UE M5 - Séries et calcul intégral

TD 2 : Intégrales de Riemann (techniques de calcul)

Exercice 1

Tableau des primitives usuelles :

Compléter le tableau suivant en tenant compte des résultats déjà connus :

Attention : Pensez à vous demander à chaque fois sur quel intervalle, le résultat serait valable !

$$\forall n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} \quad \int x^n dx = \qquad \int \frac{1}{x} dx = \qquad \int e^x dx =$$

$$\int \sin(x) dx = \qquad \int \cos(x) dx =$$

$$\int sh(x) dx = \qquad \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \qquad \int (1+\tan^2(x)) dx =$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = \qquad \int \frac{1}{ch^2(x)} dx = \qquad \int (1 - th^2(x)) dx =$$

$$\int \frac{1}{sh^2(x)} dx = \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx =$$

Exercice 2

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\exp(t)}{t} dt$$

2. Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$g(x) = \int_{-tan(x)}^{sh(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

Exercice 3

Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$ **b)** $\displaystyle\int \cos^2(x)dx$ **c)** $\displaystyle\int a^x dx$ où $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ **d)** $\displaystyle\int \ln(x)dx$

e) $\displaystyle\int (x^3-2x+1)e^{-x}dx$ **f)** $\displaystyle\int e^x \sin(x)dx$ **g)** $\displaystyle\int x^2e^xdx$ **h)** $\displaystyle\int ch(x)\sin(x)dx$

Exercice 4

Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int (2x+3)(x^2+3x+5)^3\, dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{e^x}{2+e^x}\, dx$ **c)** $\displaystyle\int \sin(x)e^{\cos(x)}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x-\sin(x)}\, dx$ **e)** $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+2x+2}\, dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\, dx$

Exercice 5

Calculer $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$ de deux façons :

1. A l'aide d'une intégration par parties à partir de $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx$.
2. En utilisant le changement de variables $t = \arctan(x)$.

Exercice 6

Soit les intégrales de Wallis définies par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = J_n$.

2. Montrer que :

$$(*) \quad \forall n \geq 2 \quad (n)I_n = (n-1)I_{n-2}$$

3. Que peut on dire de la suite $(n\ I_n\ I_{n-1})_{n\geq 1}$?

4. Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant la relation $(*)$.

5. Proposer un calcul direct de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Montrer que : $I_{n+1} \sim_{+\infty} I_n$ et que $I_n \sim_{+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 7

1. Calculer (après avoir précisé l'intervalle de validité) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - x + 1}$.

2. En déduire $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^3}dx$

Exercice 8

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x(x^2+1)}dx \qquad \int \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-4)}dt$$

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx \qquad \int \frac{x^2}{x^3-1}dx$$

Exercice 9

1) Déterminer :

$$\int \frac{1}{\sin(x)}dx \qquad \int \frac{2\cos(x)}{3-\cos(2x)}dx \qquad \int \frac{1}{\sin(x)\,\cos(x)}dx \qquad \int \frac{1}{1+\sin(x)}dx$$

Exercice 10

Déterminer, en justifiant avec soin vos calculs, les intégrales suivantes :

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_0^x \frac{2t+3}{t^2+4t+3}dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x \cos^3(t)dt$$

Exercice 11

Notons f la fonction définie par : $\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad t \mapsto \dfrac{1+t^2}{1+t^4} \end{cases}$

1. Décomposer la fraction rationnelle f en éléments simples en déterminant les réels $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \frac{at+b}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} + \frac{ct+d}{t^2+\sqrt{2}t+1}$$

2. Déterminer en justifiant avec soin vos calculs la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$

3. Déterminer en justifiant avec soin vos calculs la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4(x)+\sin^4(x)}dx$.

Exercice 12

(Extrait Partiel 2 de 2017-18) Soit f une fonction définie et continue sur $]0,+\infty[$. On pose

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t}dt.$$

1. Justifier que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.
2. Déterminer F dans les deux cas suivants $\quad f(t) = 1/t, \qquad f(t) = 1$.
3. Dans la suite, on suppose que $f(t) = \cos(t)$.

a. Déterminer le signe de $F(\pi/6)$ et $F(\pi/2)$.
b. Montrer que : $\forall x > 0,\ |F(x)| \leq \ln 3$.
c. En utilisant la majoration $|\sin t| \leq t$ pour $t > 0$, montrer que

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \sin(t)\ln(t)dt = 0.$$

d. En utilisant une intégration par parties, en déduire la limite de $F(x)$ quand x tend vers 0.