Examen OMI : corrigé

Durée : 1h30

PEIP classe double cursus

Novembre 2021

Exercice 1 : prolongement par continuité

Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+2y^2}\right), \qquad g(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Elles sont continues par composition et produit de fonctions continue. En passant en coordonnés polaires, $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ où $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times [0, 2\pi[$, il vient

$$f(r,\theta) = r^2 \sin\left(\frac{1}{r^2(1+\sin^2(\theta))}\right), \qquad g(r,\theta) = \frac{r\sin(\theta)}{r} = \sin(\theta).$$

Puisque $-1 \leq \sin(.) \leq 1$, on a $|f(r,\theta)| \leq r^2 \to 0$. On peut prolonger f en la fonction

$$\tilde{f} \colon (x,y) \mapsto \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

qui est alors continue sur $\mathbb{R}^2$. On ne peut pas prolonger g par continuité car par exemple

$$0 = \lim_{r\to 0} g(r,0) \neq \lim_{r\to 0} = 1 g(r,\pi/2).$$

Exercice 2 : optimisation

(1) En dérivant, il vient

$$\nabla f_{(x,y)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x(1-y), y-x^2).$$

On a donc

$$\nabla f_{(x,y)} = 0 \iff \begin{cases} 2x(1-y) = 0 \\ y - x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 1 \\ y \geq 0 \text{ et } x = \pm\sqrt{y} \end{cases}$$

Si $x = 0$ alors $y = 0$, sinon $y = 1$ et dans ce cas $x = \pm 1$. Finalement, les points critiques sont les points

$$\{(0,0), (1,1), (-1,1)\}.$$

(2) En dérivant une seconde fois, il vient

$$Hf_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x, \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-y) & -2x \\ -2x & 1 \end{bmatrix}.$$

Remarque : pour éviter les erreurs de calculs, il est bien de calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ puis de s'assurer que ces quantités sont bien égales (Théorème de Schwarz).

(3) Au point critique $(x_0, y_0) = (0, 0)$ la hessienne est

$$Hf_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pour toute directions $(x, y) \neq (0, 0)$ on a

$$\langle (x,y) | Hf(x,y) \rangle = \langle (x,y) | (2x, y) \rangle = 2x^2 + y^2 > 0,$$

c'est donc un minimum local. Au point $(x_0, y_0) = (1, 1)$ la hessienne est

$$Hf_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

qui ne correspond pas à un extremum local car la quantité

$$\langle (x,y) | Hf(x,y) \rangle = \langle (x,y) | (-2y, -2x + y) \rangle = -4xy + y^2$$

change strictement de signe. C'est donc un point col (ou point selle). Même constat pour le point $(-1, 1)$.

Exercice 3 : volume d'un cône tronqué

(1) Dans le repère $R_O = (O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$, un point (x, y, z) de l'espace appartient au cône tronquée si il est contenu entre les plans délimités par les deux disques, soit $0 \leq z \leq h$, et si sa distance par rapport à l'axe $0, \overrightarrow{z}$ est plus petite que $R(z)$. La fonction $R(z)$ vérifie $R(0) = R_1$, $R(h) = R_2$ et varie linéairement, donc

$$\mathcal{C} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | a \leq z \leq b,\ 0 \leq x^2 + y^2 \leq \left((R_1 + (R_2 - R_1) \frac{z}{h} \right)^2 \right\}.$$

(2) Le volume du cône tronqué est :

$$V_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h \left(\int_{x^2+y^2 \leq R^2(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \pi \int_0^h R(z)^2 \mathrm{d}z.$$

Où nous avons utilisé que l'air d'un cercle de rayon R est πR^2. On pourrait continuer le calcul en remplaçant $R(z)$ pour obtenir le résultat. On peut aussi remarquer que le volume d'un cône tronqué est la différence du volume de deux cônes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, soit

$$V_{\mathcal{C}} = V_{\mathcal{C}_1} - V_{\mathcal{C}_2} = \frac{\pi}{3}(h_1 R_1^2 - h_2 R_2^2).$$

