Portail René Descartes, Aix-Marseille Université

Analyse 1, Fiche d'exercices 1

Année 2022-23, semestre 2

1 Propriétés simples, exemples, modélisation

Exercice 1.1

1. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par son terme général $u_n = f(n) = n^2 + n - 1$ (pour $n \geq 0$). Déterminer de deux façons différentes le sens de variation de la suite $(u_n)_n$.
2. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_n = -u_{n-1}^2 + 3u_{n-1} - 2$. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 1.2

Soient les suites définies, pour tout $n \geq 1$, par $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$.

1. Vérifier qu'elles sont bornées.
2. Montrer que la suite quotient $(u_n/v_n)_n$ n'est pas bornée.

Exercice 1.3

1. Montrer que si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de premier terme a et de raison r, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + nr$.
2. Soit $(u_n)_n$ est une suite géométrique de premier terme a et de raison r
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = ar^n$.
   b) On suppose à partir de maintenant que $a, r \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
   c) Montrer que $\big(\ln(u_n)\big)_n$ est une suite arithmétique de premier terme $\ln(a)$ et de raison $\ln(r)$.

Exercice 1.4

Un magazine est vendu uniquement par abonnement. Le modèle économique prévoit qu'il y ait 1800 nouveaux abonnés chaque année et que d'une année sur l'autre, 15% des abonnés ne se réabonnent pas.

En 2013, il y avait 8000 abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers d'abonnés prévus l'année $2013 + n$.

1. Etablir que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0.85u_n + 1.8$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 12$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 1.5

1. Le taux de natalité annuel dans une ville est de 4% alors que le taux de mortalité annuel est de 5%. Sachant que la population en 2000 était de 2 millions d'habitants, au bout de combien de temps cette ville n'aura-t'elle plus d'habitants ?
2. Au bout de combien de temps la population aura-t-elle doublé si le taux de natalité annuel est de 5% alors que le taux de mortalité annuel est de 4% ?

3. On suppose de plus que chaque année, 1000 habitants quittent la ville, reprendre les questions ci-dessus.

Exercice 1.6

Un magasin de logiciels de jeux décide de lancer la commercialisation d'un nouveau produit. Pour cela, il planifie sur trois ans ses objectifs trimestriels de prix de vente en se basant sur la loi de l'offre et de la demande.

On désigne par v_n l'indice du prix de vente lors du n-ième trimestre. L'indice de départ est noté v_0. On a $v_0 = 100$ et $v_{n+1} = 4v_n/5 + 28$.

1. On pose, pour tout $n \geq 0$, $u_n = v_n - \alpha$.
   a) Déterminer la valeur de α pour que la suite u soit géométrique de raison $q = 4/5$. Calculer u_0.
   b) Exprimer u_n en fonction de n, puis v_n en fonction de n.
2. On désigne par d_n l'indice de la demande lors du n-ième trimestre. Sachant que
$$d_n = \frac{750}{7} - \frac{5}{7}v_n$$
   calculer d_0 et exprimer d_n en fonction de n.
3. Calculer les valeurs des deux indices au bout des trois ans (arrondir à l'unité).

2 Convergence, limites

Exercice 2.1

Écrire avec les quantificateurs la définition d'une suite divergente.

Exercice 2.2

Montrer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire à partir d'un certain rang.

Exercice 2.3

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n^2}$$
n'est pas convergente.

Exercice 2.4

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ, alors les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent aussi vers ℓ.
2. Si les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, alors $(u_n)_n$ aussi.
3. Si les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes et de même limite, alors $(u_n)_n$ aussi.

Exercice 2.5

En appliquant la définition de la convergence, montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 ,$$
On précisera le nombre N_ε qui intervient dans cette définition.

