

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УО «Белорусский государственный экономический университет»

**СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ**

для студентов экономических
специальностей вузов

В двух частях

Часть I

Минск 2014

УДК 51(075.3)
ББК

Печатается в авторской редакции

*А в т о р ы: А.В. Конюх, В.В. Косьянчук, С.В. Майоровская,
О.Н. Поддубная, Е.И. Шилкина*

*Р е ц е н з е н т ы: доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей математики БГТУ В.М. Марченко;
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий ка-
федрой И.В. Белько*

Р е к о м е н д о в а н о кафедрой высшей математики

У т в е р ж д е н о Редакционно-издательским советом университета

Сборник задач и упражнений по высшей математике : в 2 ч. Ч. 1 /
А.В. Конюх, В.В. Косьянчук, С.В. Майоровская, О.Н. Поддубная,
Е.И. Шилкина, – Минск : БГЭУ, 2014. – 299 с.

ISBN

**УДК 51(075.3)
ББК**

© Коллектив авторов, 2014
© УО «Белорусский государственный
экономический университет», 2014

ISBN

Содержание

Предисловие	5
Раздел I. Элементы линейной и векторной алгебры. Основы аналитической геометрии	6
Глава 1. Элементы линейной алгебры	6
1.1. Матрицы и операции над ними.....	6
1.2. Определители квадратных матриц и их свойства. Правило Крамера решения систем линейных уравнений	12
1.3. Обратная матрица. Решение матричных уравнений	21
1.4. Ранг матрицы	29
1.5. Система m линейных уравнений с n неизвестными	34
1.6. Система линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений	44
1.7. Контрольные задания к главе 1	46
Глава 2. Элементы векторной алгебры	54
2.1. Векторы на плоскости и в пространстве	54
2.2. Проекция вектора на ось. Скалярное произведение векторов	59
2.3. Векторное и смешанное произведения векторов	63
2.4. Векторное пространство R^n . Ранг и базис системы векторов	67
2.5. Задачи с экономическим содержанием к главам 1,2	71
2.6. Контрольные задания к главе 2	76
Глава 3. Основы аналитической геометрии	83
3.1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости	83
3.2. Прямая линия на плоскости	91
3.3. Кривые второго порядка, заданные каноническими уравнениями. Эллипс	102
3.4. Гипербола	113
3.5. Парабола	122
3.6. Поверхность и линия в пространстве. Плоскость	127
3.7. Прямая линия в пространстве	135
3.8. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве	143
3.9. Понятие гиперплоскости. Выпуклые множества	150
3.6. Контрольные задания к главе 3	155
Раздел II. Введение в математический анализ	160
Глава 4. Функция одной переменной	160
4.1. Функциональная зависимость и способы ее представления	160
4.2. Элементарные функции. Преобразование графиков функций	168

Глава 5. Пределы и непрерывность	172
5.1. Числовая последовательность	172
5.2. Предел последовательности	176
5.3. Предел функции. Раскрытие простейших неопределенностей	183
5.4. Замечательные пределы	190
5.5. Сравнение бесконечно малых	195
5.6. Односторонние пределы	199
5.7. Непрерывность и точки разрыва функции	202
5.8. Контрольные задания к разделу II	210
 Раздел III. Дифференциальное исчисление функции одной переменной	 261
Глава 6. Производная и дифференциал	215
6.1. Определение производной. Правила дифференцирования	215
6.2. Производная сложной функции	219
6.3. Логарифмическая производная и производная неявной функции	221
6.4. Геометрический и механический смысл производной. Производные высших порядков	223
6.5. Дифференциал функции. Применение дифференциала к приближенным вычислениям	226
6.6. Контрольные задания к главе 6	229
Глава 7. Приложения производной	233
7.1. Теорема о среднем значении. Формула Тейлора	233
7.2. Правило Лопиталья-Бернулли	235
7.3. Интервалы монотонности и экстремумы функции. Наибольшее, наименьшее значения функции на отрезке	237
7.4. Выпуклость (вогнутость) графика функции. Точки перегиба	241
7.5. Асимптоты. Построение графиков функций	243
7.6. Применение производной в задачах с экономическим содержанием	246
7.7. Контрольные задания к главе 7	250
 Примерные варианты тестовых заданий	 254
Задания к главе 1	254
Задания к главе 2	258
Задания к главе 3	260
Задания к главам 4,5	267
Задания к главам 6,7	271
 О т в е т ы	 274
 Л и т е р а т у р а	 299

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для успешного и глубокого усвоения курса высшей математики, служащего фундаментом экономического образования, необходимы не только учебники и справочники по соответствующим разделам, но и сборники задач, позволяющие студентам на практике применить изучаемый теоретический материал и приобрести прочные навыки использования основных математических методов.

При подготовке сборника авторы исходили из того, что самой эффективной формой изучения высшей математики является самостоятельная работа студентов при надлежащем контроле со стороны преподавателей. Каждый параграф содержит краткие сведения из теории, носящие справочный характер, и достаточно большое число решенных примеров для иллюстрации наиболее рациональных методов их решения. В конце каждой главы даны контрольные задания, что облегчает использование этого сборника преподавателями. В приложении в конце книги также содержатся варианты тестовых заданий для контроля усвоения студентами учебного материала. Для усиления прикладной экономической направленности курса высшей математики в сборнике приведено достаточно большое количество задач экономического содержания.

Материал сборника подготовлен сотрудниками кафедры высшей математики Белорусского государственного экономического университета: гл. 1 написана доцентом, к.ф.-м.н. Е.И. Шилкиной; гл. 2 – доцентом, к.ф.-м.н. А.В. Конюхом; гл. 3 – доцентом, к.ф.-м.н. О.Н. Поддубной; гл. 4–5 – доцентом, к.ф.-м. н. С.В. Майоровской; гл. 6 – 7 – доцентом, к.ф.-м. н. В.В. Косьянчуком.

Задачник может быть использован студентами экономических специальностей различных вузов всех форм обучения.

Авторы будут благодарны за все замечания и предложения по улучшению данного сборника.

Раздел I. Элементы линейной и векторной алгебры

Основы аналитической геометрии

Глава 1. Элементы линейной алгебры

1.1. Матрицы и операции над ними

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица mn действительных чисел, записываемая в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Если число строк матрицы A равно числу ее столбцов, то есть $m = n$, то матрицу называют *квадратной* порядка n и обозначают A_n . Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной матрицей*. Диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны 1, называется *единичной матрицей* и обозначается E .

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, стоящие ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю.

Транспонированием матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ называется такое ее преобразование, при котором строки и столбцы меняются местами с сохранением их номеров и порядком следования элементов. Матрица, полученная транспонированием матрицы A , называется *транспонированной* и обозначается A' . Таким образом, $A' = (a'_{ij})_{n \times m}$, где $a'_{ji} = a_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{m \times n}$ и $B = (b_{ij})_{m \times n}$ называется такая матрица $C = (c_{ij})_{m \times n}$, в которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$). Кратко записывают $C = A + B$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ на число α называется такая матрица $B = (b_{ij})_{m \times n}$, в которой $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$). Кратко пишут $B = A \cdot \alpha$ или $B = \alpha \cdot A$.

Произведением матрицы $A = (a_{ik})_{m \times n}$ на матрицу $B = (b_{kj})_{n \times p}$ справа (или матрицы B на матрицу A слева) называется такая матрица $C = (c_{ij})_{m \times p}$, в которой $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, p})$.

Произведение матрицы A на матрицу B справа обозначается $C = AB$ (так же обозначается произведение матрицы B на матрицу A слева). Правило умножения матриц формулируется следующим образом: чтобы получить элемент c_{ij} , стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца матрицы $C = AB$, нужно элементы i -й строки матрицы A умножить на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B и полученные произведения сложить.

Пример 1.1. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & 4 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 & 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 & 0 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -8 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $AB \neq BA$.

Пример 1.2. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Тогда

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Таким образом, $AB = BA = 0$, хотя $A \neq 0$, $B \neq 0$.

Многочлены от матриц. Пусть A – произвольная квадратная матрица n -го порядка, k – натуральное число. Тогда k -й степень матрицы A называется произведение k матриц, каждая из которых равна A : $A^k = \underbrace{A A \dots A}_{k \text{ раз}}$. Нулевой степе-

пению A^0 квадратной матрицы A ($A \neq 0$) называется единичная матрица, порядок которой равен порядку A : $A^0 = E$.

Пусть $f(t) = \alpha_0 t^m + \alpha_1 t^{m-1} + \dots + \alpha_m$ есть многочлен аргумента t , где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ – действительные числа. Тогда *многочленом $f(A)$ от матрицы A* называется матрица $f(A) = \alpha_0 A^m + \alpha_1 A^{m-1} + \dots + \alpha_m E$; порядок матрицы $f(A)$ совпадает с порядком матрицы A . Если $f(A)$ есть нулевая матрица: $f(A) = 0$, то многочлен $f(t)$ называется *аннулирующим многочленом* матрицы A , а сама матрица A называется *корнем многочлена $f(t)$* .

Пример 1.3. Если $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $f(t) = t^2 - 2t + 3$, то

$$f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Определить размерность следующих матриц:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}, [2], \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, [-1 \quad -2 \quad -3].$$

1.2. Какие из следующих матриц являются диагональными, верхними треугольными, нижними треугольными:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}?$$

1.3. Дана матрица $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 2 & 5 & -7 \\ 0 & \sqrt{2} & -3 \end{bmatrix}$. Чему равны элементы b_{22}, b_{31}, b_{13} ?

Какие элементы образуют главную диагональ, какие – побочную?

1.4. Найти $A - 2B + 3C$, если:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 4 & 1 \\ -1/2 & 5/2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.5. Найти матрицу X из уравнения:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 3X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.6. Найти AB и установить, существует ли BA , если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 300 & 200 \\ 400 & -100 \\ 100 & -300 \\ 200 & 500 \end{bmatrix}.$$

1.7. Найти AB и BA , если:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{г) } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{д) } A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сделать вывод о выполнении равенства $AB = BA$.

1.8. Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} -4 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Найти те по-

парные произведения данных матриц, которые существуют.

1.9. На примере матриц A и B убедиться, что $AB = 0$, хотя $A \neq 0$, $B \neq 0$, если:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{bmatrix}.$$

1.10. Дано:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Показать, что $AX = BX$, хотя $A \neq B$.

1.11. Найти A^2 , если $A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$.

1.12. Показать, что операция транспонирования матрицы обладает свойствами:

а) $(A + B)' = A' + B'$; б) $(AB)' = B'A'$; в) $(cA)' = cA'$.

1.13. Найти $A'B'BA$, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1.14. Дано:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Найти AB , BX , $B'BX$, AY , $A'AY$.

1.15. Даны матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определить размерность следующих матриц: AC , AD , DA , BC , CB , DAC , $BCDA$.

Найти:

- 1) элемент, стоящий во второй строке и втором столбце матрицы AC ;
- 2) элемент, стоящий в четвертой строке и первом столбце матрицы BC ;
- 3) элемент, стоящий в последней строке и последнем столбце матрицы DA ;
- 4) элемент, стоящий в первой строке и первом столбце матрицы BC .

1.16. Пользуясь свойствами умножения матриц, вычислить наиболее ра-

ционально AB , если $A = \begin{bmatrix} 340 & 510 \\ 170 & 340 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 24 & -36 \\ -12 & 24 \end{bmatrix}$.

1.17. Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$. Найти мат-

рицу $D = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$, если $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$.

1.18. Найти $f(A)$, если:

а) $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$;

б) $f(x) = x^2 - x + 1$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$;

г) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

д) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

е) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 5$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.19. Найти $2f(A) - 3g(A)$, если $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^3 - x^2 + 5x + 4$,

$g(x) = x^2 - 2x + 1$.

1.20. Найти $f(B) - 2g(B)$, если $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$,

$g(x) = 3x + 5$.

1.21. Найти $(f(A))^2$, если $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $f(x) = x + 1$.

1.22. Найти $(f(A))^3$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $f(x) = 2x + 1$.

1.23. Выполнить указанные действия:

а) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^2$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5$; в) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^4$; г) $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^3$.

1.24. Вычислить выражения при $n = 2$ и $n = 3$, обнаружить закономерность и с помощью метода математической индукции обосновать ответ:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$; б) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n$; в) $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^n$; г) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$.

1.2. Определители квадратных матриц и их свойства. Правило Крамера решения систем линейных уравнений

Пусть имеется произвольная квадратная матрица n -го порядка:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Каждой такой матрице поставим в соответствие число, обозначаемое $|A|$ или $\det A$ и называемое *определителем* этой матрицы. Для обозначения определителей также используют греческую букву Δ .

При $n = 1$ матрица (1.1) имеет вид $A = [a_{11}]$, и, по определению, будем считать определителем этой матрицы (определителем первого порядка) само число a_{11} , т.е. $\det A = a_{11}$.

Пусть теперь $n \geq 2$. *Минором* M_{ik} элемента a_{ik} матрицы (1.1) назовем определитель матрицы $(n - 1)$ -го порядка, полученной из (1.1) вычеркиванием i -й строки и k -го столбца. *Алгебраическим дополнением* A_{ik} элемента a_{ik} матрицы (1.1) назовем произведение множителя $(-1)^{i+k}$ на минор M_{ik} , т.е. $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$. Определителем матрицы n -го порядка называется сумма произведений элементов первой строки матрицы на их алгебраические дополнения:

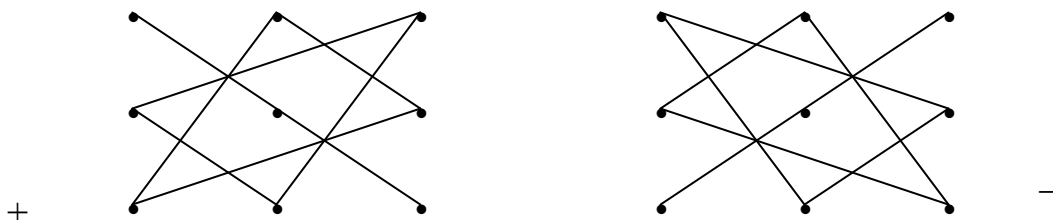
$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^n a_{1k}A_{1k}. \quad (1.2)$$

Формула (1.2) называется разложением определителя n -го порядка по элементам первой строки.

Вычислим определитель третьего порядка:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1.3)\end{aligned}$$

Каждое из шести слагаемых в (1.3) называется членом определителя третьего порядка и есть произведение трех элементов, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца. Чтобы составить выражение (1.3), можно воспользоваться схемой Саррюса (или правилом треугольников), согласно которой со знаком плюс берутся произведения элементов главной диагонали и произведения элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Со знаком минус берутся произведения элементов побочной диагонали и произведения элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали:



Перечислим свойства определителей.

1. Определитель матрицы, полученной из данной транспонированием, равен определителю данной матрицы: $\det A' = \det A$.
2. При перестановке местами двух строк (столбцов), определитель меняет знак на противоположный, сохраняя при этом свою абсолютную величину.
3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.
4. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя умножить на одно и то же число, то сам определитель умножится на это число.

Следствие 1. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Следствие 2. Если определитель содержит нулевую строку (столбец), то он равен нулю.

Следствие 3. Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю.

5. Если каждый элемент i -й строки (k -го столбца) определителя есть сумма двух слагаемых: $a_{ik} = a'_{ik} + a''_{ik}$, то определитель есть сумма двух определителей; в первом из которых i -я строка (k -й столбец) состоит из элементов a'_{ik} , во втором – из элементов a''_{ik} .

6. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на их алгебраические дополнения.

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

8. Если к элементам некоторой строки определителя прибавить элементы другой строки, умноженные на произвольное число α , то определитель не изменится.

9. Определитель произведения квадратных матриц одного порядка равен произведению определителей этих матриц.

Пример 1.4. Вычислить определитель треугольной матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Решение. Применяя последовательно формулу (1.2), получим

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}.$$

Итак, определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов. Аналогично можно показать, что определитель матрицы, у которой равны нулю все элементы, находящиеся выше (ниже) побочной диагонали, равен произведению числа $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ и всех элементов побочной диагонали.

ли. Например,
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{4 \cdot 3}{2}} \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = 40.$$

Пример 1.5. Вычислить определитель $\Delta =$

лученный определитель по третьему столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 7 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 0 & 15 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 5 & 15 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя третью строку к первой и второй строкам, получим:

$$\Delta = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (21 - 24) = -9.$$

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

[illegible]

Правило Крамера: если определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

системы (1.4) отличен от нуля, то система имеет единственное решение (x_1, \dots, x_n) , определяемое по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.5)$$

где $\Delta = \det A$, а Δ_i — определитель, полученный из определителя матрицы A заменой его i -го столбца столбцом свободных членов, $i = \overline{1, n}$. Формулы (1.5) называются формулами Крамера.

Пример 1.6. Решить систему уравнений
$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned} \right\}$$
 по формулам

Крамера.

Р е ш е н и е. Выпишем матрицу системы $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ и вычислим ее

определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 12 + 1 - 16 + 9 = 14 \neq 0$.

Значит, система имеет единственное решение. Для его нахождения вычисляем вспомогательные определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, заменяя в определителе Δ 1, 2 и 3-й столбцы столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -14.$$

По формулам Крамера находим: $x_1 = \frac{14}{14} = 1; x_2 = \frac{0}{14} = 0; x_3 = \frac{-14}{14} = -1$.

Задачи для самостоятельного решения

1.25. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 0 & -1 \end{vmatrix};$ в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix};$ г) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix};$ д) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix};$

е) $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix};$ ж) $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$ з) $\begin{vmatrix} a & b \\ na & nb \end{vmatrix};$ и) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}.$

1.26. Вычислить определители, пользуясь свойствами определителей:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix};$ б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix};$ в) $\begin{vmatrix} 3/4 & 2 & -1/2 & -5 \\ 1 & -2 & 3/2 & 8 \\ 5/6 & -4/3 & 4/3 & 14/3 \\ 2/5 & -4/5 & 1/2 & 12/5 \end{vmatrix};$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{д)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{е)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\text{ж)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{з)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 8 \\ 200 & -200 & 0 & 1600 \\ 19 & 20 & 31 & 190 \\ 1991 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\text{и)} \begin{vmatrix} 365 & 275 & 569 \\ 3 & 3 & 3 \\ 362 & 272 & 565 \end{vmatrix}; \quad \text{к)} \begin{vmatrix} 2401 & 1986 \\ 2402 & 1987 \end{vmatrix}.$$

1.27. Пусть A – квадратная матрица четвертого порядка и ее определитель равен двум. Найти определитель матрицы $3A$.

1.28. Пусть A – квадратная матрица пятого порядка и $\det A = 3$. Найти $\det(2A)$.

1.29. Пусть A – квадратная матрица n -го порядка и $\det A = b$. Найти $\det(kA)$.

1.30. При каком значении α следующие определители равны нулю:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 3-\alpha & 2 \\ 2 & -\alpha \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \end{vmatrix}; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 3-\alpha & 0 & 0 \\ 2 & -\alpha & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & \alpha \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{е)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & \alpha \end{vmatrix}?$$

1.31. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

1.32. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n-1} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \dots a_{n1}.$$

1.33. Вычислить определители, используя теорему о разложении определителя по элементам строки (столбца):

а) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix};$

в) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix};$

г) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 10 & -1 & 5 \\ -3 & -15 & -6 & 13 \end{vmatrix}.$

1.34. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ x & y & z & t \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

разлагая его по элементам

второй строки.

1.35. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & \alpha & 5 & -4 \end{vmatrix},$$

разлагая его по элементам

второго столбца.

1.36. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$

в) $\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}.$

1.37. Не раскрывая определителей, показать, что они равны нулю:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & 1 & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & 1 & \cos^2 \beta \\ \sin^2 \gamma & 1 & \cos^2 \gamma \end{vmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} 1 & c & a+b \\ 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} x & y & ax+by \\ z & t & az+bt \\ u & v & au+bv \end{vmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{vmatrix} 3\sin \alpha & 2\cos \alpha & \sin(\alpha + \delta) \\ 3\sin \beta & 2\cos \beta & \sin(\beta + \delta) \\ 3\sin \gamma & 2\cos \gamma & \sin(\gamma + \delta) \end{vmatrix}; \quad \text{е) } \begin{vmatrix} 1+2a & 2001 & a & x \\ 1+2b & 2002 & b & x \\ 1+2c & 2003 & c & x \\ 1+2d & 2004 & d & x \end{vmatrix}.$$

1.38. Числа 1370, 1644, 2055, 3425 делятся на 137. Доказать, что опреде-

$$\text{литель } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} \text{ также делится на 137.}$$

1.39. Вычислить определители

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \quad \text{приведением к треуголь-}$$

ному виду. На основании полученных результатов доказать, что определите-

$$\text{тель } n\text{-го порядка } \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} \text{ равен } (a + (n-1))(a-1)^{n-1}.$$

1.40. Решить уравнения:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x & x & x \\ 7 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 4 & x & x \\ x & 4 & x \\ x & x & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

1.41. Пользуясь свойствами определителей, доказать, что следующие определители n -го порядка равны указанным значениям:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = n!.$$

1.42. Вычислить определители методом опорного элемента:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.43. Проверить непосредственным вычислением, что

$$\left| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right| \left| \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right| \left| \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right|.$$

1.44. Найти $\det(AB)$, если $\det A = 2$, $\det B = -3$.

1.45. Найти $\det(AB)$, если $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1.46. Пользуясь правилом Крамера, решить следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} 3x + 7y = 2, \\ 2x + 5y = 1; \end{cases} & \text{б) } & \begin{cases} 4x - 3y - 1 = 0, \\ x + 3y - 4 = 0; \end{cases} & \text{в) } & \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 3; \end{cases} \\ \text{г) } & \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases} & \text{д) } & \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 25, \\ \text{е) } x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 16, \\ 17x_1 - x_2 = 17; \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ \text{ж) } x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5; \end{array} \right\};$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ \text{з) } 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ \text{и) } 2x_1 - x_2 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 5. \end{array} \right\}.$$

1.47. Решить систему при всех значениях параметра m :

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } (m+1)x - y = m, \\ (m-3)x + my = -9; \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} \text{б) } x - (m-1)y = 2, \\ (m+2)x + 2y = 4 - m^2. \end{array} \right\}.$$

1.3. Обратная матрица. Решение матричных уравнений

Квадратная матрица A n -го порядка называется невырожденной (неособенной), если ее определитель отличен от нуля: $\Delta = \det A \neq 0$. Если $\det A = 0$, то матрица A называется *вырожденной*.

Матрица B называется обратной к матрице A , если $AB = BA = E$, где E – единичная матрица. Обратную матрицу принято обозначать A^{-1} . Можно показать, что если для данной матрицы A существует обратная, то она единственная.

Теорема. Для того, чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы A была невырожденной. Тогда обратная матрица

находится по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$, где

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Матрица \tilde{A} называется присоединенной к матрице A . Ее элементами служат алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы A' .

Пример 1.7. Найти A^{-1} , если она существует, для матрицы $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Решение. Вычисляем $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$. Находим по-

следовательно $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = d$; $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -c$;

$A_{12} = (-1)^{2+1} M_{21} = -b$; $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = a$. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}.$$

Пример 1.8. Найти A^{-1} , если она существует, для $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Р е ш е н и е. Вычисляем определитель, разлагая по элементам второго столбца: $\det A = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

$$\text{Тогда } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверкой убеждаемся, что

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Для невырожденных матриц имеют место следующие свойства:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$; 2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 3. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$; 4. $(A^{-1})' = (A')^{-1}$,

справедливость которых рекомендуется проверить самостоятельно.

Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований ее строк

Пусть A – невырожденная матрица. Назовем элементарными преобразованиями строк этой матрицы:

1. Перемену двух строк местами.
2. Умножение всех элементов строки на число, не равное нулю.
3. Прибавление ко всем элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженной на некоторое число.

Применяя указанные элементарные преобразования строк к матрице

$$[A|E] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right],$$

приведем ее к виду:

$$[E|B] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array} \right].$$

Поскольку $A^{-1}[A|E] = [A^{-1}A|A^{-1}E] = [E|A^{-1}]$, то $B = A^{-1}$. Отсюда получаем следующий способ нахождения обратной матрицы A^{-1} (при условии, что $\det A \neq 0$):

1. Записываем матрицы A и E рядом через черту: $[A|E]$.
2. С помощью элементарных преобразований над строками полученной матрицы приводим ее к виду $[E|B]$.
3. Выписываем обратную матрицу $A^{-1} = B$.

Пример 1.9. С помощью элементарных преобразований над строками

найти матрицу A^{-1} , обратную матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Решение. Выпишем матрицу $[A|E]$, указывая выполняемые элементарные преобразования над строками (римскими цифрами указан номер строки):

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] :2 \sim \\
& \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} -\frac{3}{2} \cdot \text{III} \\ -2 \cdot \text{III} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

$$\text{Тогда } A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Проверка: } AA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы

Матричным назовем уравнение, в котором роль неизвестного играет некоторая матрица X . Простейшими примерами таких уравнений могут служить уравнения $AX = C$, $XB = C$, $AXB = C$, где X и C – прямоугольные матрицы равных размеров, A и B – квадратные матрицы соответствующих размеров. Если предположить, что матрицы A и B невырожденные, то эти уравнения имеют одно и только одно решение $X = A^{-1}C$, $X = CB^{-1}$ и $X = A^{-1}CB^{-1}$ соответственно. Действительно, рассмотрим, например, уравнение $AX = C$, где $\det A \neq 0$. Умножая слева обе части этого уравнения на A^{-1} , получим: $A^{-1}(AX) = A^{-1}C$, $(A^{-1}A)X = A^{-1}C$, $EX = A^{-1}C$, $X = A^{-1}C$.

Пример 1.10. Решить матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Обозначая $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$, получим $AXB = C$. Если $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$, то $X = A^{-1}CB^{-1}$. Находим

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1, \quad \text{тогда} \quad A^{-1} = -1 \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 42 = -2, \quad B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7/2 & -5/2 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7/2 & -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7/2 & -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Систему n линейных уравнений с n неизвестными (1.4) можно представить в виде матричного уравнения $AX = B$, где A – матрица системы (1.4),

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Поскольку матрица A – квадратная, то при условии $\det A \neq 0$ существует обратная матрица A^{-1} и тогда система (1.4) имеет единственное решение, матричная запись которого имеет вид $X = A^{-1}B$.

Пример 1.11. Решить систему уравнений
$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{array} \right\} \text{матричным}$$

методом.

Р е ш е н и е. Выпишем матрицу $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Найдем ее определитель

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 1 - 2 - 1 - 6 = -16 \neq 0.$$

Следовательно, матрица A неособенная и для нее существует обратная матрица A^{-1} . Найдем алгебраические дополнения матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 3; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 + 2) = -4;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 1) = -5;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(3 + 1) = -4;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Тогда обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{-16} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,0625 & -0,4375 & 0,25 \\ -0,1875 & 0,3125 & 0,25 \end{bmatrix}.$$

Используя равенство $X = A^{-1}B$, получим

$$X = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,0625 & -0,4375 & 0,25 \\ -0,1875 & 0,3125 & 0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 \cdot 2 + 0,25 \cdot 2 + 0 \cdot 7 \\ 0,0625 \cdot 2 - 0,4375 \cdot 2 + 0,25 \cdot 7 \\ -0,1875 \cdot 2 - 0,3125 \cdot 2 + 0,25 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.48. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Используя определение обратной матри-

цы, выяснить, является ли матрица B обратной матрице A , если

$$\text{а) } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } B = \begin{bmatrix} -3/2 & 4 \\ 1/2 & -4 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}; \quad \text{г) } B = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

1.49. Проверить, являются ли взаимно обратными матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.50. Выяснить, при каких значениях k существует матрица, обратная данной:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{bmatrix} 2-k & 1 & 1 \\ 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 1 & 2-k \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{bmatrix} -1 & 2 & k \\ k-1 & 5 & k \\ k & 3 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{bmatrix} k & 0 & k^2-1 \\ 1 & 0 & k \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

1.51. Пусть A – невырожденная матрица. Записать формулу для нахождения обратной матрицы, если $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

1.52. Пусть $B = (b_{ik})$ – матрица, обратная невырожденной матрице $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$. Найти в матрице B элемент: а) b_{32} ; б) b_{21} ; в) b_{22} .

1.53. Найти матрицы, обратные данным, если они существуют. Результат проверить умножением.

$$\text{а) } \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{г) } \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{е) } \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{ж) } \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\text{з) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{и) } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{к) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/12 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{л) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{м) } \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.54. Решить матричным способом следующие системы уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ \text{а) } 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ \text{б) } x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5; \end{array} \right\};$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ \text{в) } 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 6x_1 - x_2 + x_3 = 10; \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -16, \\ \text{г) } 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 24, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 8; \end{array} \right\};$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ \text{д) } 2x_1 - x_2 - 1 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0; \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ \text{е) } 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5. \end{array} \right\}$$

1.55. Решить матричные уравнения:

$$\text{а) } X \begin{bmatrix} 10 & 26 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 1 & -5 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -12 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}; \quad \text{г) } \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}; \quad \text{е) } \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix};$$

$$\text{ж) } X \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{з) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.56. Найти матрицу X , если

$$\text{а) } AX + B = 2C, \text{ где } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } XA - 2B = E, \text{ где } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

1.4. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу $A_{m \times n}$. Пусть k – натуральное число, удовлетворяющее неравенству $k \leq \min(m, n)$. Выберем в матрице A произвольным образом k строк с номерами i_1, i_2, \dots, i_k , где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$, и k столбцов с номерами j_1, j_2, \dots, j_k , где $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$. Из элементов, стоящих на пересечении выбранных k строк и k столбцов, составим определитель k -го порядка, который обозначим $M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ и назовем его минором k -го порядка матрицы A . Можно показать, что из $m \times n$ матрицы $A_{m \times n}$ можно составить

$C_m^k \cdot C_n^k$ миноров k -го порядка.* Например, если матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 11 & -1 \end{bmatrix}$, то

$$M_{3,4}^{1,2} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad M_{2,3,4}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 11 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Нетрудно проверить, что все миноры третьего порядка данной матрицы равны нулю. Таким образом, в матрице A существует минор 2-го порядка, отличный от нуля (например $M_{3,4}^{1,2}$), а все миноры третьего порядка равны нулю.

