UE M5 - Séries et calcul intégral

TD Intégrales impropres

Le but du TD n'est pas de recopier passivement la correction mais de participer activement à la résolution des exercices proposés !

Exercice 1

Un Vrai-Faux justifié pour revoir rapidement quelques résultats du cours : Que pensez vous des assertions suivantes ? Justifiez soit en donnant une démonstration soit en donnant un contre-exemple.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ diverge.
2. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ converge.
3. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^{\frac{1}{2}}}dx$ diverge.
4. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+\sin^2(x))}dx$ converge.

Exercice 2

Par le calcul, étudier l'existence des intégrales impropres suivantes :

$$\int_0^1 \ln(x)dx \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)dx \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx \text{ où } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } a < b$$

Exercice 3

1. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}dx$ converge puis calculer sa valeur.
2. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$ converge puis calculer sa valeur.

EXERCICE 4

Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes et que chacune d'elle est nulle:

$$\begin{cases} I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1}dx \\ \\ I_2 = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx \end{cases}$$

EXERCICE 5

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln\left(\cos(\frac{1}{x})\right)}{\ln(x)}dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4+\cos^2(x)} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sin^2(x)}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(x)}}{\sqrt{x}}dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \qquad \int_0^{1} \frac{\ln(x)}{1-x}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+x^2e^{-x}} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(1+x^2)}dx \qquad \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x)-\arctan(x)}{x}dx$$

EXERCICE 6

Intégrales de Bertrand : On peut avoir à utiliser une échelle de comparaison plus fine que l'échelle des puissances.

1. Etudier la nature de
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}dt \text{ où } (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

2. Pour $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, montrer que l'intégrale de Bertrand
$$\int_0^{1/e} \frac{1}{t^\alpha(|\ln(t)|)^\beta}dt$$
converge si et seulement si $(\alpha<1)$ ou $((\alpha=1)$ et $(\beta>1))$.

Exercice 7

Pour quelles valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ les intégrales suivantes sont elles convergentes?

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^\alpha} dx \qquad \int_0^1 \frac{\ln(1 + x^\alpha \sin(x))}{x^2} dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}\sqrt{1+x}}{x^2} dx$$

Exercice 8

Intégrale de Fresnel :

1. Etablir à l'aide d'une intégration par parties la convergence de
$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du$$
2. En déduire la nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(t^2) dt$.

Exercice 9

Soit f continue sur $[1, +\infty[$ possédant une limite l en $+\infty$. Montrer que si l'intégrale de f est convergente sur $[1, +\infty[$ alors la limite de f est nécessairement nulle.

Exercice 10

En utilisant le critère d'Abel, étudier la convergence des intégrales impropres suivantes:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x \ln(x)} dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha (1 + x^2)} dx \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$