei), ceea ce contrazice faptul că x_1' și x_2' sunt rădăcini consecutive ale derivatei. Deci:

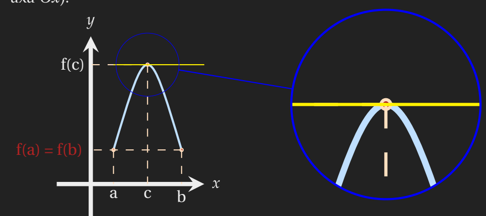
Între *două rădăcini consecutive* ale derivatei f' nu pot să existe două rădăcini distincte ale funcției f. Prin urmare avem:

Între două rădăcini consecutive ale derivatei există cel mult o rădăcină a funcției.

INTERPRETĂRI

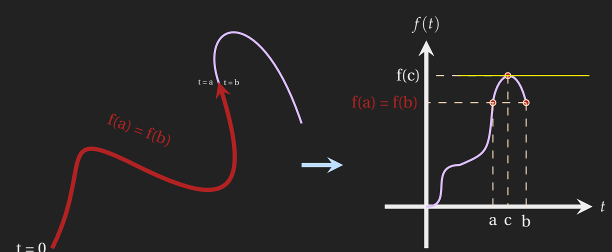
INTERPRETARE GEOMETRICĂ

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție care respectă cerințele din *teorema lui Rolle*, atunci există un punct $c \in (a,b)$ în care tangenta la graficul funcției are *panta 0* (adică este paralelă cu axa *Ox*).



INTERPRETARE FIZICĂ

Considerăm un drum fără bucle (nu se poate ajunge în același loc mergând în față) și o particulă (om, mașină, etc.) care parcurge drumul. Fie acum funcția f care are ca argument timpul t scurs de la plecare și ca rezultat $f(t)$ - distanța dintre punctul de plecare și punctul curent. În acest context, derivata $f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$ reprezintă *viteza* particulei.



Fie acum o particulă care la timpii $t = a$ și $t = b (b > a)$ se află în același punct pe drum (odată ajunsă în punctul corespunzător timpului *t=a*, își continuă drumul și apoi se întoarce ca mai apoi la timpul *t=b* să ajungă înapoi în același punct ca la timpul *t=a*), adică $f(a) = f(b)$. Atunci, conform *teoremei lui Rolle*, știm că există un timp $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$, deci există un moment în care viteza este 0.

Cu alte cuvinte, dacă particula se întoarce, atunci trebuie neapărat să se fi oprit.

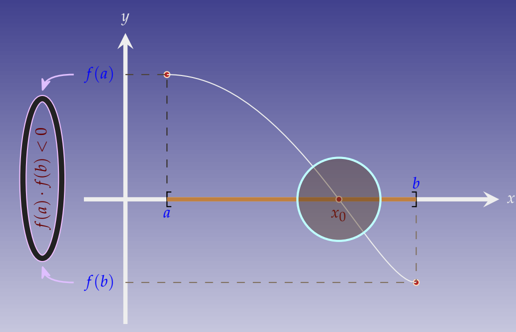
ȘIRUL LUI ROLLE-FUNDAMENT TEORETIC

Cum între două zerouri consecutive ale derivatei există cel mult un zero al funcției, atunci cunoscând toate zerourile derivatei, obținem astfel subintervale ale domeniului în care există maxim o rădăcină a funcției. Folosind proprietatea funcțiilor continue:

Proprietate

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Dacă $f(a) \cdot f(b) < 0$ atunci există $x_0 \in (a,b)$ astfel încât $f(x_0) = 0$. Cu alte cuvinte:

O funcție continuă care își schimbă semnul pe un interval are o rădăcină în acel interval.



Fie acum x_1', x_2' două rădăcini cosecutive ale derivatei.

$f(x_1') \cdot f(x_2') < 0$ (funcția schimbă semnul)

Atunci există o unică rădăcină a funcției în intervalul (x_1', x_2') conform proprietății funcțiilor continue de mai sus.

$f(x_1') \cdot f(x_2') > 0$ (funcția are același semn în capetele intervalului)

Presupunem prin absurd că există un punct $x_0 \in (x_1', x_2')$ astfel încât $\operatorname{sgn}(f(x_0)) = -\operatorname{sgn}(f(x_1'))$ (i.e. un punct în care funcția schimbă semnul față de capetele intervalului). Atunci avem $f(x_1') \cdot f(x_0) < 0$ și $f(x_0) \cdot f(x_2') < 0 \Rightarrow x_1 \in (x_1', x_0)$ și $x_2 \in (x_0, x_2')$ astfel încât $f(x_1) = 0$ și $f(x_2) = 0$. Dar astfel obținem o contradicție cu faptul că între două rădăcini consecutive ale derivatei există cel mult o rădăcină a funcției. Deci dacă funcția nu schimbă semnul în capetele intervalului, atunci nu schimbă semnul nici în interiorul intervalului. Momentan știm că funcția nu schimbă semnul, dar mai trebuie să stabilim dacă poate să fie 0.

