Zadanie 1 Prawdziwe sherry wyrabiane jest w Andaluzji zgodnie z wielostopniowym systemem "Solera". Dla uproszczenia załóżmy, że mamy tylko trzy beczki, oznaczone A, B, C. Każdego roku jedną trzecią wina z beczki C rozlewamy do butelek i zastępujemy winem z beczki B. Potem beczkę B dopełniamy do pełna winem z beczki A i na końcu beczkę A dopełniamy nowym winem. Załóżmy, że wszystkie trzy beczki wina zawierają nowe wino na początku roku 0. Jak jest średni wiek sherry, która jest butelkowana na początku roku n?

$A(0) = 0 = B(0) = C(0)$

S – niezdef.

↖ butelkowane sherry w roku n

$S(1) = C(0) + 1 = 1$

$C(1) = \frac{2}{3}(C(0)+1) + \frac{1}{3}(B(0)+1) = \frac{2}{3}C(0) + \frac{1}{3}B(0) + 1 = \frac{2}{3}0 + \frac{1}{3}0 + 1 = 1$

$B(1) = \frac{2}{3}(B(0)+1) + \frac{1}{3}(A(0)+1) = \frac{2}{3}B(0) + \frac{1}{3}A(0) + 1 = 0+0+1 = 1$

$A(1) = \frac{2}{3}(A(0)+1) + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{2}{3}A(0) + \frac{2}{3} = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$S(2) = C(1) + 1 = 1 + 1 = 2$

$\frac{8}{9} + \frac{9}{9} = \frac{17}{9}$

$C(2) = \frac{2}{3}C(1) + \frac{1}{3}B(1) + 1 = 2$

$B(2) = \frac{2}{3}B(1) + \frac{1}{3}A(1) + 1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + 1 = \frac{17}{9}$

$A(2) = \frac{2}{3}A(1) + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(\frac{2}{3}+1) = \frac{10}{9}$

$S(3) = C(2) + 1 = 2 + 1 = 3$

$C(3) = \frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{17}{9} + 1 = \frac{4}{3} + \frac{17}{27} + 1 = \frac{36+17+27}{27} = \frac{80}{27}$

$S(4) = \frac{80}{27} + 1 = \cancel{\ } = \frac{107}{27} \approx$ Sherry

$A(n+1) = \frac{2}{3}A(n) + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}A(n-1) + \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\left(\dots\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}A(0) + \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\dots\right)\right) + \frac{2}{3}$

$B(n+1) = \frac{2}{3}B(n) + \frac{1}{3}A(n) + 1$

$C(n+1) = \frac{2}{3}C(n) + \frac{1}{3}B(n) + 1$

$S(n+1) = C(n) + 1$

$n+1 = 1 \quad A(n+1) = A(1) =$

$$S(n+1) = C(n)+1 = \frac{2}{3}C(n-1) + \frac{1}{3}B(n-1) + 1 + 1 =$$

$$= \dots$$

$$A(n+1) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} A(0) + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} A(0) + S2YS2$$

$m = n+1$

$S_m = \frac{1-q^{m}}{1-q}$

$$S2YS2 = \frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{2}{3}} = 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\| \quad 0 + S2YS2 = 2 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$A(2) = 2 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$

$$B(n+1) = \frac{2}{3}B(n) + \frac{1}{3}A(n) + 1 = \frac{2}{3}B(n) + \frac{1}{3}\left(2 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right) + 1 =$$

$$= \frac{2}{3}B(n) + \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1 = \frac{2}{3}B(n) - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{5}{3} = \quad = B(n+1)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}B(n-1) - \left(\frac{2}{3}\right)^{n} + \frac{5}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{5}{3} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{2} B(n-1) - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{5}{3} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{2} B(n-1) - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\frac{5}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} B(0) - (n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{5}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2} \dots\right) =$$

$$= 0 + \frac{5}{3}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} - (n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 5\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) - (n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} =$$

