Partiel Analyse 1: deuxième sessions

PEIP post-PACES

Juin 2020

Exercice 1 : calculs

(1) Calculer la somme suivante ($n \in \mathbb{N}$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} 3^k$$

(2) Calculer la limite de la suite suivante :

$$u_n = \frac{4^n}{n!}$$

(3) Calculer la limite des fonctions suivantes :

$$(a) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \qquad\qquad (b) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{(x - \sin x)(x + \cos(x))}{x^2}$$

(4) Donner le développement limité à l'ordre 3 de la fonction suivante :

$$\ln(1 + \alpha x) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}$. En déduire $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{\alpha}{n})^n = e^\alpha$

(5) Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

Exercice 2 : suites récurrentes

On se propose d'étudier la suite : $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u\colon \begin{cases} u_0 \in [0, 2] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1)(x - 2) + x$.

(a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $I = [0, 2]$. Montrer que I est stable par f, c'est a dire $f(I) \subset I$.
(b) Déterminer les points fixes de f (c'est à dire les x tel que $f(x) = x$).
(c) On suppose $u_0 = 1$ ou $u_0 = 2$. Déterminer la limite de u
(d) On suppose $0 \leq u_0 < 1$. Montrer que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$. Montrer que u est croissante puis déterminer sa limite.
(e) On suppose $1 < u_0 < 2$. Montrer que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$. Montrer que u est décroissante puis déterminer sa limite.