Presupunem acum prin absurd că există un $x_0 \in (x_1', x_2')$ astfel încât $f(x_0) = 0$. Dar, cum în restul punctelor funcția are același semn sau e egală cu zero, atunci în x_0 avem un punct de extrem local, și în plus este în interiorul intervalului, deci conform *teoremei lui Fermat*: $f'(x_0) = 0$. Obținem o contradicție cu faptul că x_1', x_2' sunt rădăcini consecutive ale derivatei (nu poate să mai existe un alt punct x_0 pentru care $f'(x_0) = 0$).

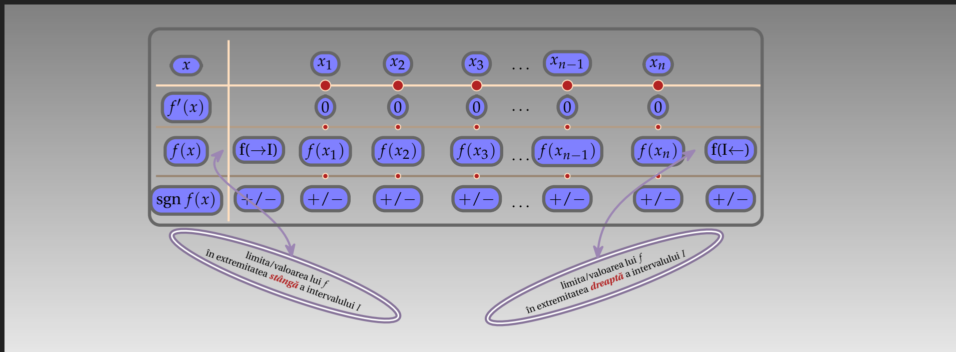
În concluzie avem:

Considerăm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție care respectă condițiile *teoremei lui Rolle* și $x_1', x_2' \in (a,b)$ rădăcini consecutive ale derivatei. Atunci:
- dacă $f(x_1') \cdot f(x_2') < 0 \Rightarrow$ există unic $x_0 \in (x_1', x_2')$ a.î. $f(x_0) = 0$
- dacă $f(x_1') \cdot f(x_2') > 0 \Rightarrow$ nu există $x_0 \in (x_1', x_2')$ a.î. $f(x_0) = 0$
- dacă $f(x_1') = 0 \Rightarrow x_1'$ este rădăcină multiplă (la fel pentru x_2')

ȘIRUL LUI ROLLE

CONSTRUCȚIE

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ ***un interval*** și fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe I și derivabilă pe interiorul intervalului I. Considerăm în continuare $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ rădăcinile derivatei ordonate crescător (deci consecutive). ***Șirul lui Rolle*** este șirul alcătuit din ***semnele valorilor*** funcției f în zerourile derivatei: $(f(x_i))_{i=\overline{1,n}}$. Mai exact:



REGULI

Dacă în *șirul lui Rolle* avem:

- ***schimbare de semn*** atunci există o unică rădăcină a funcției în acel interval
- ***același semn*** atunci nu există rădăcini ale funcției în acel interval
- ***0*** atunci acea rădăcină a derivatei este de fapt rădăcină multiplă a funcției

Primul și ultimul semn se compară cu semnul valorii/limitei funcției în extremitățile intervalului.

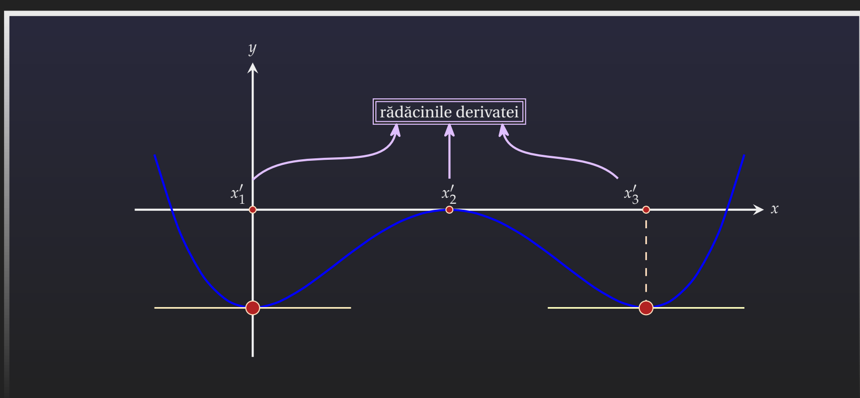
EXEMPLUL 1

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{16}\left(x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 16\right)$. f e continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{1}{16}\left(4x^3 - 24x^2 + 32x\right) = \frac{x}{4}\left(x^2 - 6x + 8\right) = \frac{x}{4}(x-2)(x-4)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{4}(x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 2, 4\}$

