Portail René Descartes, Aix-Marseille Université

Analyse 1, Fiche d'exercices 6

Année 2022-23, semestre 2

1 Dérivabilité

Exercice 1

Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_1(0) = 0$$

$$f_2(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}, \quad \text{si } x \neq 0 \qquad ; \qquad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, \quad \text{si } x \neq 1 \qquad ; \qquad f_3(1) = 1.$$

Exercice 2

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{si } x > 1$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 4 (Formule de Leibniz)

Étant données u et v des fonctions dérivables à l'ordre n sur l'intervalle I, montrer par récurrence que la dérivée d'ordre n du produit uv sur cet intervalle est :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)} .$$

En déduire les dérivées successives des fonctions :

$$x \mapsto x^2 e^x \quad ; \quad x \mapsto x^2(1+x)^n \quad ; \quad x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \quad ; \quad x \mapsto x^{n-1} \ln x.$$

Exercice 5

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer la dérivée de $x \mapsto \sin(f(x)^2)$ et de $x \mapsto \sin(f(x^2))$.
2. On suppose $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $x \mapsto \log(|f(x)|)$.

Exercice 6

Prolonger par continuité en 0 et étudier la dérivabilité des fonctions

$$f(x) = \sqrt{x} \ln x \ , \qquad g(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} \ .$$

Exercice 7

Calculer la dérivée de

$$x \to \ln \left| \cos\left(\pi + \frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \right| \ .$$

Exercice 8 (Approximation affine)

Déterminer une approximation des nombres suivants

$$a = \sqrt{4,002}\ , \qquad b = -\frac{1}{(0.998)^2}\ , \qquad c = \ln(0.99)$$

Exercice 9 (Règle de l'Hôpital)

Soient f, g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Soit $a \in I$. On suppose $g'(a) \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Exercice 10

1. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle que

$$f(a) = f(b) = 0 \qquad \text{et} \qquad f''(x) \leq 0\ , \qquad \forall x \in]a, b[\ .$$

   Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que l'on ait

$$f(x) \geq 0\ , \qquad f'(x) \geq 0\ , \quad \text{et} \quad f''(x) \geq 0\ , \qquad \forall x \in \mathbb{R}\ .$$

   Étudier

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}\ .$$

Exercice 11 (Ordre de dérivabilité)

Quel est l'ordre de dérivabilité de la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 5x^3 + 23x^2 + 2x + 218 & \text{si } x < -2 \\ -2(2x^2 + 23x - 95) & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$