$$= 5 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$5 - \frac{10}{3} - \frac{8}{9} = 5 - \frac{38}{9}$

$$C(n+1) = \frac{2}{3}C(n) + \frac{1}{3}B(n) + 1 = \frac{2}{3}C(n) + \frac{1}{3}\left(5 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n} - n\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right) + 1 =$$

$$= \frac{2}{3}C(n) + \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}(n+5) + 1 =$$

$$= \frac{2}{3}C(n) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}(n+5) + \frac{8}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}C(n-1) - \frac{1}{3}(n+4)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{8}{3}\right) - \frac{1}{3}(n+5)\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + \frac{8}{3} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{2} C(n-1) - \frac{1}{3}(n+4)\left(\frac{2}{3}\right)^{n} - \frac{1}{3}(n+5)\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3}\frac{8}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{m} C(0) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} \sum_{i=0}^{n} (i+5) + 8\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = S2YS2$$

$$= 0 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} \frac{5+n+5}{2}(n+1) + 8 - 8\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$S(n+1) = S(n)+1 = 8 - 8\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot n\,\frac{n+9}{2} + 1$$

$$= 9 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(8\,\frac{2}{3} + n\,\frac{n+9}{2 \cdot 3}\right)$$

Zadanie 2 Rozważ proces wrzucania n kul do $2n$ urn jednostajnie losowo. Niech ε będzie następującym zdarzeniem: n urn będzie pustych, a w każdej z pozostałych n urn znajdzie się dokładnie jedna kula. Podaj dokładny wynik na prawdopodobieństwo zdarzenia ε oraz ograniczenie wynikające z aproksymacji Poissona. Porównaj te wyniki. HINT:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad \binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

$|\Omega| = (2n)^n$

$|\mathcal{E}| = \binom{2n}{n} \cdot n!$

$$\Pr(\mathcal{E}) = \frac{\binom{2n}{n} n!}{(2n)^n} = \frac{\frac{4^n}{\cancel{\sqrt{\pi n}}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n \cancel{\sqrt{2\pi n}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{(2n)^n} = \frac{\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 \left(\frac{4}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2}}{2^n} = \left(\frac{2}{e}\right)^n \sqrt{2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$$

Poiss App: n kul, $2n$ urn

X_i – # kul w i-tej urnie

$X_i \sim Bin\left(n, \frac{1}{2n}\right)$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} \to \lambda$

$\lambda = \frac{1}{2}$

Y_i – niezal. zm. losowe z rozkładu $Po\left(\frac{1}{2}\right)$

$\mathcal{E} = f(X_1, \dots, X_{2n})$

$\overline{\mathcal{E}} = f(Y_1, Y_2, \dots, Y_{2n})$

$\Pr(\tilde{\mathcal{E}}) = p$ $\qquad \Pr(\mathcal{E}) \leq e\sqrt{n}\, p \longrightarrow p \geq \frac{XD}{e\sqrt{n}}$

$$p \geq \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^n \sqrt{2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}{e\sqrt{n}}$$

$$\frac{p}{XD} \geq \frac{1}{e\sqrt{n}}$$

Zadanie 3 Niech Z_n będzie zmienną losową rozmiaru n-tej generacji w procesie gałązkowym. Załóżmy, że $Z_0 = 1$ i $Z_1 \sim Geo\left(\frac{1}{2}\right)$ będzie zmienną o rozkładzie geometrycznym z parametrem $1/2$. Niech $X_n = Z_0 + \ldots + Z_n$ będzie zmienną losową rozmiaru $n+1$ pierwszych generacji. Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej X_n. Co możesz powiedzieć o rozkładzie prawdopodobieństwa rozmiaru n-tej generacji?