Pour que la différence des deux cônes délimite bien le volume $\mathcal{C}$, il faut (par application de Thalès)

$$\frac{h_2}{R_2} = \frac{h_1}{R_1}, \qquad h = h_1 - h_2$$

$$\iff h_2 = h_1 \frac{R_2}{R_1}, \qquad h = h_1(1 - \frac{R_2}{R_1}).$$

Donc

$$V_{\mathcal{C}} = \frac{\pi}{3}(h_1 R_1^2 - h_1 \frac{R_2}{R_1} R_2^2) = \frac{\pi}{3} h_1 (R_1^2 - \frac{R_2^3}{R_1}) = \frac{\pi}{3} \frac{h}{1 - \frac{R_2}{R_1}} (R_1^2 - \frac{R_2^3}{R_1}) = \frac{\pi h}{3} \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2}.$$

Finalement

$$V_{\mathcal{C}} = \frac{\pi h}{3} \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2} = \frac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2).$$

Remarque : il est facile de vérifier notre résultat. Pour $R_1 = R_1 = R$, on trouve $\pi h R^2$ le volume d'un cylindre, et pour $R_2 = 0$, on trouve $\frac{\pi h R^2}{3}$ le volume d'un cône.

(4) La masse est donné par

$$M_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \rho(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z.$$

Puisque $\rho(x, y, z) = \rho(z) = \rho_0(1 - \frac{z}{2h})$, on a

$$M_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \rho_0 \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z - \frac{\rho_0}{2} \int_{\mathcal{C}} \frac{z}{h} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \rho_0 V_{\mathcal{C}} - \frac{\rho_0 \pi}{2} \int_0^h R(z)^2 \frac{z}{h} \mathrm{d}z.$$

Calculons d'abord l'intégrale :

$$\begin{aligned}
&\int_0^h R(z)^2 \frac{z}{h} \mathrm{d}z = \int_0^h \left(R_1 + (R_2 - R_1)\frac{z}{h}\right)^2 \frac{z}{h} \mathrm{d}z \\
&= \int_0^h \left(R_1^2 \frac{z}{h} + 2R_1(R_2 - R_1)\frac{z^2}{h^2} + (R_2 - R_1)^2 \frac{z^3}{h^3}\right) \mathrm{d}z \\
&= R_1^2 \frac{h^2}{2h} + 2R_1(R_2 - R_1)\frac{h^3}{3h^2} + (R_1^2 - 2R_1R_2 + R_2^2)\frac{h^4}{4h^3} \\
&= h\left(R_1^2(1/2 - 2/3 + 1/4) + R_1R_2(2/3 - 2/4) + R_2^2(1/4)\right) \\
&= \frac{h}{12}\left(R_1^2 + 2R_1R_2 + 3R_2^2\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$M_{\mathcal{C}} = \frac{\rho_0 \pi h}{3}(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2) - \frac{\rho_0 \pi}{2} \frac{h}{12} \left(R_1^2 + 2R_1 R_2 + 3R_2^2\right).$$

Finalement

$$M_{\mathcal{C}} = \frac{\rho_0 \pi h}{24} \left(7R_1^2 + 6R_1 R_2 + 5R_2^2\right).$$

Remarque : Encore une fois, il est possible de vérifier notre résultat. Dans le cas du cylindre, $R_1 = R_1 = R$, la masse volumique moyenne est $\tilde{\rho} = 3\rho_0/4$. Dans ce cas on a

$$M_{\mathcal{C}} = \frac{\rho_0 \pi h}{24} (7 + 6 + 5) R^2 = \frac{3}{4} \rho_0 \pi h R^2 = \tilde{\rho} V$$

(4) Par les symétries, le centre de masse se trouve sur l'axe $(0, \overrightarrow{z})$, donc $x_0 = y_0$. Il reste à calculer z_0. La formule nous donne

$$z_0 = \frac{1}{M_{\mathcal{C}}} \int_{\mathcal{C}} z\rho(z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\rho \pi}{M_{\mathcal{C}}} \int_0^h zR^2(z)(1 - \frac{z}{2h})\mathrm{d}z.$$

En développant

$$\int_0^h zR^2(z)(1 - \frac{z}{2h})\mathrm{d}z = h \int_0^h R^2(z)\frac{z}{h}\mathrm{d}z - \frac{h}{2} \int_0^h R^2(z)\frac{z^2}{h^2}\mathrm{d}z.$$

