Universitatea de Stat

Alecu Russo

Matematica aplicată în economie

Seminare.

Popovici Tatiana

Bălţi, 2011

1 Algebra liniară.

1.1 Matrici. Operații asupra matricilor

1. Calculaţi

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$

2. Calculaţi $AB - BA$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

3. Fie date matricile

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & -1 & 2 \\ 3 & 1-i & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculaţi $B + C$, BA, BC, CA, B^2.

4. Calculaţi:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Determinaţi numerele reale x şi y pentru care

$$\begin{pmatrix} 2 & x+1 \\ 3 & 3-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 2x \\ y+2 & x+y \end{pmatrix}.$$

6. Fie matricea
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$
   a) Calculaţi $P(A) = A^2 + 2A$;
   b) Determinaţi x, y, z, t, astfel încît
$$A \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Determinaţi valoarea polinomului $f(x)$ de la matricea A
   a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5,\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$
   b) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5,\ \ A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
   c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1,\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   d) $f(x) = x^3 - 3x + 2,\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

8. Rezolvaţi ecuaţia matricială
$$2X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Fie matricile
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 10 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$
   Demonstraţi că:
   a) $A^2 = 12A - 35I_2$;
   b) $B^2 = 12B - 35I_2$;

10. Fie $A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Calculaţi A^{2011}.

11. Rezolvaţi
$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \\ X \cdot Y = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

1.2 Calculul determinanţilor.

1. Calculaţi

a) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{5} & 3-\sqrt{2} \\ 3+\sqrt{2} & 1+\sqrt{5} \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} i & 2 \\ 3 & 2-i \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 2^x & 5^{-y} \\ 5^y & 2^{-x} \end{vmatrix}$. f) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$

2. Calculaţi

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$;

3. Calculaţi

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}$; k) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 8 & -4 \\ 5 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 6 \end{vmatrix}$; l) $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -3 & -7 \\ -3 & 4 & 2 & 9 \end{vmatrix}$; m) $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$. i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & -5 \\ 1 & 6 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; n) $\begin{vmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 15 \\ 15 & 12 & 15 & 20 \\ 12 & 15 & 20 & 30 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; j) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. o) $\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$;

4. Calculaţi

a) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Fie dată matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & x & -1 \\ 1 & x^2 & 3 \end{pmatrix}$, $x \in R$.

   a) Calculaţi $detA$.

   b) Rezolvaţi ecuaţia $detA = 7$.

6. Rezolvaţi ecuaţiile

   a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0,$

   b) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0,$

   c) $\begin{vmatrix} 1 & x & x+1 \\ -x & 1 & x+1 \\ -x-1 & -x-2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

1.3 Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare.

1. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii liniare prin metoda lui Cramer:

a) $\begin{cases} 2x - y &= 1 \\ x + 16y &= 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y &= 1 \\ 3x + 7y &= 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + 3z &= 8 \\ 3x + y + 2z &= 7 \\ 2x + 3y + z &= 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 4y + 5z &= 18 \\ 2x + 4y - 3z &= 26 \\ x - 6y + 8z &= 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + 3y - 5z &= 4 \\ 3x - 4y + 2z &= 21 \\ 7x + 8y - 6z &= 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= -4 \\ 4x + y + 4z &= -2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3x + 2y + z &= 5 \\ 2x + 3y + z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= 11 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + 2y + 4z &= 31 \\ 5x + y + 2z &= 29 \\ 3x - y + z &= 10 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 2x + 2y - z + t &= 4 \\ 4x + 3y - z + 2t &= 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4t &= 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2t &= 6 \end{cases}$

2. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii liniare prin metoda Jordan-Gauss:

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z &= 4 \\ 3x + 4y - z &= -5 \\ x + 5y - 4z &= -9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y - 3z + t &= 1 \\ x - 2y + z - t &= -1 \\ x - 2y + z + 5t &= 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 3y + 5z + 12t &= 10 \\ 2x + 2y + 3z + 5t &= 4 \\ x + 7y + 9z + 4t &= 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 12x + 9y + 3z + 10t &= 13 \\ 4x + 3y + z + 2t &= 3 \\ 8x + 6y + 2z + 5t &= 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 5y - 8z &= 8 \\ 4x + 3y - 9z &= 9 \\ 2x + 3y - 5z &= 7 \\ x + 8y - 7z &= 12 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y + z + 2t &= 7 \\ 3x + y + 2z + 3t &= 9 \\ 4x + y + 3z + 4t &= 11 \\ x + z + t &= 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 5y + 4z - 13t &= 3 \\ 3x - y + 2z + 5t &= 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4z &= 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + 3y + 5z + 7t &= 12 \\ 3x + 5y + 7z + t &= 0 \\ 5x + 7y + z + 3y &= 4 \\ 7x + y + 3z + 5t &= 16 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 &= -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 &= 5 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 13 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 11 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3 \end{cases}$

3. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii omogene:

a) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z &= 0 \\ -6x + 2y - z &= 0 \\ 9x - 3y + 2z &= 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + y - 2z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 11x - 4y - z &= 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z + t &= 0 \\ x + 2y + 3z + 4t &= 0 \\ x + 3y + 6z + 10y &= 0 \\ x + 4y + 10z + 20t &= 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t &= 0 \\ x + y + 2z + 3t &= 0 \\ x + 5y + z + 2t &= 0 \\ x + 5y + 5z + 2t &= 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y - 2z + 2t &= 0 \\ 3x + 5y + 6z - 4t &= 0 \\ 4x + 5y - 2z + 3t &= 0 \\ 3x + 8y + 24z - 19t &= 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 &= 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 &= 0 \\ -x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_4 + x_6 &= 0 \end{cases}$