Z_n - rozmiar n-tej generacji

Zał. $Z_0 = 1$ i $Z_1 \sim Geo\left(\frac{1}{2}\right)$

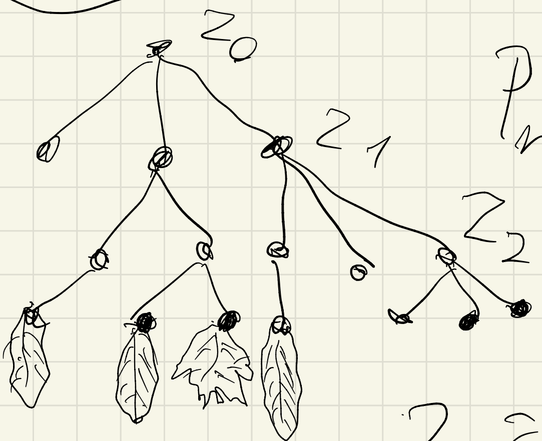
$X_n = Z_0 + \ldots + Z_n$!

$p = \frac{1}{2} = q$

$E[X_n] = ?$

$E[Z_1] = \frac{p}{q} = 1$

$P_n(s) = \frac{n-(n-1)s}{n+1-ns}$



$Z_n = P_n(s)$

$X_n = Z_0 + Z_1 + \ldots Z_n$

$E[X_n] = E[Z_0] + E[Z_1] + \ldots + E[Z_n]$

$= \quad 1 + 1 +$

$$P_n'(1) = E[Z_n]$$

$$P_n'(s) = \frac{d}{dx} \frac{n-(n-1)s}{n+1-ns} =$$

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Fakten} \\ P_n(s) = P(P_{n-1}(s)) = P_{n-1}(P(s)) \\ P_n(s) = P^n(s) \\ P = P_1 \quad P_1(s) = \frac{q}{1-ps} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}s}\end{gathered}}$$

$$= \frac{(}{(n+1-ns)^2}$$

$$E[Z_n] = E[Z_{n-1}]E[Z_1] = E[Z_1]^n$$

$$E[X_n] = \underset{E[Z_0]}{1} + \underset{E[Z_1]}{1} + \ldots \underset{E[Z_n]}{1} = \underline{\underline{n+1}}$$

$$E[Z_1] = \frac{1}{2} \cdot 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 3 + \ldots$$

$= \checkmark$ Wszystko dobrze

Zadanie 1 Rozważ algorytm wyszukiwania binarnego: $BinarySearch(A, n, x)$, gdzie

- $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ posortowana rosnąco i wszystkie jej elementy są różne,
- szukany element x jest wybrany losowo z rozkładem jednostajnym z tablicy A,
- $n = 2^k - 1$ dla pewnego k.

Oblicz wartość oczekiwaną liczby porównań pomiędzy x i elementami tablicy A. Jak ta wartość oczekiwana ma się do przypadku pesymistycznego?

Pesymistyczny - $\lceil \log_2 n \rceil$

1 2 3 4 5 6 7

$$BS(x) = \begin{cases} 1 \text{ por} & \frac{1}{n} \\ 2 \text{ por} & \frac{2}{n} \\ 3 \text{ por} & \frac{\cancel{2}4}{n} \\ \vdots & \\ \lceil \log_2 n \rceil & \frac{2^{\lceil \log_2 n \rceil - 1}}{n} \end{cases}$$

$$E[BS] = \sum_{i=1}^{\lceil \log_2 n \rceil} i \cdot \frac{2^{i-1}}{n}$$

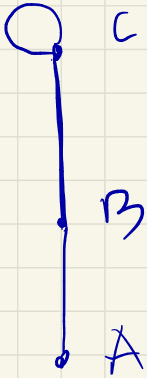
$$E[BS] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lceil \log_2 n \rceil} i \cdot 2^{i-1}$$

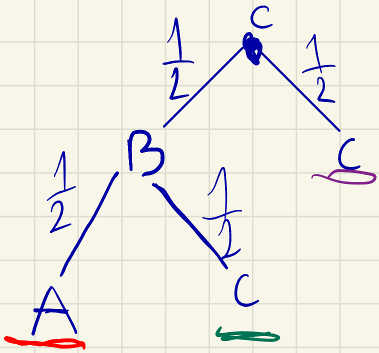
$$\sum_{i=1}^{c} i \cdot 2^{i-1} = 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 \ldots$$

