TD révision partiel

PIEP post-PACES

–

Exercice 1 : questions en vrac

(1) Calculer les sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

$$(a) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$$

$$(b) \quad 301 + 304 + 307 + \dots 739 + 742$$

$$(c) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} 3^{k+1}$$

(2) Démontrer que $n! \geq 2^n$ pour tout entier $n \geq 4$.

(3) Soit x un élément d'un ensemble E. Déterminer $\mathcal{P}(\{x\})$ puis $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{x\}))$.

(4) Soit P, Q deux assertions. Déterminer en justifiant une assertion A tel que :

$$(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non}P \implies A)$$

(5) Pour chaque assertion, écrire sa négation puis présicer si l'assertion est vraie.

$$P_a : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m^2 > 2017n$$

$$P_b : \quad \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in [0, \infty[, -x < y < x$$

$$P_c : \quad \forall x \in \mathbb{R}, (x^2 > 9 \implies x > 3)$$

Exercice 2 : suites numériques

(1) On considère la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1 + 1/2)(1 + 1/4) \dots (1 + 1/2^n)$$

(a) On rappel que $\ln(1 + x) \leq x$. Montrer que $\ln(u_n) \leq 2$

(b) Montrer que u est majoré.

(c) En déduire que u converge.

(2) Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$$v\colon \begin{cases} v_0 = x \\ v_{n+1} = \sin(v_n) \end{cases} \qquad x \in [0, \pi/2]$$

(a) Soit $f(x) = \sin(x)$. Montrer que $[0, \pi/2]$ est stable par f. En déduire que $\forall n, v_n \in [0, \pi/2]$

(b) Montrer que $f(x) - x \leq 0$ dans $[0, \pi/2]$. En déduire la monotonie de v.

(c) Montrer qu'il existe une unique solution à l'équation $f(x) = x$ dans $[0, \pi/2]$.

(d) Démontrer que v converge et préciser sa limite.

(3) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ une suite quelconque et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ définie par :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_1 + u_2 + \ldots u_n}{n}$$

(a) Rappeler la définition de $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$.

(b) On suppose que u converge vers $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Démontrer que v_n converge vers l.

(c) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3 : fonction et continuité

(1) On pose $f\colon x \mapsto (x+3)e^x$

(a) Montrer que f est bijective sur $I = \mathbb{R}^+$ dans J à préciser.

(b) Justifier que f^{-1} est dérivable en $x = 3$ et préciser $(f^{-1})'(3)$.

(2) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_1, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = l_2, \qquad l_1, l_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{On pose } g\colon \begin{cases}]-\pi/2; \pi/2[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(\tan(x)) \end{cases}$$

(a) Montrer que g admet un prolongement par continuité $\tilde{g}$ sur l'intervalle fermé $[-\pi/2; \pi/2]$.

(b) En déduire que $\tilde{g}$ est bornée et atteint ses bornes.

(c) La fonction f est-elle bornée ? Atteint-elle ses bornes ?

(3) Soit $x > 0$, on se propose de calculer $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

(a) Montrer que pour tout réel x positif on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

(b) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln(1 + \dfrac{x}{n}) = x$.

(c) Conclure.