Des objets entre deux dimensions

Adam A.

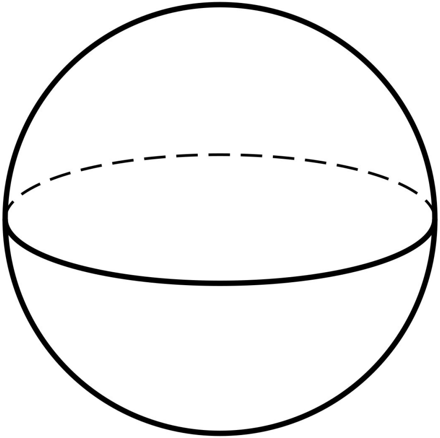
INSTITUT de MATHÉMATIQUES de MARSEILLE

Les Maths en Scène

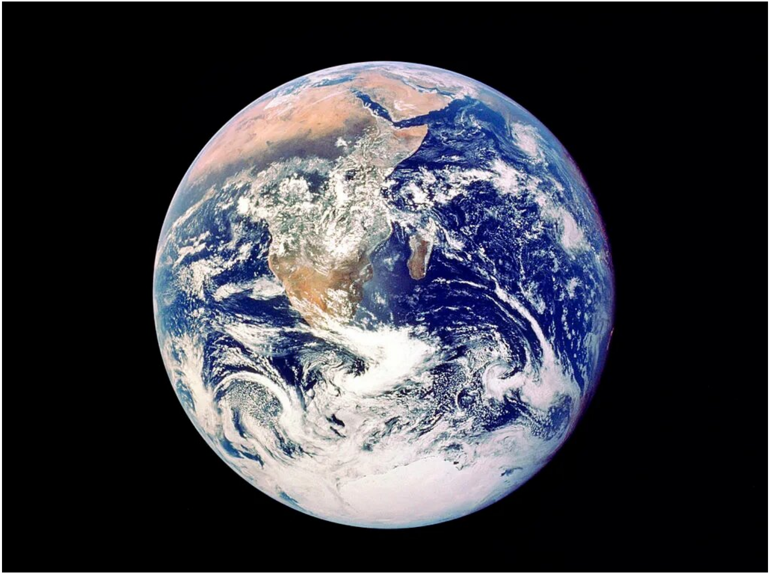
Les Maths où on ne les attend pas !

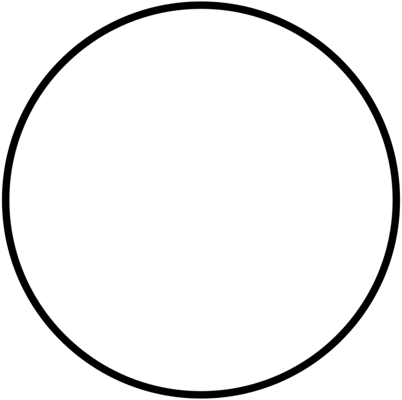
Question :

Pouvez-vous trouvez ces formes dans la nature ?

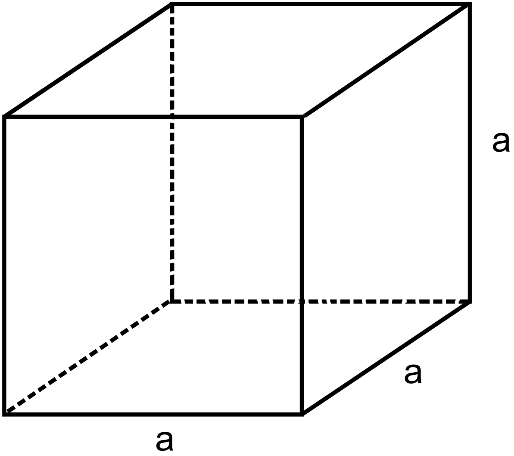


Une sphere ?





Un cercle ?



Plus difficile .. un cube ?

- forme géométrique ?