Определение. Рангом матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Из этого определения вытекает, что если ранг матрицы равен r , то среди миноров этой матрицы есть, по крайней мере, один минор r -го порядка, отличный от нуля (его будем называть базисным минором), а все миноры порядка $r + 1$ и выше равны нулю. Ранг матрицы A обозначается $r(A)$. По определению, ранг нулевой матрицы O равен нулю; тогда ранг $r(A)$ произвольной матрицы $A_{m \times n}$ удовлетворяет неравенству $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$.

Поскольку вычислять ранг матрицы по определению достаточно трудоемко, то с помощью элементарных преобразований матрицу приводят к такому виду, из которого ранг матрицы очевиден.

Элементарные преобразования.

Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований

Элементарными преобразованиями матрицы называются:

1. Транспонирование.
2. Перемена местами двух строк или двух столбцов.
3. Умножение всех элементов строки или столбца на число c , отличное от нуля.

* Здесь через C_n^k обозначено число сочетаний из n элементов по k элементов: $C_n^k = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$.

4. Прибавление ко всем элементам строки или столбца соответствующих элементов другой строки или столбца, умноженных на одно и то же число.

Теорема. *Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.*

Отметим, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к виду

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

где на главной диагонали стоят r единиц, а все остальные элементы матрицы равны нулю. Ясно, что ранг такой матрицы равен r , тогда по теореме ранг матрицы A равен r .

Пример 1.12. Вычислить ранг матрицы A с помощью элементарных преобразований, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 11 & -1 \end{bmatrix}$.

Решение. Вычитая утроенную первую строку из третьей, а затем вторую строку из третьей, получим:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 11 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где знаком \sim обозначено, что соединяемые им матрицы имеют один и тот же ранг.

Вычитая теперь из второго столбца удвоенный первый, а из третьего столбца – утроенный первый, получим $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Наконец, из третьего столбца вычтем удвоенный второй, а к четвертому столбцу прибавим второй, в результате чего матрица приведется к виду (1.6):

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ откуда } r(A) = 2.$$

Замечание. При вычислении ранга матрицы с помощью элементарных преобразований не обязательно получать вид (1.6), достаточно привести матрицу к трапециевидной форме, количество ненулевых строк в которой равно рангу матрицы.

Задачи для самостоятельного решения

1.57. В каком случае ранг квадратной матрицы n -го порядка равен n ?

1.58. Пусть в матрице $A_{20 \times 70}$ существует отличный от нуля минор порядка 10, а все миноры порядка 11 равны нулю. Чему равен ранг матрицы A ?

1.59. Найти ранг r матрицы и указать один из базисных миноров:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; & \text{б) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; & \text{в) } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}; \\ \text{г) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; & \text{д) } \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}; & \text{е) } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \\ \text{ж) } \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 20 & 10 & -40 \\ 10 & -30 & 40 \end{bmatrix}; & \text{з) } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}. \end{array}$$

1.60. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \\ 4 & 3 & 7 & 11 \end{bmatrix}; & \text{б) } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \\ \text{в) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ -4 & -8 & 12 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -9 & 12 \end{bmatrix}; & \text{г) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}; \end{array}$$

$$\text{д)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 9 \\ 0 & 10 & 1 & 10 \end{bmatrix};$$

$$\text{е)} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 10 & 3 \end{bmatrix}.$$

1.61. Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований:

$$\text{а)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \end{bmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix};$$

$$\text{г)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{bmatrix} 24 & 14 & 17 & 15 \\ 23 & 13 & 16 & 14 \\ 47 & 27 & 33 & 29 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

1.62. При каких значениях λ матрица $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ имеет ранг, равный 1?

1.63. При каких значениях λ ранг матрицы A равен двум, если:

$$\text{а)} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix};$$

$$\text{б)} A = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 0 & \lambda - 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix};$$

$$\text{в)} A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & -\lambda \\ 8 & -4 & 8 & \lambda \\ 6 & -3 & 12 & \lambda \end{bmatrix};$$

$$\text{г)} A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.64. При каких значениях λ ранг матрицы A равен трем, если:

$$\text{а)} A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix};$$

$$\text{б)} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda - 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & \lambda & -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \lambda & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

1.65. При каких значениях λ ранг матрицы $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ -2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ равен:

а) 1; б) 2; в) 3?

1.66. При каких значениях λ ранг матрицы $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ равен:

а) 1; б) 2; в) 3?

1.67. Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} \lambda & 5\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda \\ -\lambda & -2\lambda & -3\lambda \end{bmatrix}.$

1.68. Проверить справедливость неравенств $r(AB) \leq r(A)$, $r(AB) \leq r(B)$, если:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.69. Проверить справедливость неравенств $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$, если:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{r) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1.70. Найти значения λ , при которых матрица

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$
 имеет

наименьший ранг. Чему равен ранг при найденных значениях λ и чему он равен при других значениях λ ?

1.71. Чему равен ранг матрицы $\begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda & 5 \end{vmatrix}$ при различных значениях λ ?

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

яx λ?

1.72. Вычислить ранг матрицы с помощью элементарных преобразований:

a) $\begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{bmatrix};$

$$\text{б) } \begin{bmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{bmatrix}.$$

1.5. Система m линейных уравнений с n неизвестными

Системой m линейных уравнений с n неизвестными (переменными) называется система вида:

[illegible]

Здесь x_1, x_2, \dots, x_n – неизвестные, $a_{ij} (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – заданные действительные числа, называемые *коэффициентами* системы; $b_i (j = \overline{1, m})$ – заданные действительные числа, называемые *свободными членами*.

Решением системы (1.8) называется такой упорядоченный набор значений неизвестных $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, при подстановке которых в систему (1.8) все

ее уравнения обращаются в верные числовые равенства. Два решения $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ и $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ называются различными, если хотя бы для одного значения $i (i = \overline{1, n})$ равенство $x_i^0 = x_i^1$ не выполняется. Система (1.8) называется *совместной (разрешимой)*, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется *несовместной (неразрешимой)*. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Если ввести матрицу A , составленную из коэффициентов при неизвестных, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, матрицу-столбец неизвестных $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ и матрицу-столбец $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$ свободных членов, то систему (1.8) можно переписать в

матричной форме: $AX = B$

Расширенной матрицей системы (1.8) называется матрица

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

получаемая из матрицы A добавлением в ней справа столбца свободных членов.

Критерием совместности системы (1.8) является теорема Кронекера-Капелли: для совместности системы (1.8) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A равнялся рангу расширенной матрицы \tilde{A} .

При выполнении этого условия, если $r(A) = r(\tilde{A}) = r$ то в случае $r = n$ система (1.8) является определенной (имеет единственное решение), а в случае $r < n$ – неопределенной.

Метод Гаусса применяется для решения систем m линейных уравнений с n неизвестными, заданной в общем виде (1.8). Этот метод иначе называют методом последовательного исключения неизвестных.

Элементарными преобразованиями системы (1.8) называются:

- 1) перемена местами любых двух уравнений системы;
- 2) умножение обеих частей какого-либо уравнения системы на число $\lambda \neq 0$;

- 3) прибавление к одному из уравнений другого уравнения, умноженного на произвольное число λ ;
- 4) удаление из системы уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$.

Можно доказать, что элементарные преобразования системы (1.8) приводят к системе, равносильной (эквивалентной) исходной.

Метод Гаусса состоит из двух частей: прямого и обратного хода. В результате *прямого хода* система приводится к равносильной системе ступенчатого или треугольного вида с помощью элементарных преобразований (если при этом процессе не обнаружится несовместность системы). Второй этап решения задачи, называемый *обратным ходом*, состоит в последовательном нахождении значений неизвестных x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 из полученной в результате прямого хода системы ступенчатого или треугольного вида.

Решение системы методом Гаусса обычно осуществляют, работая с расширенной матрицей коэффициентов системы, в которой каждой строке соответствует уравнение исходной системы.

Пример 1.13. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0, \\ x_2 - 2x_4 &= 2, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Р е ш е н и е. Переставив первое и третье уравнения системы, получим расширенную матрицу вида

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right]. \quad (1.10)$$

Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, то с помощью первого уравнения исключим x_1 из всех остальных уравнений, для чего первую строку матрицы (1.10) умножим на (-2) и сложим с третьей, а затем вычтем первую строку из четвертой. Получим

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{array} \right]. \quad (1.11)$$

Поскольку в новой матрице (1.11) $a'_{22} \neq 0$, то теперь с помощью второго уравнения исключим x_2 из третьего и четвертого уравнений, для чего от третьей строки вычтем вторую, умноженную на 3, и из четвертой строки вычтем вторую, умноженную также на 3. Получим матрицу вида

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & -4 \end{array} \right]. \quad (1.12)$$

В матрице (1.12) $a'_{33} \neq 0$, следовательно, с помощью третьего уравнения можно исключить x_3 из четвертого уравнения, для чего из четвертой строки матрицы (1.12) вычтем третью, умноженную на 3. В результате придем к матрице

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 8 \end{array} \right]. \quad (1.13)$$

Система, соответствующая матрице (1.13), является системой треугольного вида. Выпишем ее:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ x_2 - 2x_4 = 2, \\ 2x_3 + x_4 = -4, \\ -7x_4 = 8. \end{array} \right\} \quad (1.14)$$

Такая система имеет единственное решение, которое находится с помощью обратного хода. Двигаясь от последнего уравнения к первому, получим:

$$-7x_4 = 8, x_4 = -\frac{8}{7}; x_3 + 5x_4 = -4, x_3 = -4 - 5 \cdot \left(-\frac{8}{7}\right), x_3 = \frac{12}{7}; x_2 - 2x_4 = 2,$$

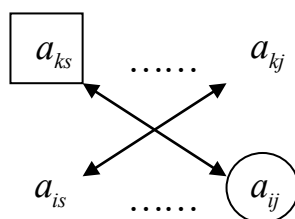
$$x_2 = 2x_4 + 2, x_2 = 2 - \frac{16}{7} = -\frac{2}{7}; x_1 = x_2 + 2x_3 - x_4 - 1 = -\frac{1}{7} + \frac{24}{7} + \frac{8}{7} - 1 = \frac{23}{7}.$$

$$\text{О т в е т: } x_1 = \frac{23}{7}, x_2 = -\frac{2}{7}, x_3 = \frac{12}{7}, x_4 = -\frac{8}{7}.$$

Существуют различные методы приведения матрицы к ступенчатому виду. Для ручного счета удобны правила исключения Гаусса, реализуемые с помощью так называемого «разрешающего элемента», который при вычислениях заключается в рамку и всегда должен быть отличен от нуля. Первый шаг (исключение неизвестной x_1) прямого хода выполняется с разрешающим элементом $a_{11} \neq 0$, второй шаг (исключение неизвестного x_2) – с помощью $a'_{22} \neq 0$ (если $a'_{22} = 0$, то надо переставить уравнения так, чтобы $a'_{22} \neq 0$, а если

$a'_{i2} = 0$ ($i = \overline{2, m}$), то пытаемся исключить неизвестную x_3 и т.д.). Пересчет элементов матрицы выполняется по следующим правилам:

- 1) элементы разрешающей строки и всех вышерасположенных строк остаются неизменными;
- 2) элементы разрешающего столбца, находящиеся ниже разрешающего элемента, обращаются в нули;
- 3) все прочие элементы матрицы вычисляются по *правилу прямоугольника*: преобразованный элемент a'_{ij} новой матрицы равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.



$$a'_{ij} = a_{ks} \cdot a_{ij} - a_{is} \cdot a_{kj}.$$

Здесь a_{ks} – разрешающий элемент, a_{ks} , a_{ij} – главная диагональ, a_{is} , a_{kj} – побочная диагональ.

Пример 1.14. Решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 6. \end{aligned} \right\}$$

Р е ш е н и е. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array} \right].$$

Элемент $a_{11} = 2 \neq 0$ принимаем за разрешающий. Первую строку составляем без изменения, элементы первого (разрешающего) столбца заполняем нулями, а остальные элементы вычисляем по правилу прямоугольника:

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 \cdot 3 - 4 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 & 2 \cdot 6 - 4 \cdot 4 \\ 0 & 2 \cdot 5 - 8 \cdot 2 & 2 \cdot (-3) - 8 \cdot (-1) & 2 \cdot 4 - 8 \cdot 1 & 2 \cdot 12 - 8 \cdot 4 \\ 0 & 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 & 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 \end{array} \right] = \\
& = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

В полученной матрице элементы второй и третьей строки разделим на 2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

На втором шаге разрешающим является элемент $a'_{22} = -1 \neq 0$. Первые две строки и первый столбец переписываем без изменения, под разрешающим элементом записываем нули, а остальные элементы вычисляем по правилу прямоугольника:

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \cdot 1 - (-3) \cdot 1 & -1 \cdot 0 - (-3) \cdot 0 & -1 \cdot (-4) - (-3) \cdot (-2) \\ 0 & 0 & -1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 & -1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 - 0 \cdot (-2) \end{array} \right] = \\
& = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

В полученной матрице элементы третьей строки разделим на 2 и на третьем шаге разрешающим является элемент $a'_{33} = 1 \neq 0$. Элементы первых трех строк сохраняем без изменений, под разрешающим элементом запишем нуль. Остальные элементы пересчитаем по правилу прямоугольника:

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \end{array} \right] = \\
= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Так как система привелась к треугольному виду, то она имеет единственное решение. Найдем его, выписав систему, соответствующую последней матрице:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 4, \\ -x_2 + x_3 &= -2, \\ x_3 &= -1, \\ -x_4 &= 1. \end{aligned} \right\}.$$

Отсюда находим

$$x_4 = -1, \quad x_3 = -1, \quad x_2 = x_3 + 2 = 1,$$

$$2x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 + 4, \quad 2x_1 = -2 \cdot 1 + (-1) - (-1) + 4, \quad 2x_1 = 2, \quad x_1 = 1.$$

О т в е т: $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = -1.$

Пример 1.15. Решить систему уравнений.

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 &= 3. \end{aligned} \right\}.$$

Р е ш е н и е. Начиная с расширенной матрицы системы и подвергая ее последовательно гауссовым исключениям, получим:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & \boxed{8} & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 20 & -16 & 4 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Последней матрице соответствует система уравнений вида:

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ -10x_3 + 8x_4 = -2. \end{array} \right\}$$

В последнем уравнении положим $x_4 = C_1$, где C_1 – произвольное действительное число, тогда $-10x_3 = -2 - 8C_1$, $x_3 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}C_1$. Подставим x_3 и x_4 в первое

уравнение системы: $2x_1 + 3x_2 - \frac{1}{5} - \frac{4}{5}C_1 + C_1 = 1$. Пусть $x_2 = C_2$, где $C_2 \in R$, тогда

$$2x_1 = -3C_2 + \frac{6}{5} - \frac{1}{5}C_1, \quad x_1 = -\frac{1}{10}C_1 - \frac{3}{2}C_2 + \frac{3}{5}.$$

О т в е т: система имеет множество решений вида

$$x_3 = \frac{3}{5} - \frac{1}{10}C_1 - \frac{3}{2}C_2, \quad x_2 = C_2, \quad x_3 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}C_1, \quad x_4 = C_1, \quad \text{где } C_1, C_2 \in R.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.73. Какие из следующих систем уравнений являются: 1) несовместными; 2) совместными и определенными?

$$\text{а) } \left. \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 = 0. \end{array} \right\}; \quad \text{б) } \left. \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 = 2. \end{array} \right\}; \quad \text{в) } \left. \begin{array}{l} 0x_1 + 0x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{array} \right\};$$

$$\text{г) } \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{array} \right\}; \quad \text{д) } \left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 = 4. \end{array} \right\}; \quad \text{е) } \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2, \\ -x_1 - x_2 = 1. \end{array} \right\}$$

1.74. Исследовать каждую из указанных систем с помощью теоремы Кронекера-Капелли и в случае совместности решить ее:

$$\text{а) } \left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \end{array} \right\}; \quad \text{б) } \left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \end{array} \right\};$$

$$\text{в)} \left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2, \end{aligned} \right\};$$

$$\text{г)} \left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3, \end{aligned} \right\};$$

$$\text{д)} \left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3, \end{aligned} \right\};$$

$$\text{е)} \left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 0, \end{aligned} \right\};$$

$$\text{ж)} \left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -2, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \end{aligned} \right\};$$

$$\text{з)} \left. \begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 &= 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 5x_3 + 4x_4 &= 10, \end{aligned} \right\};$$

$$\text{и)} \left. \begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1, \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 &= 2, \end{aligned} \right\};$$

$$\text{к)} \left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 &= 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 3. \end{aligned} \right\}$$

1.75. При каком значении параметра λ система имеет единственное решение:

$$\text{а)} \left. \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 + \lambda x_2 - x_3 &= 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2, \end{aligned} \right\};$$

$$\text{б)} \left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= \lambda, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2. \end{aligned} \right\}$$

$$\text{1.76. При каком значении параметра } \lambda \text{ система } \left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

несовместна?

Исследовать системы и в случае совместности решить их, применяя метод Гаусса либо метод Жордана – Гаусса (метод полного исключения).

$$\text{1.77. } \left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 3. \end{aligned} \right\}$$

$$\text{1.78. } \left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

$$\text{1.79. } \left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 2. \end{aligned} \right\}$$

$$\text{1.80. } \left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 6. \end{aligned} \right\}$$

$$1.81. \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 = 7. \end{array} \right\}$$

$$1.83. \left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{array} \right\}$$

$$1.85. \left. \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 18, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{array} \right\}$$

$$1.87. \left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{array} \right\}$$

$$1.89. \left. \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{array} \right\}$$

$$1.91. \left. \begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7. \end{array} \right\}$$

$$1.93. \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{array} \right\}$$

$$1.82. \left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{array} \right\}$$

$$1.84. \left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 7. \end{array} \right\}$$

$$1.86. \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{array} \right\}$$

$$1.88. \left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4, \\ 7x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 7. \end{array} \right\}$$

$$1.90. \left. \begin{array}{l} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{array} \right\}$$

$$1.92. \left. \begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{array} \right\}$$

$$1.94. \left. \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{array} \right\}$$

1.95.

a)

6)

Фундаментальная система решений

член в каждом уравнении равен нулю:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\}$$

рангу расширенной матрицы. Решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ называется *нулевым* или *тривиальным* решением. Если ранг r матрицы однородной системы равен числу n неизвестных, то нулевое решение будет единственным. Если же $r < n$, то всегда можно построить $(n - r)$ линейно независимых вектор-решений (о векторах читайте в гл.2). *Фундаментальной* системой решений системы однородных линейных уравнений называется совокупность максимального числа линейно-независимых вектор-решений. Для построения *нормированной* фундаментальной системы решений в найденном множестве решений однородной системы поочередно придаем одному из свободных неизвестных значение 1, а остальные свободные неизвестные полагаем равными нулю. Затем вычисляем базисные неизвестные.

Пример 1.16. Найти нормированную фундаментальную систему решения для однородной системы:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Выпишем матрицу системы и сделаем один шаг гауссова исключения: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$. Тогда имеем равно-

сильную систему: $\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0, \\ -x_2 - 6x_3 + 5x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned} \right\}$ Базисными будут неизвестные

x_1 и x_2 , тогда $x_2 = -6x_3 + 5x_4 - x_5$; $x_1 = 3x_3 - 3x_4 + x_5$, где $x_3, x_4, x_5 \in R$. Полагая $x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$, имеем $\bar{x}^1 = (3, -6, 1, 0, 0)$; полагая $x_4 = 1, x_3 = 0, x_5 = 0$, имеем $\bar{x}^2 = (-3, 5, 0, 1, 0)$, полагая $x_5 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$, имеем $\bar{x}^3 = (0, -1, 0, 0, 1)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить однородные системы уравнений.

1.98. $\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$

1.99. $\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$

1.100. $\left. \begin{aligned} 6x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned} \right\}$

1.101. $\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned} \right\}$

1.102. $\left. \begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 7x_3 &= 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$

1.103. $\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0, \\ 5x_1 - x_2 - x_4 &= 0. \end{aligned} \right\}$

1.104. $\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$

1.105. $\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 &= 0, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 0. \end{aligned} \right\}$

$$1.106. \left. \begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 - 12x_5 + 3x_6 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 + x_6 &= 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 - 5x_5 &= 0, \\ x_2 + x_3 - 3x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 4x_5 - x_6 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$1.107. \left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Выяснить, существует ли фундаментальная система решений для каждой из указанных систем:

$$1.108. \left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0, \\ 3x_1 + 4x_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$1.109. \left. \begin{aligned} x_2 - 2x_1 - 3x_3 &= 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$1.110. \left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 8x_1 - 6x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$1.111. \left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 9x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_3 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Найти фундаментальную система решений для каждой из указанных систем:

$$1.112. \left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0, \\ 3x_1 - 6x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$1.113. \left. \begin{aligned} x_1 - 2x_1 + x_3 - 4x_4 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 - 4x_1 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$1.114. \left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$1.115. \left. \begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

1.7. Контрольные задания к главе 1

В задаче 1 каждого варианта выполнить указанные действия над матрицами.

В задаче 2 вычислить определитель, используя свойства определителей и теорему о разложении по элементам строки или столбца.

В задаче 3 решить систему линейных уравнений с помощью формул Крамера.

В задаче 4 найти матрицу, обратную данной и результат проверить умножением.

В задаче 5 исследовать данную систему на совместность и, в случае совместности, решить ее.

В задаче 6 решить данное матричное уравнение.

В задаче 7 найти ранг матрицы A в зависимости от значения параметра α .

В задаче 8 построить фундаментальную систему решений данной однородной системы линейных уравнений.

Вариант 1

$$1. \quad f(x) = 2x^2 + 3x + 5, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad f(A) = ?$$

$$2. \quad \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$3. \quad \left. \begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 &= 36. \end{aligned} \right\}$$

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$5. \quad \left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 3 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 8 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 6 &= 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$6. \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

$$8. \quad \left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Вариант 2

1. $f(x) = x^2 - 8x + 7$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $f(A) = ?$

2. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & -2 & \alpha & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Вариант 3

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. $A'B = ?$, $X'B'BX = ?$

2. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$5. \quad \left. \begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 15x_1 - 10x_2 + 7x_3 + 5x_4 &= 7. \end{aligned} \right\}$$

$$6. \quad X \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 11 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$8. \quad \left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Вариант 4

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad X = Y'A'AY - ?$$

$$2. \quad \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$3. \quad \left. \begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 + x_3 &= 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -5. \end{aligned} \right\}$$

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$5. \quad \left. \begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3, \\ 10x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 7. \end{aligned} \right\}$$

$$6. \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 \\ \alpha + 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$8. \quad \left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Вариант 5

1. $f(x) = x^2 - 4x - 9$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f(A) = ?$

2. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

7. $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & 3\alpha & 4\alpha \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Вариант 6

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$. $AB - BA - C^2 = ?$

2. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

4. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$

$$6. \quad X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & \alpha \end{bmatrix}.$$

$$8. \quad \left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Вариант 7

$$1. \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}. \quad CD - DC - A^2 = ?$$

$$2. \quad \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

$$3. \quad \left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2, \\ x_2 + x_3 &= -5. \end{aligned} \right\}$$

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$5. \quad \left. \begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 2. \end{aligned} \right\}$$

$$6. \quad X \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 & 2 \\ 2\alpha & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

$$8. \quad \left. \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Вариант 8

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad ABC = ?$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$6. X \begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$8. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & \alpha & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вариант 9

$$1. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}. AB - ?$$

$$2. \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$6. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 13. \end{cases}$$

$$7. A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 1 & \alpha & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$8. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Вариант 10

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3, \quad f(A) = ?$$

$$2. \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 6x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$5. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 4x_2 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 5x_1 + 4x_3 = 9. \end{cases}$$

$$6. \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & 3 & -\alpha \\ 2 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$8. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Глава 2. Элементы векторной алгебры

2.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Вектором (геометрическим вектором) называется направленный отрезок, т. е. отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой концом. При этом любые два направленных отрезка считаются равными, если они имеют одинаковую длину и направление. Таким образом, начало вектора можно помещать в любую точку пространства.

Если начало вектора находится в точке A , а конец — в точке B , то вектор обозначают \overrightarrow{AB} . Также принято обозначать векторы строчными буквами латинского алфавита со стрелкой над ними: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \dots$.

Длиной вектора \overrightarrow{AB} называется длина отрезка AB , обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Вектор, длина которого равна 0, называется нулевым и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Два вектора \vec{a} и \vec{b} называются *коллинеарными*, если они параллельны одной и той же прямой. Если при этом векторы \vec{a} и \vec{b} имеют одинаковое направление, то они называются *сонаправленными*.

Три вектора \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости.

Углом между ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b} называется наименьший из двух углов, образуемых этими векторами при совмещении их начал (рис. 2.1), обозначается $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$. Векторы \vec{a} и \vec{b} называются *ортогональными* (перпендикулярными), если $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

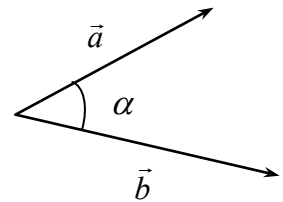


Рис.2.1

Произведением вектора \vec{a} *на число* λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\vec{a}$, длина которого равна $|\lambda| |\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора \vec{a} , если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$. Таким образом, векторы \vec{a} и $\lambda\vec{a}$ коллинеарны. Справедливо и обратное утверждение: если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, то они связаны равенством $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, где λ — некоторое число.

Суммой векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BC} называется вектор \overrightarrow{AC} (рис.2.2). Это определение называют *правилом треугольника* сложения векторов. Сумма векторов \vec{a} и \vec{b} обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

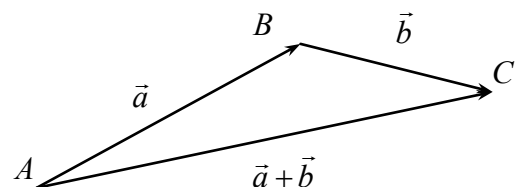


Рис. 2.2

Сложение нескольких векторов выполняется по правилу многоугольника:
 $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$.

Для сложения двух неколлинеарных векторов применяют также правило параллелограмма: суммой векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AD} является вектор \overrightarrow{AC} , где точка C – вершина параллелограмма $ABCD$ (рис.2.3).

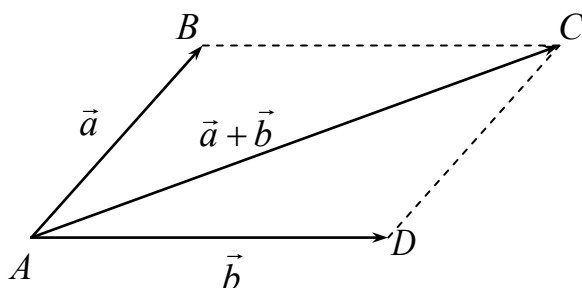


Рис. 2.3

Пример 2.1. В треугольнике ABC даны стороны $AB = 2$, $AC = 3$. Векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены с векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} соответственно, и $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Точка E – середина стороны BC . Выразить векторы \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{AE} через векторы \vec{a} и \vec{b} .

Решение. По правилу треугольника имеем $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -3\vec{b} + 2\vec{a}$. Для того, чтобы выразить вектор \overrightarrow{AE} , построим параллелограмм $ABDC$ (рис.2.4). По правилу параллелограмма $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, имеем $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(2\vec{a} + 3\vec{b}) = \vec{a} + 1,5\vec{b}$.

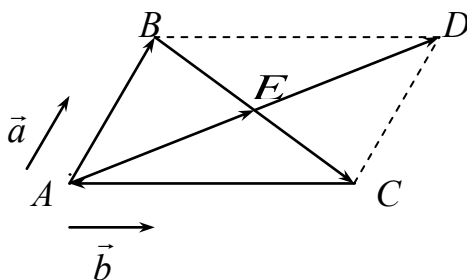


Рис. 2.4

Если вектор \vec{a} может быть представлен в виде *линейной комбинации* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, т.е.

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n,$$

где $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, – некоторые числа, то говорят, что вектор \vec{a} линейно выражается через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Базисом на плоскости называются любые два неколлинеарных вектора \vec{e}_1, \vec{e}_2 , взятые в определенном порядке. Любой компланарный с базисными век-

торами \vec{e}_1, \vec{e}_2 вектор \vec{a} можно представить, и притом единственным образом, в виде их линейной комбинации:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \quad (2.1)$$

Числа x и y в правой части равенства (2.1) называются *координатами* вектора \vec{a} в базисе \vec{e}_1, \vec{e}_2 .

