| | |
|---|---|
| Université d'Aix-Marseille | PEIP |
| PEIP2 Semestre 3 | 2021-2022 |

**UE M5 - Séries et calcul intégral**

**Notions de cours (et démonstrations) exigibles pour l'examen.**

# 1 Séries :

1. Condition nécessaire de convergence d'une série (Pas d'équivalence !)
2. Connaître parfaitement les séries de référence (Riemann, géométrique, télescopique), savoir déterminer leur nature et savoir calculer, en cas de convergence, la somme de séries géométriques ou télescopiques.
3. Divergence de la série harmonique.
4. Savoir utiliser le critère de Cauchy pour une série (suite des sommes partielles associée de Cauchy).
5. Savoir démontrer le premier critère de comparaison et savoir l'utiliser
6. Savoir déterminer l'équivalent d'un terme général et savoir démontrer et utiliser parfaitement le critère des équivalents pour les séries.
7. Savoir démontrer et utiliser les règles de Riemann (notamment savoir passer de l'écriture d'une limite à des inégalités valables à partir d'un certain rang).
8. Savoir démontrer et utiliser le critère de D'Alembert et le critère de Cauchy.
9. Savoir montrer que l'absolue convergence d'une série implique la convergence.
10. Exemple de série semi-convergente : la série harmonique alternée à connaître avec la série plus générale $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ où $x \in \mathbb{R}$.
11. Séries alternées et démonstration du critère de Leibniz.
12. Savoir appliquer la technique du dév. limité et la structure d'espace vectoriel des séries convergentes pour étudier la nature d'une série.

# 2 Intégrales :

1. Définition d'une fonction en escalier sur $[a, b]$ et de son intégrale.
2. Connaître la structure d'espace vectoriel des fonctions en escalier sur $[a, b]$ et les principales propriétés de l'intégrale sur cet espace (propriétés du produit, valeur absolue, positivité, croissance, Chasles ..) La seule démonstration admise étant celle de la relation de Chasles.

3. Savoir caractériser l'intégrabilité au sens de Riemann d'une fonction bornée sur un segment $[a, b]$ par une phrase à quantificateurs (en $\epsilon$) et savoir en déduire des phrases équivalentes (avec des suites).

4. Savoir démontrer qu'une fonction monotone est intégrable sur $[a, b]$ et application à des exemples.

5. Connaître la structure d'espace vectoriel des fonctions intégrables sur $[a, b]$ et les principales propriétés de l'intégrale sur cet espace (propriétés de linéarité, stabilité par le produit (démo admise), propriété de la valeur absolue, positivité, croissance, Chasles (démo admise)).

6. Savoir démontrer qu'une fonction continue est intégrable sur $[a, b]$ (avec utilisation de l'uniforme continuité en particulier pour montrer le résultat d'approximation uniforme d'une fonction continue par une fonction en escalier sur $[a, b]$).

7. Définition des sommes de Riemann associées à une fonction intégrable sur $[a, b]$ et à une subdivision pointée de $[a, b]$ et savoir démontrer la convergence de ces sommes de Riemann vers l'intégrale de $f$ sur $[a, b]$ dans le cas où $f$ est continue sur $[a, b]$.

8. Inégalité de Cauchy-Schwarz

9. Savoir démontrer qu'une fonction continue et positive sur $[a, b]$ est nulle si et seulement si son intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est nulle.

10. Intégration par parties et formules de linéarisation.

11. Connaître les primitives de base.

12. Savoir démontrer que si f est intégrable sur [a,b] alors la fonction F intégrale fonction de sa borne supérieure est continue sur [a,b].

13. Savoir démontrer que si f est continue sur [a,b] alors la fonction F intégrale fonction de sa borne supérieure est dérivable sur [a,b] et sa dérivée F' = f.

14. Savoir utiliser les changements de variables.