4. Rezolvaţi şi discutaţi după valorile parametrului real m:

a) $\begin{cases} mx + y - z &= 1 \\ x + my - z &= 1 \\ -x + y + mz &= 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx + y + z &= 1 \\ x + my + z &= 1 \\ x + y + mz &= 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z &= 2 \\ 2x - y - 2z &= -2 \\ x + 4y + mz &= 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (1+m)x + y + z &= 1 \\ x + (1+m)y + z &= m \\ x + y + (1+m)z &= m^2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 18x + 6y + 3z + 2t &= 5 \\ -12x - 3y - 3z + 3t &= -6 \\ 4x + 5y + 2z + 3t &= 3 \\ mx + 4y + z + 4t &= 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} mx + y + z + t &= 1 \\ x + my + z + t &= 1 \\ x + y + mz + t &= 1 \\ x + y + z + mt &= 1 \end{cases}$

1.4 Dependența și independența liniară a vectorilor.

1. Determinaţi combinaţia liniară $b = 2a_1 + 3a_2 - 5a_3 + a_4$, dacă
   a) $a_1 = (1, 2, 1, 2)$, $a_2 = (-1, -3, 4, 5)$, $a_3 = (-5, 0, 2, 3)$
   $a_4 = (3, -1, -2, 4)$;
   b) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (4, 4, 4, 4)$, $a_3 = (2, 3, 6, -1)$
   $a_4 = (2, 0, 0, -1)$;
   c) $a_1 = (4, 3, 1, 2)$, $a_2 = (2, -1, -3, 4)$, $a_3 = (-1, 4, -5, 3)$
   $a_4 = (6, 2, 1, -1)$;
   d) $a_1 = (0, 5, 2, 1)$, $a_2 = (2, -3, 0, 1)$, $a_3 = (13, -10, 3, -2)$
   $a_4 = (2, 1, -2, -1)$;
   e) $a_1 = (1, -1, 2, -4)$, $a_2 = (3, 1, 1, -3)$, $a_3 = (3, 1, -1, 2)$
   $a_4 = (-5, -2, -3, 1)$.

2. Rezolvaţi ecuaţia
$$3(2x + a_3 + a_4) + 2(x - a_1 + a_3) - 5(x - 2a_2 - a_3) = x - a_4,$$
   unde a_1, a_2, a_3, a_4 sunt vectorii din exerciţiul precedent.

3. Determinaţi coordonatele vectorului x după baza $e_1, e_2, \ldots, e_n$
   a) $x = (6, 9, 14)$, $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 1, 2)$, $e_3 = (1, 2, 3)$;
   b) $x = (6, 2, -7)$, $e_1 = (2, 1, -3), e_2 = (3, 2, -5)$, $e_3 = (1, -1, 1)$;
   c) $x = (7, 14, -1, 2)$, $e_1 = (1, 2, -1, -2), e_2 = (2, 3, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 1, 4)$
   $e_4 = (1, 3, -1, 0)$;
   d) $x = (1, 2, 1, 1)$, $e_1 = (1, 1, 1, 1), e_2 = (1, 1, -1, -1)$, $e_3 = (1, -1, 1, -1)$
   $e_4 = (1, -1, -1, 1)$;
   e) $x = (0, 0, 0, 1)$, $e_1 = (1, 1, 0, 1), e_2 = (2, 1, 3, 1)$, $e_3 = (1, 1, 0, 0)$
   $e_4 = (0, 1, -1, -1)$.

4. Fie dat sistemul de vectori $x_, x_2, \ldots, x_n$. Verificaţi dacă sistemul de vectori este liniar dependent. Este oare sistemul de vectori indicat o bază a spaţiului?
   a) $x_1 = (1, 0, 0, -1)$, $x_2 = (2, 1, 1, 0)$, $x_3 = (1, 1, 1, 1)$, $x_4 = (1, 2, 3, 4)$;
   b) $x_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $x_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $x_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $x_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$
   $x_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$;
   c) $x_1 = (1, -1, 1, -1, 1)$, $x_2 = (1, 1, 0, 0, 3)$, $x_3 = (3, 1, 1, -1, 7)$, $x_4 = (0, 2, -1, 1, 2)$;

5. Verificaţi independenţa liniară a sistemului de funcţii:
   a) $f_1 = \sin x$, $f_2 = \cos x$;
   b) $f_1 = 3t^2 + 2t + 1$, $f_2 = 3t^2 + 2t + 3$, $f_3 = t^2 + t + 1$;
   c) $f_1 = 1$, $f_2 = t$, $f_3 = t^3$, $t_4 = 1 - t + t^2 - t^3$