Базисом в пространстве называются любые три некомпланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, взятые в определенном порядке. Любой вектор \vec{a} можно представить, и притом единственным образом, в виде их линейной комбинации:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3, \quad (2.2)$$

где x, y, z – координаты вектора \vec{a} в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Равенство (2.1) называется *разложением вектора \vec{a} по базису* на плоскости, а равенство (2.2) – *разложением вектора \vec{a} по базису* в пространстве.

Координаты вектора обычно записывают в круглых скобках после буквенного обозначения вектора. Например, запись $\vec{a}(2; -1; 3)$ означает, что вектор \vec{a} имеет координаты 2, -1 и 3 в выбранном базисе.

Два вектора, заданные координатами в фиксированном базисе равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число. При сложении двух векторов складываются их соответствующие координаты.

Пример 2.2. При каком значении y векторы $\vec{a}(3; -2; 5)$ и $\vec{b}(-6; y; -10)$ коллинеарны?

Решение. Векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, если существует такое число λ , что выполняется равенство $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Приравнявая соответствующие координаты векторов \vec{a} и $\lambda\vec{b}(-6\lambda; \lambda y; -10\lambda)$, получим:

$$\begin{cases} 3 = -6\lambda, \\ -2 = \lambda y, \\ 5 = -10\lambda, \end{cases}$$

откуда находим, что $\lambda = -\frac{1}{2}$ и $y = 4$.

Базис называется *ортонормированным*, если базисные векторы попарно ортогональны и имеют длину, равную единице. Векторы ортонормированного базиса на плоскости обозначают \vec{i}, \vec{j} , а в пространстве – $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Если при указании координат вектора не дается ссылка на конкретный базис, то по умолчанию считают базис ортонормированным.

Декартовой системой координат называется совокупность фиксированной точки O , называемой началом координат, и базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Декартова система координат с ортонормированным базисом называется *прямоугольной* (рис.2.5).

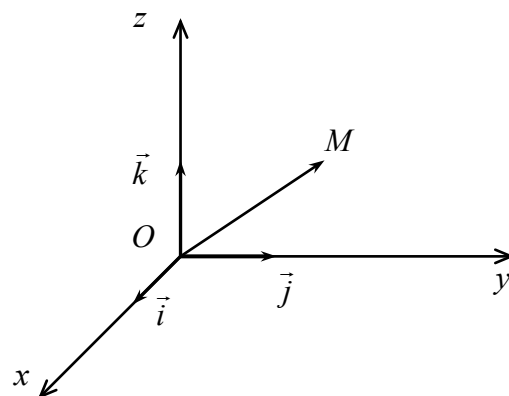


Рис. 2.5

Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов называются *координатными осями*. Прямая Ox называется *осью абсцисс*, прямая Oy – *осью ординат*, прямая Oz – *осью аппликат*.

Вектор \overrightarrow{OM} называется *радиус-вектором* точки M . Координатами точки M в рассматриваемой системе координат называются координаты ее радиус-вектора. Первая координата называется *абсциссой*, вторая – *ординатой*, третья – *аппликатой*.

Длина вектора $\vec{a}(x; y; z)$, заданного своими координатами в ортонормированном базисе, определяется равенством

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если в декартовой системе координат даны две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ в соответствующем базисе имеет координаты $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$, а расстояние между точками M_1 и M_2 (длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$) находится по формуле:

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.3)$$

Разделить отрезок M_1M_2 в отношении λ означает найти точку $M(x; y; z)$, принадлежащую данному отрезку, удовлетворяющую условию $|\overrightarrow{M_1M}| = \lambda |\overrightarrow{MM_2}|$. Координаты такой точки вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (2.4)$$

При $\lambda = 1$ точка M делит отрезок M_1M_2 пополам, и формулы (2.4) определяют координаты середины отрезка:

$$x_{cp} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_{cp} = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z_{cp} = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Пример 2.3. Даны вершины $A(1; -2), B(-2; 4), C(5; -6)$ треугольника ABC . Точка K делит сторону AB в отношении $2:1$, считая от вершины A . Найти длину отрезка KC .

Решение. Так как $AK : KB = 2 : 1$, то координаты точки K найдем по формулам (2.4) при $\lambda = 2$:

$$x_K = \frac{1 + 2 \cdot (-2)}{1 + 2} = -1, \quad y_K = \frac{-2 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = 2,$$

т.е. $K(-1; 2)$. Длину отрезка KC найдем по формуле (2.3):

$$|\overrightarrow{KC}| = \sqrt{(5 - (-1))^2 + (-6 - 2)^2} = 10.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Изобразите два неколлинеарных вектора \vec{a} и \vec{b} и постройте векторы:

а) $\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $3\vec{a} - \vec{b}$; в) $-\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$.

2.2. Дан параллелограмм $ABCD$ и два вектора \vec{p} и \vec{q} таких, что $\overrightarrow{AB} = 4\vec{p}$, а $\overrightarrow{AD} = 3\vec{q}$. Точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Выразить через векторы \vec{p} и \vec{q} : а) векторы $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$; б) векторы $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{MN}$.

2.3. В треугольнике ABC отрезок AE – медиана, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Разложить геометрически и аналитически: а) вектор \vec{c} по векторам \vec{a} и \vec{b} ; б) вектор \vec{a} по векторам \vec{b} и \vec{c} .

2.4. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Разложить геометрически и аналитически вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$.

2.5. В трапеции $ABCD$ имеем $BC \parallel AD$ и $BC : AD = 1 : 3$. Выразить вектор $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

2.6. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке O . Выразить векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Проверить справедливость равенства $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

2.7. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Выразить векторы $\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{A_1 C}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{B_1 D}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$.

2.8. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Прямые AC и BD пересекаются в точке O . Выразить векторы $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OC_1}$ и $\overrightarrow{OD_1}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}, \vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$.

2.9. При каком значении x векторы $\vec{a}(x; 2; -4)$ и $\vec{b}(3; -6; 12)$ коллинеарны?

2.10. Даны точки $M(0; 3), N(2; 1), P(5; -1), Q(9; -3)$. Доказать, что четырехугольник $MNPQ$ является трапецией.

2.11. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(1;2)$, $B(3;7)$, $D(8;-1)$. Найти координаты вершины C .

2.12. Даны координаты двух вершин треугольника ABC : $A(1;2)$, $B(3;4)$. Отрезок AE – медиана треугольника, и $\overrightarrow{AE}(4;-1)$. Найти координаты вершины C .

2.13. Найти положительное значение координаты x вектора $\vec{a}(x;-3;4)$, если $|\vec{a}|=5\sqrt{2}$.

2.14. Найти диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{m}(3;4;-2)$ и $\vec{n}(-1;2;5)$.

2.15. Найти длину стороны BC треугольника ABC , если $\overrightarrow{AB}(1;-1;2)$, $\overrightarrow{AC}(7;2;4)$.

2.16. Даны точки $A(2;3;-1)$, $B(8;12;-4)$. Найти координаты: а) середины отрезка AB ; б) точек, делящих отрезок AB на три равные части.

2.17. Даны вершины $A(4;-1)$, $B(5;5)$, $C(-3;1)$ треугольника ABC . Найти медиану, проведенную из вершины A .

2.18. На отрезке AB выбрана точка E так, что $AE:EB=1:4$. Найти координаты точки B , если $A(1;-2;5)$, $E(3;-1;1)$.

2.19. Разложить вектор \vec{a} по векторам \vec{p} и \vec{q} , если:

а) $\vec{a}(2;-5)$, $\vec{p}(1;3)$, $\vec{q}(2;5)$; б) $\vec{a}(4;5)$, $\vec{p}(3;2)$, $\vec{q}(2;1)$.

2.20. Разложить вектор \vec{a} по векторам \vec{p} , \vec{q} и \vec{r} , если:

а) $\vec{a}(6;1;4)$, $\vec{p}(4;5;1)$, $\vec{q}(3;2;1)$, $\vec{r}(2;3;2)$;

б) $\vec{a}(10;-1;0)$, $\vec{p}(3;1;-1)$, $\vec{q}(2;-1;2)$, $\vec{r}(3;2;1)$.

2.2. Проекция вектора на ось. Скалярное произведение векторов

Проекцией вектора \vec{a} на ось Ox называется число, обозначаемое $\text{Pr}_{Ox} \vec{a}$ и определяемое формулой

$$\text{Pr}_{Ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi,$$

где φ – угол между вектором \vec{a} и осью Ox .

Координаты вектора \vec{a} в ортонормированном базисе равны проекциям вектора \vec{a} на соответствующие координатные оси:

$$x = \text{Pr}_{Ox} \vec{a}, \quad y = \text{Pr}_{Oy} \vec{a}, \quad z = \text{Pr}_{Oz} \vec{a}. \quad (2.5)$$

Косинусы углов $\alpha = (\vec{a}, \vec{i})$, $\beta = (\vec{a}, \vec{j})$, $\gamma = (\vec{a}, \vec{j})$ называются направляющими косинусами вектора \vec{a} . Формулы (2.5) можно переписать в виде

$$x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad z = |\vec{a}| \cos \gamma. \quad (2.6)$$

Направляющие косинусы вектора \vec{a} связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (2.7)$$

Пример 2.4. Вектор \vec{a} образует углы $\alpha = 120^\circ$ и $\beta = 60^\circ$ с осями Ox и Oy соответственно. Найти: а) угол γ , который образует вектор \vec{a} с осью Oz , если известно, что он острый; б) координаты вектора \vec{a} , если $|\vec{a}| = 6$.

Решение. а) Из формулы (2.7) находим:

$$\cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Так как угол γ – острый, то $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, и $\gamma = 45^\circ$.

б) Координаты вектора \vec{a} найдем по формулам (2.6):

$$x = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3, \quad y = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3, \quad z = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

Скалярным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, обозначаемое (\vec{a}, \vec{b}) и определяемое формулой

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}). \quad (2.8)$$

Основные свойства скалярного произведения векторов:

- 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;
- 2) $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;
- 4) $\vec{a}^2 = (\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$;
- 5) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ и \vec{b} ортогональны (при условии $|\vec{a}| \neq 0 \neq |\vec{b}|$).

Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}. \quad (2.9)$$

Проекция вектора \vec{a} на ось, сонаправленную с вектором \vec{b} , может быть найдена по формуле

$$\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}. \quad (2.10)$$

Если векторы $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (2.11)$$

Пример 2.5. Найти угол между векторами $\vec{a}(4; -1; -1)$ и $\vec{b}(2; -2; 1)$.

Решение. Согласно формулам (2.9) и (2.11),

$$\cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1}{\sqrt{16 + 1 + 1} \sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

Пример 2.6. Найти длину вектора $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Используя свойство 4) скалярного произведения, имеем:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{(2\vec{p} - 3\vec{q})^2}.$$

Применяя далее свойства 1) – 3), находим

$$\begin{aligned}(2\vec{p} - 3\vec{q})^2 &= 4\vec{p}^2 - 12(\vec{p}, \vec{q}) + 9\vec{q}^2 = 4|\vec{p}|^2 - 12|\vec{p}||\vec{q}|\cos(\vec{p}, \vec{q}) + 9|\vec{q}|^2 = \\ &= 4 \cdot 9 - 12 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 4 = 36.\end{aligned}$$

Следовательно, $|\vec{a}| = 6$.

Пример 2.7. Найти вектор единичной длины, ортогональный векторам $\vec{m}(2; -1; -2)$ и $\vec{n}(1; 1; -4)$.

Решение. По свойству 5) скалярного произведения, для любого вектора $\vec{p}(x; y; z)$, ортогонального векторам \vec{m} и \vec{n} , выполняются равенства $(\vec{p}, \vec{m}) = 0$ и $(\vec{p}, \vec{n}) = 0$. Кроме того, по условию $|\vec{p}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$. Выражая скалярные произведения векторов через их координаты, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 0, \\ x + y - 4z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

решив которую, найдем два противоположно направленных вектора $\vec{p}_1\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ и $\vec{p}_2\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, удовлетворяющих условию задачи.

Задачи для самостоятельного решения

2.21. Построить точку $M(4; -3; 5)$ и определить длину и направление ее радиус-вектора.

2.22. Даны точки $A(1; 2; 3)$ и $B(3; -4; 6)$. Построить вектор \overrightarrow{AB} , найти его проекции на оси координат и определить его направление.

2.23. Разложить вектор \vec{a} по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, если он образует с осями координат Ox, Oy, Oz углы $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{2\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$ соответственно, и $|\vec{a}| = 4\sqrt{2}$.

2.24. Вектор \vec{a} образует углы $\alpha = 60^\circ$ и $\gamma = 45^\circ$ с осями Ox и Oz соответственно. Найти: а) угол β , который образует вектор \vec{a} с осью Oy , если известно, что он тупой; б) координаты вектора \vec{a} , если $|\vec{a}| = 2$.

2.25. Найти координаты вектора \vec{a} , образующего равные острые углы с осями координат, если $\vec{a}^2 = 12$.

2.26. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2.27. Известно, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. Найти:

а) $(\vec{a}, \vec{a} + 2\vec{b})$; б) $(\vec{a} - 2\vec{b}, 3\vec{a} + \vec{b})$; в) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

2.28. Найти скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ и $\vec{b} = 4\vec{p} + \vec{q}$, где \vec{p} и \vec{q} – единичные ортогональные векторы.

2.29. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, и $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

2.30. Найти длину вектора $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$, если $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = \sqrt{3}$ и $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

2.31. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, где $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$, и $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

2.32. Найти угол между векторами $\vec{a}(-1; 4; 1)$ и $\vec{b}(1; 2; 2)$.

2.33. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(6; -1; 1)$ и $\vec{b}(2; 3; 1)$.

2.34. Найти угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, где \vec{p} и \vec{q} – единичные ортогональные векторы.

2.35. Найти угол между векторами $\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} + 4\vec{q}$, где \vec{p} и \vec{q} – единичные векторы, и $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{2\pi}{3}$.

2.36. Найти угол между биссектрисами углов xOy и xOz .

2.37. Из вершины квадрата проведены две прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол между этими прямыми.

2.38. Найти угол между биссектрисами двух плоских углов треугольной пирамиды, имеющих общую вершину, если все ребра пирамиды равны.

2.39. Даны точки $A(2; -3; 4)$, $B(5; -5; -2)$, $C(1; 2; 3)$, $D(7; 4; 6)$. Найти $\text{Pr}_{\overline{CD}} \overline{AB}$.

2.40. Даны векторы $\vec{a}(1; -1; 4)$ и $\vec{b}(1; 1; 2)$. Вычислить $\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}$ и $\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b}$.

2.41. Найти проекцию вектора $\vec{a}(2; -3; 4)$ на ось, образующую равные углы с осями координат.

2.42. При каком значении λ векторы $\vec{p}(-\lambda; 3; 2)$ и $\vec{q}(1; 2; -\lambda)$ ортогональны?

2.43. Найти векторы единичной длины, перпендикулярные оси Ox и вектору $\vec{a}(5; -3; 4)$.

2.44. Найти вектор единичной длины, перпендикулярный оси Oz и вектору $\vec{a}(12; 5; -13)$ и образующий острый угол с осью Ox .

2.45. Найти вектор единичной длины, ортогональный векторам $\vec{a}(1; -3; 0)$ и $\vec{b}(-3; 3; 4)$ и образующий тупой угол с осью Oy .

2.46. Найти все векторы, ортогональные векторам $\vec{a}(1; 1; -1)$ и $\vec{b}(1; -5; 1)$.

2.3. Векторное и смешанное произведения векторов

Упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется правой, если при совмещении их начал кратчайший поворот от вектора \vec{a} к вектору \vec{b} виден из конца вектора \vec{c} как поворот против часовой стрелки (рис.2.6).

Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор \vec{c} , обозначаемый $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ и удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$;
- 2) вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} ;
- 3) тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая.

Основные свойства векторного произведения:

- 1) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$;
- 2) $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]$;
- 3) $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$;
- 4) $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ и \vec{b} коллинеарны.

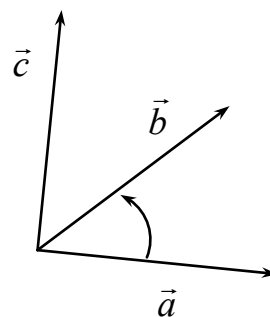


Рис.2.6

Если векторы $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ заданы координатами в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (2.12)$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , может быть найдена по формуле

$$S = |[\vec{a}, \vec{b}]|. \quad (2.13)$$

Пример 2.8. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2;-1;4)$, $B(3;1;6)$, $C(6;2;9)$.

Решение. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}(1;2;2)$ и $\overrightarrow{AC}(4;3;5)$, поэтому, согласно (2.13),

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|.$$

По формуле (2.12)

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Смешанным произведением векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} называется число, обозначаемое $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и равное скалярному произведению вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ на вектор \vec{c} , т.е. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

Основные свойства смешанного произведения:

- 1) $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$;
- 2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$;
- 3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны;
- 4) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0 \Leftrightarrow$ тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая.

Если векторы $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c}(x_3; y_3; z_3)$ заданы координатами в ортонормированном базисе, то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, может быть найден по формуле

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|. \quad (2.15)$$

Пример 2.9. Доказать, что точки $A(1;2;3)$, $B(2;4;1)$, $C(1;-3;6)$ и $D(4;-2;3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}(1;2;-2)$, $\overrightarrow{AC}(0;-5;3)$ и $\overrightarrow{AD}(3;-4;0)$ компланарны, а

значит, по свойству 3) смешанного произведения, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$. По формуле (2.14) находим

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2.10. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(3; -1; 5)$, $B(5; 2; 6)$, $C(-1; 3; 4)$ и $D(7; 3; -1)$.

Решение. Объем пирамиды $ABCD$ равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}(2; 3; 1)$, $\overrightarrow{AC}(-4; 4; -1)$, $\overrightarrow{AD}(4; 4; -6)$, поэтому, согласно (2.15),

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|.$$

Находим смешанное произведение:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \\ 4 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -156,$$

следовательно, $V_{ABCD} = \frac{156}{6} = 26$.

Задачи для самостоятельного решения

2.47. Найти $|[\vec{a}, \vec{b}]|$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 8$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

2.48. Найти $|[\vec{a}, \vec{b}]|$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 10$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 8$.

2.49. Найти и построить вектор $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, если:

а) $\vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{b} = 3\vec{k}$; б) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$; в) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

2.50. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$.

2.51. Доказать равенство: $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}]$.

2.52. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, где $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{6}$.

2.53. Известно, что $|\vec{p}|=|\vec{q}|=5$, и $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$.

2.54. Дан параллелограмм $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AC} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\overrightarrow{BD} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$, где $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$, и $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$. Найти площадь параллелограмма.

2.55. Даны вершины $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$, $C(6; 2; 0)$ треугольника. Найти длину высоты треугольника, проведенной из вершины B .

2.56. Даны вершины $A(3; -1; 4)$, $B(2; 4; 5)$, $C(4; 4; 5)$ треугольника. Найти его площадь.

2.57. Вычислить смешанное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{c} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$.

2.58. Установить, компланарны ли векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . В случае некомпланарности определить, правой или левой является тройка \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} :

а) $\vec{a}(1; -1; 3)$, $\vec{b}(2; 3; -1)$, $\vec{c}(1; 9; -11)$;

б) $\vec{a}(3; -1; 2)$, $\vec{b}(2; 1; -1)$, $\vec{c}(3; -2; 1)$;

в) $\vec{a}(4; 1; 1)$, $\vec{b}(2; 0; 3)$, $\vec{c}(-6; 2; -4)$.

2.59. При каком значении α векторы $\vec{a}(7; \alpha; -13)$, $\vec{b}(1; -2; 1)$ и $\vec{c}(3; 1; -2)$ компланарны?

2.60. Определить, лежат ли точки $A(1; 2; -1)$, $B(4; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ и $D(2; 1; 3)$ в одной плоскости.

2.61. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(1; 5; -1)$, $\vec{b}(3; 1; -2)$, $\vec{c}(-4; 0; 3)$.

2.62. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $S(3; 2; 4)$, $A(1; -2; 1)$, $B(7; 9; 4)$, $C(5; 4; 3)$.

2.63. Даны вершины пирамиды: $S(0; 3; 7)$, $A(2; 0; 4)$, $B(0; 0; 6)$, $C(4; 3; 5)$. Найти длину ее высоты, проведенной из вершины S .

2.64. Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен V . Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB_1}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD_1}$.

2.65. Доказать, что какими бы ни были векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , векторы $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$ компланарны.

2.66. Доказать, что векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , удовлетворяющие условию $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$, компланарны.

2.4. Векторное пространство \mathbf{R}^n . Ранг и базис системы векторов

Упорядоченный набор n действительных чисел $\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ называется n -мерным вектором, а числа x_i , $i = 1, \dots, n$ – компонентами вектора \vec{x} .

Два вектора $\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $\vec{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$ называются равными, если равны их соответствующие компоненты, т. е. $x_i = y_i$, $i = 1, \dots, n$.

Суммой двух n -мерных векторов \vec{x} и \vec{y} называется вектор $\vec{x} + \vec{y}$, компоненты которого равны сумме соответствующих компонент слагаемых векторов, т. е. $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots; x_n + y_n)$.

Произведением вектора \vec{x} на число λ называется вектор $\lambda\vec{x}$, компоненты которого равны произведению числа λ на соответствующие компоненты вектора \vec{x} , т. е. $\lambda\vec{x} = (\lambda x_1; \lambda x_2; \dots; \lambda x_n)$.

Множество всех n -мерных векторов с введенными операциями сложения и умножения называется векторным пространством \mathbf{R}^n .

Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ векторного пространства \mathbf{R}^n называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, что выполняется равенство

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_k \vec{x}_k = \vec{0}. \quad (2.16)$$

Если же равенство (2.16) имеет место лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, то система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ называется *линейно независимой*.

Отметим некоторые свойства линейно зависимых систем векторов:

1. Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда, по крайней мере, один из векторов системы линейно выражается через другие.
2. Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.
3. Если некоторая подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

Пример 2.11. Выяснить, являются ли линейно зависимыми следующие системы векторов:

а) $\vec{x}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\vec{x}_2 = (0; 1; 0; 0)$, $\vec{x}_3 = (0; 0; 1; 0)$, $\vec{x}_4 = (2; 3; 1; 0)$;

б) $\vec{x}_1 = (1; 3; 1)$, $\vec{x}_2 = (2; 1; 1)$, $\vec{x}_3 = (1; -1; 1)$;

в) $\vec{x}_1 = (1; 3; 1; 3)$, $\vec{x}_2 = (2; 1; 1; 2)$, $\vec{x}_3 = (3; -1; 1; 1)$.

Решение. а) Очевидно, вектор \vec{x}_4 выражается линейно через векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ следующим образом: $\vec{x}_4 = 2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3$, следовательно, система линейно зависима.

б) Приравнявая компоненты векторов в левой и правой частях равенства $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \lambda_3 \vec{x}_3 = \vec{0}$, получим систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

следовательно, система (2.17) имеет единственное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, и система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ линейно независима.

в) Так же, как в пункте б), составим систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Решая систему методом Гаусса, приведем ее к виду

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Система (2.18) имеет бесконечно много решений, которые можно записать в виде $\lambda_1 = \lambda_3$, $\lambda_2 = -2\lambda_3$, $\lambda_3 \in \mathbf{R}$. Условие (2.16) выполняется для данной системы векторов при ненулевых значениях чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (в частности, при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$ имеем $\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3 = \vec{0}$), следовательно, система линейно зависима.

Рангом системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов данной системы. Ранг системы векторов равен рангу матрицы, составленной из компонент векторов системы.

Ранг векторного пространства \mathbf{R}^n называется *размерностью пространства* и равен n .

Базисом системы векторов называется упорядоченная совокупность r линейно независимых векторов данной системы, где r – ранг системы.

Справедлива следующая теорема:

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r$ – базис системы векторов. Каждый вектор \vec{x} данной системы можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_r \vec{e}_r. \quad (2.19)$$

Равенство (2.19) называется *разложением вектора \vec{x} по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r$* , а числа x_1, x_2, \dots, x_r – *координатами вектора \vec{x} в данном базисе*. Так же, как и для геометрических векторов, координаты n -мерного вектора в фиксированном базисе будем записывать в круглых скобках после буквенного обозначения вектора: $\vec{x}(x_1, x_2, \dots, x_r)$.

Пример 2.12. Найти базис системы векторов и определить координаты векторов системы в найденном базисе:

а) $\vec{x}_1 = (3; -1; 0)$, $\vec{x}_2 = (2; 3; 1)$, $\vec{x}_3 = (-1; 4; 3)$, $\vec{x}_4 = (2; 3; 7)$;

б) $\vec{y}_1 = (1; 2; 1; 2)$, $\vec{y}_2 = (-1; 3; 2; 1)$, $\vec{y}_3 = (4; 3; 3; 5)$, $\vec{y}_4 = (2; -1; 0; 1)$.

Решение. а) Ранг системы векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ не превышает 3, поэтому базис системы содержит не более трех векторов. Определитель, составленный из компонент векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0,$$

следовательно, эти векторы линейно независимы и образуют базис.

Поскольку

$$\vec{x}_1 = 1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + 0 \cdot \vec{x}_3,$$

$$\vec{x}_2 = 0 \cdot \vec{x}_1 + 1 \cdot \vec{x}_2 + 0 \cdot \vec{x}_3,$$

$$\vec{x}_3 = 0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + 1 \cdot \vec{x}_3,$$

то в базисе $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ имеем: $\vec{x}_1(1; 0; 0)$, $\vec{x}_2(0; 1; 0)$, $\vec{x}_3(0; 0; 1)$.

Для того, чтобы найти координаты вектора \vec{x}_4 в базисе $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$, распишем равенство $\vec{x}_4 = \alpha \cdot \vec{x}_1 + \beta \cdot \vec{x}_2 + \gamma \cdot \vec{x}_3$ покоординатно:

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta - \gamma = 2, \\ -\alpha + 3\beta + 4\gamma = 3, \\ \beta + 3\gamma = 7. \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдем $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 3$, т.е. $\vec{x}_4(3; -2; 3)$ в базисе $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$.

б) Составим из компонент векторов $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4$ системы матрицу и приведем ее к ступенчатому виду:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы A , а, следовательно, и ранг системы векторов равен 3. Базис системы образуют векторы, соответствующие строкам полученной ступенчатой матрицы, т.е. $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_4$ (будем считать, что на последнем шаге преобразований мы вычеркнули третью строку, так как ее элементы пропорциональны соответствующим элементам четвертой строки).

В найденном базисе имеем: $\vec{y}_1(1;0;0), \vec{y}_2(0;1;0), \vec{y}_4(0;0;1)$. Пусть $\vec{y}_3 = \alpha\vec{y}_1 + \beta\vec{y}_2 + \gamma\vec{y}_4$. Так же, как в пункте а) составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 4, \\ 2\alpha + 3\beta - \gamma = 3, \\ \alpha + 2\beta = 3, \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 5, \end{cases}$$

решив которую, найдем $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 2$, т.е. $\vec{y}_3(1;1;2)$ в базисе $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_4$.

Задачи для самостоятельного решения

2.67. Определить, являются ли линейно зависимыми следующие системы векторов:

- а) $\vec{x}_1 = (1;0;0;0), \vec{x}_2 = (0;1;0;1), \vec{x}_3 = (1;1;0;1)$;
- б) $\vec{x}_1 = (1;3;2;-1), \vec{x}_2 = (3;4;3;0), \vec{x}_3 = (2;1;1;1)$;
- в) $\vec{x}_1 = (1;0;0;0), \vec{x}_2 = (0;1;0;0), \vec{x}_3 = (1;1;0;1)$;
- г) $\vec{x}_1 = (1;1;1;1), \vec{x}_2 = (0;0;1;1), \vec{x}_3 = (2;2;3;3)$;
- д) $\vec{x}_1 = (1;1;1;1), \vec{x}_2 = (0;1;1;1), \vec{x}_3 = (0;0;1;1), \vec{x}_4 = (-1;-1;0;0)$.

2.68. Установить, существует ли линейная зависимость между векторами следующих систем:

- а) $\vec{x}_1 = (1;3;-1), \vec{x}_2 = (0;2;1), \vec{x}_3 = (0;0;5)$;
- б) $\vec{x}_1 = (3;2;3), \vec{x}_2 = (2;0;2), \vec{x}_3 = (-1;-1;4)$;
- в) $\vec{x}_1 = (7;0;1), \vec{x}_2 = (5;2;-3), \vec{x}_3 = (1;-1;2)$;
- г) $\vec{x}_1 = (4;4;2;-1), \vec{x}_2 = (0;0;-3;7), \vec{x}_3 = (0;3;5;1)$;
- д) $\vec{x}_1 = (3;1;-2;1), \vec{x}_2 = (0;1;4;-1), \vec{x}_3 = (1;-3;5;1), \vec{x}_4 = (2;8;-6;2)$.

2.69. Найти ранг системы векторов:

- а) $\vec{x}_1 = (-4;6;2), \vec{x}_2 = (2;-3;1), \vec{x}_3 = (-6;9;3)$;
- б) $\vec{x}_1 = (2;3;1), \vec{x}_2 = (0;2;1), \vec{x}_3 = (2;5;2)$;
- в) $\vec{x}_1 = (5;-1;3), \vec{x}_2 = (2;4;2), \vec{x}_3 = (7;3;6)$;
- г) $\vec{x}_1 = (1;2;3;4), \vec{x}_2 = (2;3;4;5), \vec{x}_3 = (3;4;5;6), \vec{x}_4 = (4;5;6;7)$;
- д) $\vec{x}_1 = (1;2;3;4), \vec{x}_2 = (4;1;2;3), \vec{x}_3 = (3;4;1;2), \vec{x}_4 = (2;3;4;1)$.