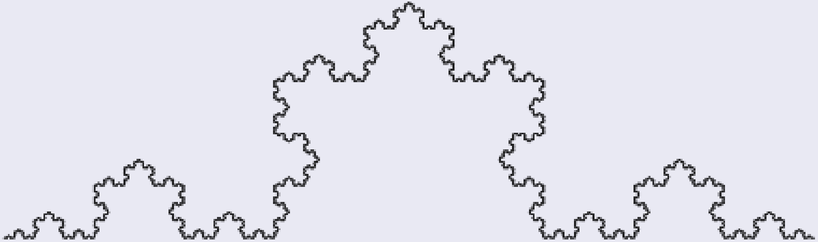
⇝ une infinité de détails

Observation : la Grande-Bretagne, un périmètre infini

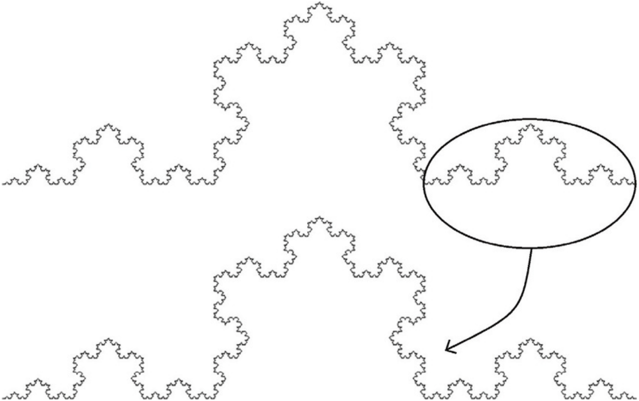
$12 \times 200km$, $28 \times 100km$, $68 \times 50km$

$2400km$, $2800km$, $3800km$

exemple mathématique : la courbe de Koch.

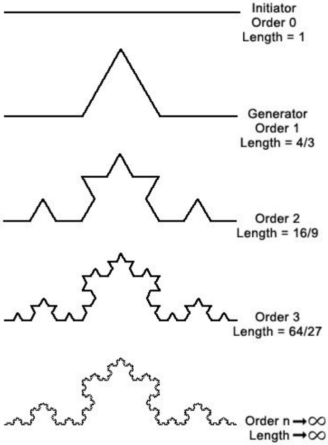


Soit L la longueur de la courbe.



4 parties identiques, mais 3 fois plus petites.

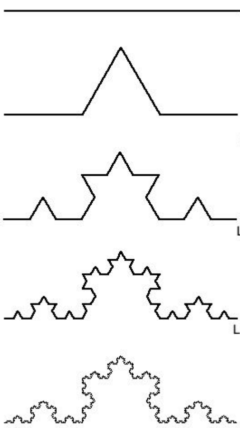
$$L = 4 \times \frac{L}{3} \quad \text{mais alors} \quad 1 = \frac{4}{3} \quad ?$$



- $L_0 = 1$
- $L_1 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$
- $L_2 = \frac{4}{3} - \frac{4}{9} + \frac{4\times 2}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$
- $L_n = \underbrace{\frac{4}{3} \times \ldots \times \frac{4}{3}}_{n \text{ fois}} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$
- $L_\infty = \left(\frac{4}{3}\right)^\infty = \infty$

Où se cache cette longueur infinie dans un espace fini ?

→ Entre deux dimensions !



- $L_0 = 1$
- $L_1 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$
- $L_2 = \frac{4}{3} - \frac{4}{9} + \frac{4\times2}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$
- $L_n = \underbrace{\frac{4}{3} \times \dots . \times \frac{4}{3}}_{n \text{ fois}} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$
- $L_\infty = \left(\frac{4}{3}\right)^\infty = \infty$

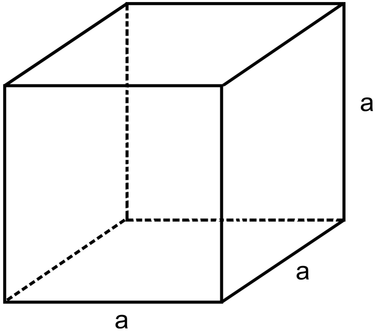
Où se cache cette longueur infinie dans un espace fini ?

$\rightarrow$ Entre deux dimensions !

Question :

Qu'est-ce qu'une dimension ?

l'exemple du cube



d=1 une arrête : un segment $a = a^1$

d=2 une face, une surface : $a \times a = a^2$

d=3 l'intérieur, un volume : $a \times a \times a = a^3$

Que se passe-t-il si on découpe notre cube ? Divisons a par 3

Divisons a par 3

$$a \rightsquigarrow a/3$$

d=1 segment $\rightsquigarrow$ 3 segments

d=2 carré $\rightsquigarrow$ 9 carrés

d=3 cube $\rightsquigarrow$ 27 cubes

$3 = 3^1$ $\quad$ $9 = 3^2$ $\quad$ $27 = 3^3$

Une formule pour la dimension !