1.5 Forma canonică a funcţionalei pătrate.

1. Utilizînd formula lui Jacobi, determinaţi forma canonică a funcţionalei pătrate.
   a) $f(x) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3;$
   b) $f(x) = 11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3;$
   c) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
   d) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3;$
   e) $f(x) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3;$
   f) $f(x) = 8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3;$
   g) $f(x) = 3x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 - 4x_3x_4;$
   h) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_3x_4$
   i) $f(x) = 9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_3 - 4x_2x_4 + 4x_3x_4;$
2. Determinaţi forma canonică funcţionalei pătrate prin metoda lui Gauss
   a) $f(x) = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3;$
   b) $f(x) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$
   c) $f(x) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3;$
   d) $f(x) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$
   e) $f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$
   f) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$
   g) $f(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3;$
   h) $f(x) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3;$
   i) $f(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4;$
   j) $f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3;$
   k) $f(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3;$
   l) $f(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3;$
   m) $f(x) = 2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3;$
   n) $f(x) = -12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3;$
   o) $f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4;$
   p) $f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3;$
   q) $f(x) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3;$
   r) $f(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_4^2 + x_5^2 - 4x_1x_2 + 12x_4x_5;$
   s) $f(x) = 5x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+5x_4^2-10x_1x_2+2x_1x_3+6x_1x_4+6x_2x_3+2x_2x_4-10x_3x_4;$

2 Elemente de analiză matematică.

2.1 Derivata funcţiei de o variabilă.

Derivaţi funcţiile.

1. $f(x) = 5x^6$
2. $f(x) = x^3 - 5x^2$
3. $f(x) = 7x^2 - 3x + 2$
4. $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2,5x^2 - 0,3x + 0,1$
5. $f(x) = 2x^3 - 12\sqrt{x} + 2011$
6. $f(x) = x + \sqrt{x}$
7. $f(x) = \log_7 x + x^4$
8. $f(x) = x^{20} - \sqrt{x} + \cos x$
9. $f(x) = \sin x + \log_{\frac{1}{3}} x - \sqrt[4]{x}$
10. $f(x) = \sqrt{7}\sin x - 3\cos x - 3\ln x$
11. $f(x) = \operatorname{tg} x - x$
12. $f(x) = \sin x - \cos x$
13. $f(x) = \sin 3x$
14. $f(x) = 3\sin(3x + 5)$
15. $f(x) = \arcsin(x - 1)$
16. $f(x) = 10^x$
17. $f(x) = e^{-x}$
18. $f(x) = 3^{\sin x}$
19. $f(x) = 7^{2x-3}$
20. $f(x) = x^2 - 3^x$
21. $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{\sqrt{\pi}}$
22. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 7x + 8}$
23. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$
24. $f(x) = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$
25. $f(x) = \left(x^2 + 1\right)^4$
26. $f(x) = (1 - x)^{21}$
27. $f(x) = \left(x - x^2\right)^{20}$
28. $f(x) = \left(2x^3 + 3x^2 + 6x + 1\right)^6$
29. $f(x) = (x^2 - 3 + 3)(x^2 + 2x - 1)$
30. $f(x) = x2^x$
31. $f(x) = (x + 3)\cos x$
32. $f(x) = \arcsin x^2$
33. $f(x) = x\arcsin x$
34. $f(x) = 4x^2\ln x$
35. $f(x) = e^{x^2}$
36. $f(x) = x^{\sin x}$
37. $f(x) = \lg(x - \cos x)$

38. $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$
39. $f(x) = 2^{3x} \sin 4x$
40. $f(x) = xe^x$
41. $f(x) = e^x \cos x$
42. $f(x) = \cos 2x \ln x$
43. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
44. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
45. $f(x) = \dfrac{x}{x^3+2x}$
46. $f(x) = \dfrac{2}{x^4+1}$
47. $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$
48. $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{x^2+1}$
49. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$
50. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$
51. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$
52. $f(x) = \dfrac{e^x}{x-3}$
53. $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x+2}$
54. $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$
55. $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$
56. $f(x) = \ln \cos x$
57. $f(x) = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$
58. $f(x) = \ln \operatorname{tg} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$
59. $f(x) = \sqrt{5} \log_5^3 \operatorname{tg} x$
60. $f(x) = \dfrac{\cos(3x^2-1)}{\ln^2 x}$

2.2 Derivata funcţiei de două variabile.

Calculaţi derivatele parţiale ale funcţiei şi derivata totală a funcţiei

1. $f(x,y) = x - y$
2. $f(x,y) = xy$
3. $f(x,y) = 3x^3 - y^4$
4. $f(x,y) = x^2 y$
5. $f(x,y) = x^2 y^3$
6. $f(x,y) = x^3 y - xy^3$
7. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy$
8. $f(x,y) = \left(x^2 y - y^3 + 5\right)^5$
9. $f(x,y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
10. $f(x,y) = \ln(x - y)$
11. $f(x,y) = xy + \dfrac{x}{y}$
12. $f(x,y) = x^y$
13. $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$
14. $f(x,y) = \sqrt{x + y}$
15. $f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$
16. $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$
17. $f(x,y) = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{y}$
18. $f(x,y) = xy^2 - x^2 y$
19. $f(x,y) = e^{xy}$
20. $f(x,y) = \sin(2x + y)$
21. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + xy^2 + y^2$

2.3 Extremul funcției de două variabile.

Cercetaţi funcţiile la extrem

1. $f(x,y) = (x-2)^2 + 2y^2$
2. $f(x,y) = (x-2)^2 - 2y^2$
3. $f(x,y) = x^4 + 4xy - 2y^2$
4. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
5. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4$
6. $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 2$
7. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 4y + 6$
8. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 33$
9. $f(x,y) = xy(5 - x - y)$
10. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$
11. $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 11$
12. $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 3xy + 3$
13. $f(x,y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$
14. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 12y + 1$
15. $f(x,y) = x^3 + y^2 + 3xy + 3x + y$
16. $f(x,y) = x^4 + y^3 - 8x^3 + 18x^2 - 3y^2 - 8x - 3y + 8$
17. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6x^2 - 9y^2 + 9x + 15y$
18. $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$
19. $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{50}{y}$
20. $f(x,y) = 6x^2y + 2y^3 - 45x - 51y + 7$

