Portail René Descartes, Aix-Marseille Université

Analyse 1, Fiche d'exercices 4

Année 2022-23, semestre 2

1 Continuité sur un intervalle - théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 1.1 (Fonction continue sur un intervalle)

Soit f une application continue d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f ne s'annule pas sur I. Montrer que f garde un signe constant sur I.
2. On suppose que $f(x) \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 1.2 (Fonction continue sur un intervalle - 2)

Soit une fonction continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.

Exercice 1.3 (Fonction polynôme)

1. Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.
2. Montrer que le polynôme $x^{30} + 14x^{17} - 7x^5 - 7$ admet au moins une racine dans l'intervalle $]0,1[$.

Exercice 1.4 (Fonction réciproque)

Soit f l'application de $[-1,\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \ , \qquad \text{pour tout } x \geq -1 \ .$$

Montrer que f est bijective de $[-1,\infty[$ dans $]0,1]$ et donner une formule explicite pour sa fonction réciproque.

Exercice 1.5 (Course à pieds)

1. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction

$$g(t) = f\left(t + \frac{b-a}{2}\right) - f(t)$$

   s'annule en au moins un point de l'intervalle $[a; \frac{a+b}{2}]$.
2. *Application :* une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 minutes pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 1.6

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que f admet un maximum (c'est à dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leq f(a)$).

Exercice 1.7

Soit f et g deux fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continues et telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \ \exists x \in [0,1], \ f(x) = \lambda g(x).$$

Exercice 1.8 (Fonction croissante sur un intervalle)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $I =]a, b[$. Soit f une application strictement croissante de I dans $\mathbb{R}$. On pose $A = \{f(x),\ x \in I\}$, $\alpha = \inf A$ et $\beta = \sup A$. (Si A est non minorée, on pose $\inf A = -\infty$. Si A est non majorée, on pose $\sup A = +\infty$.)

1. Montrer que $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ (on pourra distinguer les cas $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha = -\infty$). Montrer que $\lim_{x\to b} f(x) = \beta$.
2. Soit $c \in I$. Montrer que f admet une limite à droite en c, notée $f_d(c)$, et une limite à gauche en c, notée $f_g(c)$. Montrer que $f_g(c) \le f(c) \le f_d(c)$.
3. On suppose que $f_d(c) = f_g(c)$ pour tout $c \in I$ (avec f_d et f_g définies à la question précédente). Montrer que f est continue et que f est bijective de $]a, b[$ dans $]\alpha, \beta[$.

Exercice 1.9 (Toute fonction continue injective sur un intervalle est monotone)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et injective. Montrer que f est monotone. [Indication : utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.]

Exercice 1.10 (min et max)

1. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)\ , \qquad \text{et} \qquad \min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)\ .$$
2. Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les applications $f \top g$ et $f \perp g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$(f \top g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad (f \perp g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$
Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont continues en a. Montrer que $f \top g$ et $f \perp g$ sont continues en a.

Exercice 1.11 (Point fixe)

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et vérifiant
$$\forall x_1, x_2 \in [0, 1],\ |x_1 - x_2| \le |f(x_1) - f(x_2)|\ .$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que $\{f(0), f(1)\} = \{0, 1\}$.
3. Montrer que f est surjective.
4. Montrer que f admet un point fixe.

2 Exercices supplémentaires

Exercice 2.1 (Continuité uniforme)

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur I si
$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I,\ (|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

1. Montrer que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \sqrt{|x - y|}$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$. En déduire que l'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.
3. Montrer que l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

Exercice 2.2 (Convexité)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe, c'est à dire que
$$f(tx + (1 - t)y) \le tf(x) + (1 - t)f(y)$$
pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

1. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que
$$\beta x \leq f(x) - f(0) \leq \alpha x \ .$$
Indication : utiliser le fait que $x = t1 + (1-t)0$, avec $t = x$, et $0 = tx + (1-t)(-1)$, avec $t = \frac{1}{1+x}$.
2. Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que
$$|f(x) - f(0)| \leq \gamma |x| \ .$$
En déduire que f est continue en 0.
3. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.3 (Lemme de la corde universelle de Paul Lévy)

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, on pose
$$g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \ .$$

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $x_0, x_1 \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ tel que $g(x_0) \leq 0$ et $g(x_1) \geq 0$.
3. Monter qu'il existe $x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ tel que $f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$.

3 Problème : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f, et montrer que f est continue sur $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer que f est impaire sur $\mathcal{D}_f$, et que pour tout $x \in \mathcal{D}_f \backslash \{0\}$, on a $f(1/x) = f(x)$.
3. Montrer que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \ , \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \ .$$
4. Montrer que
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = -1 \ , \qquad \lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to-\infty} xf(x) = -1 \ .$$
5. Montrer que
$$\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty \ , \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = -\infty \ .$$
6. Sans calculer la dérivée, montrer que f est strictement décroissante sur $[-1,1]$ (on pourra utiliser la monotonie stricte de la fonction ln). En déduire que f est strictement croissante sur $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$.
7. En utilisant tous les résultats des questions précédentes, donner une représentation du graphe de f.
8. On note φ la restriction de f à l'intervalle $]-1,1[$. Montrer que φ est une bijection de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.
9. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, l'équation $f(x) = a$ possède exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
10. On considère l'application $\varphi^{-1} \circ f$, de $\mathcal{D}_f$ dans $]-1,1[$. Donner les expressions de $\varphi^{-1} \circ f(x)$ selon que x appartient ou non à $]-1,1[$.
11. Montrer que $\varphi^{-1} \circ f$ est prolongeable par continuité en $x = -1$ et en $x = 1$.