2.70. Найти базис системы векторов. Записать координаты векторов системы в найденном базисе:

- а) $\vec{x}_1 = (1; -2; 5)$, $\vec{x}_2 = (-2; 4; -10)$, $\vec{x}_3 = (3; -6; 15)$;
б) $\vec{x}_1 = (1; 0; 2)$, $\vec{x}_2 = (1; 1; -2)$, $\vec{x}_3 = (1; -2; 10)$, $\vec{x}_4 = (3; 2; -1)$;
в) $\vec{x}_1 = (4; -1; 3)$, $\vec{x}_2 = (2; 3; 5)$, $\vec{x}_3 = (0; -7; -7)$, $\vec{x}_4 = (1; 2; -4)$;
г) $\vec{x}_1 = (2; 1; -3)$, $\vec{x}_2 = (1; 3; -1)$, $\vec{x}_3 = (3; -4; 5)$, $\vec{x}_4 = (2; 9; -12)$;
д) $\vec{x}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{x}_2 = (1; 2; 3; -1)$, $\vec{x}_3 = (2; 3; 5; 0)$, $\vec{x}_4 = (1; 2; 4; -1)$.

2.71. Образуют ли векторы \vec{x}_1 , \vec{x}_2 , \vec{x}_3 базис пространства \mathbf{R}^3 , если:

- а) $\vec{x}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{x}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{x}_3 = (0, 0, 1)$;
б) $\vec{x}_1 = (2, 0, 0)$, $\vec{x}_2 = (0, -3, 0)$, $\vec{x}_3 = (0, 0, 4)$;
в) $\vec{x}_1 = (2, 1, 1)$, $\vec{x}_2 = (0, 0, 0)$, $\vec{x}_3 = (1, 1, 0)$;
г) $\vec{x}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_2 = (-2, -4, -6)$, $\vec{x}_3 = (1, 1, 0)$;
д) $\vec{x}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_2 = (-1, 2, -1)$, $\vec{x}_3 = (0, 4, 0)$.

2.72. При каком значении параметра λ векторы \vec{x}_1 , \vec{x}_2 , \vec{x}_3 образуют базис пространства \mathbf{R}^3 :

- а) $\vec{x}_1 = (\lambda, \lambda, \lambda)$, $\vec{x}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{x}_3 = (0, 0, 5)$;
б) $\vec{x}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{x}_3 = (0, 0, \lambda)$;
в) $\vec{x}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{x}_2 = (2, 4, 2)$, $\vec{x}_3 = (0, 0, \lambda)$.

2.73. Векторы \vec{x}_1 , \vec{x}_2 , \vec{x}_3 образуют линейно независимую систему. Будет ли линейно независимой система $3\vec{x}_1$, $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$, $\vec{x}_3 - \vec{x}_2$?

2.74. В базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ даны векторы $\vec{x} = 2\vec{e}_1 - \alpha\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$, $\vec{y} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \beta\vec{e}_3$. При каких значениях α и β они линейно независимы?

2.75. Дан базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Проверить, образуют ли базис следующие системы векторов:

- а) $\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_3$; б) $\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_3$.

2.5. Задачи с экономическим содержанием к главам 1, 2

2.76. В пространстве двух товаров $\vec{x} = (x_1, x_2)$, где $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, x_1, x_2 – количество единиц товара первого и второго вида соответственно, заданы цены $\vec{c} = (c_1, c_2)$, где $c_1 = 3$, $c_2 = 5$ условных денежных единиц.

1. Укажите несколько наборов товаров стоимостью а) 15; б) 30; в) 45 условных единиц.

2. Пусть цены изменились и стали равными $\vec{c}_{\text{нов.}} = (4, 4)$. Приведите примеры наборов товаров, которые а) подешевели; б) подорожали; в) остались той же стоимости, если начальная стоимость равна 30 у.е.

2.77. В пространстве трех товаров с ценами (3, 5, 4) укажите несколько наборов товаров стоимостью а) 19; б) 34; в) 53. 2. Пусть цены изменились и стали равными (4, 4, 5). Для наборов товаров первоначальной стоимости, равной 34, приведите примеры наборов товаров, которые: а) подешевели; б) подорожали; в) остались той же стоимости.

2.78. При нормальной интенсивности $\lambda_1 = 1$ первый велосипедный завод производит в месяц $\vec{G}_1 = (3000, 4000, 6000, 1000)$ мужских, женских, детских и горных велосипедов соответственно. Если интенсивность λ_1 изменяется ($0 \leq \lambda_1 \leq 4$), то первый завод производит $\lambda_1 \vec{G}_1$ велосипедов (при расчетах дробные числа округляются до целых). Второй завод при нормальной интенсивности $\lambda_2 = 1$ производит в месяц $\vec{G}_2 = (4000, 5000, 6000, 0)$ таких же велосипедов.

1. Сколько велосипедов в месяц производит первый завод, если интенсивность составляет: а) $\lambda_1 = 2$; б) $\lambda_2 = 3$; в) $\lambda_3 = 0,5$?

2. Сколько и каких велосипедов в месяц производят оба завода, если:

а) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$; б) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$?

3. Какие линейные операции над векторами пространства \mathbf{R}^4 надо произвести, чтобы ответить на вопросы 1 и 2?

2.79. Объемы добычи минерального сырья вида $j, j=1,2,3,4$ в стране $i, i=1,2,3$, представлены в виде матрицы $A = (a_{ij})$, где указаны объемы добычи в 2005 г. и матрицы $B = (b_{ij})$, где указаны объемы добычи в 2006 г.:

$$A = \begin{bmatrix} 450 & 780 & 210 & 800 \\ 1050 & 240 & 90 & 660 \\ 1500 & 120 & 590 & 100 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 520 & 910 & 220 & 910 \\ 1030 & 580 & 290 & 720 \\ 1460 & 830 & 600 & 120 \end{bmatrix}.$$

а) Вычислить матрицу, элементами которой служат средние объемы добычи в 2005 г. и в 2006 г. по странам и видам сырья.

б) Вычислить матрицу приростов объемов добычи с 2005 г. по 2006 г.

2.80. Для некоторого предприятия данные об объемах продаж продукции (в единицах) в течение года заданы с помощью матрицы A , в которой по строкам представлены данные о районах продаж (1, 2 и 3), а по столбцам – о видах продукции (1, 2 и 3). Данные о ценах (в у. е.) единицы продукции вида 1, 2 и 3 заданы в виде вектора – столбца B .

Рассчитать вектор \vec{p} , координаты которого равны выручке, полученной в районе 1, 2 и 3, а также вычислить общую выручку S предприятия по всем

трем районам, если: $A = \begin{bmatrix} 58 & 28 & 8 \\ 52 & 58 & 12 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$.

2.81. Предприятие выпускает ежедневно четыре вида изделий. Данные о количестве выпускаемых изделий каждого вида, расходе сырья на единицу изделия, норме времени и цене изделий представлены в таблице:

Вид изделия	Количество изделий (ед.)	Расход сырья (кг/изд.)	Норма времени (ч/изд.)	Цена изделия (у.е./изд.)
1	20	5	10	300
2	50	2	5	150
3	30	7	15	450
4	40	4	8	200

Требуется: введя векторы ассортимента $\vec{g} = (20, 50, 30, 40)$, расходов сырья $\vec{s} = (5, 2, 7, 4)$, затрат времени $\vec{t} = (10, 5, 15, 8)$, цен $\vec{p} = (300, 150, 450, 200)$ вычислить: а) расход сырья S ; б) затраты рабочего времени T ; в) стоимость P выпускаемой продукции предприятия в течение суток.

2.82. Предприятие выпускает четыре вида изделий с использованием 4-х видов сырья. Нормы расхода j -го вида сырья на производство единицы продукции вида i , представлены в матрице $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, 4}$, $j = \overline{1, 4}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Известен вектор ассортимента $\vec{g} = (60, 50, 35, 40)$ единиц изделия каждого вида соответственно. Требуется найти вектор \vec{s} расходов сырья каждого вида при заданном векторе ассортимента.

2.83. Вектор объемов производства в первую неделю был $\vec{x}^{(1)} = (100, 110, 115, 95)$, а во вторую неделю стал равным $\vec{x}^{(2)} = (90, 100, 110, 90)$. При этом в первую неделю был известен ценовой вектор $\vec{p}^{(1)} = (10, 9, 8, 6)$, где p_i , ($i = \overline{1, 4}$) показывает цену единицы изделия вида i . Какому уравнению дол-

жен удовлетворять вектор $\vec{p}^{(2)} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, чтобы выручка от реализации в первую неделю равнялась выручке во вторую неделю? Найти какое-либо решение этого уравнения.

2.84. Вектор объемов производства имеет вид $\vec{x} = (11, 12, 13, 14)$, а ценовой вектор $\vec{p} = (1, 2, 3, c)$, где x_i – объем производства продукции вида i в единицах, p_i – цена единицы продукции вида i . Какой должна быть цена c одной единицы продукции четвертого вида, чтобы выручка от реализации составила не менее 200?

2.85. Имеется груз трех видов в количествах 41, 50, 53 единиц соответственно. На один грузовик первого типа может быть помещено a_{11} единиц первого груза, a_{21} единиц второго груза и a_{31} единиц третьего груза, аналогичный

смысл имеют все остальные элементы матрицы $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$. Сколько грузо-

виков каждого типа нужно заказать, предполагая их полную загрузку, чтобы весь груз был вывезен?

2.86. Предприятие выпускает три вида продукции $П_1, П_2, П_3$, используя три вида ресурсов P_1, P_2, P_3 . Нормы расхода ресурсов и их запасы заданы в таблице:

Вид продукции Ресурсы	$П_1$	$П_2$	$П_3$	Запасы ресурса
P_1	1	2	3	20
P_2	2	1	1	11
P_3	5	4	3	34

Предполагая полное использование ресурсов, составить план выпуска продукции.

2.87. При откорме животных каждое животное должно получить ежедневно 10 единиц питательного вещества A , 3 единицы питательного вещества B и 11 единиц питательного вещества C . Используется три вида кормов K_1, K_2, K_3 . Данные о содержании питательных веществ в 1 кг каждого вида корма представлены в таблице:

Вид корма Питатель- ное веще-	K_1	K_2	K_3
A	3	1	1
B	1	1	0
C	1	6	1

Составить дневной рацион питания животных, предполагая полное удовлетворение в каждом из питательных веществ.

2.88. Трикотажная фабрика выпускает свитера, джемперы и жакеты, на которые расходуется шерсть, нейлон и мохер. На свитер расходуется 600 г шерсти и 200 г нейлона, на джемпер – 500 г шерсти, 100 г нейлона и 100 г мохера, на жакет – 400 г шерсти, 80 г нейлона и 200 г мохера. На фабрике имеется в наличии 180 кг шерсти, 44 кг нейлона и 42 кг мохера. Требуется составить ассортиментный набор выпуска свитеров, джемперов и жакетов, предполагая полное использование имеющегося сырья.

2.89. Для производства трех видов изделий A , B и C используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени в мин., затрачиваемые на обработку единицы каждого изделия, представлены в таблице:

Вид изделия Тип обо- рудование	A	B	C	Общий фонд оборудования (в мин.)
Фрезерное	10	8	3	350
Токарное	5	10	6	430
Шлифовальное	6	12	4	420

Найти план выпуска изделий A , B и C , предполагая полное использование оборудования.

2.90. На звероферме выращиваются лисы, песцы и норки. При этом используются корма трех видов A , B и C . Количество корма каждого вида, необходимое одному животному и общее количество каждого вида корма, имеющим в наличии, приведены в таблице:

Вид корма	Лиса	Песец	Норка	Запас корма
A	2	3	1	140
B	4	1	6	170
C	6	7	2	350

Сколько животных каждого вида надо выращивать при условии полного использования всех кормов?

2.91. На мебельной фабрике выпускают столы, шкафы и стулья, потребляя при этом три вида ресурсов. Нормы расхода ресурсов на производство одной единицы каждого вида изделий и запасы ресурсов приведены в таблице:

Ресурсы	Нормы затрат на одно изделие			Общее количество ресурсов
Древесина (м ³)				
1-го вида	0,2	0,1	0,1	27
2-го вида	0,1	0,3	0,1	36
Трудоемкость	1,2	1,5	0,4	205

Сколько столов, шкафов и стульев надо запланировать к выпуску, чтобы полностью израсходовать все ресурсы?

2.6. Контрольные задания к главе 2

Вариант 1

- На стороне BC треугольника ABC взята точка K так, что $BK : KC = 2 : 3$. Разложить вектор \overrightarrow{AK} по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
- Даны точки $A(3; 2; -1)$, $B(1; -4; 3)$, $C(0; 3; -1)$, $D(-6; 3; 5)$. Найти:
 - координаты вектора \overrightarrow{KN} , где K – середина отрезка AB , а точка N делит отрезок CD в отношении $1 : 2$;
 - проекцию вектора \overrightarrow{AB} на ось, определяемую вектором \overrightarrow{CD} .
- Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(1; 0; 1)$, $\vec{b}(1; 2; -1)$.
- Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
- Вектор \vec{x} перпендикулярен оси Ox и вектору \vec{p} и образует острый угол с осью Oy . Найти координаты вектора \vec{x} , если $\vec{p} = (1; 2; 6)$, $|\vec{x}| = \sqrt{10}$.
- Найти площадь треугольника с вершинами $A(3; 2; -1)$, $B(1; -4; 3)$, $C(0; 3; -1)$.

7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(3;2;-1)$, $B(1;-4;3)$, $C(0;3;-1)$, $D(-6;3;5)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (1;-2;3)$, $\vec{b} = (4;7;2)$, $\vec{c} = (6;4;2)$, $\vec{d} = (14;18;6)$. Выразить небазисный вектор через базисные.

Вариант 2

1. На стороне BC треугольника ABC взята точка K так, что $BK : KC = 1 : 4$. Разложить вектор \overrightarrow{AK} по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Даны точки $A(3;2;-1)$, $B(-3;-4;5)$, $C(1;3;-4)$, $D(6;3;-4)$. Найти:
 - а) координаты вектора \overrightarrow{KN} , где K – середина отрезка CD , а точка N делит отрезок AB в отношении $1 : 4$;
 - б) проекцию вектора \overrightarrow{AB} на ось, определяемую вектором \overrightarrow{CD} .
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(3;0;-3)$, $\vec{b}(1;4;1)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
5. Вектор \vec{x} перпендикулярен оси Ox и вектору \vec{p} и образует острый угол с осью Oy . Найти координаты вектора \vec{x} , если $\vec{p} = (6;1;7)$, $|\vec{x}| = 5\sqrt{2}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-3;2;1)$, $B(4;-1;3)$, $C(3;0;-1)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(-3;2;1)$, $B(4;-1;3)$, $C(3;0;-1)$, $D(6;-3;5)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (2;-1;1)$, $\vec{b} = (1;1;0)$, $\vec{c} = (0;1;2)$, $\vec{d} = (2;5;6)$. Выразить небазисный вектор через базисные.

Вариант 3

1. На стороне BC треугольника ABC взята точка K так, что $BK : KC = 2 : 1$. Разложить вектор \overrightarrow{AK} по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Даны точки $A(2;3;-1)$, $B(4;-1;3)$, $C(-6;5;3)$, $D(0;-1;3)$. Найти:
 - а) координаты вектора \overrightarrow{KN} , где K – середина отрезка AB , а точка N делит отрезок CD в отношении $2 : 1$;
 - б) проекцию вектора \overrightarrow{AB} на ось, определяемую вектором \overrightarrow{CD} .

3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(-1;-1;0)$, $\vec{b}(1;-1;2)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$, если $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
5. Вектор \vec{x} перпендикулярен оси Ox и вектору \vec{p} и образует острый угол с осью Oy . Найти координаты вектора \vec{x} , если $\vec{p} = (-4;-3;6)$, $|\vec{x}| = 2\sqrt{5}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(0;-2;5)$, $B(1;4;3)$, $C(6;3;-1)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0;-2;5)$, $B(1;4;3)$, $C(6;3;-1)$, $D(-1;3;5)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (8;2;3)$, $\vec{b} = (4;6;10)$, $\vec{c} = (3;-2;1)$, $\vec{d} = (7;4;11)$. Выразить небазисный вектор через базисные.

Вариант 4

1. На стороне BC треугольника ABC взята точка K так, что $BK : KC = 3 : 2$. Разложить вектор \vec{AK} по векторам $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AC}$.
2. Даны точки $A(5;-2;4)$, $B(-1;-4;2)$, $C(0;3;1)$, $D(-4;3;5)$. Найти:
 - а) координаты вектора \vec{KN} , где K – середина отрезка AB , а точка N делит отрезок CD в отношении $1 : 3$;
 - б) проекцию вектора \vec{AB} на ось, определяемую вектором \vec{CD} .
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(5;3;2)$, $\vec{b}(1;5;-2)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
5. Вектор \vec{x} перпендикулярен оси Ox и вектору \vec{p} и образует острый угол с осью Oy . Найти координаты вектора \vec{x} , если $\vec{p} = (2;5;0)$, $|\vec{x}| = 3$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-3;-2;1)$, $B(0;3;-1)$, $C(2;0;1)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(-3;-2;1)$, $B(0;3;-1)$, $C(2;0;1)$, $D(-4;2;3)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (10;3;1)$, $\vec{b} = (1;4;2)$, $\vec{c} = (3;9;2)$, $\vec{d} = (19;30;7)$. Выразить небазисный вектор через базисные.

Вариант 5

1. На стороне BC треугольника ABC взята точка K так, что $BK : KC = 3 : 4$. Разложить вектор \overrightarrow{AK} по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Даны точки $A(3; 2; 0)$, $B(-1; -4; 2)$, $C(4; -3; 5)$, $D(0; -3; 1)$. Найти:
 - а) координаты вектора \overrightarrow{KN} , где K – середина отрезка AB , а точка N делит отрезок CD в отношении $3 : 1$;
 - б) проекцию вектора \overrightarrow{AB} на ось, определяемую вектором \overrightarrow{CD} .
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(3; 0; 3)$, $\vec{b}(-1; -2; 1)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
5. Вектор \vec{x} перпендикулярен оси Ox и вектору \vec{p} и образует острый угол с осью Oy . Найти координаты вектора \vec{x} , если $\vec{p} = (7; -2; 5)$, $|\vec{x}| = \sqrt{29}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(4; 5; 1)$, $B(0; -3; -2)$, $C(2; 0; -4)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(4; 5; 1)$, $B(0; 3; -2)$, $C(2; 0; -4)$, $D(-7; 1; 2)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (2; 4; 1)$, $\vec{b} = (1; 3; 6)$, $\vec{c} = (5; 3; 1)$, $\vec{d} = (24; 20; 6)$. Выразить небазисный вектор через базисные.

Вариант 6

1. На стороне BC треугольника ABC взята точка K так, что $BK : KC = 2 : 5$. Разложить вектор \overrightarrow{AK} по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Даны точки $A(5; -1; -1)$, $B(1; 3; 5)$, $C(6; 5; 3)$, $D(1; 5; -2)$. Найти:
 - а) координаты вектора \overrightarrow{KN} , где K – середина отрезка AB , а точка N делит отрезок CD в отношении $4 : 1$;
 - б) проекцию вектора \overrightarrow{AB} на ось, определяемую вектором \overrightarrow{CD} .
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(2; 2; 0)$, $\vec{b}(-2; 2; -4)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$, если $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
5. Вектор \vec{x} перпендикулярен оси Oy и вектору \vec{p} и образует тупой угол с осью Oz . Найти координаты вектора \vec{x} , если $\vec{p} = (3; -6; 4)$, $|\vec{x}| = 30$.

6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2; -2; 4)$, $B(3; 4; 1)$, $C(1; -2; -1)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2; -2; 4)$, $B(3; 4; 1)$, $C(1; -2; -1)$, $D(-1; 4; -5)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (1; -3; -3)$, $\vec{b} = (4; 7; 8)$, $\vec{c} = (9; 1; 3)$, $\vec{d} = (2; -4; 4)$. Выразить небазисный вектор через базисные.

Вариант 7

1. На стороне BC треугольника ABC взята точка K так, что $BK : KC = 3 : 5$. Разложить вектор \overrightarrow{AK} по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Даны точки $A(-5; 2; -4)$, $B(1; -4; 2)$, $C(0; 3; 4)$, $D(5; 3; 4)$. Найти:
 - а) координаты вектора \overrightarrow{KN} , где K – середина отрезка AB , а точка N делит отрезок CD в отношении $2 : 3$;
 - б) проекцию вектора \overrightarrow{AB} на ось, определяемую вектором \overrightarrow{CD} .
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(5; 2; 3)$, $\vec{b}(-1; 2; -5)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 4\vec{p} + \vec{q}$, если $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
5. Вектор \vec{x} перпендикулярен оси Oy и вектору \vec{p} и образует тупой угол с осью Oz . Найти координаты вектора \vec{x} , если $\vec{p} = (9; 7; 12)$, $|\vec{x}| = 20$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2; 0; -1)$, $B(4; -3; 1)$, $C(-3; 5; -3)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2; 0; -1)$, $B(4; -3; 1)$, $C(-3; 5; -3)$, $D(4; -2; 3)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (3; 2; 2)$, $\vec{b} = (2; 3; 1)$, $\vec{c} = (1; 1; 3)$, $\vec{d} = (5; 1; 11)$. Выразить небазисный вектор через базисные.

Вариант 8

1. На стороне BC треугольника ABC взята точка K так, что $BK : KC = 5 : 2$. Разложить вектор \overrightarrow{AK} по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Даны точки $A(-4; 1; 3)$, $B(2; -3; 5)$, $C(-1; -3; 4)$, $D(5; 3; 4)$. Найти:

- а) координаты вектора \overrightarrow{KN} , где K – середина отрезка AB , а точка N делит отрезок CD в отношении $1:5$;
- б) проекцию вектора \overrightarrow{AB} на ось, определяемую вектором \overrightarrow{CD} .
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(-6;0;6)$, $\vec{b}(-2;-8;-2)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = -4\vec{p} + \vec{q}$, если $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
5. Вектор \vec{x} перпендикулярен оси Oy и вектору \vec{p} и образует тупой угол с осью Oz . Найти координаты вектора \vec{x} , если $\vec{p} = (8;12;8)$, $|\vec{x}| = 3\sqrt{2}$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-2;1;3)$, $B(4;-5;7)$, $C(3;6;-4)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(-2;1;3)$, $B(4;-5;7)$, $C(3;6;-4)$, $D(5;-2;2)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (7;1;3)$, $\vec{b} = (-2;5;4)$, $\vec{c} = (-3;1;2)$, $\vec{d} = (-3;14;10)$. Выразить небазисный вектор через базисные.

Вариант 9

1. На стороне BC треугольника ABC взята точка K так, что $BK:KC = 5:3$. Разложить вектор \overrightarrow{AK} по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Даны точки $A(-7;4;9)$, $B(3;-2;-5)$, $C(-1;4;-3)$, $D(9;4;2)$. Найти:
- а) координаты вектора \overrightarrow{KN} , где K – середина отрезка AB , а точка N делит отрезок CD в отношении $3:2$;
- б) проекцию вектора \overrightarrow{AB} на ось, определяемую вектором \overrightarrow{CD} .
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(2;-2;4)$, $\vec{b}(2;2;0)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 4\vec{p} - \vec{q}$, если $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
5. Вектор \vec{x} перпендикулярен оси Oy и вектору \vec{p} и образует тупой угол с осью Oz . Найти координаты вектора \vec{x} , если $\vec{p} = (0;-4;-9)$, $|\vec{x}|=1$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(7;11;-3)$, $B(4;5;-7)$, $C(3;5;-1)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(7;11;-3)$, $B(4;5;-7)$, $C(3;5;-1)$, $D(6;4;-2)$.

8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (1; 2; 4)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$, $\vec{c} = (2; 2; 4)$, $\vec{d} = (-1; -4; -2)$. Выразить небазисный вектор через базисные.

Вариант 10

1. На стороне BC треугольника ABC взята точка K так, что $BK : KC = 3 : 7$. Разложить вектор \overrightarrow{AK} по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.
2. Даны точки $A(10; -6; 1)$, $B(-4; 2; 3)$, $C(1; 3; -2)$, $D(7; 3; -2)$. Найти:
 - а) координаты вектора \overrightarrow{KN} , где K – середина отрезка AB , а точка N делит отрезок CD в отношении $5 : 1$;
 - б) проекцию вектора \overrightarrow{AB} на ось, определяемую вектором \overrightarrow{CD} .
3. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(-2; 5; 1)$, $\vec{b}(2; 3; 5)$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, если $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 4$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.
5. Вектор \vec{x} перпендикулярен оси Ox и вектору \vec{p} и образует острый угол с осью Oy . Найти координаты вектора \vec{x} , если $\vec{p} = (20; -3; -15)$, $|\vec{x}| = 25$.
6. Найти площадь треугольника с вершинами $A(3; -5; 2)$, $B(1; -2; 1)$, $C(2; 1; 6)$.
7. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(3; -5; 2)$, $B(1; -2; 1)$, $C(2; 1; 6)$, $D(4; -2; -1)$.
8. Найти базис системы векторов $\vec{a} = (7; 1; 3)$, $\vec{b} = (-2; 5; 4)$, $\vec{c} = (-3; 1; 2)$, $\vec{d} = (-3; 14; 10)$. Выразить небазисный вектор через базисные.

Глава 3. Основы аналитической геометрии

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие геометрические образы (прямые, плоскости, линии и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры на основе метода координат. В данном разделе будет использована декартова прямоугольная система координат.

3.1. Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости

К простейшим задачам аналитической геометрии относятся задачи о нахождении проекции отрезка, нахождении расстояния между двумя точками, делении отрезка в данном отношении, нахождении площади треугольника.

Проекция отрезка. Расстояние между двумя точками. Пусть дан произвольный отрезок M_1M_2 и некоторая ось u (рис. 3.1).

Проекцией точки M_1 на ось u называется основание P_1 перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на ось u .

Проекцией направленного отрезка M_1M_2 на ось u называется величина отрезка P_1P_2 оси u , началом и концом которого служат соответственно проекции точек M_1 и M_2 на эту ось, что символически записывается равенством $pr_u M_1M_2 = P_1P_2$.

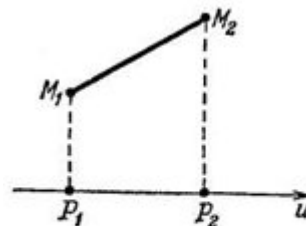
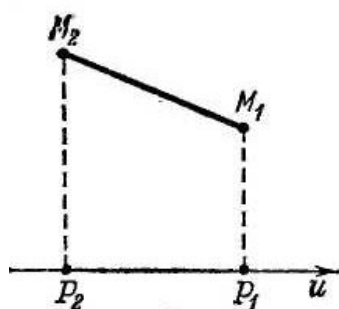
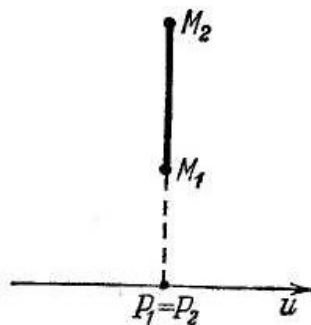


Рис. 3.1

Таким образом, проекция отрезка на ось есть *число*; оно может быть положительным (см. рис. 3.1), отрицательным (рис. 3.2, а) или равным нулю (рис. 3.2, б).



а)



б)

Рис. 3.2

Если на плоскости задана система декартовых прямоугольных координат, то проекция отрезка на ось Ox обозначается символом X , его проекция на ось Oy – символом Y .

Проекции направленного отрезка M_1M_2 на оси координат Ox и Oy обозначаются соответственно через X и Y , причем, если известны координаты точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то $X = x_2 - x_1$ и $Y = y_2 - y_1$.

Таким образом, чтобы найти проекции направленного отрезка на оси координат, нужно от координат его конца отнять соответствующие координаты начала (рис. 3.3).

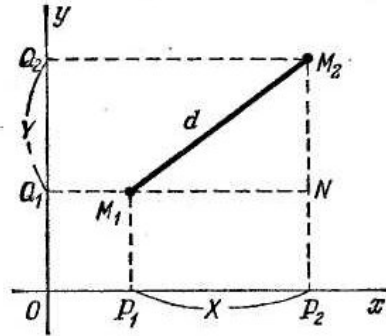


Рис. 3.3

Из прямоугольного треугольника M_1NM_2 на рис. 3.3 следует, что расстояние d между любыми двумя точками плоскости $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ определяется формулой

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (3.1)$$

Рассмотрим отрезок M_1M_2 . Проведем через его начальную точку M_1 луч u , параллельный оси Ox и направленный в ту же сторону (рис. 3.4).

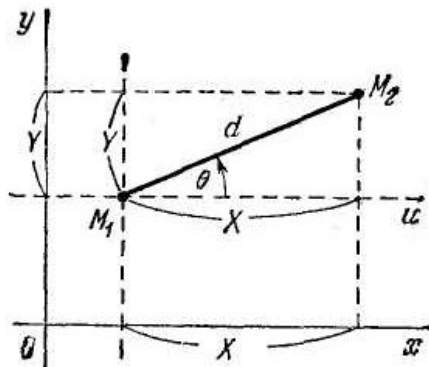


Рис. 3.4

Обозначим через θ угол, на который следует повернуть луч u против часовой стрелки около точки M_1 , чтобы направление луча и совпало с направлением отрезка M_1M_2 .