On sait d'après la question précédente que

$$\int_0^h R(z)^2 \frac{z}{h}\mathrm{d}z = \frac{h}{12} \left(R_1^2 + 2R_1 R_2 + 3R_2^2\right).$$

Calculons l'intégrale manquante

$$\begin{aligned}
&\int_0^h R(z)^2 \frac{z^2}{h^2}\mathrm{d}z = \int_0^h \left(R_1 + (R_2 - R_1)\frac{z}{h}\right)^2 \frac{z^2}{h^2}\mathrm{d}z \\
&= \int_0^h \left(R_1^2 \frac{z^2}{h^2} + 2R_1(R_2 - R_1)\frac{z^3}{h^3} + (R_2 - R_1)^2 \frac{z^4}{h^4}\right) \mathrm{d}z \\
&= R_1^2 \frac{h^3}{3h^2} + 2R_1(R_2 - R_1)\frac{h^4}{4h^3} + (R_1^2 - 2R_1 R_2 + R_2^2)\frac{h^5}{5h^4} \\
&= h\left(R_1^2(1/3 - 2/4 + 1/5) + R_1 R_2(2/4 - 2/5) + R_2^2(1/5)\right) \\
&= \frac{h}{30}\left(R_1^2(10 - 15 + 6) + R_1 R_2(15 - 12) + R_2^2 6\right) \\
&= \frac{h}{30}\left(R_1^2 + 3R_1 R_2 + 6R_2^2\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^h zR^2(z)(1 - \frac{z}{2h})\mathrm{d}z = \frac{h^2}{12}\left(R_1^2 + 2R_1 R_2 + 3R_2^2\right) - \frac{h^2}{60}\left(R_1^2 + 3R_1 R_2 + 6R_2^2\right).$$

$$z_0 = \frac{\rho\pi}{M_{\mathcal{C}}} \int_0^h zR^2(z)(1-\frac{z}{2h})\mathrm{d}z = \frac{\rho\pi}{M_{\mathcal{C}}}\frac{h^2}{60}\left(4R_1^2 + 7R_1R_2 + 9R_2^2\right).$$

Finalement :

$$z_0 = \frac{\rho\pi\frac{h^2}{60}\left(4R_1^2 + 7R_1R_2 + 9R_2^2\right)}{\frac{\rho_0\pi h}{24}\left(7R_1^2 + 6R_1R_2 + 5R_2^2\right)} = h\frac{2}{5}\frac{\left(4R_1^2 + 7R_1R_2 + 9R_2^2\right)}{\left(7R_1^2 + 6R_1R_2 + 5R_2^2\right)}.$$

Remarque : Vérifions notre résultat. Dans le cas du cylindre, si la masse est linéairement répartie, un petit calcul montre que le centre de masse est alors en $z_0 = 4h/9$,

$$z_0 = \frac{1}{\frac{3\rho_0\pi R^2}{4}} \int_0^h \rho_0\pi R^2 z(1-\frac{z}{2h}) = \frac{4}{3}h(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{3}) = h\frac{4}{9}.$$

Avec notre formule,

$$z_0 = h\frac{2}{5}\frac{20}{18} = h\frac{4}{9}.$$

(5) Le cône tronqué flotte si sa masse est plus petite que celle d'un volume équivalent d'eau, c'est a dire

$$\rho_e V_{\mathcal{C}} \iff \frac{\rho_0\pi h}{24}\left(7R_1^2 + 6R_1R_2 + 5R_2^2\right) \leq \rho_e\frac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2).$$

Sans plus d'information, on ne peut donc pas dire plus que la condition

$$\text{Le cône tronqué flotte} \iff \frac{\rho_0}{\rho_e} \leq \frac{6(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)}{(7R_1^2 + 6R_1R_2 + 5R_2^2)}.$$

$\star$ Bonus $\star$

Si l'on pense $x = (x_1, \ldots x_n)$ comme un point de $\mathbb{R}^n$, il s'agit de montrer que ce point est en fait $j = (1, \ldots, 1)$.

$$\mathrm{dist}(x,j)^2 = ||x-j||^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - 1)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n 1 = n - 2n + n = 0.$$