2.4 Rezolvarea problemelor cu conţinut economic prin intermediul funcţiei de două variabile.

1. O întreprindere realizează produse în cantităţile x şi y. Să se determine cantităţile în care trebuie să fie fabricate mărfurile, astfel încît venitul să fie maxim. Funcţia de venit este dată de relaţia
$$f(x,y) = 12x + 3y - x^3 - y^3$$

2. O întreprindere realizează produse în cantităţile x şi y. Cheltuielile totale de producţie sunt
$$c(x,\, y) = 10 + 4x - 4y.$$
Preţurile unitare ale produselor depind de nivelul de producţie astfel
$$p_1 = 16 - x^2,\;\; p_2 = 8 - 2y.$$
Determinaţi în ce cantităţi trebuie să fie fabricate produsele şi la ce preţuri astfel încît venitul brut să fie maxim.

3. O fabrică de mobilă realizează două produse pentru export cu cheltuielile unitare fixe de producţie de $4\,u.m.$ şi $5\,u.m.$ Cererile pe piaţa externă a celor două produse sunt
$$x_1 = 2p_2 - 2p_1,\;\; x_2 = 3p_1 - 10p_2 + 8$$
unde p_1 şi p_2 reprezintă preţurile de vînzare a produselor. Determinaţi preţurile produselor p_1 şi p_2, astfel încît venitul brut din vînzarea produselor să fie maxim.

4. O firmă produce două sortimente de bunuri în cantităţile x şi y. Determinaţi volumul produselor, astfel încît venitul brut să fie maxim, dacă funcţia profitului este
$$f(x,\, y) = 160x - 3x^2 - 2xy - 2y^2 + 120y - 18.$$

5. În cadrul unei firme se produc două tipuri de bunuri în cantităţile x şi y. Determinaţi volumul produselor, astfel încît venitul brut să fie maxim, dacă funcţia profitului este
$$f(x,\, y) = -2x^2 + 2xy - 5y^2 + 6x + 6y.$$

6. În cadrul unei firme se produc două tipuri de bunuri în cantităţile x şi y. Determinaţi volumul produselor, astfel încît venitul brut să fie maxim, dacă funcţia profitului este
$$f(x,\, y) = 50x + 30y - 3x^2 - 2xy - 2y^2 - 20.$$

7. În cadrul unei firme se produc două tipuri de bunuri în cantităţile x şi y. Determinaţi volumul produselor, astfel încît costul producerii bunurilor să fie minim, dacă funcţia costului este
$$f(x,\, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 100.$$

8. O firmă produce trei sortimente de bunuri în cantităţile x, y şi z. Determinaţi volumul produselor, astfel încît venitul brut să fie maxim, dacă funcţia profitului este
$$f(x, y, z) = 170x + 110y + 120z - 3x^2 - 2y^2 + 120y - \frac{3}{2}z^2 - 2xy - xz - yz - 50.$$

2.5 Ajustarea datelor. Metoda celor mai mici pătrate.

1. Consumul de materii prime al unei societăţi comerciale în primele 5 luni ale anului, exprimate în milioane lei, a fost:

Luna	ianuarie	februarie	martie	aprilie	mai
Consum	2,7	2,5	3	3,9	4,1

Ajustaţi datele după o dreaptă şi efectuaţi o prognoză pentru luna iulie.

2. Volumul vînzărilor unui produs timp de 7 luni a înregistrat următoarea evoluţie:

Luna	ianuarie	februarie	martie	aprilie	mai	iunie	iulie
Volumul vînzărilor	30	54	76	82	70	50	45

Ajustaţi datele după o dreaptă şi după o parabolă. Comparaţi datele obţinute. Care dintre funcţiile obţinute reflectă mai bine datele empirice? Efectuaţi o prognoză pentru anul următor.

3. Valoarea profitului înregistrat de un agent economic în timp de 7 trimestre a înregistrat următoarea evoluţie:

Trimestrul	1	2	3	4	5	6	7
Valoarea profitului (mil. lei)	34	52	98	76	65	58	52

Ajustaţi datele după o parabolă şi efectuaţi o prognoză pentru trimestrul următor.

4. Valoarea produselor rămase nevîndute într-un magazin pe timp de 7 luni, exprimată în mii lei, este dată în următorul:

Luna	ianuarie	februarie	martie	aprilie	mai	iunie	iulie
Volumul vînzărilor	50	30	20	15	12	10	8

Ajustaţi datele după o hiperbolă şi efectuaţi o prognoză pentru luna octombrie.

5. Evoluţia preţului benzinei timp de 5 ani, înregistrată în luna ianuarie a fiecărui an a fost:

Anul	2007	2008	2009	2010	2011
Preţul	3	4	6	9	13

Ajustaţi datele după o dreaptă şi efectuaţi o prognoză pentru anulurmător.

6. Evoluţia preţului de vînzare a unui produs timp de 5 trimestre este dată în tabelul următor:

Trimestrul	1	2	3	4	5
Preţul	5	6	8	10	13

Ajustaţi datele după o dreaptă şi efectuaţi o prognoză pentru următorul trimestru.