$f(0) = -1; f(2) = 0; f(4) = -1; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
f′(x)		0	0	0	
f(x)	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$
sgn f(x)	+	-	0	-	+

Avem:

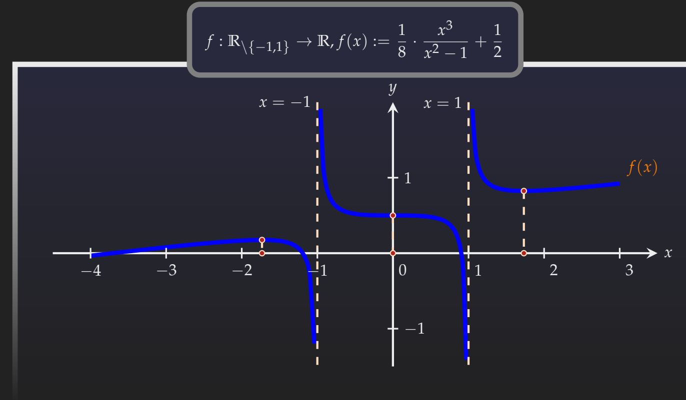
- schimbare de semn $-\infty \to 0 \Rightarrow \exists!\, x_1 \in (-\infty, 0)$ a.î. $f(x_1) = 0$
- $f(2) = f'(2) = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \to$ rădăcină multiplă
- schimbare de semn $4 \to +\infty \Rightarrow \exists!\, x_3 \in (4, +\infty)$ a.î. $f(x_3) = 0$

Având o funcție polinomială de ordin 4, știm că $x_2 = 2$ este rădăcină multiplă de ordin 2.

EXEMPLUL 2

Fie $f : \mathbb{R}_{\setminus\{-1,1\}} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{x^2-1} + \frac{1}{2}$. Să se determine intervalele de separare a rădăcinilor funcției f.

$f : \mathbb{R}_{\setminus\{-1,1\}} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{x^2-1} + \frac{1}{2}$



f este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}_{\setminus\{\pm1\}}$ și $f'(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}_{\setminus\{\pm1\}}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$ și: $f(-\sqrt{3}) = \frac{8-3\sqrt{3}}{16} > 0; f(0) = \frac{1}{2}; f(\sqrt{3}) = \frac{8+3\sqrt{3}}{16} > 0; \lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\nearrow-1} f(x) = -\infty; \lim\limits_{x\searrow-1} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x\nearrow1} f(x) = -\infty; \lim\limits_{x\searrow1} f(x) = +\infty;$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f′(x)		0	|	0	|	0	
f(x)	$-\infty$	$\frac{8-3\sqrt{3}}{16}$	$-\infty \mid +\infty$	$\frac{1}{2}$	$-\infty \mid +\infty$	$\frac{8+3\sqrt{3}}{16}$	$+\infty$
sgn f(x)	-	+	$- \mid +$	+	$- \mid +$	+	+

Deci avem:

- $\exists!\, x_1 \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ a.î. $f(x_1) = 0$
- $\exists!\, x_2 \in \left(-\sqrt{3}, -1\right)$ a.î. $f(x_2) = 0$
- $\exists!\, x_3 \in (0, 1)$ a.î. $f(x_3) = 0$

EXEMPLUL 3

Discutați numărul rădăcinilor funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 6 + m, m \in \mathbb{R}$ în raport cu valorile parametrului m.

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 30x + 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{2, 3\}$

$f(2) = m + 22; f(3) = m + 21; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	Separarea soluțiilor
f′(x)		0	0		
f(x)	$-\infty$	$m+22$	$m+21$	$+\infty$	
$m \in (-\infty, -22)$	-	-	-	+	$x_1 \in (-\infty, 2)$
$m = -22$	-	0	-	+	$x_1 =$ 2-rădăcină multiplă $x_2 \in (3, +\infty)$
$m \in (-22, -21)$	-	+	-	+	$x_1 \in (-\infty, 2)$ $x_2 \in (2, 3)$ $x_3 \in (3, +\infty)$
$m = -21$	-	+	0	+	$x_1 \in (-\infty, 2)$ $x_2 =$ 3-rădăcină multiplă
$m \in (-21, +\infty)$	-	+	+	+	$x_1 \in (-\infty, 2)$