UE M5 - Séries et calcul intégral

TD Construction et propriétés Intégrale de Riemann - Sommes de Riemann

Le but du TD n'est pas de recopier passivement la correction
mais de participer activement à la résolution des exercices proposés !

Exercice 1

Notons E la fonction partie entière. Calculer $\int_{-2}^{2} E(x)dx$ en utilisant :

1) la subdivision $P_1 = (-2, -1, 0, 1, 2)$ de l'intervalle $[-2, 2]$,

2) puis la subdivision $P_2 = (-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{4}, 0, 1, \frac{7}{4}, 2)$ de $[-2, 2]$.

Exercice 2

Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $m \leq n$ et notons E la fonction partie entière.
Calculer $\int_{m}^{n} E(x)dx$.

Exercice 3

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, 1]$ par $f(x) = x$.

1. Soit $\epsilon > 0$. Construire deux fonctions u et v en escalier sur $[0, 1]$ telles que :

$$\forall x \in [0,1] \quad u(x) \leq f(x) \leq v(x) \quad \text{et} \quad \int_0^1 (v-u)(x)dx < \epsilon$$

   En déduire que f est intégrable sur $[0, 1]$ et calculer $\int_0^1 f(x)dx$.

2. De même, démontrer que la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, 1]$ par $g(x) = x^2$ est intégrable sur $[0, 1]$ et calculer $\int_0^1 g(x)dx$.

Exercice 4

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et soit $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ la fonction indicatrice de l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, b]$.

Exercice 5

1. Notons $I =]0,1]$ et f la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   Montrer que f n'est pas uniformément continue sur I.

2. Montrer que la fonction racine est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Montrer que la fonction $h : x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $[a,b]$. La fonction h est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

4. Rappeler l'énoncé du théorème de Heine.

5. La fonction sin est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 6

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Démontrer que :

   Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$ et on a :

$$\Big| \int_a^b f \Big| \leq \int_a^b |f|$$

2. Considérons la fonction $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$h(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } & x \in \mathbb{Q} \\ -1 \text{ si } & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Montrer que $|h|$ est intégrable sur $[a,b]$ et que h n'est pas intégrable sur $[a,b]$ (pour cela, exprimer h en fonction de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$).

Exercice 7

"Plus difficile"

Soit la fonction f définie sur $[-1,1]$ par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \sin(\frac{1}{x}) \end{cases}$.

Montrer que f est intégrable sur $[-1,1]$.

Exercice 8

Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx$ en utilisant des sommes de Riemann.

Exercice 9

Calculer la limite quand $n \to +\infty$ de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \Big(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 10

Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 11

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ telle que :

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Montrer que f garde un signe constant sur $[a, b]$.

Ce résultat est-il encore valable pour f supposée seulement intégrable sur l'intervalle $[a, b]$?

Exercice 12

Soit $\phi \in \mathcal{E}([a, b])$ une fonction en escalier sur $[a, b]$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$u_n = \int_a^b \phi(x)\sin(nx)dx$$

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Montrer que ce résultat est encore valable si la fonction ϕ est une application continue par morceaux sur $[a, b]$.

Exercice 13

Notons E l'ensemble des applications continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. Pour toute application $f \in E$, on définit :

$$J(f) = \int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx$$

1. Montrer que pour toute application $f \in E$, on a $J(f) \geq (b-a)^2$. Quand y-a-t-il égalité ?
2. Montrer que :
$$\{J(f) \ / \ f \in E\} = [(b-a)^2, +\infty[$$
Indication : On pensera à considérer les fonctions $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda\, x}$ avec $\lambda > 0$.

Exercice 14

1. Soit $(u_n)_{n \in N^*}$ la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$$
En utilisant la notion de somme de Riemann, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in N^*}$.
2. En utilisant la notion de somme de Riemann, déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ en $+\infty$.

Exercice 15

"Plus difficile"

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$ à l'aide d'une somme de Riemann.

Indication : On pensera à considérer les points $x_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$ pour $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

Exercice 16

En utilisant la notion de somme de Riemann, déterminer :
$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$$