Partiel Analyse 1

PEIP post-PACES

Décembre 2019

On prêtera une attention particulière à la rédaction. Les calculatrices sont interdites. Tout résultat sans justification sera pénalisé. Des schémas illustrant vos démonstrations sont encouragés.

Exercice 1 : calculs

(1) Calculer les sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

$$(a) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{2^{3i-1}} \qquad\qquad (b) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1} 3^k$$

(2) Calculer les limites des suites suivantes :

$$(a) \qquad u_n = \frac{8^n}{n!} \qquad\qquad (b) \qquad v_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$$

(3) Calculer les limites des fonctions suivantes :

$$(a) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \qquad\qquad (b) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{(x-\sin x)(x+\cos(x))}{x^2}$$

(4) On considère :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}, \qquad n \geq 2$$

(a) Déterminer α, β tel que $\frac{1}{X^2-1} = \frac{\alpha}{X+1} + \frac{\beta}{X-1}$.

(b) En déduire par somme télescopique une expression de S_n, puis déterminer sa limite.

Exercice 2 : suites récurrentes

On se propose d'étudier la suite : $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u\colon \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$.

Partie 1 : étude de la limite

(a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $I = [1, 3]$. Montrer que I est stable par f, c'est a dire $f(I) \subset I$.

On pose $v = (v_n), w = (w_n)$ les suites définies par $v_n = u_{2n}$, $w_n = u_{2n+1}$. On a alors :

$$v\colon \begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases} \qquad w\colon \begin{cases} w_0 = u_1 \\ w_{n+1} = g(w_n) \end{cases}$$

avec $g(x) = f(f(x)))$.

(b) Étudier le sens de variation de g sur I. On montrera que $g'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$

(c) Déduire du sens de variation de g que les suites (v_n) et (w_n) sont monotones. En calculant u_2, montrer que v_n est croissante. En remarquant que $w_n = f(v_n)$, en déduire que (w_n) est décroissante.

(c) En déduire que ces deux suites sont convergentes. On note l_v, l_w leurs limites respectives.

(d) En résolvant l'équation $g(x) = x$, déterminer l_v, l_w

(e) En déduire la limite de (u_n) que l'on notera l.

Partie 2 : étude de la vitesse de convergence

(a) Montrer que $\forall x \in I, |g'(x)| \leq \frac{4}{9}$

(b) En déduire que $\forall x, y \in I, |g(x) - g(y)| \leq \frac{4}{9}|x - y|$

(c) En déduire que pour tout n on a $|v_{n+1} - l_v| \leq \frac{4}{9}|v_n - l_v|$, ainsi que $|w_{n+1} - l_w| \leq \frac{4}{9}|w_n - l_w|$.

(d) En vérifiant que $|v_0 - l_v| \leq 1$, $|w_0 - l_w| \leq 1$, en déduire par récurrence que $|v_n - l_v| \leq (\frac{4}{9})^n$, ainsi que $|w_n - l_w| \leq (\frac{4}{9})^n$

(e) Pour $\epsilon > 0$ donné, résoudre l'inégalité $(\frac{4}{9})^n \leq \epsilon$. En déduire, en fonction de ϵ un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - l| \leq \epsilon$

Exercice 3 : une généralisation du théorème de Rolle

(1) Rappeler l'énoncé du théorème de Rolle.

(2) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

On pose g la fonction définie par :

$$g\colon \begin{cases}]-\pi/2; \pi/2[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(\tan(x)) \end{cases}$$

(a) Montrer que g admet un prolongement par continuité $\tilde{g}$ sur l'intervalle fermé $[-\pi/2; \pi/2]$.

(b) En déduire que $\tilde{g}$ ainsi prolongé vérifie les hypothèses du théorème de Rolle

(c) Conclure que la dérivée de f s'annule en un point.

Exercice 4 : inégalité de Cauchy–Schwarz

Soit $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, deux fonctions continues. Le but de l'exercice est de démontrer l'inégalité suivante :

$$(*) : \qquad \left| \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t}$$

(1) Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. Montrer que P est de signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b^2 \leq 4ac$.

On considère la fonction suivante :

$$\phi(x) = \int_a^b \big(f(t) + xg(t)\big)^2 \mathrm{d}t$$

(2) Justifier que ϕ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est positive.

(2) En développant $\big(f(t) + xg(t)\big)^2$, montrer que ϕ est un polynôme du second degré, on exprimera ses coefficients à l'aide des quantités :

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t, \qquad \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t, \qquad \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t$$

(3) En considérant le discriminant du polynôme ϕ, déduire $(*)$