Examen Analyse
deuxième session
PEIP C

Juin 2021

On prêtera une attention particulière à la rédaction. Les calculatrices sont interdites. Tout résultat sans justification sera pénalisé. Des schémas illustrant vos démonstrations sont encouragés.

Exercice 1 : calculs et question de cours

(1) Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis.
(2) Rappeler la définition à l'aide de quantificateurs d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $l \in \mathbb{R}$.
(3) Calculer les sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}$) :

$$(a) \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{2k+1}, \text{ avec } q \in \mathbb{R}, \qquad\qquad (b) \qquad R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k.$$

(4) Calculer la limite des suites suivantes :

$$(a) \qquad u_n = \frac{2^n}{n!}, \qquad\qquad (b) \qquad v_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}.$$

(5) Calculer les limites suivantes :

$$(a) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \qquad\qquad (b) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{(x-\sin x)(x+\cos(x))}{x^2}.$$

Exercice 2 : suites récurrentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \exp(u_n)$.

(1) Soit $f(x) = e^x$

  (a) Montrer que $[0, \infty[$ est stable par f.

  (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$.

(2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 1$. On pourra considérer $g(x) = e^x - x$ pour $x \in [0, \infty[$.

(3) En déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$.

(4) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? (Justifier) Si oui, donner la valeur de cette limite.

Exercice 3 : prolongement par continuité

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \exp(-1/x^2)$.

(1) Calculer les limites à droite et à gauche en 0 de la fonction f.

(2) Montrer que f se prolonge par continuité en $x = 0$. On notera $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce prolongement continu.

(3) Montrer que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en zéro à droite et à gauche.

(4) La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable en $x = 0$? (Justifier) Si oui, donner la valeur de cette dérivée.