Угол θ будем называть полярным углом отрезка M_1M_2 относительно данных координатных осей. Примем теперь точку M_1 в качестве начала новой декартовой системы координат, оси которой направлены так же, как оси исходной системы координат (на рис. 3.4 новые оси показаны пунктиром). Проекция отрезка M_1M_2 на соответственные оси старой и новой системы одинаковы: обозначим их как и раньше через X , Y . Числа X , Y являются декартовыми координатами

натами точки M_2 в новой системе. Из геометрических соображений очевидно, что

$$X = d \cos \theta, \quad Y = d \sin \theta. \quad (3.2)$$

В координатной форме соотношения (3.2) примут вид:

$$x_2 - x_1 = d \cos \theta, \quad y_2 - y_1 = d \sin \theta. \quad (3.3)$$

Во многих случаях удобной является также формула

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (3.4)$$

которая очевидным образом выводится из формул (3.3).

Деление отрезка в данном отношении. Если точка $M(x; y)$ лежит на прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, и дано отношение $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$, в котором точка M делит отрезок M_1M_2 (исключая совпадение

с точкой M_2), то координаты точки M определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (3.5)$$

Замечание. Если точка M находится между точками M_1 и M_2 , то число λ положительное. Если точка M находится на прямой, определяемой точками M_1 и M_2 , вне отрезка M_1M_2 , то λ есть число отрицательное.

Если точка M является серединой отрезка M_1M_2 , то ее координаты определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (3.6)$$

Площадь треугольника. Каковы бы ни были три точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, не лежащие на одной прямой, площадь S треугольника ABC определяется формулой

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|. \quad (3.7)$$

Пример 3.1. Даны точки $M_1(1; 1)$ и $M_2(7; 4)$. На определяемой ими прямой найти точку M , которая в два раза ближе к M_1 чем к M_2 , и находится:

- а) между точками M_1 и M_2 ;
- б) вне отрезка, ограниченного точками M_1 и M_2 .

Решение: а) искомая точка делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$.

Применяя формулы (3.5), находим координаты этой точки: $x=3$, $y=2$;

б) искомая точка делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = -\frac{1}{2}$. Применяя формулы (3.5), находим координаты этой точки: $x = -5$, $y = -2$.

Пример 3.2. Даны вершины треугольника $A(5; -1)$, $B(-1; 7)$, $C(1; 2)$. Найти длину его внутренней биссектрисы, проведенной из вершины A .

Решение. Обозначим через M точку пересечения указанной биссектрисы со стороной BC , через c и b – длины сторон AB и AC . Как известно из элементарной геометрии, биссектриса, проведенная из какой-нибудь вершины треугольника, делит противолежащую этой вершине сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Таким образом, точка M делит отрезок BC в отношении λ где $\lambda = \frac{BM}{MC} = \frac{c}{b}$.

Пользуясь формулой (3.1), находим длины сторон AB и AC

$$c = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-7)^2} = 10, \quad b = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-2)^2} = 5.$$

Следовательно, $\lambda = 2$. Применяя формулы (3.5), находим координаты точки M :

$$x = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{11}{3}.$$

По формуле (3.1) получаем искомую длину биссектрисы AM

$$|AM| = \sqrt{\left(5 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-1 - \frac{11}{3}\right)^2} = \frac{14}{3}\sqrt{2}.$$

Пример 3.3. Найти проекции отрезка на координатные оси, зная его длину $d = 2\sqrt{2}$ и полярный угол $\theta = 135^\circ$.

Решение. По формулам (3.2) находим

$$X = 2\sqrt{2} \cos 135^\circ = 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2, \quad Y = 2\sqrt{2} \sin 135^\circ = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2.$$

Пример 3.4. Найти полярный угол отрезка, направленного из точки $M_1(5; \sqrt{3})$ в точку $M_2(6; 2\sqrt{3})$.

Решение. По формуле (3.1)

$$d = \sqrt{(6-5)^2 + (2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2} = 2.$$

Применяя формулы (3.2), найдем

$$\cos \theta = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Следовательно, $\theta = 60^\circ$.

Пример 3.5. Даны точки $A(1; 1)$, $B(6; 4)$, $C(8; 2)$. Найти площадь треугольника ABC .

Решение. По формуле (3.7)

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = |-8| = S.$$

Следовательно, $S=8$.

Задачи для самостоятельного решения

- 3.1.** Построить на чертеже отрезки, исходящие из начала координат, зная их проекции на координатные оси:
1) $X = 3$, $Y = 2$; 2) $X = 2$, $Y = -5$; 3) $X = -5$, $Y = 0$; 4) $X = -5$, $Y = -1$.
- 3.2.** Построить на чертеже отрезки, имеющие началом точку $M(2; -1)$, зная их проекции на координатные оси:
а) $X = 4$, $Y = 3$; б) $X = 2$, $Y = 0$; в) $X = -4$, $Y = -2$; г) $X = 1$, $Y = -3$.
- 3.3.** Даны точки $M_1(1; -2)$, $M_1(2; 1)$, $M_2(5; 0)$, $M_3(-1; 4)$ и $M_4(0; -3)$.
Найти проекции на координатные оси следующих отрезков:
1) M_1M_2 ; 2) M_3M_2 ; 3) M_4M_5 ; 4) M_5M_3 .
- 3.4.** Даны проекции отрезка M_1M_2 на оси координат: $X = 5$, $Y = -4$. Зная, что его начало лежит в точке $M_1(-2; 3)$, найти координаты его конца.
- 3.5.** Даны проекции отрезка AB на оси координат: $X = 4$, $Y = -5$. Зная, что его конец есть точка $B(1; -3)$, найти координаты его начала.
- 3.6.** Построить на чертеже отрезки, исходящие из начала координат, зная длину d и полярный угол θ каждого из них:
1) $d = 5$, $\theta = \frac{\pi}{5}$; 2) $d = 3$, $\theta = \frac{5}{6}\pi$; 3) $d = 4$, $\theta = -\frac{\pi}{3}$.
- 3.7.** Построить на чертеже отрезки, имеющие началом точку $M(2; 3)$, зная длину и полярный угол каждого из них:
1) $d = 2$, $\theta = -\frac{\pi}{10}$; 2) $d = 1$, $\theta = \frac{\pi}{9}$; 3) $d = 5$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$.
- 3.8.** Вычислить проекции на координатные оси отрезка, зная длину d и полярный угол θ каждого из них:
1) $d = 12$, $\theta = \frac{2}{3}\pi$; 2) $d = 6$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$; 3) $d = 2$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$.
- 3.9.** Даны проекции отрезков на координатные оси:

1) $X = 1, Y = \sqrt{3}$; 2) $X = 3\sqrt{2}, Y = -3\sqrt{2}$; 3) $X = -2\sqrt{3}, Y = 2$.

Вычислить длину d и полярный угол θ каждого из них.

- 3.10.** Даны точки $M_1(2; -3)$, $M_2(1; -4)$, $M_3(-1; -7)$ и $M_4(-4; 8)$. Вычислить длину и полярный угол следующих отрезков: 1) M_1M_2 ; 2) M_1M_3 ; 3) M_2M_4 ; 4) M_4M_3 .
- 3.11.** Длина d отрезка равна 5, его проекция на ось абсцисс равна 4. Найти проекцию этого отрезка на ось ординат при условии, что он образует с осью ординат: а) острый угол, б) тупой угол.
- 3.12.** Длина отрезка MN равна 17, его конец есть точка $N(-7; 3)$, проекция на ось ординат равна 15. Найти координаты начала этого отрезка при условии, что он образует с осью абсцисс: а) острый угол, б) тупой угол.
- 3.13.** Зная проекции отрезка на координатные оси $X=1, Y=-\sqrt{3}$, найти его проекцию на ось, которая составляет с осью Ox угол $\theta = \frac{2}{3}\pi$.
- 3.14.** Даны две точки $M_1(1; -5)$ и $M_2(4; -1)$. Найти проекцию отрезка M_1M_2 на ось, которая составляет с осью Ox угол $\theta = -\frac{\pi}{6}$.
- 3.15.** Даны две точки $M_1(2; -2)$ и $M_2(7; -3)$. Найти проекцию отрезка M_1M_2 на ось, проходящую через точки $A(5; -4)$, $B(-7; 1)$ и направленную: 1) от A к B ; 2) от B к A .
- 3.16.** Даны точки $A(0; 0)$, $B(3; -4)$, $C(-3; 4)$, $D(-2; 2)$ и $E(10; -3)$. Определить расстояние d между точками: 1) A и B ; 2) B и C ; 3) A и C ; 4) C и D ; 5) A и D ; 6) D и E .
- 3.17.** Даны две смежные вершины квадрата $A(3; -7)$ и $B(-1; 4)$. Вычислить его площадь.
- 3.18.** Вычислить площадь правильного треугольника, две вершины которого находятся в точках $A(-3; 2)$ и $B(1; 6)$.
- 3.19.** Даны три вершины $A(3; -7)$, $B(5; -7)$, $C(-2; 5)$ параллелограмма $ABCD$, четвертая вершина которого D противоположна B . Определить длину диагоналей этого параллелограмма.
- 3.20.** Сторона ромба равна $5\sqrt{10}$, две его противоположные вершины находятся в точках $P(4; 9)$ и $Q(-2; 1)$. Вычислить площадь этого ромба.
- 3.21.** Сторона ромба равна $5\sqrt{2}$, две его противоположные вершины находятся в точках $P(3; -4)$ и $Q(1; 2)$. Вычислить длину высоты этого ромба.
- 3.22.** Доказать, что точки $A(3; -5)$, $B(-2; -7)$ и $C(18; 1)$ лежат на одной прямой.

- 3.23. Доказать, что треугольник с вершинами $A_1(1; 1)$, $A_2(2; 3)$ и $A_3(5; -1)$ прямоугольный.
- 3.24. Доказать, что точки $A(2; 2)$, $B(-1; 6)$, $C(-5; 3)$ и $D(-2; -1)$ являются вершинами квадрата.
- 3.25. Доказать, что все внутренние углы треугольника с вершинами $M(-1; 3)$, $N(1; 2)$ и $P(0; 4)$ острые.
- 3.26. Точки $A(5; 0)$, $B(0; 1)$ и $C(3; 3)$ являются вершинами треугольника. Вычислить его внутренние углы.
- 3.27. Вершины треугольника находятся в точках $A(-\sqrt{3}; 1)$, $B(0; 2)$ и $C(-2\sqrt{3}; 2)$. Вычислить его внешний угол при вершине A .
- 3.28. На оси ординат найти такую точку M , расстояние которой до точки $N(-8; 13)$ равнялось бы 17.
- 3.29. Даны две точки $M(2; 2)$ и $N(5; -2)$. На оси абсцисс найти такую точку P , чтобы угол MPN был прямым.
- 3.30. Определить координаты точки M_2 , симметричной точке $M_1(1; 2)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(1; 0)$ и $B(-1; -2)$.
- 3.31. Даны две противоположные вершины квадрата $A(3; 0)$ и $C(-4; 1)$. Найти две его другие вершины.
- 3.32. Даны две смежные вершины квадрата $A(2; -1)$ и $B(-1; 3)$. Определить две его другие вершины.
- 3.33. Даны две точки $A(3; -1)$ и $B(2; 1)$. Определить:
- 1) координаты точки M , симметричной точке A относительно точки B ;
 - 2) координаты точки N , симметричной точке B относительно точки A .
- 3.34. Точки $M(1; -1)$, $N(-1; 4)$ и $P(-2; 2)$ являются серединами сторон треугольника. Определить его вершины.
- 3.35. Даны три вершины параллелограмма $A(3; -5)$, $B(5; -3)$, $C(-1; 3)$. Определить четвертую вершину D , противоположную B .
- 3.36. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(-3; 5)$, $B(1; 7)$ и точка пересечения его диагоналей $M(1; 1)$. Определить две другие вершины.
- 3.37. Даны вершины треугольника $A(1; 4)$, $B(3; -9)$, $C(-5; 2)$. Определить длину его медианы, проведенной из вершины B .
- 3.38. Отрезок, ограниченный точками $A(1; -3)$ и $B(4; 3)$, разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.
- 3.39. Даны вершины треугольника $A(2; -5)$, $B(1; -2)$, $C(4; 7)$. Найти координаты точки пересечения со стороной AC биссектрисы его внутреннего угла при вершине B .

- 3.40. Даны вершины треугольника $A(3; -5)$, $B(-3; 3)$ и $C(-1; -2)$. Определить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A .
- 3.41. Даны вершины треугольника $A(-1; -1)$, $B(3; 5)$, $C(-4; 1)$. Найти точку пересечения с продолжением стороны BC биссектрисы его внешнего угла при вершине A .
- 3.42. Даны вершины треугольника $A(3; -5)$, $B(1; -3)$, $C(2; -2)$. Определить длину биссектрисы его внешнего угла при вершине B .
- 3.43. Даны три точки $A(1; -1)$, $B(3; 3)$ и $C(4; 5)$, лежащие на одной прямой. Определить отношение λ , в котором каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими.
- 3.44. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $P(2; 2)$ и $Q(1; 5)$ разделен на три равные части.
- 3.45. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки:
 1) $A(2; -3)$, $B(3; 2)$ и $C(-2; 5)$;
 2) $M_1(-3; 2)$, $M_2(5; -2)$ и $M_3(1; 3)$;
 3) $M(3; -4)$, $N(-2; 3)$ и $P(4; 5)$.
- 3.46. Вершины треугольника находятся в точках $A(3; 6)$, $B(-1; 3)$ и $C(2; -1)$. Вычислить длину его высоты, проведенной из вершины C .
- 3.47. Определить площадь параллелограмма, три вершины которого есть точки $A(-2; 3)$, $B(4; -5)$ и $C(-3; 1)$.
- 3.48. Три вершины параллелограмма находятся в точках $A(3; 7)$, $B(2; -3)$ и $C(-1; 4)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC .
- 3.49. Даны последовательные вершины однородной четырехугольной пластинки $A(2; 1)$, $B(5; 3)$, $C(-1; 7)$ и $D(-7; 5)$. Определить координаты ее центра тяжести (центр тяжести находится в точке пересечения медиан).
- 3.50. Площадь треугольника $S=3$ кв. ед., две его вершины есть точки $A(3; 1)$ и $B(1; -3)$, а третья вершина C лежит на оси Oy . Определить координаты вершины C .
- 3.51. Площадь параллелограмма $S=17$ кв. ед.; две его вершины есть точки $A(2; 1)$ и $B(5; -3)$. Найти две другие вершины этого параллелограмма при условии, что точка пересечения его диагоналей лежит на оси ординат.

3.2. Прямая линия на плоскости

Уравнением линии на плоскости называется уравнение $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты любой точки данной линии и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

Другими словами, линия, определенная данным уравнением (в некоторой системе координат), есть геометрическое место всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Прямая линия в векторной форме может быть задана уравнением

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \quad (3.8)$$

где $\vec{n} = (A; B)$ – вектор, перпендикулярный прямой; $\vec{r} = (x; y)$ – радиус-вектор произвольной точки прямой; $\vec{r}_0 = (x_0; y_0)$ – радиус-вектор фиксированной точки прямой.

Любая прямая на плоскости может быть задана в фиксированной декартовой прямоугольной системе координат уравнением первой степени. Обратно, любое уравнение первой степени относительно декартовых координат является уравнением прямой. Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \quad (3.9)$$

называется общим уравнением прямой. В уравнении (3.9) числа A, B, C – постоянные, причем A и B не равны нулю одновременно.

Если в общем уравнении прямой (3.9) один или два из трех коэффициентов (считая и свободный член) обращаются в нуль, то уравнение называется неполным.

Если ни один из коэффициентов уравнения (3.9) не равен нулю, то его можно преобразовать к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (3.10)$$

где $a = -\frac{C}{A}$ и $b = -\frac{C}{B}$ есть величины отрезков, которые отсекает прямая на координатных осях. Каждый из этих отрезков отложен от начала координат.

Уравнение (3.10) называется уравнением прямой «в отрезках».

Расстояние от точки $P(x_0; y_0)$ до прямой (3.9) находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.11)$$

Угол α , определяемый, как показано на рис. 3.5, называется углом наклона прямой к оси Ox ($0 \leq \alpha < \pi$).

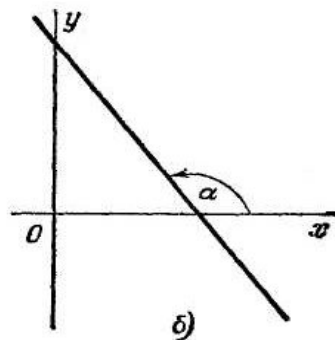
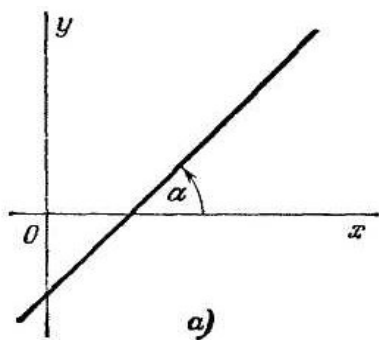


Рис. 3.5

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называется угловым коэффициентом прямой; обычно его обозначают буквой k :

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.12)$$

Уравнение вида

$$y = kx + b \quad (3.13)$$

называется уравнением прямой с угловым коэффициентом;

k — угловой коэффициент, b — величина направленного отрезка, который отсекает прямая на оси Oy , считая от начала координат.

Если прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то ее угловой коэффициент определяется по формуле $k = -\frac{A}{B}$, ($B \neq 0$).

Уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (3.14)$$

является уравнением прямой, которая проходит через точку $P(x_0; y_0)$ и имеет угловой коэффициент k .

Если прямая, проходящая через заданную точку $Q(x_1; y_1)$, параллельна оси Oy , то ее уравнение имеет вид

$$x = x_1. \quad (3.15)$$

Если прямая, проходящая через заданную точку $Q(x_1; y_1)$, параллельна оси Ox , то ее уравнение имеет вид

$$y = y_1. \quad (3.16)$$

Если k — заданное число, то уравнение (3.14) представляет вполне определенную прямую, если же k — переменный параметр, то это уравнение определит пучок прямых, проходящих через точку $P(x_0; y_0)$ (рис. 3.6), при этом k называется параметром пучка.

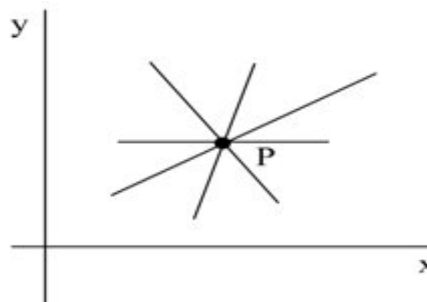


Рис. 3.6

Если прямая проходит через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то из рис. 3.7 ее угловой коэффициент определяется по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.17)$$

Уравнение

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (3.18)$$

описывает прямую, проходящую через две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

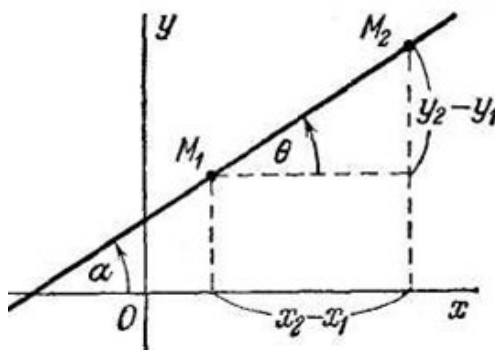


Рис. 3.7

Совместное исследование уравнений прямых

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y :

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Каждое уравнение системы (3.19) определяет некоторую прямую. Вопрос о существовании и количестве вещественных решений системы (3.19) равносильен вопросу о существовании и количестве общих точек этих прямых. Возможны три случая.

1. Прямые пересекаются, т.е. имеют единственную общую точку – система (3.19) имеет единственное решение. Критерием пересечения двух прямых является условие $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.
2. Прямые совпадают, т.е. оба уравнения системы определяют одну и ту же прямую – система (3.19) имеет бесконечное множество решений. Критерием совпадения двух прямых является условие $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.
3. Прямые параллельны – система (3.19) не имеет решений. Критерием параллельности двух прямых является условие $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

В случае если две прямые (3.19) пересекаются, то один из двух смежных углов φ , образованных при пересечении этих прямых, определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}. \quad (3.20)$$

Если известны угловые коэффициенты двух прямых k_1 и k_2 , то угол φ от первой прямой до второй, отсчитываемый против хода часовой стрелки определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (3.21)$$

Условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов

$$k_1 = k_2. \quad (3.22)$$

Условием перпендикулярности двух прямых является соотношение

$$k_1 k_2 = -1 \quad \text{или} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}. \quad (3.23)$$

Если три прямые $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ и $A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$ пересекаются в одной точке, то выполняется условие

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.24)$$

Обратно, если имеет место (3.24), то три прямые $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, $A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$ пересекаются в одной точке или параллельны.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ параллельно прямой $Ax + By + C = 0$, может быть записано в виде

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \quad (3.25)$$

Пример 3.6. Определить острый угол между прямыми $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

Решение. $k_1 = -3$; $k_2 = 2$. По формуле (3.21) с учетом того, что угол между прямыми должен быть острым, имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 + (-3)2} \right| = 1 \Rightarrow \varphi = \pi/4.$$

Пример 3.7. Исследовать расположение на плоскости двух прямых:

- 1) $3x + 4y - 1 = 0$ и $2x + 3y - 1 = 0$;
- 2) $2x + 3y + 1 = 0$ и $4x + 6y + 3 = 0$;
- 3) $x + y + 1 = 0$ и $3x + 3y + 3 = 0$.

Решение: 1) прямые $3x + 4y - 1 = 0$ и $2x + 3y - 1 = 0$ пересекаются, так как $\frac{3}{2} \neq \frac{4}{3}$. Координаты точки пересечения $x = -1$, $y = 1$ найдены из решения системы двух линейных уравнений, задающих каждую прямую;

2) Прямые $2x + 3y + 1 = 0$ и $4x + 6y + 3 = 0$ параллельны, так как $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{1}{3}$ (система данных уравнений, очевидно, несовместна, так как умножая первое из них на 2 и отнимая от второго, получим противоречивое равенство $1=0$);

3) Прямые $x + y + 1 = 0$ и $3x + 3y + 3 = 0$ совпадают друг с другом, так как $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (данные уравнения равносильны).

Пример 3.8. Даны вершины треугольника $A(0; 1)$, $B(6; 5)$, $C(12; -1)$. Найти уравнения высоты и медианы, проведенных из вершины C .

Решение. Находим уравнение стороны AB : $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$;

$$4x = 6y - 6 \text{ или } 2x - 3y + 3 = 0; y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Ищем уравнение высоты в виде: $y - y_1 = k(x - x_1)$ или, с учетом того, что она опущена из вершины $C(12; -1)$: $y - 12 = k(x + 1)$. Коэффициент k определим из условия (3.23) $\frac{2}{3}k = -1$ или $k = -\frac{3}{2}$. Таким образом, искомое уравнение высоты имеет вид $y - 12 = -1,5(x + 1)$ или $y = -1,5x + 10,5$.

Для записи уравнения медианы, найдем координаты середины стороны AB по формулам (3.6):

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 6}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3.$$

Уравнение медианы CM запишем, используя уравнение (3.18): $\frac{x-3}{12-3} = \frac{y-3}{-1-3}$ или $-4(x-3) = 9(y-3)$. Окончательно имеем $y = -\frac{4}{9}x + 4\frac{1}{3}$ — искомое уравнение медианы.

Пример 3.9. Найти проекцию точки $P(4; 9)$ на прямую, проходящую через точки $A(3; 1)$ и $B(5; 2)$.

Решение. Искомая точка есть точка пересечения прямой AB с перпендикуляром, опущенным на эту прямую из точки P . Прежде всего, составим уравнение прямой AB . Применяя соотношение (3.18), получаем $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1}$

$$\text{или } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Чтобы составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую AB , напишем уравнение произвольной прямой, проходящей через точку P ; согласно соотношению (3.14), получаем $y - 9 = k(x - 4)$, где k — пока еще не определенный угловой коэффициент. Нам нужно, чтобы искомая прямая

прошла перпендикулярно к AB ; следовательно, ее угловой коэффициент должен удовлетворять условию перпендикулярности с прямой AB . Так как угловой коэффициент прямой AB равен $\frac{1}{2}$, то, согласно формуле (3.23), находим $k = -2$.

Подставляя найденное значение k в уравнение, получаем $y - 9 = -2(x - 4)$ или $y = -2x + 17$.

Решив систему уравнений $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ и $y = -2x + 17$, найдем координаты искомой проекции: $x = 7$, $y = 3$.

Пример 3.10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; -3)$ и начало координат.

Решение. Подставляя в (3.18) $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$, имеем $\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0}$ или $\frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}$. Преобразовывая последнее равенство, получаем общее уравнение искомой прямой $3x - 2y = 0$.

Пример 3.11. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2 .

Решение. Уравнение прямой имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. По условию $a = b > 0$ и $ab/2 = 8$. Значит, $a = 4$. Таким образом, искомое уравнение прямой $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ или в общем виде $x + y - 4 = 0$.

Пример 3.12. Определить расстояние между двумя параллельными прямыми $4x - 3y - 8 = 0$ и $4x - 3y + 7 = 0$.

Решение. Для решения задачи достаточно найти расстояние от любой точки на одной из прямых до другой прямой. Возьмем точку на прямой $4x - 3y - 8 = 0$. Пусть $y = 0$, тогда $x = 2$. По формуле (3.11) найдем расстояние от точки $(2; 0)$ до прямой $4x - 3y + 7 = 0$. Получим $d = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{15}{5} = 3$.

Пример 3.13. Определить линейную зависимость $y = kx + b$ между полными издержками y производства предприятия, изготавливающего однородную продукцию, и объемом x производства, если:

- 1) постоянные издержки (например, затраты на содержание административных зданий, их отопление и т.д.), не зависящие от объема продукции, составляют b (денежных единиц);
- 2) переменные издержки (например, материальные затраты) прямо пропорциональны с коэффициентом k объему x изготавливаемой продукции.

Записать эту зависимость для $b = 4$ (млн руб.) и $k = 0,5$ (млн руб. на одну единицу продукции).

Решение. В данном случае между полными издержками y некоторого производства и количеством x произведенной продукции имеет место линейная зависимость вида $y=kx+b$, где k – удельные переменные издержки (издержки на одну условную единицу продукции), а b – постоянные издержки производства. В случае $b=4$ (млн руб.) и $k=0,5$ (млн на одну условную единицу продукции) имеем уравнение $y = 0,5x + 4$.

Пример 3.14. Полные издержки y по производству x единиц продукции на двух предприятиях выражаются соответственно формулами:

$$L_1: y = 0,7x + 2 \quad \text{и} \quad L_2: y = 0,5x + 4,$$

где x – объем продукции (усл. ед.), а y – соответствующие полные издержки (млн руб.). Требуется выяснить, начиная с какого объема продукции более экономичным становится второе предприятие.

Решение. Построим прямые L_1 и L_2 (рис. 3.8)

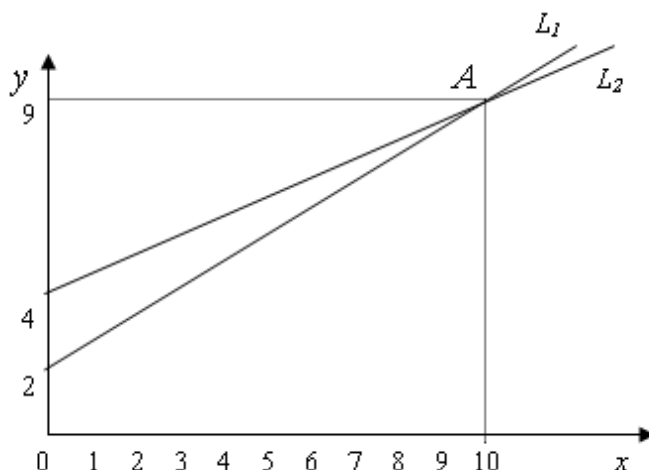


Рис. 3.8

Найдем координаты точки их пересечения, решив следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 0,7x + 2, \\ y = 0,5x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,7x + 2 = 0,5x + 4, \\ y = 0,5x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2x = 2, \\ y = 0,5x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, \\ y = 9. \end{cases}$$

Следовательно, точка A пересечения прямых имеет координаты $x=10$ и $y=9$. Это значит, что при объеме продукции $x=10$ усл.ед. полные издержки по производству этого объема на обоих предприятиях одинаковы и составляют 9 млн руб.

Из рис.3.8 видно, что при объеме $x>10$ более экономичным (издержки меньше) становится второе предприятие. Это можно установить и без помощи графика (аналитически).

Действительно, если обозначить $y_1 = 0,7x + 2$ и $y_2 = 0,5x + 4$, то, решая относительно x неравенство $y_2 < y_1$, получаем: $0,5x + 4 < 0,7x + 2 \Leftrightarrow 0,2x > 2 \Leftrightarrow x > 10$.