7. Producţia unui produs timp de 5 luni a înregistrat următoarea evoluţie:

luna	ianuarie	februarie	martie	aprilie	mai
Volumul vînzărilor	1	3	5	8	11

Ajustaţi datele după o dreaptă şi după o parabolă. Comparaţi datele obţinute. Care dintre funcţiile obţinute reflectă mai bine datele empirice? Efectuaţi o prognoză pentru următoarele două luni.

8. Volumul vînzărilor de autoturisme în perioada 2007-2011 a fost:

anul	2007	2008	2009	2010	2011
Volumul vînzărilor	2	3	4	6	9

Ajustaţi datele după o dreaptă şi după o parabolă. Comparaţi datele obţinute. Care dintre funcţiile obţinute reflectă mai bine datele empirice? Efectuaţi o prognoză pentru anul următor.

9. Producţia dintr-o anumită ramură, exprimată în milioane lei, a înregistrat următoarea evoluţie:

Anul	ianuarie	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Volumul producţiei	2,3	6,3	9,2	12,8	24,6	15,9	17,9

Ajustaţi datele după o dreaptă şi după o parabolă. Comparaţi datele obţinute. Care dintre funcţiile obţinute reflectă mai bine datele empirice? Efectuaţi o prognoză pentru anul următor.

10. Producţia unei întreprinderi timp de 9 ani consecutivi, a avut următoarea evoluţie:

Anul	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Producţia	7	8	10	13	19	29	47	60	82

Determinaţi funcţia de ajustare care dă eroarea medie minimă şi efectuaţi prognoza pentru următorii 3 ani.

11. Volumul vînzărilor la un articol în sezoanele toamnă-iarnă în cadrul unui magazin de specialitate este:

Luna	sept.	octomb.	noiemb.	decemb.	ian.	febr.	martie
volumul vînzărilor	20	40	50	70	50	30	10

Determinaţi tipul curbei de ajustare prin intermediul reprezentării grafice. Determinaţi trendul vînzărilor în vederea stabilirii stocurilor lunare pentru aceeaşi perioadă a anului următor.

12. Situaţia vînzărilor la un produs alimentar, în ultimii 7 ani a fost:

Anul	1	2	3	4	5	6	7
Volumul vînzărilor	14,4	11,8	15	18,3	18,8	18,4	20,3

Ajustaţi datele după o dreaptă şi după o parabolă. Comparaţi datele obţinute. Care dintre funcţiile obţinute reflectă mai bine datele empirice? Efectuaţi o prognoză pentru anul următor.

13. La un magazin de desfacere a produselor din piele, în decursul a 5 ani, procentul de produse nevîndute a scăzut odată cu creşterea calităţii produselor, astfel 20, 18, 14, 10, 6. Determinaţi tendinţa generală de scădere a procentului de produse nevîndute. Efectuaţi o extrapolare pentru al şaselea an.

14. Producţia unei întreprinderi timp de 6 ani consecutivi, a avut următoarea evoluţie:

Anul	1	2	3	4	5	6
mil. lei	36,1	41,5	47,2	53	57,5	62,8

Ajustaţi datele după o dreaptă şi calculaţi erorile care se comit în fiecare an.

3 Ecuații diferențiale.

3.1 Ecuații diferențiale cu variabile separabile.

Rezolvaţi ecuaţiile diferenţiale:

1. $2yy' = (3x+2)(y^2+4)$
2. $(3x-4)y^2y' + (y^2+1) = 0$
3. $e^{x+y}y' - (2x-1)e^{x^2} = 0$
4. $y'\cos x + \sin x \sin^2 y = 0$
5. $2x^2yy' = y^2+1$
6. $yy' = -x$
7. $xy' + y = 0$
8. $xy' - 2y = 0$
9. $y' = 2x\sin y$
10. $y' = xy(y-1)$
11. $y' = x^2 \operatorname{tg} y$
12. $y' = xe^{-y}$
13. $x^2 + y^2y' = 1$
14. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$
15. $xydx + (x+1)dy = 0$
16. $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$
17. $xy' + y = y^2$
18. $2x^2yy' + y^2 = 2$
19. $y' - xy^2 = 2xy$
20. $y' = 10^{x-y}$

3.2 Ecuații diferențiale omogene.

Rezolvaţi ecuaţiile diferenţiale:

1. $(x+2y)dx - xdy = 0$
2. $(x-y)dx + (x+y)du = 0$
3. $y' = \dfrac{y-3x}{x+3y}$
4. $x^2 + 2y^2 = xyy'$
5. $(y^2-2xy)dx + x^2dy = 0$
6. $x^2(2y'+1) + y^2 = 0$
7. $x(y-x)y' - y^2 = 0$
8. $y' = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

9. $y' = \dfrac{2y}{x+y}$
10. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$
11. $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$
12. $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$
13. $xy' = y\cos\ln\dfrac{y}{x}$
14. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$
15. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$
16. $xy' - y = x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$

3.3 Ecuaţii diferenţiale liniare.

Rezolvaţi ecuaţiile diferenţiale:

1. $y' = y - x^2$
2. $xy' - 2y = 2x^4$
3. $(2x+1)y' = 4x + 2y$
4. $x^2y' + xy + 1 = 0$
5. $y'\cos x - 2y\sin x = \cos x$
6. $y' + 3y = 6xe^{-x}$
7. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
8. $y' - \dfrac{1+2x}{x^2+x}y = \dfrac{1+2x}{x^2+x}$
9. $y' + y\operatorname{tg}x = x\operatorname{tg}x + 1$
10. $y' - 2xy = x - x^3$
11. $xy' + y = x + 1$
12. $xy' + 3y = xe^{x^2}$
13. $y = x(y' - x\cos x)$
14. $(xy' - 1)\ln x = 2y$

4 Elemente din teoria probabilităţii.

4.1 Evenimente. Operaţii asupra evenimentelor. Definiţia clasică aprobabilităţii.

1. Se aruncă două monede una de 10bani şi alta de 25 bani. Scrieţi evenimetele care pot apărea.

2. Într-o urnă sunt 20 bile numerotate respectiv cu 1, 2, 3, ..., 20. Se extrage la întîmplare o bilă. Care va fi probabilitatea evenimentului că va fi extras un pătrat perfect.

