Suites récurrente linéaire d'ordre 2

PIEP post-PACES

Exercice : Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, on se propose de déterminer toutes les suites réels vérifiant la relation de récurrence R suivante :

$$R : \qquad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

(1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant R et λ, μ deux réels. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$ vérifie R.

Soit $P(X)$ le polynôme :

$$P(X) = X^2 - aX - b$$

(2) On suppose que P admet deux racines distinctes r_1, r_2 réels.
- (2a) Montrer que $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites solution de R
- (2b) Soit u_0, u_1 deux réels, déterminer en fonction de r_1, r_2, u_0, u_1 les réels λ, μ tel que :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases}$$

- (2c) En déduire que toute solution est de la forme $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$

(3) On suppose maintenant que P admet une racine double r.
- (3a) Montrer que $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont solutions de R
- (3b) Soit u_0, u_1 deux réels, déterminer en fonction de r_1, r_2, u_0, u_1 les réels λ, μ tel que :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda \\ u_1 = \lambda r + \mu r \end{cases}$$

- (3c) En déduire que toute solution est de la forme $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$

(4) On suppose enfin que P admet une racines complexe conjuguée : $z_1 = \rho e^{i\theta}$, $z_2 = \rho e^{-i\theta}$.
- (3a) Montrer que $(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites complexes solution de R
- (3c) En déduire que toute solution réel est de la forme $u_n = \rho^n(\lambda\cos(\theta n) + \mu\sin(\theta n))$