Пример 3.15. Между пунктами $A(5;5)$ и $B(8;4)$ (на плане местности размеры даны в километрах) проложен прямолинейно провод телефонной связи. Необходимо подключить к этому проводу пункт $C(2;1)$ по кратчайшему расстоянию. Найти точку подключения D и длину необходимого для этого провода.

Решение. Наикратчайшим расстоянием от пункта $C(2;1)$ до прямой AB является длина перпендикуляра CD , опущенного на AB из точки C . Следовательно, необходимо найти уравнение прямой CD , перпендикулярной AB и установить длину отрезка CD .

По формуле (3.18) запишем уравнение прямой AB $\frac{x-5}{8-5} = \frac{y-5}{4-5}$.

Приводя подобные, получаем уравнение прямой в общем виде $x+3y-20=0$.

Так как угловой коэффициент прямой AB $k_{AB} = -\frac{1}{3}$, то угловой коэффициент прямой CD $k_{CD} = 3$. Тогда по формуле (3.14) уравнение прямой CD имеет вид $3(x-2)=(y-1)$ или в общем виде $3x-y-5=0$.

Найдем координаты точки D .

$$D: \begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ x + 3y - 20 = 0. \end{cases} \Rightarrow D(3,5; 5,5).$$

Обозначим через d расстояние от точки C до прямой AB , тогда

$$d = \frac{|2 + 3 \cdot 1 - 20|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{2} \sqrt{10} \approx 4,7 \text{ (км)}.$$

Следовательно, точка подключения к телефонному проводу будет иметь на плане местности координаты $(3,5; 5,5)$, а длина требуемого провода составит 4,7 км.

Задачи для самостоятельного решения

- 3.52.** Определить, какие из точек $M_1(3; 1)$, $M_2(2; 3)$, $M_3(6; 3)$, $M_4(-3; -3)$, $M_5(3; -1)$, $M_6(-2; 1)$ лежат на прямой $2x-3y-3=0$ и какие не лежат на ней.
- 3.53.** Точки P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 расположены на прямой $3x-2y-6=0$; их абсциссы соответственно равны числам 4, 0, 2, -2 и -6. Определить ординаты этих точек.
- 3.54.** Точки Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 и Q_5 расположены на прямой $x-3y+2=0$; их ординаты соответственно равны числам 1, 0, 2, -1, 3. Определить абсциссы этих точек.

- 3.55.** Определить точки пересечения прямой $2x-3y-12=0$ с координатными осями и построить эту прямую на чертеже.
- 3.56.** Найти точку пересечения двух прямых $3x-4y-29=0$ и $2x+5y+19=0$.
- 3.57.** Стороны AB , BC и AC треугольника ABC даны соответственно уравнениями $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Определить координаты его вершин.
- 3.58.** Даны уравнения двух сторон параллелограмма $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x+2y+3=0$. Определить координаты вершин этого параллелограмма.
- 3.59.** Стороны треугольника лежат на прямых $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$, $7x+y+19=0$. Вычислить его площадь S .
- 3.60.** Площадь треугольника $S=8$ кв. ед.; две его вершины находятся в точках $A(1; -2)$ и $B(2; 3)$, а третья вершина C лежит на прямой $2x+y-2=0$. Определить координаты вершины C .
- 3.61.** Составить уравнение прямой и построить прямую на чертеже, зная ее угловой коэффициент k и отрезок b , отсекаемый ею на оси Oy :
- 1) $k = \frac{2}{3}$, $b = 3$; 2) $k = 3$, $b = 0$; 3) $k = 0$, $b = -2$;
- 4) $k = -\frac{3}{4}$, $b = 3$; 5) $k = -2$, $b = -5$; 6) $k = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$.
- 3.62.** Определить угловой коэффициент k и отрезок b , отсекаемый на оси Oy , для каждой из прямых:
- 1) $5x-y+3=0$; 2) $2x+3y-6=0$; 3) $5x+3y+2=0$; 4) $3x+2y=0$; 5) $y-3=0$.
- 3.63.** Дана прямая $5x+3y-3=0$. Определить угловой коэффициент k прямой:
- 1) параллельной данной прямой;
- 2) перпендикулярной к данной прямой.
- 3.64.** Дана прямая $2x+3y+4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$:
- 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно к данной прямой.
- 3.65.** Даны уравнения двух сторон прямоугольника $x-2y=0$, $x-2y+15=0$ и уравнение одной из его диагоналей $7x+y-15=0$. Найти вершины прямоугольника.
- 3.66.** Найти проекцию точки $P(-6; 4)$ на прямую $4x-5y+3=0$.
- 3.67.** Найти точку Q , симметричную точке $P(-5; 13)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$.
- 3.68.** В каждом из следующих случаев составить уравнение прямой, параллельной двум данным прямым и находящейся на равном расстоянии от каждой прямой:
- 1) $5x+y+3=0$ и $5x+y-17=0$; 2) $2x+3y-6=0$ и $4x+6y+17=0$;
- 3) $5x+7y+15=0$ и $5x+7y+3=0$; 4) $3x-15y-1=0$ и $x-5y-2=0$.

- 3.69.** Вычислить угловой коэффициент k прямой, проходящей через две данные точки:
- а) $M_1(2; -5)$, $M_2(3; 2)$; б) $P(-3; 1)$, $Q(7; 8)$; в) $A(5; -3)$, $B(-1; 6)$.
- 3.70.** Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $A(5; -4)$, $B(-1; 3)$, $C(-3; -2)$ параллельно противоположным сторонам.
- 3.71.** Даны середины сторон треугольника: $M_1(2; 1)$, $M_2(5; 3)$ и $M_3(3; -4)$. Составить уравнения его сторон.
- 3.72.** Даны две точки: $P(2; 3)$ и $Q(-1; 0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно к отрезку PQ .
- 3.73.** Составить уравнение прямой, если точка $P(2; 3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.
- 3.74.** Стороны треугольника даны уравнениями $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$. Определить точку пересечения его высот.
- 3.75.** Даны вершины треугольника $A(2; -2)$, $B(3; -5)$ и $C(5; 7)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине A .
- 3.76.** Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами $A(3; 2)$, $B(5; -2)$, $C(1; 0)$.
- 3.77.** Даны две смежные вершины $A(-3; -1)$ и $B(2; 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $Q(3; 0)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.
- 3.78.** Даны уравнения двух сторон прямоугольника $5x + 1y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ и уравнение его диагонали $3x + 7y - 0 = 0$. Составить уравнения остальных сторон и второй диагонали этого прямоугольника.
- 3.79.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(3; 5)$ на одинаковых расстояниях от точек $A(-7; 3)$ и $B(11; -15)$.
- 3.80.** Найти точку M_1 , симметричную точке $M_2(8; -9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3; -4)$ и $B(-1; -2)$.
- 3.81.** На прямой $2x - y - 5 = 0$ найти такую точку P , сумма расстояний которой до точек $A(-7; 1)$, $B(-5; 5)$ была бы наименьшей.
- 3.82.** На прямой $3x - y - 1 = 0$ найти такую точку P , разность расстояний которой до точек $A(4; 1)$ и $B(0; 4)$ была бы наибольшей.
- 3.83.** Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$ под углом 45° к данной прямой.
- 3.84.** Точка $A(-4; 5)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x - y + 8 = 0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

- 3.85.** Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1; 3)$ и $C(6; 2)$. Составить уравнения его сторон.
- 3.86.** Точка $E(1; -1)$ является центром квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x-2y+12=0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат остальные стороны этого квадрата.
- 3.87.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2; -3)$ параллельно прямой:
 1) $16x-24y-7=0$; 2) $2x+3=0$; 3) $3y-1=0$.
- 3.88.** Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны:
 1) $3x-4y+1=0$ и $4x-3y+7=0$; 2) $6x-15y+7=0$ и $10x+4y-3=0$;
 3) $9x-12y+5=0$ и $8x+6y-13=0$; 4) $7x-2y+1=0$ и $4x+6y+17=0$.
- 3.89.** Даны две вершины $A(3; -1)$ и $B(5; 7)$ треугольника ABC и точка $N(4; -1)$ пересечения его высот. Составить уравнения сторон этого треугольника.
- 3.90.** В треугольнике ABC даны: уравнение стороны AB : $5x-3y+2=0$, уравнения высот AN : $4x-3y+1=0$ и BN : $7x+2y-22=0$. Составить уравнения двух других сторон и третьей высоты этого треугольника.
- 3.91.** Составить уравнения сторон треугольника ABC , если даны одна из его вершин $A(1; 3)$ и уравнения двух медиан $x-2y+1=0$ и $y-1=0$.
- 3.92.** Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2; -1)$, а также уравнения высоты $3x-4y+27=0$ и биссектрисы $x+2y-5=0$, проведенных из различных вершин.
- 3.93.** Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(3; -1)$, а также уравнения биссектрисы $x-4y+10=0$ и медианы $6x+10y-59=0$, проведенных из различных вершин.
- 3.94.** Составить уравнение прямой, которая проходит через начало координат и вместе с прямыми $x-y+12=0$, $2x+y+9=0$ образует треугольник с площадью, равной 1,5 кв.ед.
- 3.95.** Среди прямых, проходящих через точку $P(3; 0)$, найти такую, отрезок которой, заключенный между прямыми $2x-y-2=0$, $x+y+3=0$, делится в точке P пополам.
- 3.96.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $C(-5; 4)$, зная, что длина ее отрезка, заключенного между прямыми $x+2y+1=0$, $x+2y-1=0$, равна 5.
- 3.97.** Определить, при каком значении a прямая $(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$
 1) параллельна оси абсцисс; 2) параллельна оси ординат;
 3) проходит через начало координат.
 В каждом случае написать уравнение прямой.
- 3.98.** Определить, при каких значениях m и n прямая

$$(2m-n+5)x+(m+3n-2)y+2m+7n+19=0$$

параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок, равный 5 (считая от начала координат). Написать уравнение этой прямой.

3.99. Доказать, что две данные прямые пересекаются, и найти точку их пересечения:

1) $x+5y-35=0$ и $3x+2y-27=0$; 2) $12x+15y-8=0$ и $16x+9y-7=0$;

3) $8x-33y-19=0$ и $12x+55y-19=0$; 4) $3x+5=0$ и $y-2=0$.

3.100. Доказать, что в следующих случаях две данные прямые параллельны:

1) $3x+5y-4=0$, $6x+10y+7=0$;

2) $2x-1=0$, $x+3=0$;

3) $y+3=0$, $5y-7=0$.

3.101. Доказать, что в следующих случаях две данные прямые совпадают:

1) $3x+5y-4=0$, $6x+10y-8=0$;

2) $x-y\sqrt{2}=0$, $x\sqrt{2}-2y=0$;

3) $x\sqrt{3}-1=0$, $3x-\sqrt{3}=0$.

3.102. Определить, при каких значениях m и n две прямые $mx+8y+n=0$ и $2x+my-1=0$: 1) параллельны; 2) совпадают; 3) перпендикулярны.

3.103. Определить, при каком значении m две прямые $(m-1)x+my-5=0$ и $mx+(2m-1)y+7=0$ пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс.

3.104. Установить, пересекаются ли в одной точке три прямые в следующих случаях:

1) $2x+3y-1=0$, $4x-5y+5=0$, $3x-y+2=0$.

2) $2x-y+1=0$, $x+2y-17=0$, $x+2y-3=0$.

3.105. Определить, при каком значении a три прямые $2x-y+3=0$, $x+y+3=0$, $ax+y-13=0$ будут пересекаться в одной точке.

3.3. Кривые второго порядка, заданные каноническими уравнениями

Линия L на плоскости Oxy называется *кривой второго порядка*, если она определяется уравнением второй степени относительно x и y , т.е. уравнением вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (3.26)$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B или C не равен нулю.

Замечание. Под термином «кривая» понимается «изогнутая линия». Это замечание позволяет исключить из уравнения (3.26) ряд ситуаций:

1. уравнению (3.26) может вообще не соответствовать на плоскости никакого геометрического образа. Таково, например, уравнение $3x^2 + 2y^2 = -4$.
2. Возможен также случай, когда уравнению (3.26) соответствует не линия, а точка, например, $3x^2 + 2y^2 = 0$.
3. уравнению $9x^2 - 4y^2 = 0$ соответствует не изогнутая линия, а пара пересекающихся прямых: $3x - 2y = 0$, $3x + 2y = 0$.
4. уравнению $4x^2 = 0$ соответствует прямая $x = 0$.
5. уравнению $x^2 - 3x + 2 = 0$ соответствует пара прямых: $x = 1$, $x = 2$.

Кривыми второго порядка являются эллипс, гипербола и парабола. Уравнения этих линий рассматриваются в наиболее простом (каноническом) виде, который достигается определенным выбором системы координат. Основной целью этого раздела является ознакомление с важнейшими геометрическими свойствами указанных линий.

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами. Постоянную сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов принято обозначать через $2a$. Фокусы эллипса обозначают буквами F_1 и F_2 , расстояние между ними — через $2c$. По определению эллипса $2a > 2c$ или $a > c$.

Пусть дан эллипс. Если оси декартовой прямоугольной системы координат выбраны так, что фокусы данного эллипса располагаются на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, то в этой системе координат уравнение данного эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.27)$$

где $b = \sqrt{a^2 - c^2}$; очевидно, что $a > b$. Уравнение вида (3.27) называется каноническим уравнением эллипса.

При указанном выборе системы координат оси координат являются осями симметрии эллипса, а начало координат — его центром симметрии (рис. 3.9). Оси симметрии эллипса называются его осями, центр симметрии — просто центром. Точки, в которых эллипс пересекает свои оси, называются его вершинами. На рис. 3.9 вершины эллипса обозначены буквами A' , A , B' и B . Часто осями эллипса называются также отрезки $A'A = 2a$ и $B'B = 2b$; вместе с тем отрез-

зок $OA=a$ называют большой полуосью эллипса, отрезок $OB=b$ — малой полуосью.

Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей эллипса и касающийся его в вершинах, называется основным прямоугольником эллипса

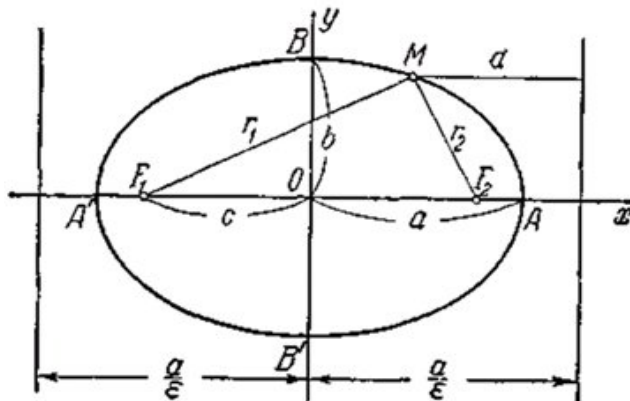


Рис. 3.9

Если фокусы эллипса расположены на оси Oy (симметрично относительно начала координат), то уравнение эллипса имеет тот же вид (3.27), в этом случае $b > a$; следовательно, если мы желаем буквой a обозначать большую полуось, то в уравнении (3.27) нужно буквы a и b поменять местами. Однако для удобства формулировок задач мы условимся буквой a всегда обозначать полуось, расположенную на оси Ox , буквой b — полуось, расположенную на оси Oy , независимо от того, что больше, a или b . Если $a=b$, то уравнение (3.27) определяет окружность, рассматриваемую как частный случай эллипса. Ее уравнение в этом случае имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (3.28)$$

где символом R обозначен радиус окружности.

Если центр окружности поместить в точку $C(x_0; y_0)$, то ее каноническое уравнение примет вид

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2. \quad (3.29)$$

Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где a — большая полуось, называется эксцентриситетом эллипса. Очевидно, что $\varepsilon < 1$ (для окружности $\varepsilon=0$). Если $M(x; y)$ — произвольная точка эллипса, то отрезки $F_1M=r_1$ и $F_2M=r_2$ (рис. 3.9) называются фокальными радиусами точки M . Фокальные радиусы могут быть вычислены по формулам $r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=a-\varepsilon x$.

Если эллипс определен уравнением (3.27) и $a > b$, то прямые $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $x = \frac{a}{\varepsilon}$ (см. рис. 3.9) называются директрисами эллипса (если $b > a$, то дирек-

трисы определяются уравнениями $y = -\frac{b}{\varepsilon}$ и $y = \frac{b}{\varepsilon}$). Каждая директриса обладает следующим свойством: если r — расстояние от произвольной точки эллипса до некоторого фокуса, d — расстояние от той же точки до односторонней с этим фокусом директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Эллипс с центром симметрии в точке $C(x_0; y_0)$ описывается уравнением

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (3.30)$$

Пример 3.16. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Решение. Нижняя вершина имеет абсциссу $x = 0$. Подставляя $x = 0$ в уравнение эллипса, найдем ординату вершины $y^2 = 16$; $y = -4$. Таким образом, координаты нижней вершины $(0; -4)$.

Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; $c = 3$; $F_2(-3; 0)$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки (3.18):

$$\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y+4}{0+4}; \quad \frac{x}{-3} = \frac{y+4}{4}; \quad 4x = -3y - 12.$$

Уравнение искомой прямой имеет вид $4x + 3y + 12 = 0$.

Пример 3.17. Показать, что $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ есть уравнение окружности. Найти ее центр и радиус.

Решение. Выделим полные квадраты для переменных x и y .

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0,$$

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) - 4 - 9 - 3 = 0,$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 - 16 = 0,$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (3.29), делаем вывод, что центр окружности находится в точке $A(-2; 3)$, радиус равен 4.

Пример 3.18. Составить каноническое уравнение эллипса, зная:

а) малую полуось $b = 8$ и эксцентриситет $\varepsilon = 0,6$;

б) сумму полуосей $a + b = 12$ и расстояние между фокусами $2c = 6\sqrt{2}$.

Решение: а) так как $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0,6$, то $c = 0,6a$. Подставляя в соотношение $a^2 - c^2 = b^2$ известные величины $b = 8$ и $c = 0,6a$, получим $a^2 - 0,36a^2 = 64$, откуда $a^2 = 100$. Уравнение эллипса будет иметь вид $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$;

б) для определения уравнения эллипса по известным соотношениям $a + b = 12$ и $2c = 6\sqrt{2}$ необходимо определить a и b . Из соотношения $a^2 - c^2 = b^2$ имеем $a^2 - b^2 = 18$. Поэтому $(a - b)(a + b) = 18$. Подставляя сюда $a + b = 12$, найдем, что $a - b = 1,5$. Решая систему уравнений $\begin{cases} a + b = 12 \\ a - b = 1,5 \end{cases}$, получим $a = 6,75$ и $b = 5,25$. Уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{6,75^2} + \frac{y^2}{5,25^2} = 1$.

Пример 3.19. Два предприятия A и B , расстояние между которыми равно 200 км, производят некоторое изделие, заводская цена p которого одинаковая для обоих предприятий. Транспортные расходы на перевозку единицы изделия от предприятия A до потребителя P составляют 9 руб/км, а от предприятия B – 3 руб/км. Как следует разделить рынок сбыта, чтобы расходы потребителей были одинаковыми? Какому потребителю изделия какого предприятия выгоднее покупать?

Решение. Выберем прямоугольную систему координат, поместив начало координат в середине отрезка AB и направив оси координат по лучу AB и перпендикулярно к нему (рис. 3.10). Определим геометрическое место точек, в которых расходы потребителей на приобретение продукции предприятий A и B будут одинаковыми. Пусть потребитель находится в точке $P(x; y)$. Обозначим расстояния: $|AP| = S_1$ (км), $|BP| = S_2$ (км).

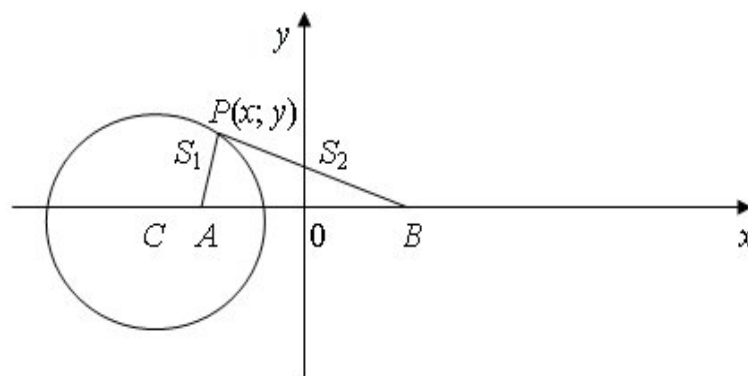


Рис. 3.10

Тогда расходы на приобретение единицы изделия предприятия A составят $p+9S_1$, а предприятия B составят $p+3S_2$. Так как расходы потребителей должны быть одинаковы, то

$$p + 9S_1 = p + 3S_2 \text{ или } 3S_1 = S_2. (*)$$

Используя координаты точек $A(-100; 0)$, $B(100; 0)$ и $P(x; y)$, вычислим значения $S_1 = |AP| = \sqrt{(x+100)^2 + y^2}$, $S_2 = |BP| = \sqrt{(x-100)^2 + y^2}$ и подставим их в равенство (*), тогда $3\sqrt{(x+100)^2 + y^2} = \sqrt{(x-100)^2 + y^2}$.

Отсюда получаем уравнение

$$9(x^2 + 200x + 10\,000 + y^2) = x^2 - 200x + 10\,000 + y^2$$

$$\text{или } 8x^2 + 2\,000x + 8y^2 + 80\,000 = 0.$$

Преобразуем это уравнение, разделив сначала обе его части на 8, и затем выделив полные квадраты в левой части, тогда

$$x^2 + 250x + y^2 + 10\,000 = 0 \text{ или } (x + 125)^2 + y^2 + 10\,000 - 25 \cdot 625 = 0$$

$$\text{или } (x + 125)^2 + y^2 = (75)^2.$$

Последнее уравнение является уравнением окружности с центром в точке $C(-125; 0)$ и радиусом $R = 75$ (рис. 3.10).

Для потребителей, находящихся на этой окружности, выполняется равенство $3S_1 = S_2$, следовательно, $p+9S_1 = p+3S_2$, поэтому расходы на приобретение изделия как одного, так и другого предприятия, одинаковы. Для потребителей, находящихся внутри ограниченного этой окружностью круга выполняется неравенство $3S_1 < S_2$, следовательно, $p+9S_1 < p+3S_2$, поэтому расходы на приобретение изделий предприятия A ниже. Аналогично можно установить, что для потребителей, находящихся вне этого круга, расходы на приобретение изделий предприятия B ниже.

Следовательно, рынок сбыта можно выгодно (экономично) поделить так:
а) потребителям, находящимся на окружности, безразлично, изделия какого предприятия (A или B) покупать; б) потребители, находящиеся внутри указанного круга, покупают изделия предприятия A ; в) потребители, находящиеся вне круга, покупают изделия предприятия B .

Задачи для самостоятельного решения

3.106. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что:

- 1) его полуоси равны 5 и 2;
- 2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами $2c=8$;
- 3) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами $2c=10$;

4) расстояние между его фокусами $2c=6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

5) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

6) его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

7) расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами $2c=4$;

8) его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами равно 16;

9) его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13;

10) расстояние между его директрисами равно 32 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

3.107. Определить полуоси каждого из следующих эллипсов:

1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; 3) $x^2 + 25y^2 = 25$;

4) $x^2 + 5y^2 = 15$; 5) $4x^2 + 9y^2 = 25$; 6) $9x^2 + 25y^2 = 1$.

3.108. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти:

1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

3.109. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$, а две другие совпадают с концами малой оси эллипса.

3.110. На эллипсе $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ найти точки, абсцисса которых равна -3 .

3.111. Определить, какие из точек $A_1(-2; 3)$, $A_2(2; -2)$, $A_3(2; -4)$, $A_4(-1; 3)$, $A_5(-4; -3)$, $A_6(3; -1)$, $A_7(3; -2)$, $A_8(2; 1)$, $A_9(0; 15)$ и $A_{10}(0; -16)$ лежат на эллипсе $8x^2 + 5y^2 = 77$, какие внутри эллипса и какие вне эллипса.

3.112. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$; 2) $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$;

3) $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$; 4) $y = \frac{1}{7}\sqrt{49 - y^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

3.113. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{1}{3}$, центр его совпадает с началом координат, один из фокусов $F(-2; 0)$. Вычислить расстояние от точки M_1 эллипса

с абсциссой, равной 2, до директрисы, односторонней с данным фокусом.

3.114. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{1}{2}$, его центр совпадает с началом координат, одна из директрис задана уравнением $x=16$. Вычислить расстояние от точки M_1 эллипса с абсциссой, равной -4 , до фокуса, одностороннего с данной директрисой.

3.115. Определить точки эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, расстояние которых до правого фокуса равно 14.

3.116. Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если даны:

- 1) точка $M_1(-2\sqrt{5}; 2)$ эллипса и его малая полуось $b=3$;
- 2) точка $M_2(2; -2)$ эллипса и его большая полуось $a=4$;
- 3) точки $M_1(4; -\sqrt{3})$ и $M_2(2\sqrt{2}; 3)$ эллипса;
- 4) точка $M_1(\sqrt{15}; -1)$ эллипса и расстояние между его фокусами $2c=8$;
- 5) точка $M_1(2; -\frac{5}{3})$ эллипса и его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$;
- 6) точка $M_1(8; 12)$ эллипса и расстояние $r_1=20$ от нее до левого фокуса;
- 7) точка $M_1(-\sqrt{5}; 2)$ эллипса и расстояние между его директрисами равно 10.

3.117. Эллипс касается оси абсцисс в точке $A(3; 0)$ и оси ординат в точке $B(0; -4)$. Составить уравнение этого эллипса, зная, что его оси симметрии параллельны координатным осям.

3.118. Точка $C(-3; 2)$ является центром эллипса, касающегося обеих координатных осей. Составить уравнение этого эллипса, зная, что его оси симметрии параллельны координатным осям.

3.119. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, и найти координаты его центра C , полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис:

- 1) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;
- 2) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;
- 3) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

3.120. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

- 1) $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$;
- 2) $y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2}$;
- 3) $x = -2\sqrt{-5 - yx - y^2}$;
- 4) $y = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8 + 2y - y^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

3.121. Составить уравнение эллипса, зная, что:

- 1) его большая ось равна 26 и фокусы $F_1(-10; 0)$, $F_2(14; 0)$;
- 2) его малая ось равна 2 и фокусы $F_1(-1; -1)$, $F_2(1; 1)$;
- 3) его фокусы $F_1(-2; \frac{3}{2})$, $F_2(2; -\frac{3}{2})$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- 4) его фокусы $F_1(1; 3)$, $F_2(3; 1)$ и расстояние между директрисами равно $12\sqrt{2}$.

3.122. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$, фокус $F(-4; 1)$ и уравнение соответствующей директрисы $x-5=0$.

3.123. Точка $A(-3; -5)$ лежит на эллипсе, фокус которого $F(-1; -4)$, а соответствующая директриса задана уравнением $x-2=0$. Составить уравнение этого эллипса.

3.124. Найти точки пересечения прямой $x+2y-7=0$ и эллипса $x^2+4y^2=25$.

3.125. Определить, как расположена прямая относительно эллипса: пересекает ли, касается или проходит вне его, если прямая и эллипс заданы следующими уравнениями:

1) $2x-y-3=0$,	2) $2x+y-10=0$,	3) $3x+2y-20=0$,
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;	$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$.

3.126. Определить, при каких значениях m прямая $y = -x + m$:

- 1) пересекает эллипс $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$;
- 2) касается его;
- 3) проходит вне этого эллипса.

3.127. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$, параллельных прямой $3x+2y+7=0$.

3.128. Составить уравнения касательных к эллипсу $x^2+4y^2=20$, перпендикулярных к прямой $2x-2y-13=0$.

3.129. На эллипсе $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ найти точку M_1 , ближайшую к прямой $2x-3y+25=0$, и вычислить расстояние d от точки M_1 до этой прямой.

3.130. Из точки $A(\frac{10}{3}; \frac{5}{3})$ проведены касательные к эллипсу $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. Составить их уравнения.

3.131. Из точки $C(10; -8)$ проведены касательные к эллипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

- 3.132.** Эллипс проходит через точку $A(4; -1)$ и касается прямой $x+4y-10=0$. Составить уравнение этого эллипса при условии, что его оси совпадают с осями координат.
- 3.133.** Составить уравнение эллипса, касающегося двух прямых $3x-2y-20=0$, $x+6y-20=0$, при условии, что его оси совпадают с осями координат.
- 3.134.** Прямая $x-y-5=0$ касается эллипса, фокусы которого находятся в точках $F_1(-3; 0)$ и $F_2(3; 0)$. Составить уравнение этого эллипса.
- 3.135.** Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если известны уравнение касательной к эллипсу $3x+10y-25=0$ и его малая полуось $b=2$.
- 3.136.** Определить точки пересечения двух эллипсов $x^2+9y^2-45=0$ и $x^2+9y^2-6x-27=0$.
- 3.137.** Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:
- 1) центр окружности совпадает с началом координат и ее радиус $R=3$;
 - 2) центр окружности совпадает с точкой $C(2; -3)$ и ее радиус $R=7$;
 - 3) окружность проходит через начало координат и ее центр совпадает с точкой $C(6; -8)$;
 - 4) окружность проходит через точку $A(2; 6)$ и ее центр совпадает с точкой $C(-1; 2)$;
 - 5) точки $A(3; 2)$ и $B(-1; 6)$ являются концами одного из диаметров окружности;
 - 6) центр окружности совпадает с началом координат и прямая $3x-4y+20=0$ является касательной к окружности;
 - 7) центр окружности совпадает с точкой $C(1; -1)$ и прямая $5x-12y+9=0$ является касательной к окружности;
 - 8) окружность проходит через точки $A(3; 1)$ и $B(-1; 3)$, а ее центр лежит на прямой $3x-y-2=0$;
 - 9) окружность проходит через три точки: $A(1; 1)$, $B(1; -1)$ и $C(2; 0)$;
 - 10) окружность проходит через три точки: $M_1(-1; 5)$, $M_2(-2; -2)$ и $M_3(5; 5)$.
- 3.138.** Через точку $A(4; 2)$ проведена окружность, касающаяся обеих координатных осей. Определить ее центр C и радиус R .
- 3.139.** Через точку $M_1(1; -2)$ проведена окружность радиуса 5, касающаяся оси Ox . Определить центр C окружности.
- 3.140.** Написать уравнения окружностей радиуса $R=\sqrt{5}$, касающихся прямой $x-2y-1=0$ в точке $M_1(3; 1)$.
- 3.141.** Составить уравнение окружности, касающейся двух параллельных прямых: $2x+y-5=0$ и $2x+y+15=0$, причем одной из них — в точке $A(2; 1)$.