3. O urnă conţine 4 bile albe şi 6 bile negre, iar o altă urnă conţine 3 bile albe şi 5 bile negre. Din fiecare urnă se extrage cîte o bilă. Determinaţi probabilitatea evenimentelor
   a) ambele bile extrase sunt albe;
   b) cel putin una din bilele extrase este albă;
   c) exact una din bilele extrase este albă.

4. La o loterie sunt 96 de bilete, dintre care 8 sunt cîştigătoare. O persoană cumpără 12 bilete. Să se determine probabilitatea evenimenelor
   a) Exact două bilete din cele cumpărate sunt cîştigătoare;
   b) cel puţin 3 bilete cumpărate sunt cîştigătoare.

5. Dintr-un pachet de cărţi de joc se extrage la întîmplare o carte. Să se determine probabilitatea evenimentelor
   a) este scos un as;
   b) este scoasă o treflă sau dama de pică;
   c) este scoasă o pică sau un rege.

6. Se aruncă concomitent două zaruri. Să se determine probabilitatea evenimentelor:
   a) suma cifrelor va fi un număr divizibil prin 3;
   b) suma cifrelor va fi 5.

7. O persoană urmează sădea trei telefoane la trei numere diferite. fiecare număr este format o singură dată. Determinaţi probabilitatea evenimentelor

a) Persoana primeşte răspuns la toate chemările;

b) la cel mult o chemare nu primeşte răspuns;

c) la o singură chemare nu primeşte răspuns.

8. De sărbători Moş Crăciun a pregătit pentru 4 copii cîte un cadou. Încurcînd cadourile, ele au fost înmînate la întîmplare copiilor. Care este probabilitatea că fiecare copil va primi cadoul său?

9. Se ia la întîmplare un număr de două cifre. Determinaţi probabilitatea evenimentelor

   a) numărul ales este divizibil prin 3;

   b) numărul este divizibil putin prin 3 şi 7;

   c) numărul este un pătrat perfect.

   d) a fost ales un cub;

10. Dintr-o urnă ce conţine 5 bile albe, două bile negre, 4 bile roşii şi o bilă verde se extrag la întîmplare 4 bile. Determinaţi probabilitatea că sunt scoase bile de cel puţin două culori.

11. La un depozit sunt 12 piese de la firma F_1, 20 piese de la firma F_2 şi 18 piese de la firma F_3. Probabilitatea ca piesa de la firma F_1 să fie bunăeste de 0.9, iar a celor de la firmele F_2 şi F_3 este respectiv de 0.6 şi 0.9. La întîmplare se extrage o piesă. Determinaţi probabilitatea ca piesa extrasă să fie bună.

4.2 Variabile aliatoare. Operații asupra variabilelor aliatoare. Caracteristicile variabilelor aliatoare.

1. Fie date variabilele aliatoare

$$\xi : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad \eta : \begin{pmatrix} 10 & 15 & 20 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$$

   Construiţi poligonul de repartiţie al variabilelor.

2. Într-o urnă sunt 8 bile albe şi 6 bile negre. Se extrag la întîmplare 4 bile. Fie ξ variabila aliatoare ce corespunde evenimentului de extragere a numărului de bile albe. Scrieţi variabila aliatoare ξ. Determinaţi caracteristicile valiabilei ξ.

3. Într-o urnă sunt 5 bile albe şi 2 bile negre. Se extrag la întîmplare 3 bile. Fie ξ variabila aliatoare ce corespunde evenimentului de extragere a numărului de bile albe. Scrieţi variabila aliatoare ξ. Determinaţi caracteristicile valiabilei ξ.

4. Un cub cu latura de $1m$ este secţionat în cubuleţe cu latura de $1dm$. După secţionare cubuleţe au fost introduse într-o urnă şi amesticate. Se extrage la întîmplare un cubuleţ. Scrieţi variabila aliatoare ce corespunde numărului de feţe colorate ale cubuleţului. Determinaţi caracteristicile variabilei aliatoare.

5. Fie date variabilele aliatoare ξ şi η. Deterinaţi variabilele 2ξ, $2\xi + 3\eta$, $\xi\eta$, η^2, $\sqrt{\xi}$.

   a) $\xi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$, $\eta : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0.1 & 0.15 & 0.3 & 0.2 & 0.25 \end{pmatrix}$

   b) $\xi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0.15 & 0.4 & 0.45 \end{pmatrix}$, $\eta : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0.05 & 0.2 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$

6. Determinaţi media variabilei aliatoare χ.

   a) $\chi = \xi + 2\eta$, dacă $M(\xi) = 5$ şi $M(\eta) = 3$.

   b) $\chi = 3\xi + 4\eta$, dacă $M(\xi) = 2$ şi $M(\eta) = 6$.

