Examen Analyse 1
Sujet B

PIEP post-PACES

Janvier 2020

On prêtera une attention particulière à la rédaction. Les calculatrices sont interdites. Tout résultat sans justification sera pénalisé. Des schémas illustrant vos démonstrations sont encouragés.

Exercice 1 : questions de cours et calculs

(1) Traduire avec les symboles $\forall, \exists$ l'assertion : la suite $(u_n)_{n\in N}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$.
(2) Traduire avec les symboles $\forall, \exists$ l'assertion : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
(3) Énoncer l'inégalité des accroissements finis.
(4) Calculer les limites des suites suivantes :

$$(a) \qquad u_n = \frac{8n+5(-1)^n}{4n+1} \qquad\qquad (b) \qquad v_n = \frac{n!}{4^n}$$

(5) Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \quad \int_0^{\pi} \sin(2\theta)\mathrm{d}\theta \qquad (b) \quad \int_1^{e^2} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$$

$$(c) \quad \int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta)\mathrm{d}\theta \qquad (d) \quad \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+2x^2}\mathrm{d}x$$

(6) Calculer les limites des fonctions suivantes :

$$(a) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{(x-\sqrt{x})(x-\sin(x))}{x^2} \qquad\qquad (b) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$$

Exercice 2 : suites récurrentes

On se propose d'étudier la suite : $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u\colon \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2) \end{cases}$$

On note $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$.

(1) Déterminer les variations de f et déterminer ses points fixes (c'est à dire les x tel que $f(x) = x$).
(2) Montrer que $f([1,2]) \subset [1,2]$, en déduire que $\forall n$, $u_n \in [1,2]$.
(3) Montrer que $\forall x \in [1,2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
(4) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall n, \quad |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$$

(5) En déduire $\forall n$, $|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}$ puis $\lim_{n\to\infty} u_n$
(6) Déterminer un n tel que $|u_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-5}$

Exercice 3 : développement limités

(1) Donner les développements limités à l'ordre 3 des fonctions suivantes :
   (a) $\ln(1 + \alpha x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
   (b) $\sqrt{1+x}$
   (c) $\frac{1}{\cos(x)}$
(2) Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$
(3) Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. En déduire $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{\alpha}{n})^n = e^\alpha$

Exercices 4 : fonctions bornées

Soit g la fonction définit sur $[0, \infty[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{x}}{x} \text{ si } x \neq 1 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ mais que g n'est pas bornée sur $[0, \infty[$
Soit f une fonction continue de $[0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.
(b) Traduire $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ à l'aide des symboles $\forall, \exists$.
(b) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que f est bornée sur $[A, \infty[$.
(c) Montrer que f est aussi bornée sur $[0, A]$
(d) En déduire que f est bornée sur $[0, \infty[$
(e) Est-il vrai qu'il existe $a \in [0, \infty[$ tel que $\sup_{x\in[0,\infty[} f(x) = f(a)$?

Bonus

($\star$) Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$$

Montrer que $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$