Examen Analyse

PEIP C

Janvier 2021

On prêtera une attention particulière à la rédaction. Les calculatrices sont interdites. Tout résultat sans justification sera pénalisé. Des schémas illustrant vos démonstrations sont encouragés.

Exercice 1 : questions de cours et calculs

(1) Donner la définition formelle de la proposition : *la suite de réels* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* π

(2) Rappeler l'énoncé du théorème Rolle

(3) Calculer la somme S_n puis déterminer sa limite $\lim_{n\to\infty} S_n$:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{4i+1}}$$

(4) Calculer les limites des fonctions suivantes :

$$(a) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \qquad\qquad (b) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x+1)^2-(e^x-1)^2}{e^{2x}}$$

(5) Trouver une primitive de $\ln(x)$ *(On pourra procéder par intégration par parties en remarquant que* $\ln(t) = (t)' \ln(t)$*)*

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \exp(u_n)$

(1) Soit $f(x) = e^x$. Montrer que $[0, \infty[$ est stable par f. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$.

(2) En considérant $g(x) = e^x - 1$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 1$.

(3) En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$.

(4) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Déterminer sa limite.

Exercice 3 : étude de fonctions

(1) Soit $f\colon x \to \frac{1}{x^2} + 2x$ définie sur $\mathbb{R}_*^+$. Étudier les variations de f, tracer sa courbe, et montrer que f admet un minimum global que l'on déterminera.
(2) Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $g(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que sa dérivé n'est pas continue en zéro.

Exercice 4 : inégalité de Cauchy–Schwarz

Soit $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, deux fonctions continues. Le but de l'exercice est de démontrer l'inégalité suivante :

$$(*) : \qquad \left| \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t}$$

(1) Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. Montrer que P est de signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b^2 - 4ac \leq 0$.

On considère la fonction suivante :

$$\phi(x) = \int_a^b \big(f(t) + xg(t)\big)^2 \mathrm{d}t$$

(2) Justifier que ϕ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est positive.
(2) En développant $\big(f(t) + xg(t)\big)^2$, montrer que ϕ est un polynôme du second degré, on exprimera ses coefficients à l'aide des quantités :

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t, \qquad \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t, \qquad \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t$$

(3) En considérant le discriminant du polynôme ϕ, déduire $(*)$

Bonus

($\star$) Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2$$