7. Determinaţi dispersia variabilei aliatoare χ.

   a) $\chi = 3\xi + 2\eta$, dacă $D(\xi) = 5$ şi $D(\eta) = 6$.

   b) $\chi = 2\xi + 3\eta$, dacă $D(\xi) = 4$ şi $D(\eta) = 5$.

8. Fie date variabilele aliatoare

   $\xi : \begin{pmatrix} -4 & 6 & 10 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$, $\eta : \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$, $\zeta : \begin{pmatrix} 0.21 & 0.54 & 0.61 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}$

   $\chi : \begin{pmatrix} 4.3 & 5.1 & 10.6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$, $\omega : \begin{pmatrix} 131 & 140 & 160 & 180 \\ 0.05 & 0.1 & 0.25 & 0.6 \end{pmatrix}$

   Determinaţi caracteristicile variabilelor.

5 Optimizări liniare.

5.1 Problema de programare liniară (PPL). Metoda grafică de rezolvare a PPL.

Rezolvaţi PPL prin metoda grafică:

1. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ x_1 - 2x_2 & \leq & 1 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$ $f_{max} = 2x_1 - x_2$

2. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$ $f_{max} = 7x_1 + 8x_2$

3. $$\begin{cases} -x_1 + x_2 & \geq & 1 \\ x_1 - 2x_2 & \leq & 1 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$ $f_{min} = 6x_1 + 7x_2$

4. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & \leq & 6 \\ -2x_1 + 6x_2 & \geq & 3 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$ $f_{max} = 4x_1 + 6x_2$

5. $$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 & \geq & 6 \\ x_1 - 2x_2 & \leq & 4 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$ $f_{max} = 3x_1 + 7x_2$

6. $$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 & \geq & 2 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 6 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$ $f_{max} = 2x_1 + 3x_2$

7. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & \leq & 6 \\ x_1 + x_2 & \geq & 1 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$ $f_{max} = 5x_1 + 2x_2$

8. $$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 & \geq & 28 \\ -5x_1 + 2x_2 & \geq & 10 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$ $f_{min} = 3x_1 + 4x_2$

9. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq & 12 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$ $f_{max} = 3x_1 + 4x_2$

10. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$ $f_{max} = 3x_1 + 5x_2$

11. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 & \geq & -6 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 26 \\ x_1 \geq 0,\, x_2 & \geq & 1 \end{cases}$$ $f_{max} = 3x_1 + x_2$

12. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & \leq & 13 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 14 \\ 2x_1 - x_2 & \leq & 10 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 & & \\ x_1 & \geq & 0 \end{cases}$$ $f_{max} = 4x_1 + 3x_2$

13. $$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 & \leq & 8 \\ 2x_1 + 3x_2 & \geq & 6 \\ 3x_1 + x_2 & \leq & 18 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$ $f_{opt} = 3x_1 + 5x_2$

14. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ x_1 + 4x_2 & \leq & 6 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$

$f_{max} = 2x_1 + 5x_2$

15. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 & \leq & 30 \\ x_1 + 3x_2 & \leq & 12 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$

$f_{max} = 2x_1 + 3x_2$

16. $\begin{cases} -x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ x_1 - 2x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1 + x_2 & \geq & 4 \\ x_1 + x_2 & \leq & 7 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$

$f_{max} = 2x_1 - 4x_2$

17. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & \leq & 18 \\ -x_1 + 3x_2 & \leq & 9 \\ 2x_1 - x_2 & \leq & 10 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$

$f_{max} = 4x_1 + 2x_2$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 & \geq & 3 \\ x_1 - 3x_2 & \geq & -12 \\ 2x_1 + 6x_2 & \leq & 116 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 2 \end{cases}$

$f_{min} = x_1 + 2x_2$

19. $\begin{cases} x_1 - x_2 & \geq & -2 \\ 0.5x_1 + 1.5x_2 & \leq & 9 \\ 2x_1 + 2x_2 & \leq & 20 \\ x_1 - 0.5x_2 & \leq & 7 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$

$f_{min} = x_1 - 2x_2$

20. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 & \leq & 18 \\ x_1 - 3x_2 & \geq & -12 \\ x_1 + x_2 & \leq & 10 \\ -2x_1 + x_2 & \geq & -14 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$

$f_{max} = 2x_1 + 3x_2$

21. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & \geq & 6 \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 13 \\ 5x_1 - 3x_2 & \geq & 0 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 14 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$

$f_{max(min)} = 3x_1 + x_2$

22. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 & \geq & -10 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 14 \\ 4x_1 + 3x_2 & \leq & 32 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$

$f_{min} = 3 - x_1 - x_2$

23. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 & \leq & 15 \\ 2x_1 - x_2 & \geq & -20 \\ x_1 + 3x_2 & \geq & 30 \\ -x_1 + 4x_2 & \geq & 40 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$

$f_{max} = -x_1 + 3x_2$

24. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 & \leq & 11 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 10 \\ 3x_1 + 3x_2 & \leq & 113 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$

$f_{max} = 5x_1 + 4x_2$

25. La o fabrică de tricotaj pentru confecţionarea puloverelor şi bluzelor se utilizează lînă, cylon şi nitron, care se află la bază în cantităţile 820, 430 şi 310 kg. Cantitatea de aţă de fiecare tip pentru confecţionarea unei bluze şi a unui pulover, precum şi venitul din realizarea unei unităţi este redat în tabelul de mai jos:

Tipul aţei	cantitatea de aţă necesară	
	pulover	bluză
lînă	0.4	0.2
cylon	0.2	0.1
nitron	0.1	0.1
venit	7.8	5.6

Determinaţi planul optim de procţie, astfel încît venitul din realizarea acestea să fie maxim.

