Portail René Descartes, Aix-Marseille Université

Analyse 1, Fiche d'exercices 3

Année 2022-23, semestre 2

1 Généralités

Exercice 1.1 (Domaine de définition)

Donner les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{5x-3}}\ , \quad g(x) = \sqrt{x^2-2x-5}\ , \quad h(x) = \ln(x+3) + \sqrt{x-4}$$

Exercice 1.2 (Domaine de définition et image directe)

Donner le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes, ainsi que l'image directe de ce domaine par la fonction correspondante

$$f(x) = \sqrt{4-3x^2}\ , \quad g(x) = \frac{1}{1+x}\ , \quad h(x) = 1+\cos(x)\ , \quad k(x) = \tan(2x)\ .$$

Exercice 1.3 (Image directe et image réciproque)

1. Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = |x| \in \mathbb{R}_+$.
   a) Déterminer les images directes suivantes

   $$a)\ f(\{-1,2\})\ ; \qquad b)\ f([-3,-1])\ ; \qquad c)\ f([-3,-1])\ .$$

   b) Déterminer les images réciproques suivantes

   $$a)\ f^{-1}(\{4\})\ ; \qquad b)\ f^{-1}(\{-1\})\ ; \qquad c)\ f^{-1}([-1,4])\ .$$

2. Mêmes questions pour la fonction $f : x \in \mathbb{R} \to f(x) = (x-1)^2 \in \mathbb{R}_+$.
3. On considère la fonction $\sin :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   a) Quelle est l'image directe, par sin, de $\mathbb{R}$? De $[0, 2\pi]$? de $[0, \pi/2[$?
   b) Quelle est l'image réciproque, par sin, de $[0, 1]$? de $[3, 4]$? de $[-1/2, 0] \cup [1/2, 1]$?

Exercice 1.4 (Parité)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application paire. On suppose que la restriction de f à $\mathbb{R}_-$ est croissante. Que dire de la monotonie de la restriction de f à $\mathbb{R}_+$?
2. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des application impaires. Que dire de la parité de $f+g$, fg et $f \circ g$?

2 Calculs de limites

Exercice 2.1

Soient $\ell \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ et f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes :

1. $f(x)$ ne tend pas vers ℓ quand x tend vers a.
2. $f(x)$ ne tend pas vers ℓ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 2.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit x_0 un point de I. On suppose que f admet une limite $a > 0$ en x_0. Démontrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x)| \geqslant \frac{a}{2}$.

Exercice 2.3 (Caractérisation de la limite à gauche)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soit f une application définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f admet ℓ comme limite à gauche en a si et seulement si f vérifie la condition suivante : Pour toute suite $(x_n)_n$ de points de A,
$$x_n \uparrow a, \text{ quand } n \to \infty \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell,$$
où "$x_n \uparrow a$ quand $n \to \infty$" signifie "$a = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$".
2. Reprendre la question 1 avec $\ell = +\infty$ et avec $\ell = -\infty$.

Exercice 2.4 (Périodicité)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est périodique de période T). On suppose de plus que f admet une limite finie, notée ℓ, en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 2.5 (Point fixe d'une application croissante)

Soit $I = [0, 1]$ et soit f une application croissante de I dans I. On pose $A = \{x \in I, f(x) \leq x\}$. Montrer que :

1. $A \neq \emptyset$,
2. $x \in A \Rightarrow f(x) \in A$.
3. A possède une borne inférieure $a \in I$.
4. $f(a) = a$.

(Toute application croissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ admet donc un point fixe.)

Exercice 2.6 (Limite, limite à droite et limite à gauche)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soit f une application définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f admet ℓ comme limite en a si et seulement si f admet (en a) ℓ comme limite à droite et comme limite à gauche.
2. Reprendre la question 1 avec $\ell = +\infty$ et avec $\ell = -\infty$.

Exercice 2.7 (Limites de produit et quotient)

Soient $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = x$. Les applications fg et f/g ont-elles une limite à droite en 0 ?

Exercice 2.8

On définit f par $f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?

Exercice 2.9

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $E(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$. On définit f par $f(x) = x - \sqrt{x - E(x)}$ pour tout $x \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$, L'application f a-t-elle une limite en n ? une limite à droite en n ? une limite à gauche en n ?

Exercice 2.10 (Calcul de limites)

1. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ pour $x \in]-1, 1[$. Quelle est la limite à gauche de f en 1 ?
2. $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ pour $x \in [3, +\infty[$. Quelle est la limite de f en $+\infty$?
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Quelle la limite de f en $+\infty$?
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{2x^2-x-1}$ pour $x \in]0, 1[$. Quelle est la limite à gauche de f en 1 ?