$$N = r^d$$

Divisons a par 3

$$a \rightsquigarrow a/3$$

d=1 segment $\rightsquigarrow$ 3 segments

d=2 carré $\rightsquigarrow$ 9 carrés

d=3 cube $\rightsquigarrow$ 27 cubes

$3 = 3^1 \qquad 9 = 3^2 \qquad 27 = 3^3$

Une formule pour la dimension !

$$N = r^d$$

Divisons a par 3

$$a \rightsquigarrow a/3$$

d=1 segment $\rightsquigarrow$ 3 segments

d=2 carré $\rightsquigarrow$ 9 carrés

d=3 cube $\rightsquigarrow$ 27 cubes

$3 = 3^1 \qquad 9 = 3^2 \qquad 27 = 3^3$

Une formule pour la dimension !

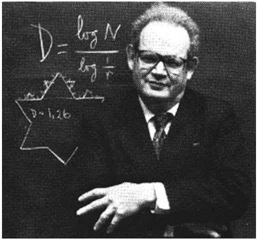
$$N = r^d$$

Si un un objet se divise en N parties égales, r fois plus petites, alors
$N = r^d \iff \log N = \log(r^d) = d \log r$

La formule de la dimension :

$$d = \log N / \log r$$

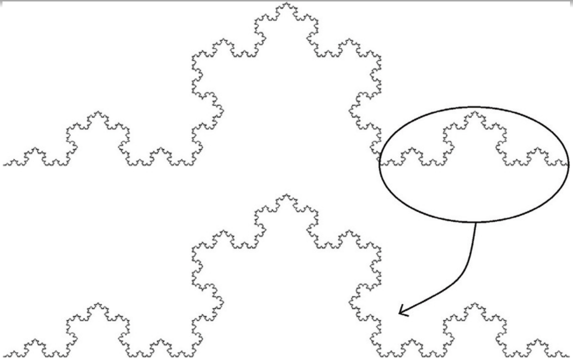
- N = nombre de parties obtenues
- r = le rapport d'échelle
- d = la dimension de l'objet



Benoit Mandelbrot, 1967.

Pour des objets classiques (carré, cube, triangle ..), d est entier.
Mais ce n'est pas toujours le cas ..

Dimension non-entière



4 parties identiques, et 3 fois plus petites.

$N = 4$, $r = 3 \rightsquigarrow d = \log N / \log r = \log 4 / \log 3$

$d \simeq 1.2618\ldots$ entre 1 et 2 !

- $12 \times 200km$
- $28 \times 100km$
- $68 \times 50km$

On est passé de 12 à 28 parties, de tailles 200 à 100km :
$N = 28/12 = 2,33\ldots,\qquad r = 200km/100km = 2$

$$d = \log(2,33\ldots)/\log(2) \simeq 1,2222 \qquad !$$

À quoi celà sert ?

- $12 \times 200km$
- $28 \times 100km$
- $68 \times 50km$

Passons de $200km$ à $50km$, $r = 4$, sachant $d \simeq 1,2222$, on s'attend à trouver :

$$N_{th} = r^d = 4^{1.222} \simeq 5,441 = \frac{\text{Nombre de segment de type 50km}}{12}$$

En mesurant directement $N_{obs} = \frac{68}{12} \simeq 5,66$

$$\frac{N_{th}}{N_{obs}} = 0.9611 \text{ soit moins de } 3,9\% \text{ d'erreur !}$$

Peut-on mesurer la Grande-Bretagne avec une règle d'un mètre ?

Difficile en pratique ... mais la théorie nous donne une réponse !

1. On mesure avec des segments de $200km, 100km, 50km, 10km$
2. On en déduit $d \simeq 1,22$ de manière plus précise.
3. On a par exemple $r = 100km/1m = 100000$
4. On applique la formule $N = r^d$

Des fractales partout

Définition : forme Fractales.

Une figure fractale est un objet mathématique qui présente une structure similaire à toutes les échelles.