26. La o fabrică de mobilă din plăci standarte de placaj este necesar de tăiat plăci standarte de trei tipuri de plăci în cantităţile 48, 62 şi 36. Fiecare placăde placaj poate fi tăiat în două moduri în plăci standarte. Numărul acestor plăci obţinute după fiecare tip de tăiere, precum şi cantitatea de placaj neutilizată este dată în tabelul de mai jos:

Tipul plăcii standarte	Numărul de elemente tăiate		necesarul de elemente
	tipul 1	Tipul 2	
I	3	3	38
II	4	5	64
III	6	4	52
rebut	124	114	

Determinaţi cîte placi sunt necesare de tăiat după fiecare tip, astfel încît să obţinem cel puţin numărul de plăci standarte şi rebut minimal.

Determinaţi valoarea optimă a funcţiei în domeniul indicat:

27. $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$
$f(x) = 3x_1 + x_2 + 10$

28. $\begin{cases} -x_1 - 5x_2 \leq 0 \\ 3x_1 - x_2 \geq 0 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ 6x_1 + 14x_2 \geq 21 \\ x_1,\ x_2 \leq 0 \end{cases}$
$f(x) = 3x_1 + 7x_2$

29. $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ -7x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_2 \leq 8 \end{cases}$
$f(x) = 2x_1 - 4x_2$

30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \end{cases}$
$f(x) = 15x_1 + 21x_2$

5.2 Algoritmul simplex-primar de rezolvare a PPL.

Rezolvaţi PPL, prin algoritmul simplex primar, date în formă canonică.

1. $f(x) = 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to min$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 7 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 11 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,4} \end{cases}$$

2. $f(x) = -2x_1 + 6x_2 + 2x_4 \to max$
$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 & = & 30 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = & 5 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,4} \end{cases}$$

3. $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to min$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 & = & 140 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & 100 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,4} \end{cases}$$

4. $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \to max$
$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 & = & 6 \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = & 25 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,5} \end{cases}$$

5. $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 \to max$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 & = & -1 \\ x_2 + x_4 & = & 6 \\ x_1 + x_2 - x_5 & = & 25 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,5} \end{cases}$$

6. $f(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_4 + 2x_5 + 4 \to min$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + +2x_4 - 3x_5 & = & 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 & = & 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = & 4 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,5} \end{cases}$$

7. $f(x) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \to max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 40 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 &= 50 \\ x_i \geq 0,\, i &= \overline{1,5} \end{cases}$$

8. $f(x) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 \to min$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 63 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 42 \\ x_i \geq 0,\, i &= \overline{1,5} \end{cases}$$

9. $f(x) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 \to min$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 3 \\ x_i \leq 0,\, i &= \overline{1,5} \end{cases}$$

10. $f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \to max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= 30 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 40 \\ x_i \geq 0,\, i &= \overline{1,5} \end{cases}$$

11. $f(x) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 10x_5 \to min$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 + 3x_5 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_i \geq 0,\, i &= \overline{1,5} \end{cases}$$

12. $f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \to max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 50 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 90 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 70 \\ x_i \geq 0,\, i &= \overline{1,5} \end{cases}$$

13. $f(x) = 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 + 4 \to max$
$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 18 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 6 \\ x_i \geq 0,\, i &= \overline{1,5} \end{cases}$$

14. $f(x) = 2x_1 + x_3 - x_4 \rightarrow max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 & = & 12 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,4} \end{cases}$$

Rezolvaţi problemele de programare liniară:

1. $f(x) = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 & \geq & -6 \\ 3x_1 + x_3 & \leq & 15 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,3} \end{cases}$$

2. $f(x) = 6x_1 + 5x_2 + 9x_3 \rightarrow max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 25 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 & \leq & 20 \\ 4x_1 + 3x_3 & \leq & 18 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,3} \end{cases}$$

3. $f(x) = 25x_1 + 20x_2 + 18x_3 \rightarrow min$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 & \geq & 6 \\ 2x_1 + 6x_3 & \geq & 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \geq & 9 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,3} \end{cases}$$

4. $f(x) = 2x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 \rightarrow max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 & \geq & 18 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 & \geq & 24 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 & \geq & 30 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,4} \end{cases}$$

5. $f(x) = 27x_1 + 70x_2 + 2x_3 \rightarrow min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 & \geq & 6 \\ -x_1 + 2x_2 & \geq & 1 \\ 5x_1 + 13x_2 - x_3 & \geq & 1 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,3} \end{cases}$$

6. $f(x) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \rightarrow max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 & = & 48 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \leq & 44 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 & \geq & 40 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,4} \end{cases}$$

7. $f(x) = -6x_1 + 3x_2 + 3x_4 \rightarrow max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_4 & \geq & 18 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 & \leq & -9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 & = & 10 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,4} \end{cases}$$

8. $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 20 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,4} \end{cases}$$

9. $f(x) = 6x_1 - 2x_2 - 8x_3 \rightarrow min$
$$\begin{cases} x_2 - x_3 & \geq & -2 \\ -5x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq & 6 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,3} \end{cases}$$

10. $f(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow max$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq & 36 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq & 45 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 & \leq & 30 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,3} \end{cases}$$

11. $f(x) = 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 \rightarrow max$
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 10 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq & 70 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 & \leq & 10 \\ x_i \geq 0,\, i & = & \overline{1,3} \end{cases}$$