3.142. Составить уравнения окружностей, которые проходят через точку $A(1; 0)$ и касаются двух параллельных прямых: $2x+y+2=0$ и $2x+y-18=0$.

3.143. Составить уравнение окружности, которая, имея центр на прямой $2x+y=0$, касается прямых $4x-3y+10=0$, $4x-3y-30=0$.

3.144. Составить уравнения окружностей, проходящих через начало координат и касающихся двух пересекающихся прямых: $x+2y-9=0$, $2x-y+2=0$.

3.145. Какие из нижеприводимых уравнений определяют окружности? Найти центр C и радиус R каждой из них:

1) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 25$; 2) $(x+2)^2 + y^2 = 64$;

3) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 0$; 4) $x^2 + (y-5)^2 = 5$;

5) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$; 6) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$;

7) $x^2+y^2+4x-2y+5=0$; 8) $x^2+y^2+x=0$,

9) $x^2+y^2+6x-4y+14=0$; 10) $x^2+y^2+y=0$

3.146. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = +\sqrt{9-x^2}$;

6) $y = 15 - \sqrt{64-x^2}$;

2) $y = -\sqrt{25-x^2}$;

7) $x = -2 - \sqrt{9-y^2}$;

3) $x = -\sqrt{4-y^2}$;

8) $x = -2 + \sqrt{9-y^2}$;

4) $x = +\sqrt{16-y^2}$;

9) $y = -3 - \sqrt{21-4x-x^2}$;

5) $y = 15 + \sqrt{64-x^2}$;

10) $x = -5 + \sqrt{40-6y-y^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

3.147. Установить, как расположена точка $A(1; -2)$ относительно каждой из следующих окружностей – внутри, вне или на контуре окружности:

1) $x^2+y^2=1$;

2) $x^2+y^2=5$;

3) $x^2+y^2=9$;

4) $x^2+y^2-8x-4y-5=0$.

3.148. Составить уравнение диаметра окружности $x^2+y^2+4x-6y-17=0$, перпендикулярного к прямой $5x+2y-13=0$.

3.149. Определить координаты точек пересечения прямой $7x-y+12=0$ и окружности $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

3.150. Определить, как расположена прямая относительно окружности (пересекает ли, касается или проходит вне ее), если прямая и окружность заданы следующими уравнениями:

1) $y=2x-3$ и $x^2+y^2-3x+2y-3=0$;

2) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ и $x^2+y^2-8x+2y+12=0$;

3) $y=x+10$ и $x^2+y^2-1=0$.

- 3.151.** Определить, при каких значениях углового коэффициента k прямая $y=kx$:
- 1) пересекает окружность $x^2+y^2-10x+16=0$;
 - 2) касается этой окружности;
 - 3) проходит вне этой окружности.
- 3.152.** Вывести условие, при котором прямая $y=kx+b$ касается окружности $x^2+y^2=R^2$.
- 3.153.** Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(1; -1)$ и точки пересечения двух окружностей:
- $$x^2+y^2+2x-2y-23=0, \quad x^2+y^2-6x+12y-35=0.$$
- 3.154.** Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения двух окружностей: $x^2+y^2+3x-y=0$, $3x^2+3y^2+2x+y=0$.
- 3.155.** Составить уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=5$ в точке $A(-1; 2)$.
- 3.156.** Точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на окружности $x^2+y^2=R^2$. Составить уравнение касательной к этой окружности в точке M_1 .
- 3.157.** Определить острый угол, образованный при пересечении прямой $3x-y-1=0$ и окружности $(x-2)^2+y^2=5$ (углом между прямой и окружностью называется угол между прямой и касательной к окружности, проведенной в точке их пересечения).
- 3.158.** Определить, под каким углом пересекаются две окружности: $(x-3)^2+(y-1)^2=8$ и $(x-2)^2+(y+2)^2=2$ (углом между двумя окружностями называется угол между их касательными в точке пересечения).
- 3.159.** Из точки $A(4; 2)$ проведены касательные к окружности $x^2+y^2=10$. Определить угол, образованный этими касательными.
- 3.160.** Из точки $P(2; -3)$ проведены касательные к окружности $(x-1)^2+(y+5)^2=4$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.
- 3.161.** Из точки $C(6; -8)$ проведены касательные к окружности $x^2+y^2=25$. Вычислить расстояние d от точки C до хорды, соединяющей точки касания.
- 3.162.** Вычислить длину касательной, проведенной из точки $A(1; -2)$ к окружности $x^2+y^2+6x+2y+5=0$.
- 3.163.** Составить уравнения касательных к окружности $x^2+y^2+10x+2y+6=0$, параллельных прямой $2x+y-7=0$.

3.4. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина; указанная разность берется по абсолютному значению и обозначается через $2a$. Фокусы гиперболы обозначают буквами F_1 и F_2 ,

расстояние между ними — через $2c$. По определению гиперболы $2a < 2c$ или $a < c$.

Пусть дана гипербола. Если оси декартовой прямоугольной системы координат выбраны так, что фокусы данной гиперболы располагаются на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, то в этой системе координат уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.31)$$

где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Уравнение вида (3.31) называется каноническим уравнением гиперболы. При указанном выборе системы координат оси координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат — ее центром симметрии (рис. 3.11). Оси симметрии гиперболы называются осями, центр симметрии — центром гиперболы. Гипербола пересекает одну из своих осей; точки пересечения называются вершинами гиперболы. На рис. 3.11 вершины гиперболы находятся в точках A' и A .

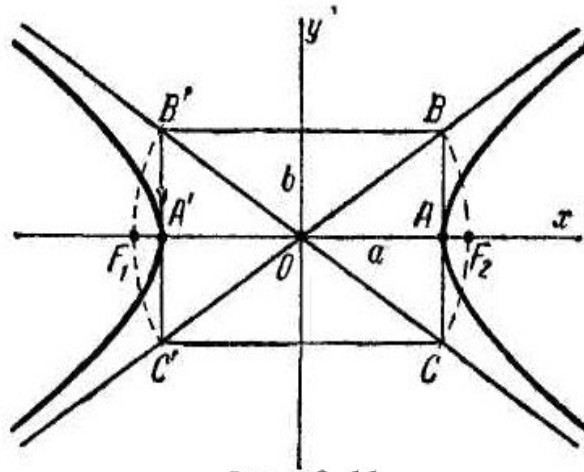


Рис. 3.11

Прямоугольник $CC'B'B$ со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершинах, называется основным прямоугольником гиперболы.

Отрезки длиной $2a$ и $2b$, соединяющие середины сторон основного прямоугольника гиперболы, также называют ее осями. Диагонали основного прямоугольника (неограниченно продолженные) являются асимптотами гиперболы; их уравнения:

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x. \quad (3.32)$$

Уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.33)$$

определяет гиперболу, симметричную относительно координатных осей с фокусами на оси ординат (рис. 3.12); уравнение (3.33), как и уравнение (3.31), на-

зывается каноническим уравнением гиперболы; в этом случае постоянная разность расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов равна $2b$. Две гиперболы, которые определяются уравнениями (3.31) и (3.33) в одной и той же системе координат, называются сопряженными.

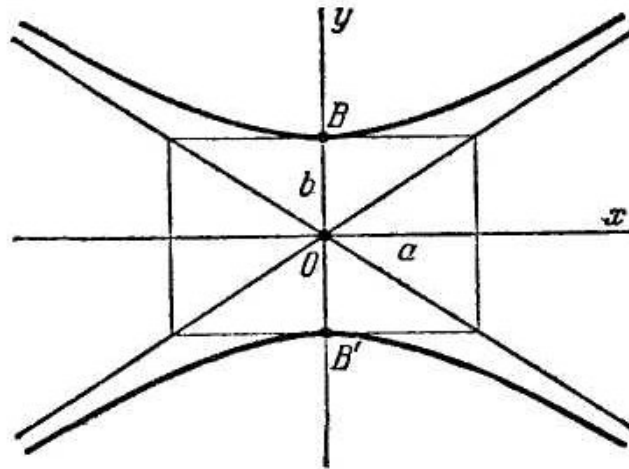


Рис. 3.12

Гипербола с равными полуосями ($a=b$) называется равносторонней; ее каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{или} \quad -x^2 + y^2 = a^2. \quad (3.34)$$

Число $\varepsilon = \frac{a}{c}$, где a — расстояние от центра гиперболы до ее вершины, называется эксцентриситетом гиперболы. Очевидно, для любой гиперболы $\varepsilon > 1$. Если $M(x; y)$ — произвольная точка гиперболы, то отрезки F_1M и F_2M (рис. 3.13) называются фокальными радиусами точки M . Фокальные радиусы точек правой ветви гиперболы вычисляются по формулам

$$r_1 = \varepsilon x + a, \quad r_2 = \varepsilon x - a,$$

фокальные радиусы точек левой ветви — по формулам

$$r_1 = -\varepsilon x + a, \quad r_2 = -\varepsilon x - a.$$

Если гипербола задана уравнением (3.31), то прямые, определяемые уравнениями $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$, называются ее директрисами (рис. 3.13). Если гипербола задана уравнением (3.33), то директрисы определяются уравнениями

$$y = -\frac{b}{\varepsilon}, \quad y = \frac{b}{\varepsilon}.$$

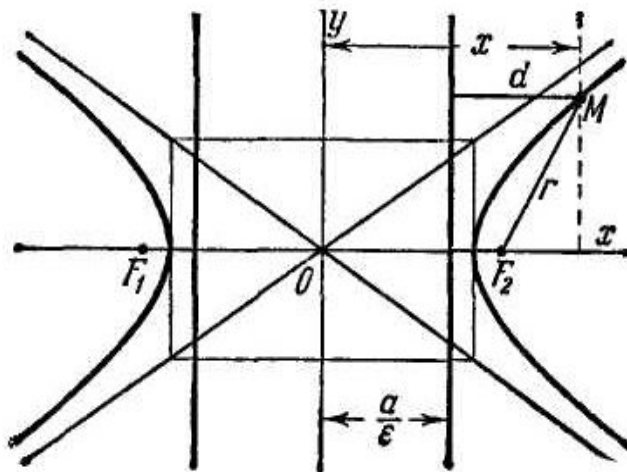


Рис. 3.13

Каждая директриса обладает следующим свойством: если r — расстояние от произвольной точки гиперболы до некоторого фокуса, d — расстояние от той же точки до односторонней с этим фокусом директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету гиперболы: $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Если центр симметрии гиперболы находится в точке $C(x_0; y_0)$, а прямые $x = x_0$, $y = y_0$ являются ее осями симметрии и фокусы лежат на прямой $y = y_0$, то уравнение гиперболы примет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (3.35)$$

Если центр симметрии гиперболы находится в точке $C(x_0; y_0)$, а прямые $x = x_0$, $y = y_0$ являются ее осями симметрии и фокусы лежат на прямой $x = x_0$, то уравнение гиперболы примет вид

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1. \quad (3.36)$$

Пример 3.16. Найти уравнение асимптот гиперболы $2x^2 - 3y^2 = 6$.

Решение. Разделив обе части уравнения гиперболы на 6, получим $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$, откуда $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$. Таким образом, $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$ — искомые уравнения асимптот гиперболы.

Пример 3.17. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Решение. Находим фокусное расстояние $c^2 = 25 - 9 = 16$.

Для гиперболы $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$; $b^2 = 16 - 4 = 12$.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \text{ — искомое уравнение гиперболы.}$$

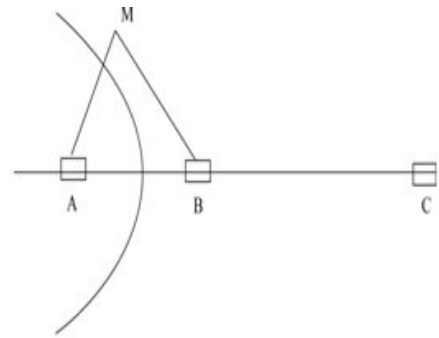


Рис. 3.14

Пример 3.18. На железной дороге расположены две станции A и B (рис. 3.14). Пусть из различных пунктов местности, по которой проходит железная дорога, нужно отправлять грузы в конечный пункт дороги C . Станцию B мы считаем находящейся к пункту C ближе, чем станция A . Перед грузоотправителем, находящемся в некотором пункте местности M , возникает задача: на какую из станций A или B выгоднее подвезти груз автотранспортом для дальнейшей отправки по железной дороге.

Решение. Пусть стоимость провоза груза равна p руб. за 1 км при перевозке автотранспортом и q руб. за 1 км при перевозке по железной дороге.

Тогда грузоотправитель производит следующий расчет.

Стоимость перевозки при доставке груза в A равна $(p \cdot MA + q \cdot AB + q \cdot BC)$ руб.

Стоимость перевозки при доставке груза в B равна $(p \cdot MB + q \cdot BC)$ руб.

Отсюда следует, что в B выгоднее возить грузы, находящиеся в точках M , для которых $p \cdot MA + q \cdot AB > p \cdot MB$ или, что то же самое,

$$MA - MB > -\frac{q}{p} \cdot AB. \quad (*)$$

Те точки M , для которых безразлично, куда возить груз, удовлетворяют соотношению

$$MA - MB = -\frac{q}{p} \cdot AB. \quad (**)$$

Те точки M , для которых справедливо (**), лежат на гиперболе с фокусами A и B и осью $2a = \frac{q}{p} AB$. Точнее говоря, точки M , удовлетворяющие соотношению (**), расположены на той ветви гиперболы, которая прилежит к фокусу

A . Стало быть точки M , для которых справедливо (*) лежат в той части плоскости, которая отделена этой ветвью от точки A .

Вывод. На станцию B выгоднее подвезти груз автотранспортом для дальнейшей отправки по железной дороге из различных пунктов местности, которые расположены в той части плоскости, которая отделена ветвью гиперболы от точки A . На станцию A выгоднее подвезти груз автотранспортом для дальнейшей отправки по железной дороге из тех пунктов местности, которые расположены в той же части плоскости относительно ветви гиперболы, в которой расположена и точка A .

Задачи для самостоятельного решения

3.164. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, зная, что:

1) ее оси $2a = 10$ и $2b = 8$;

2) расстояние между фокусами $2c = 10$ и ось $2b = 8$;

3) расстояние между фокусами $2c = 6$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

4) ось $2a = 16$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$;

5) уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами $2c = 20$;

6) расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$ и расстояние между фокусами $2c = 26$;

7) расстояние между директрисами равно $\frac{32}{5}$ и ось $2b = 6$;

8) расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

9) уравнения асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно $12\frac{4}{5}$.

3.165. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат, симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) ее полуоси $a = 6$, $b = 18$ (буквой a мы обозначаем полуось гиперболы, расположенную на оси абсцисс);

2) расстояние между фокусами $2c = 10$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

- 3) уравнения асимптот $y = \pm \frac{12}{5}x$, расстояние между вершинами равно 48;
- 4) расстояние между директрисами равно $7\frac{1}{7}$ и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{5}$;
- 5) уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами равно $6\frac{2}{5}$.

3.166. Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол:

- 1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$; 3) $x^2 - 4y^2 = 16$;
- 4) $x^2 - y^2 = 1$; 5) $4x^2 - 9y^2 = 25$; 6) $25x^2 - 16y^2 = 1$.

3.167. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти:

- 1) полуоси a и b ; 2) фокусы; 3) эксцентриситет;
- 4) уравнения асимптот; 5) уравнения директрис.

3.168. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ и прямой $9x + 2y - 24 = 0$.

3.169. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

- 1) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$, 2) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$, 3) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{x^2 + 9}$, 4) $y = \frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

3.170. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = 3$, расстояние от точки M гиперболы до директрисы равно 4. Вычислить расстояние от точки M до фокуса, одностороннего с этой директрисой.

3.171. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = 2$, центр ее лежит в начале координат, один из фокусов $F(12; 0)$. Вычислить расстояние от точки M_1 гиперболы с абсциссой, равной 13, до директрисы, соответствующей заданному фокусу.

3.172. Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, расстояние которых до левого фокуса равно 7.

3.173. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:

- 1) точки $M_1(6; -1)$ и $M_2(-8; 2\sqrt{2})$ гиперболы;
- 2) точка $M_1(-5; 3)$ гиперболы и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$;
- 3) точка $M_1(\frac{9}{2}; -1)$ гиперболы и уравнения асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$;

4) точка $M_1(-3; \frac{5}{2})$ гиперболы и уравнения директрис $y = \pm \frac{4}{3}$;

5) уравнения асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ и уравнения директрис $x = \pm \frac{16}{5}$.

3.174. Определить эксцентриситет равносторонней гиперболы.

3.175. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат в вершинах эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$, а директрисы проходят через фокусы этого эллипса.

3.176. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, и найти координаты ее центра C , полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и уравнения директрис:

1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

2) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;

3) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

3.177. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x - 5}$; 2) $y = 7 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$;

3) $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$; 4) $x = 5 + \frac{2}{3}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

3.178. Составить уравнение гиперболы, зная, что:

1) расстояние между ее вершинами равно 24 и фокусы $F_1(-10; 2)$, $F_2(16; 2)$;

2) фокусы $F_1(3; 4)$, $F_2(-3; -4)$ и расстояние между директрисами равно 3,6;

3) угол между асимптотами равен 90° и фокусы $F_1(4; -4)$, $F_2(-2; 2)$.

3.179. Составить уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$, фокус $F(5; 0)$ и уравнение соответствующей директрисы $5x - 16 = 0$.

3.180. Установив, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти для каждой из них центр, полуоси, уравнения асимптот и построить их на чертеже:

1) $xy = 18$; 2) $2xy - 9 = 0$; 3) $2xy + 25 = 0$.

3.181. Найти точки пересечения прямой $4x - 3y - 16 = 0$ и гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

3.182. В следующих случаях определить, как расположена прямая относительно гиперболы — пересекает ли, касается или проходит вне ее:

$$\begin{aligned} 1) \quad x-y-3=0, \quad \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} &= 1; \\ 2) \quad x-2y+1=0, \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} &= 1; \\ 3) \quad 7x-5y=0, \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} &= 1. \end{aligned}$$

3.183. Определить, при каких значениях m прямая $y = \frac{5}{2}x + m$:

- 1) пересекает гиперболу $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$; 2) касается ее;
3) проходит вне этой гиперболы.

3.184. Вывести условие, при котором прямая $y = kx + m$ касается гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3.185. Составить уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$, перпендикулярных к прямой $4x + 3y - 7 = 0$.

3.186. Составить уравнения касательных к гиперболе $x^2 - y^2 = 16$, проведенных из точки $A(-1; -7)$.

3.187. Из точки $C(1; -10)$ проведены касательные к гиперболе $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 1$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.

3.188. Из точки $P(1; -5)$ проведены касательные к гиперболе $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$. Вычислить расстояние d от точки P до хорды гиперболы, соединяющей точки касания.

3.189. Гипербола проходит через точку $A(\sqrt{6}; 3)$ и касается прямой $9x + 2y - 15 = 0$. Составить уравнение этой гиперболы при условии, что ее оси совпадают с осями координат.

3.190. Составить уравнение гиперболы, касающейся двух прямых: $5x - 6y - 16 = 0$, $13x - 10y - 48 = 0$, при условии, что ее оси совпадают с осями координат.

3.191. Убедившись, что точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ и гиперболы

$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ являются вершинами прямоугольника, составить уравнения его сторон.

3.192. Прямая $2x - y - 4 = 0$ касается гиперболы, фокусы которой находятся в точках $F_1(-3; 0)$ и $F_2(3; 0)$. Составить уравнение этой гиперболы.

3.193. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, если известны уравнение касательной к гиперболе $15x + 16y - 36 = 0$ и расстояние между ее вершинами $2a = 8$.

3.5. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой. Фокус параболы обозначается буквой F , расстояние от фокуса до директрисы — буквой p . Число p называется параметром параболы.

Пусть дана некоторая парабола. Введем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокус данной параболы перпендикулярно к директрисе и была направлена от директрисы к фокусу; начало координат расположим посередине между фокусом и директрисой (рис. 3.15а). В этой системе координат данная парабола будет определяться уравнением

$$y^2 = 2px. \quad (3.37)$$

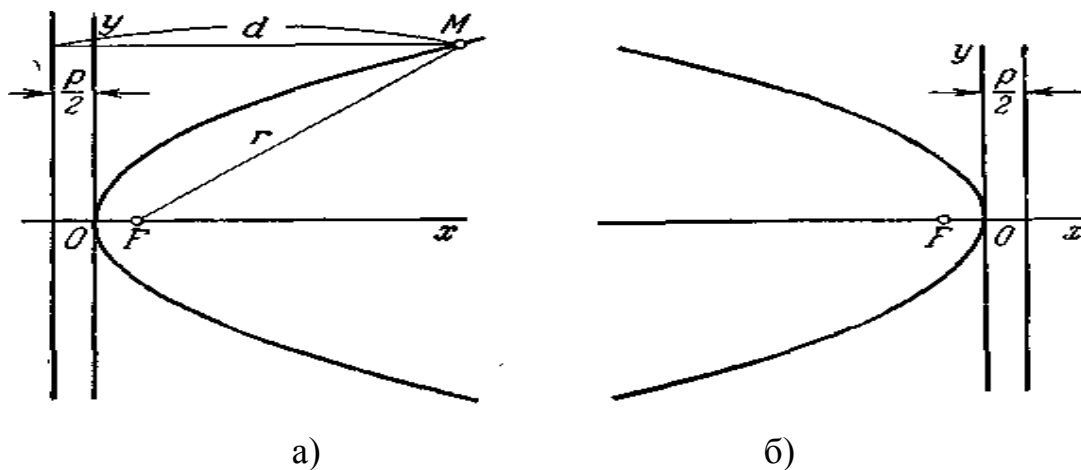


Рис. 3.15

Уравнение (3.37) называется каноническим уравнением параболы. В этой же системе координат директриса данной параболы имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$.

Фокальный радиус произвольной точки $M(x; y)$ параболы (т.е. длина отрезка FM) может быть вычислен по формуле $r = x + \frac{p}{2}$.

Парабола имеет одну ось симметрии, называемую осью параболы, с которой она пересекается в единственной точке. Точка пересечения параболы с осью называется ее вершиной. При указанном выше выборе координатной системы ось параболы совмещена с осью абсцисс, вершина находится в начале координат, вся парабола лежит в правой полуплоскости.

Если координатная система выбрана так, что ось абсцисс совмещена с осью параболы, начало координат — с вершиной, но парабола лежит в левой полуплоскости (рис. 3.15б), то ее уравнение будет иметь вид

$$y^2 = -2px. \quad (3.38)$$

В случае, когда начало координат находится в вершине, а с осью совмещена ось ординат, парабола будет иметь уравнение

$$x^2 = 2py, \quad (3.39)$$

если она лежит в верхней полуплоскости (рис. 3.16а), и

$$x^2 = -2py \quad (3.40)$$

— если в нижней полуплоскости (рис. 3.16б).

Каждое из уравнений параболы (3.38), (3.39), (3.40), как и уравнение (3.37), называется каноническим.

Если ось симметрии параболы параллельна оси Oy , а ее вершина находится в точке $C(x_0; y_0)$, то уравнение параболы имеет вид

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0). \quad (3.41)$$

Если ось симметрии параболы параллельна оси Ox , а ее вершина находится в точке $C(x_0; y_0)$, то уравнение параболы имеет вид

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0). \quad (3.42)$$

Геометрический смысл параметра p состоит в том, что, чем больше его величина, тем ближе к оси симметрии лежат ветви параболы.

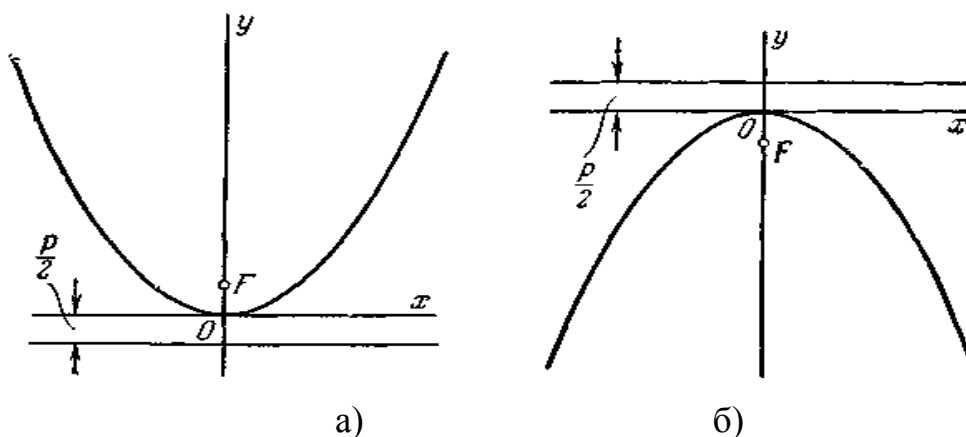


Рис. 3.16

Пример 3.19. На параболе $y^2=8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Решение. Из уравнения параболы получаем, что $p = 4$. По условию, $r = 4$. Следовательно, $r = x + p/2 = 4$; поэтому: $x=2$; $y^2=16$; $y=\pm 4$.

Таким образом, искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

Пример 3.20. Определить координаты вершины, ось симметрии и директрису параболы $y = -x^2 + 4x - 5$.

Решение. Преобразуем данное уравнение, выделив полный квадрат.

$y = -(x^2 - 4x + 5) = -(x^2 - 4x + 4 + 5 - 4) = -(x - 2)^2 - 1$ или $y + 1 = -(x - 2)^2$. Сравнивая с (3.41), заключаем, что координаты вершины имеют вид $A(2; -1)$, уравнение оси симметрии $x = 2$, ветви направлены вниз, уравнение директрисы $y = -1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$.

Пример 3.21. Составить уравнение параболы, которая симметрична относительно оси Ox , проходит через точку $A(4; -1)$, а вершина ее лежит в начале координат.

Решение. Так как парабола проходит через точку $A(4; -1)$ с положительной абсциссой, а ее осью служит ось Ox , то уравнение параболы следует искать в виде $y^2 = 2px$. Подставляя в это уравнение координаты точки A , будем иметь $1 = 8p$ или $2p = \frac{1}{4}$. Таким образом, искомым уравнением параболы

будет $y^2 = \frac{1}{4}x$.

Задачи для самостоятельного решения

3.194. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и ее параметр $p=3$;

- 2) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и ее параметр $p=0,5$;
 3) парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично относительно оси Oy и ее параметр $p=\frac{1}{4}$;
 4) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси Oy и ее параметр $p=3$.

3.195. Определить величину параметра и расположение относительно координатных осей следующих парабол:

1) $y^2=6x$; 2) $x^2=5y$; 3) $y^2=-4x$; 4) $x^2=-y$.

3.196. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

- 1) парабола симметрично расположена относительно оси Ox и проходит через точку $A(9; 6)$;
 2) парабола симметрично расположена относительно оси Ox и проходит через точку $B(-1; 3)$;
 3) парабола симметрично расположена относительно оси Oy и проходит через точку $C(1; 1)$;
 4) парабола симметрично расположена относительно оси Oy и проходит через точку $D(4; -8)$.

3.197. Составить уравнение параболы, которая имеет фокус $F(0; -3)$ и проходит через начало координат, зная, что ее осью служит ось Oy .

3.198. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $y=2\sqrt{x}$; 2) $y=\sqrt{-x}$; 3) $y=-3\sqrt{-2x}$;
 4) $y=-2\sqrt{x}$; 5) $x=\sqrt{5y}$; 6) $x=-5\sqrt{-y}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

3.199. Найти фокус F и уравнение директрисы параболы $y^2=24x$.

3.200. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2=20x$, если абсцисса точки M равна 7.

3.201. Составить уравнение параболы, если дан фокус $F(-7; 0)$ и уравнение директрисы $x-7=0$.

3.202. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины A , величину параметра p и уравнение директрисы:

1) $y^2=4x-8$; 2) $y^2=4-6x$; 3) $x^2=6y+2$; 4) $x^2=2-y$.