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 \ldots) + (2^1 + 2^2 + \ldots) + \ldots$$

$$2(2^0 + 2^1 \ldots$$

$$2^{c-1} \qquad +$$





$$E[X_c] = \frac{1}{2}\cdot\left(1+E[X_c]\right) + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot\left(2+E[X_c]\right)$$

$$E[X_c] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E[X_c] + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}E[X_c]$$

$$E[X_c] = \frac{3}{2} + \frac{3}{4}E[X_c]$$

$$\frac{1}{4}E[X_c] = \frac{3}{2}$$

$$E[X_c] = 6$$

Zadanie 2 W wierzchołku A pięciokąta $ABCDE$ znajduje się jabłko, a dwa wierzchołki dalej, w C, znajduje się robaczek. Każdego dnia robaczek pełza z takim samym prawdopodobieństwem do jednego z sąsiednich wierzchołków. Tak więc po jednym dniu znajdzie się on albo w wierzchołku B, albo w D, w każdym z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Po dwóch dniach robaczek może wrócić do C, ponieważ nie zapamiętuje poprzedniej pozycji. Po osiągnięciu wierzchołka A robaczek zatrzymuje się na obiad. Jaka jest wartość oczekiwana i wariancja liczby dni, które upłyną do obiadu?

$$E[X_c^2] = \frac{1}{2}E\left[\left(1+E[X_c]\right)^2\right] + \frac{1}{4}\cdot 2^2 + \frac{1}{4}\left(2+E[X_c]\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+2E[X_c]+E[X_c]^2\right) + 1 + \frac{1}{4}\left(4+4E[X_c]+E[X_c]^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + E[X_c] + \frac{1}{2}E[X_c]^2 + 2 + E[X_2] + \frac{1}{4}E[X_c]^2 =$$

$$= 2\tfrac{1}{2} + \overset{12}{2E[X_c]} + \frac{3}{4}E[X_c]^2$$

$$Var[X_c] = 2\tfrac{1}{2} + 2E[X_c] - \frac{1}{4}E[X_c]^2 = \frac{5}{2} + 12 - \frac{36}{4} = \frac{5}{2} + \frac{24}{2} - \frac{18}{2} = \frac{11}{2}$$

$$= 5\tfrac{1}{2}$$

$E[X_c^2] = 1 + \frac{1}{2}E[(1+X_c)^2] + \frac{1}{4}\cdot E[(2+X_c)^2] =$

$= 1 + \frac{1}{2}\left(E[1] + E[2X_c] + E[X_c^2]\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(E[4] + 4E[X_c] + E[X_c^2]\right) =$

$= 1 + \frac{1}{2} + 6 + \frac{1}{2}E[X_c^2] + 1 + 6 + \frac{1}{4}E[X_c^2]$

$= 14 + \frac{3}{4}E[X_c^2]$

$\frac{1}{4}E[X_c^2] = 14\frac{1}{4}$

$E[X_c^2] = 58$

$Var[X_c] = E[X_c^2] - E[X_c]^2 = 58 - 36 = 22$

Zadanie 3 Pewien wykładowca akademicki ma problemy ze znalezieniem pracy, bo ma w zwyczaju oblewać zbyt dużą liczbę studentów. Jeśli jakiegoś poranka nie jest zatrudniony, to ze stałym prawdopodobieństwem p_h (niezależnym od tego co się działo dotąd) będzie on zatrudniony przed wieczorem. Ale jeśli zaczyna on dzień będąc zatrudnionym, to istnieje stałe prawdopodobieństwo p_f, że zostanie zwolniony przed wieczorem. Znajdź średnią liczbę wieczorów, kiedy ma on pracę, przy założeniu, że początkowo był on zatrudniony i że analizujemy okres n dni. (Na przykład, dla $n = 1$ odpowiedzią jest $1 - p_f$.)