5. $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite à droite de f en 0 ?
6. $f(x) = \frac{\ln(2x^2-x+2)}{\sqrt{x^3+1}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Quelle est la limite en $+\infty$?
7. $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$ pour $x \in]-\pi,\pi[$. Quelle sont les limites (respectivement à droite et à gauche) en $-\pi$ et π ?
8. $f(x) = \frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)\big(\cos(2x)-\cos(x)\big)}$ pour $x \in [-2,2] \setminus \{0\}$. Quelle est la limite en 0 ?
9. $f(x) = 2x\ln(x+\sqrt{x})$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Quelle est la limite (à droite) en 0 ?
10. $f(x) = (x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$ pour $x \in]-1,+\infty[$. Quelle est la limite (à droite) en -1 ?
11. Soit $a > 0$. On définit f par $f(x) = \frac{(1+x)^a}{x}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?
12. $f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]0,1[$. Quelle est la limite (à droite) de f en 0 ?

3 Continuité en un point, prolongement par continuité

Exercice 3.1

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) \neq 0$. Montrer que f est non nulle sur un intervalle ouvert contenant a.

Exercice 3.2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et soit $a > 0$. Montrer que pour tous réels $x, y \in [a,+\infty[$, on a $|f(x)-f(y)| \leq \frac{|x-y|}{a^2}$. En déduire que f est continue sur $]a,+\infty[$. Que peut-on dire de la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 3.3

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;
2. $g(x) = x\frac{1}{\sin(x)}$ si x n'est pas un multiple de π et $g(x) = 0$ si x l'est ;
3. $j(x) = xE(x)$;
4. $k(x) = E(x)\sin(\pi x)$.

Exercice 3.4

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par :
$f(x) = x$ si $x < 1$,
$f(x) = x^2$ si $1 \leq x \leq 4$, et
$f(x) = 8\sqrt{x}$ si $x > 4$.

1. Tracer le graphe de f.
2. f est elle continue ?
3. Montrer que f est bijective et donner la formule définissant f^{-1}.

Exercice 3.5

Soit $f :\ \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$ déterminer α tel que, $|x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)+3| \leqslant \varepsilon$. Que peut-on en conclure sur f ?

Exercice 3.6

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Trouver $\eta > 0$ tel que $|x-a| < \eta \Rightarrow \big|\sin(x)-\sin(a)\big| < \varepsilon$. Que peut-on en déduire sur la fonction sinus ?

Exercice 3.7

Pour $x \in]0,1[$, on pose $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Peut on prolonger f par continuité en 0 et en 1 ?

Exercice 3.8

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}.$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. Calculer $\lim_{x \to -1} f(x)$ et $\lim_{x \to 1} f(x)$.
3. Existe-t-il une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qui est égale à f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$?

Exercice 3.9

Pour quelle valeur de α la fonction f, définie ci-après, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ \alpha & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

4 Vrai ou faux ?

Répondre par vrai ou faux aux questions ci-dessous, et justifier votre réponse.

On utilise les notations suivantes, appelées *notations de Landau* : étant données deux fonctions f, g, et $a \in \mathbb{R}$

— f est *dominée* par g au voisinage de a, que l'on note $f(x) = O(g(x))$ quand $x \to a$, si

$$\exists \eta > 0, \exists M \in \mathbb{R}^+, \ \forall x \in]a - \eta, a + \eta[, \ |f(x)/g(x)| \leq M \quad .$$

— f est *négligeable* devant g, que l'on note $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to a$ si

$$\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = 0 \ .$$

On utilise la même notations au voisinage de $\pm\infty$.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une application définie sur un intervalle ouvert contenant a sauf peut-être en a. Si f admet une limite à gauche et une limite à droite en a alors f admet une limite en a.
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ alors $\lim_{x \to 0} x f(x) = 1$.
3. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ alors $\lim_{x \to 0} f(x)/x^2 = +\infty$.
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}$. Si f n'est pas bornée, alors f tend vers l'infini quand $x \to +\infty$.
5. Soit f définie sur $\mathbb{R}$. Si pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers $+\infty$, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers 1, alors f a pour limite 1 en $+\infty$.
6. Soit f définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim_{x \to 0} = 1$. Alors f est minorée par 0 et majorée par 2 au voisinage de 0.
7. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to 0} x f(x) = +\infty$.
8. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ alors $\lim_{x \to 0} (1 - x) f(x) = 0$.
9. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to 0} (1 - x) f(x) = 1$.
10. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Si f n'est pas bornée alors $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.
11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si pour toute suite $(x_n)_n$ telle que $\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers 1, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
12. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Si la suite $(f(n))_n$ converge vers 0 et la suite $(f(n + 1/2))_n$ converge vers $1/2$, alors f n'a pas de limite en $+\infty$.
13. $(\lim_{x \to 0} f(x) = 0) \iff (\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in [-\eta, 0[\cup]0, \eta], |f(x)| < \varepsilon)$.
14. $(\lim_{x \to 1} f(x) = 2) \iff (\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \geq 1 + \eta, |f(x) - 2| < \varepsilon)$.
15. $(\lim_{x \to 0} f(x) = 0) \iff (\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in [-\eta, 0[\cup]0, \eta], |f(x)| < 1/n)$.