Les fractales sont présentes en

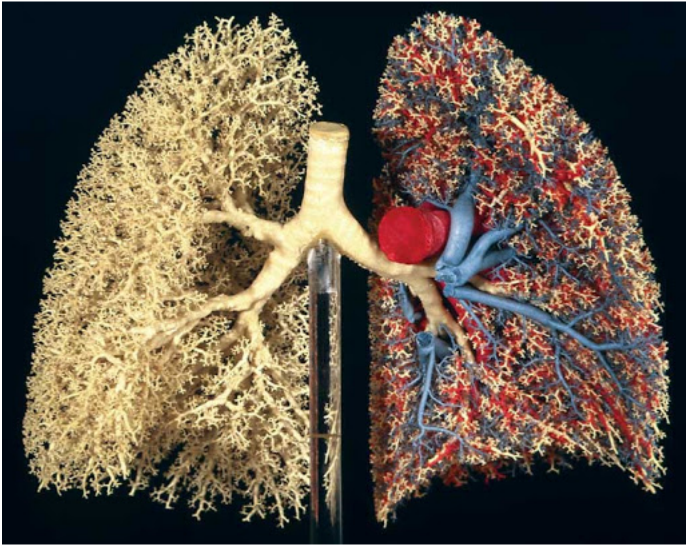
- biologie
- géologie
- médecine
- économie
- jeux-vidéo
- art

et partout ailleurs ! Voici quelques exemples ..

En biologie : la structure des plantes

En géologie : formes des rivières

En médecine : détection de malformations



En économie : les variations des prix

Jeux-vidéo : des décors plus réalistes

Et même dans certaines oeuvres d'art

La Grande Vague de Kanagawa, Hokusai.

À vous de jouer

Calculons ensemble quelques dimensions

Un autre changement d'échelle : a par 2

$$a \rightsquigarrow \cancel{a/3} \rightsquigarrow a/2$$

d=1 segment $\rightsquigarrow$? segments

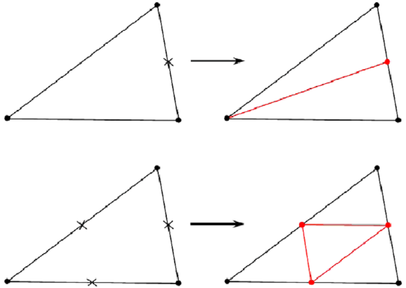
d=2 carré $\rightsquigarrow$? carrés

d=3 cube $\rightsquigarrow$? cubes

$? = 2^1 \qquad ? = 2^2 \qquad ? = 2^3$

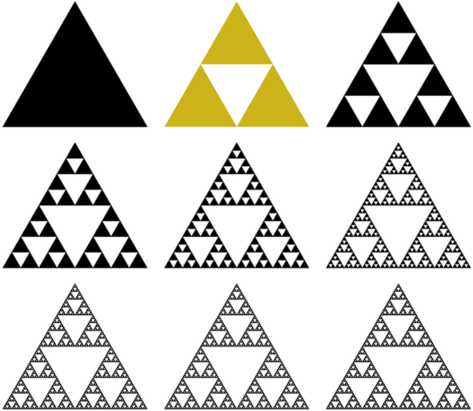
$$N = r^d$$

Le triangle est-il bien de dimension 2 ? ..



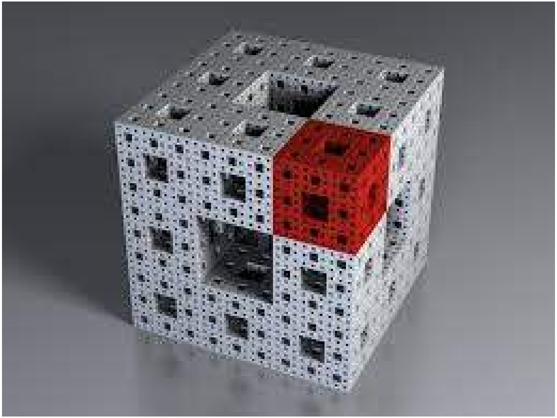
$$N = ?, \qquad r = ?, \qquad d = \frac{\log N}{\log r} = ?$$

Entre la dimension 1 et 2 : le triangle de Sierpiński



$$N = ?, \qquad r = ?, \qquad d = \frac{\log N}{\log r} = ?$$

Entre la dimension 2 et 3 : l'éponge de Menger



$$N = ?, \qquad r = ?, \qquad d = \frac{\log N}{\log r} = ?$$

Conclusion :

- Une observation :

  le paradoxe du périmètre infini des côtes de la Grande-Bretagne.

- Compréhension :

  l'étude de cas simple comme le cube $\rightsquigarrow$ formule $N = r^d$.

- Généralisation :

  on étend la formule à des valeurs d non entières.

- Une découverte :

  on sait maintenant prédire le périmètre à toutes les échelles !

C'est une bonne illustration de la démarche d'un chercheur