Exercice 2.6

Les suites suivantes, sont-elles monotones ? bornées ? convergentes ?
$$(i)\ a_n = n^{(-1)^n}, \qquad (ii)\ b_n = \cos\frac{n\pi}{2}, \qquad (iii)\ c_n = \sin\frac{n\pi}{2}, \qquad (iv)\ d_n = \cos\frac{\pi}{n} ,$$
$$(v)\ e_n = \frac{n^2+2n+1}{n^2-3}, \qquad (vi)\ f_n = \frac{n}{2^n}, \qquad (vii)\ g_n = \frac{2^n}{n!}, \qquad (viii)\ h_n = \frac{n!}{n^n} .$$

Exercice 2.7

A partir de la définition de la limite d'une suite, démontrer les égalités suivantes :

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0\ , \qquad (ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2, \qquad (iii)\ \lim_{n\to\infty} \ln(\ln n) = +\infty\ .$$

Exercice 2.8

Les suites suivantes sont-elles convergentes ?

$$(i)\ a_n = (-1)^n n, \qquad (ii)\ b_n = 1 + \frac{n}{n+1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \qquad (iii)\ c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n}\ .$$

Exercice 2.9

1. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, alors $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\ell|$.
2. Montrer que si pour tout n, $a_n \neq 0$, et si de plus $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Exercice 2.10

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\ .$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}$. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 2.11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \frac{\sin(1)}{n^2} + \frac{\sin(2)}{n^2} + \frac{\sin(3)}{n^2} + \cdots + \frac{\sin(n)}{n^2}\ .$$

En encadrant u_n, démontrer que la suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 2.12 (La constante d'Apéry)

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}\ .$$

1. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_n$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.
3. Justifier que la suite $(u_n)_n$ converge. Que peut-on dire de sa limite ?

Exercice 2.13

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Démontrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
2. En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite.
3. En calculant u_{10} et v_{10} donner un encadrement de la limite commune de ces deux suites.

Exercice 2.14

Considérons deux suites suivantes :

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ .$$

1. Montrer que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \frac{n+2}{n+1}\ .$$

2. Appliquer l'inégalité $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour en déduire que la suite (a_n) est croissante.
3. Par un raisonnement analogue, démontrer que (b_n) est une suite décroissante. Justifier le fait que (b_n) converge.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ et en déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.
5. Notons $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = e$ (c'est une des définitions de la constante e qui est à la base de la définition de la fonction exponentielle). Justifier que pour tout $n \geq 1$ nous avons
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

Exercice 2.15

Soit α un réel n'étant pas un multiple entier de π. Le but de cet exercice est de montrer que la suite $u_n = \sin(n\alpha)$ ne converge pas. Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.

1. On pose $v_n = \cos(n\alpha)$. Trouver une relation reliant u_{n+1}, u_n et v_n. En déduire une expression de la limite $\lim_{n\to\infty} v_n$ en fonction de ℓ.
2. Trouver une relation reliant u_{n-1}, u_n, v_n et en déduire une autre expression de la limite $\lim_{n\to\infty} v_n$.
3. En comparant ces deux valeurs, démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent toutes deux vers 0.
4. Compte tenu du fait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, trouver une contradiction et conclure.

3 Vrai ou faux

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si A est minorée, alors A possède une borne inférieure.
2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si $x \leq \sup(A)$ alors $x \in A$.
3. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, on note $|A| = \{|x|,\ x \in A\}$. Si A est majorée, alors $|A|$ possède une borne supérieure.
4. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, on note $|A| = \{|x|,\ x \in A\}$. $|A|$ possède toujours une borne supérieure.
5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $(\forall \varepsilon > 0,\ a < \epsilon)$, alors $a < 0$.
6. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $(\forall \varepsilon > 0,\ a > 1-\epsilon)$, alors $a > 1$.
7. Toute suite croissante et minorée tend vers $+\infty$
8. Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.
9. Toute suite croissante et bornée converge.
10. Une suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
11. Si la suite des décimales du réel x converge, alors x est un nombre rationnel.
12. Si $r \leq 1$ alors $(\cos(n)r^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
13. Si $r < 1$ alors $(\cos(n)r^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
14. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 1 alors $(\cos(n)u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
15. Si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ou vers $-\ell$.
16. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell|$.
17. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors la suite $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
18. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, alors la suite $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
19. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, alors la suite $(u_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
20. Si pour tout n, $u_n \geq \sqrt{n}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
21. Si pour tout n, $u_n \geq -\sqrt{n}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.