3.203. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины A и величину параметра p :

$$1) y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2; \quad 2) y = 4x^2 - 8x + 7; \quad 3) y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7.$$

3.204. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти координаты ее вершины A и величину параметра p :

$$1) x = 2y^2 - 12y + 14; \quad 2) x = -\frac{1}{4}y^2 + y; \quad 3) x = -y^2 + 2y - 1.$$

3.205. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

$$1) y = 3 - 4\sqrt{x-1}; \quad 2) x = -4 + 3\sqrt{y+5};$$

$$3) x = 2 - \sqrt{6-2y}; \quad 4) y = -5 - \sqrt{-3x-21}.$$

Изобразить эти линии на чертеже.

3.206. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(7; 2)$ и директриса $x-5=0$.

3.207. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(2; -1)$ и директриса $x-y-1=0$.

3.208. Дана вершина параболы $A(6; -3)$ и уравнение ее директрисы $3x-5y+1=0$. Найти фокус F этой параболы.

3.209. Определить точки пересечения прямой $3x+4y-12=0$ и параболы $y^2 = -9x$.

3.210. В следующих случаях определить, как расположена данная прямая относительно данной параболы — пересекает ли, касается или проходит вне ее:

$$1) x-y+2=0, \quad y^2=8x; \quad 2) 8x+3y-15=0, \quad x^2=-3y;$$

$$3) 5x-y-15=0, \quad y^2=-5x.$$

3.211. Определить, при каких значениях углового коэффициента k прямая $y = kx + 2$:

- 1) пересекает параболу $y^2 = 4x$;
- 2) касается ее;
- 3) проходит вне этой параболы.

3.212. Вывести условие, при котором прямая $y=kx+b$ касается параболы $y^2=2px$.

3.213. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $y^2 = 8x$ и параллельна прямой $2x+2y-3=0$.

3.214. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $x^2=16y$ и перпендикулярна к прямой $2x+4y+7=0$.

3.215. Провести касательную к параболе $y^2=12x$ параллельно прямой $3x-2y+30=0$ и вычислить расстояние d между этой касательной и данной прямой.

- 3.216.** Составить уравнения касательных к параболе $y^2=36x$, проведенных из точки $A(2; 9)$.
- 3.217.** Из точки $A(5; 9)$ проведены касательные к параболе $y^2=5x$. Составить уравнение хорды, соединяющей точки касания.
- 3.218.** Определить точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$ и параболы $y^2=24x$.
- 3.219.** Определить точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$ и параболы $y^2=3x$.
- 3.220.** Определить точки пересечения двух парабол: $y=x^2-2x+1$, $x=y^2-6y+7$.

3.6. Поверхность и линия в пространстве. Плоскость

Уравнением данной поверхности (в выбранной системе координат) называется такое уравнение с тремя переменными $P(x, y, z)=0$, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на этой поверхности, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней.

Линия в пространстве определяется как пересечение двух данных поверхностей. Точка $M(x; y; z)$, лежащая на линии, принадлежит как одной, так и другой поверхности, и следовательно, координаты этой точки удовлетворяют уравнениям обеих поверхностей. Поэтому *уравнение линии* в пространстве описывается совокупностью уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Если $F(x, y, z)=0$, $\Phi(x, y, z)=0$, $\Psi(x, y, z)=0$ есть уравнения трех поверхностей, то для нахождения точек их пересечения нужно решить систему:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0, \\ \Psi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Каждое решение x, y, z этой системы представляет собой координаты одной из точек пересечения данных поверхностей.

Плоскость в пространстве

В декартовых координатах каждая плоскость определяется уравнением первой степени и каждое уравнение первой степени определяет плоскость.

Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный к данной плоскости, называется ее *нормальным вектором*.

Уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad (3.43)$$

определяет плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n}=(A; B; C)$.

Раскрывая в уравнении (3.43) скобки и обозначая число $-Ax_0-By_0-Cz_0$ буквой D , получим

$$Ax+By+Cz+D=0. \quad (3.44)$$

Это уравнение называется общим уравнением плоскости.

Уравнением плоскости в векторной форме называется уравнение

$$\vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0, \quad (3.45)$$

где \vec{n} – нормальный вектор плоскости; $\vec{r} = (x; y; z)$ – радиус-вектор произвольной точки плоскости.

Если в уравнении (3.44) отсутствует свободный член ($D=0$), то плоскость проходит через начало координат. Если отсутствует член с одной из текущих координат (т.е. какой-либо из коэффициентов A, B, C равен нулю), то плоскость параллельна одной из координатных осей, именно той, которая одноименна с отсутствующей координатой; если, кроме того, отсутствует свободный член, то плоскость проходит через эту ось. Если в уравнении отсутствуют два члена с текущими координатами (какие-либо два из коэффициентов A, B, C равны нулю), то плоскость параллельна одной из координатных плоскостей, именно той, которая проходит через оси, одноименные с отсутствующими координатами; если, кроме того, отсутствует свободный член, то плоскость совпадает с этой координатной плоскостью.

Если в уравнении плоскости (3.44) ни один из коэффициентов A, B, C, D не равен нулю, то это уравнение может быть преобразовано к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (3.46)$$

где $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$ есть величины отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях (считая каждый от начала координат). Уравнение (3.46) называется уравнением плоскости в «отрезках».

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_1-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.47)$$

Углом φ между двумя плоскостями называется угол между нормальными векторами к этим плоскостям. Такое определение позволяет в качестве угла между плоскостями рассматривать либо острый, либо тупой угол, дополняющие друг друга до π .

Если заданы плоскости $\vec{n}_1 \cdot \vec{r} + D_1 = 0$ и $\vec{n}_2 \cdot \vec{r} + D_2 = 0$, где $\vec{n}_1 (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 (A_2; B_2; C_2)$, то угол между векторами нормали найдем из их скалярного произведения, т.е. $\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$.

Таким образом, угол между плоскостями находится по формуле

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3.48)$$

Если две плоскости $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ параллельны, то их нормальные векторы $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ коллинеарны (рис. 3.17), т.е. из условия коллинеарности двух векторов \vec{n}_1 и \vec{n}_2 вытекает условие параллельности двух плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (3.49)$$

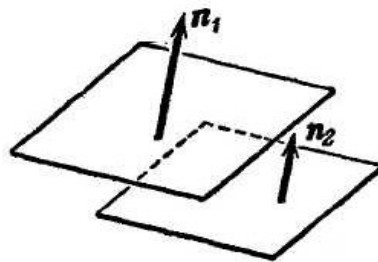


Рис. 3.17

Если две плоскости перпендикулярны, то их нормальные векторы также перпендикулярны (рис. 3.18), т.е. из условия ортогональности двух векторов \vec{n}_1 и \vec{n}_2 вытекает условие перпендикулярности двух плоскостей

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (3.50)$$

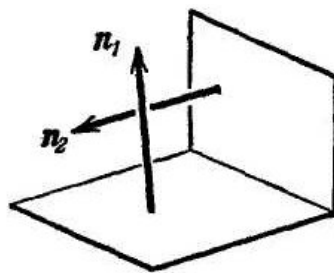


Рис. 3.18

Расстояние от точки $P(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости (3.44) находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.51)$$

Пример 3.22. Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $A(2; 3; -1)$ и $B(-1; 2; 4)$.

Решение. Так как плоскость по условию задачи параллельна оси Oz , то в ее общем уравнении (3.44) отсутствует координата z , т.е. искомое уравнение имеет вид $Ax + By + D = 0$.

Если плоскость проходит через точку, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости. Подставляя координаты точек A и B в уравнение $Ax + By + D = 0$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2A + 3B + D = 0, \\ -A + 2B + D = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B + D = -2A, \\ 2B + D = A. \end{cases}$$

Решая систему, находим $B = -3A$, $D = 7A$. Таким образом, уравнение плоскости имеет вид $Ax - 3Ay + 7A = 0$. После сокращения на A уравнение искомой плоскости примет вид $x - 3y + 7 = 0$.

Пример 3.23. Найти уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку $A(3; 7; -1)$.

Решение. Так как плоскость перпендикулярна оси Ox , то она параллельна плоскости Oyz и потому ее уравнение имеет вид $Ax + D = 0$. Подставляя в это уравнение координаты точки $A(3; 7; -1)$, получаем, что $D = -3A$. Значение $D = -3A$ подставим в уравнение плоскости и, сокращая на A , получаем уравнение искомой плоскости в общем виде $x - 3 = 0$.

Пример 3.24. Через точку $A(2; 3; -1)$ провести плоскость, параллельную плоскости $2x - 3y + 5z - 4 = 0$.

Решение. Используя уравнение (3.43), имеем $A(x-2) + B(y-3) + C(z+1) = 0$. Из условия (3.49) параллельности двух плоскостей получаем $\frac{A}{2} = \frac{B}{-3} = \frac{C}{5} = k$.

Таким образом, уравнение искомой плоскости примет вид $2k(x-2) - 3k(y-3) + 5k(z+1) = 0$, или после сокращения на k , $2(x-2) - 3(y-3) + 5(z+1) = 0$. Раскрывая скобки и приводя подобные, имеем общее уравнение искомой плоскости $2x - 3y + 5z + 10 = 0$.

Пример 3.25. Через точки $A(1; 2; 3)$ и $B(-2; -1; 3)$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x + 4y - 2z + 5 = 0$.

Решение. Нормальный вектор плоскости $x + 4y - 2z + 5 = 0$ имеет координаты $\vec{n} = (1; 4; -2)$. Пусть $M(x; y; z)$ – произвольная точка искомой плос-

кости. Рассмотрим два вектора \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AM} , принадлежащие искомой плоскости. Используя условие компланарности трех векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AM} и \vec{n} , запишем

$$\text{уравнение искомой плоскости} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2-1 & -1-2 & 3-3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Раскрывая определитель} \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ по правилу «треугольни-}$$

ка», имеем $6x - 6 - 12z + 36 + 3z - 9 - 6y + 12 = 0$ или $6x - 6y - 9z + 33 = 0$ – общее уравнение искомой плоскости.

Пример 3.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -2; 6)$, $M_2(5; -4; -2)$ и отсекающей равные отрезки на осях Ox и Oy .

Решение. Уравнение плоскости ищем в виде (3.46). По условию $a = b$, поэтому искомое уравнение можно записать так: $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{c} = 1$. Подставляя координаты точек $M_1(1; -2; 6)$ и $M_2(5; -4; -2)$ в последнее уравнение, получим

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{-2}{a} + \frac{6}{c} = 1, \\ \frac{5}{a} + \frac{-4}{a} + \frac{-2}{c} = 1. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -\frac{1}{a} + \frac{6}{c} = 1, \\ \frac{1}{a} - \frac{2}{c} = 1. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим $c = 2$, $a = \frac{1}{2}$. Следовательно,

искмое уравнение имеет вид $\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{2} = 1$ или в общем виде

$$4x + 4y + z - 2 = 0.$$

Пример 3.27. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точки $A(9; -2; 2)$ и от плоскости $3x - 6y + 2z - 3 = 0$.

Решение. Поскольку искомая точка $M(x; y; z)$ лежит на оси Ox , то $y = 0$ и $z = 0$. Расстояние от данной точки $M(x; 0; 0)$ до плоскости $3x - 6y + 2z - 3 = 0$ найдем по формуле (3.51):

$$d_1 = \frac{|3x - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{|3x - 3|}{7}.$$

Найдем расстояние между двумя точками $M(x; 0; 0)$ и $A(9; -2; 2)$

$$d_2 = \sqrt{(x-9)^2 + (0+2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(x-9)^2 + 8}.$$

Согласно условию $d_1 = d_2$, т.е. $\frac{|3x-3|}{7} = \sqrt{(x-9)^2 + 8}$. Возводя в квадрат обе части последнего уравнения и приводя подобные члены, получаем $5x^2 - 108x + 544 = 0$, откуда находим $x_1 = 8$, $x_2 = 13\frac{3}{5}$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют две точки: $M_1(8; 0; 0)$ и $M_1(13\frac{3}{5}; 0; 0)$.

Задачи для самостоятельного решения

- 3.221.** Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; 1; -1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = (1; -2; 3)$.
- 3.222.** Точка $P(2; -1; -1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составить уравнение этой плоскости.
- 3.223.** Даны две точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(4; -2; -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.
- 3.224.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(3; 4; -5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = (3; 1; -1)$ и $\vec{a}_2 = (1; -2; 1)$.
- 3.225.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; -1; 3)$ и $M_2(3; 1; 2)$ параллельно вектору $\vec{a} = (3; -1; 4)$.
- 3.226.** Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(4; -1; -1)$ и $M_3(2; 0; 2)$.
- 3.227.** Определить координаты какого-нибудь нормального вектора каждой из следующих плоскостей и записать выражение координат произвольного нормального вектора:
- | | | |
|----------------------------|-----------------------|------------------------|
| 1) $2x - y - 2z + 5 = 0$; | 2) $x + 5y - z = 0$; | 3) $3x - 2y - 7 = 0$; |
| 4) $5y - 3z = 0$; | 5) $x + 2 = 0$; | 6) $y - 3 = 0$. |
- 3.228.** Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:
- | | |
|-----------------------------|--------------------------|
| 1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, | $2x - 3y + 5z + 3 = 0$; |
| 2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, | $2x + y + 2z - 1 = 0$; |
| 3) $x - 3z + 2 = 0$, | $2x - 6z - 7 = 0$. |
- 3.229.** Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

- 1) $3x-y-2z-5=0$, $x+9y-3z+2=0$; 2) $2x+3y-z-3=0$, $x-y-z+5=0$;
 3) $2x-5y+z=0$, $x+2z-3=0$.

3.230. Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

- 1) $2x+ly+3z-5=0$, $mx-6y-6z+2=0$;
 2) $3x-y+lz-9=0$, $2x+my+2z-3=0$;
 3) $mx+3y-2z-1=0$, $2x-5y-lz=0$.

3.231. Определить, при каком значении l следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

- 1) $3x-5y+lz-3=0$, $x+3y+2z+5=0$;
 2) $5x+y-3z-3=0$, $2x+ly-3z+1=0$;
 3) $7x-2y-z=0$, $lx+y-3z-1=0$.

3.232. Определить двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:

- 1) $x-y\sqrt{2}+z-1=0$, $x+y\sqrt{2}-z+3=0$;
 2) $3y-z=0$, $2y+z=0$;
 3) $6x+3y-2z=0$, $x+2y+6z-12=0$;
 4) $x+2y+2z-3=0$, $16x+12y-15z-1=0$.

3.233. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат параллельно плоскости $5x-3y+2z-3=0$.

3.234. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям: $2x-y+3z-1=0$, $x+2y+z=0$.

3.235. Составить уравнение плоскости, которая проходит через две точки $M_1(1; -1; -2)$ и $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно к плоскости $x-2y+3z-5=0$.

3.236. Установить, что три плоскости $x-2y+z-7=0$, $2x+y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$ имеют одну общую точку, и вычислить ее координаты.

3.237. Доказать, что три плоскости $7x+4y+7z+1=0$, $2x-y-z+2=0$, $x+2y+3z-1=0$ проходят через одну прямую.

3.238. Доказать, что три плоскости $2x-y+3z-5=0$, $3x+y+2z-1=0$, $4x+3y+z+2=0$ пересекаются по трем различными параллельным прямым.

3.239. Определить, при каких значениях a и b плоскости $2x-y+3z-1=0$, $x+2y-z+b=0$, $x+ay-6z+10=0$:

- 1) имеют одну общую точку;
 2) проходят через одну прямую;
 3) пересекаются по трем различными параллельным прямым.

3.240. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

- 1) через точку $M_1(2; -3; 3)$ параллельно плоскости Oxy ;
- 2) через точку $M_2(1; -2; 4)$ параллельно плоскости Oxz ;
- 3) через точку $M_3(-5; 2; -1)$ параллельно плоскости Oyz .

3.241. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

- 1) через ось Ox и точку $M_1(4; -1; 2)$;
- 2) через ось Oy и точку $M_2(1; 4; -3)$;
- 3) через ось Oz и точку $M_3(3; -4; 7)$.

3.242. Составить уравнение плоскости, которая проходит:

- 1) через точки $M_1(7; 2; -3)$ и $M_2(5; 6; -4)$ параллельно оси Ox ;
- 2) через точки $P_1(2; -1; 1)$ и $P_2(3; 1; 2)$ параллельно оси Oy ;
- 3) через точки $Q_1(3; -2; 5)$ и $Q_2(2; 3; 1)$ параллельно оси Oz .

3.243. Найти точки пересечения плоскости $2x-3y-4z-24=0$ с осями координат.

3.244. Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $3x-4y-24z+12=0$ на координатных осях.

3.245. Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x-6y+3z+120=0$ от координатного угла Oxy .

3.246. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.

3.247. Плоскость проходит через точку $M_1(6; -10; 1)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a = -3$ и на оси аппликат отрезок $c = 2$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках».

3.248. Плоскость проходит через точки $M_1(1; 2; -1)$ и $M_2(-3; 2; 1)$ и отсекает на оси ординат отрезок $b = 3$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках».

3.249. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; -3; -4)$ и отсекает на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковой величины (считая каждый отрезок направленным из начала координат).

3.250. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(-1; 4; -1)$, $M_2(-13; 2; -10)$ и отсекает на осях абсцисс и аппликат отличные от нуля отрезки одинаковой длины.

3.251. Составить уравнения плоскостей, которые проходят через точку $M_1(4; 3; 2)$ и отсекают на координатных осях отличные от нуля отрезки одинаковой длины.

3.252. Составить уравнение плоскости, отсекающей на оси Oz отрезок $c = -5$ и перпендикулярной к вектору $\vec{n} = (-2; 1; 3)$.

3.253. Составить уравнение плоскости, параллельной вектору $\vec{s} = (2; 1; -1)$ и отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки $a = 3$, $b = -2$.

3.254. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $2x-2y+4z-5=0$ и отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки $a=-2$ и $b=\frac{2}{3}$ соответственно.

3.7 Уравнения прямой в пространстве

Прямая как пересечение двух плоскостей (рис. 3.19) определяется совместным заданием двух уравнений первой степени:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (3.52)$$

при условии, что коэффициенты A_1, B_1, C_1 первого из них не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 второго (в противном случае эти уравнения будут определять параллельные или совпавшие плоскости).

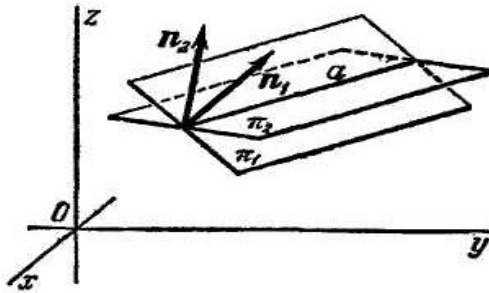


Рис. 3.19

Каждый ненулевой вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей, называется *направляющим вектором* этой прямой и обозначается $\vec{s}=(l; m; n)$.

Если известна точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямой и направляющий вектор $\vec{s}=(l; m; n)$, то прямая может быть определена соотношениями вида:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}. \quad (3.53)$$

В таком виде уравнения прямой называются каноническими.

Канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (3.54)$$

Обозначив буквой t каждое из равных отношений в канонических уравнениях (3.53), получаем $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t$. Выражая x, y, z , получаем параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в направлении вектора $\vec{s} = (l; m; n)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (3.55)$$

В уравнениях (3.55) t рассматривается как произвольно изменяющийся параметр; x, y, z — как функции от t . При изменении t величины x, y, z меняются так, что точка $M(x; y; z)$ движется по данной прямой.

Числа l, m, n называются *направляющими коэффициентами* прямой.

Если прямая задана уравнениями (3.52), то ее направляющие коэффициенты находятся по формулам:

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \quad (3.56)$$

Уравнения (3.55) можно записать в виде одного векторного параметрического уравнения

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s} t, \quad (3.57)$$

где символами \vec{r}_0 и \vec{r} обозначены радиус-векторы точек M_0 и M соответственно.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между прямыми в пространстве

Пусть в пространстве две прямые L_1 и L_2 заданы параметрическими (3.55) или каноническими (3.53) уравнениями:

$$L_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 t \quad \text{и} \quad L_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t,$$

где $\vec{r} = (x; y; z)$, $\vec{r}_1 = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2; y_2; z_2)$,

$$\vec{s}_1 = (l_1; m_1; n_1), \quad \vec{s}_2 = (l_2; m_2; n_2) \quad \text{или}$$

$$L_1 : \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad L_2 : \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

$$\text{Рассмотрим определитель } \Delta = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \quad (3.58)$$

I. Равенство $\Delta = 0$ является необходимым и достаточным условием принадлежности двух прямых одной плоскости. При этом:

I.а. Если в определителе $\Delta = 0$ все строки пропорциональны, то прямые совпадают.

I.б. Если в определителе $\Delta = 0$ пропорциональны только первые две строки

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (3.59)$$

(направляющие векторы прямых коллинеарны), то прямые параллельны.

I.в. Если $\Delta = 0$, но условие (3.59) не выполнено, то прямые пересекаются.

II. Если $\Delta \neq 0$, то прямые скрещиваются.

Угол φ между двумя прямыми есть угол между направляющими векторами этих прямых, который находится с помощью их скалярного произведения. Таким образом:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (3.60)$$

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух прямых является ортогональность направляющих векторов этих прямых:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (3.61)$$

Пример 3.28. Уравнение прямой $\begin{cases} x - 4y + 5z - 1 = 0, \\ 2x + 3y + z + 9 = 0. \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду и определить углы, образуемые этой прямой с координатными осями.

Решение. Для записи уравнения прямой в каноническом виде (3.53) необходимо знать ее направляющие коэффициенты l, m, n и точку $M(x_0; y_0; z_0)$, через которую она проходит. Направляющие коэффициенты l, m, n найдем по формулам (3.56):

$$l = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}. \quad \text{Отсюда, раскрывая определители, получаем } l = -19, \quad m = 9, \quad n = 11.$$

Для нахождения координат точки M полагаем, например, что $z_0 = 0$. Остальные координаты найдем из системы
$$\begin{cases} x_0 - 4y_0 - 1 = 0, \\ 2x_0 + 3y_0 + 9 = 0. \end{cases}$$
 Тогда $x_0 = -3, y_0 = -1$. Таким образом, прямая проходит через точку $M(-3; -1; 0)$, а ее каноническое уравнение имеет вид
$$\frac{x+3}{-19} = \frac{y+1}{9} = \frac{z}{11}.$$

Углы, образованные этой прямой с координатными осями, определяем из направляющих косинусов вектора \vec{s} :

$$\cos \alpha = \frac{-19}{\sqrt{(-19)^2 + 9^2 + 11^2}} = \frac{-19}{\sqrt{563}}; \quad \cos \beta = \frac{9}{\sqrt{(-19)^2 + 9^2 + 11^2}} = \frac{9}{\sqrt{563}};$$

$$\cos \gamma = \frac{11}{\sqrt{(-19)^2 + 9^2 + 11^2}} = \frac{11}{\sqrt{563}}.$$

По известным косинусам углов находим углы $\alpha = \arccos \frac{-19}{\sqrt{563}} \approx 143^\circ$,
 $\beta = \arccos \frac{9}{\sqrt{563}} \approx 67^\circ$, $\gamma = \arccos \frac{11}{\sqrt{563}} \approx 62^\circ$.

Пример 3.29. Через точку $M(1; -1; 2)$ провести прямую, параллельно:

а) прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$; б) оси Oz .

Решение: а) канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; -1; 2)$ имеют вид $\frac{x-1}{l} = \frac{y+1}{m} = \frac{z-2}{n}$. Из условия (3.59) параллельности двух прямых искомые значения l, m, n должны быть пропорциональны направляющим коэффициентам 1, 3, 2, т.е. $l = k, m = 3k, n = 2k$. Таким образом, канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x-1}{k} = \frac{y+1}{3k} = \frac{z-2}{2k}$ или
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2};$$

б) из условия параллельности двух прямых искомые значения l, m, n должны быть пропорциональны направляющим коэффициентам 0, 0, 1, т.е. $l = 0, m = 0, n = k$. Таким образом, канонические уравнения прямой имеют вид

$\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{k}$ или $\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{1}$. Это уравнение можно переписать в виде пересечения двух плоскостей $\begin{cases} x-1=0, \\ y+1=0. \end{cases}$

Пример 3.30. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(2, -2, 5)$ перпендикулярно прямым $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{2}$ и $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+7}{-2}$.

Решение. Уравнения прямой ищем в виде $\frac{x-2}{l} = \frac{y+2}{m} = \frac{z-5}{n}$. Направляющие коэффициенты l, m, n , определяемые с точностью до постоянного множителя, в силу условия (3.61) должны удовлетворять системе двух уравнений $\begin{cases} -l + 2m + 2n = 0, \\ 6l + 3m - 2n = 0. \end{cases}$ Складывая и вычитая почленно эти уравнения, получим $\begin{cases} 5l + 5m = 0, \\ 3l - 2n = 0 \end{cases}$, откуда $m = -l, n = \frac{3}{2}l$. Полагая, например, $l = 2$, получим $m = -2, n = 3$.

Таким образом, уравнения искомой прямой имеют вид $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-5}{3}$.

Пример 3.31. Составить параметрические уравнения диагоналей параллелограмма, три вершины которого находятся в точках $A(2; 4; 6), B(-3; 5; 4), C(8; -6; 2)$.

Решение. Запишем канонические уравнения диагонали AC по формуле (3.54): $\frac{x-2}{8-2} = \frac{y-4}{-6-4} = \frac{z-6}{2-6}$ или $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-6}{-2}$. Для записи уравнения диагонали BD необходимо найти координаты точки пересечения диагоналей. Так как точка пересечения диагоналей M является серединой отрезка AC , то ее координаты равны полусуммам соответствующих координат концов, т.е. $M\left(\frac{2+8}{2}; \frac{4-6}{2}; \frac{6+2}{2}\right)$ или $M(5; -1; 4)$. Тогда канонические уравнения диагонали BD имеет вид $\frac{x+3}{5+3} = \frac{y-5}{-1-5} = \frac{z-4}{4-4}$ или $\frac{x+3}{8} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-4}{0}$. Пара-

метрические уравнения диагоналей AC и BD имеют соответственно вид

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 4 - 5t, \\ z = 6 - 2t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = -3 + 8s, \\ y = 5 - 6s, \\ z = 4. \end{cases}$$

Пример 3.32. Исследовать взаимное расположение двух прямых

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 7 + t, \\ z = 3 + 4t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 6 + 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = -2 + t. \end{cases}$$

Решение. По формуле (3.58) составим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6-1 & -1-7 & -2-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = 20 + 5 - 96 + 40 + 16 + 15 = 0.$$

Так как две первые строки не пропорциональны, то прямые пересекаются.

По формуле (3.60) найдем угол между этими прямыми:

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{21} \sqrt{14}} = \frac{8}{7\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{42} = \frac{4\sqrt{6}}{21}.$$

Отсюда $\varphi \approx \arccos \frac{4\sqrt{6}}{21} \approx 58^\circ$.

Найдем точку $M(x; y; z)$ пересечения указанных прямых. Запишем уравнение второй прямой в виде $x = 6 + 3p$, $y = -1 - 2p$, $z = -2 + p$, где p – параметр. Приравнявая соответствующие координаты двух прямых, получим $1 + 2t = 6 + 3p$, $7 + t = -1 - 2p$, $3 + 4t = -2 + p$. Исключая t из первых двух уравнений, получим $7p = -21$, отсюда $p = -3$. Из первого уравнения находим $t = -2$. Третье уравнение системы при найденных значениях t и p обращается в тождество. Подставляя значение $t = -2$ в уравнения первой прямой или значение $p = -3$ в уравнения второй прямой, получим точку пересечения прямых: $M(-3; 5; -5)$.

Окончательно имеем, что прямые пересекаются в точке $M(-3; 5; -5)$ под углом $\varphi \approx 58^\circ$.

Задачи для самостоятельного решения

3.255. Составить уравнения прямых, образованных пересечением плоскости $5x - 7y + 2z - 3 = 0$ с координатными плоскостями.

3.256. Составить уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $E(3; 2; -5)$.

3.257. Найти точки пересечения прямой $\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$ с координатными плоскостями.

3.258. Доказать, что прямая $\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 6 = 0, \\ x + 5y - 7z + 10 = 0 \end{cases}$ пересекает ось Oy .

3.259. Определить, при каком значении D прямая $\begin{cases} 2x + 3y - z + D = 0, \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$ пересекает: 1) ось Ox ; 2) ось Oy ; 3) ось Oz .

3.260. Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямой $\begin{cases} A_1x + B_1y - C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z - D_2 = 0 \end{cases}$ для того, чтобы эта прямая была параллельна: 1) оси Ox ; 2) оси Oy ; 3) оси Oz .

3.261. Найти соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямой $\begin{cases} A_1x + B_1y - C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z - D_2 = 0 \end{cases}$ для того, чтобы эта прямая:

- 1) пересекала ось абсцисс; 2) пересекала ось ординат;
- 3) пересекала ось аппликат; 4) совпадала с осью абсцисс;
- 5) совпадала с осью ординат; 6) совпадала с осью аппликат.

3.262. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2; 0; -3)$ параллельно:

- 1) вектору $\vec{a} = (2; -3; 5)$; 2) прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}$;
- 3) оси Ox ; 4) оси Oy ; 5) оси Oz .

3.263. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

- 1) $(1; -2; 1)$ и $(3; 1; -1)$; 2) $(3; -1; 0)$ и $(1; 0; -3)$;
- 3) $(0; -2; 3)$ и $(3; -2; 1)$; 4) $(1; 2; -4)$ и $(-1; 2; -4)$.

3.264. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1; -1; -3)$ параллельно

- 1) вектору $\vec{a} = (2; -3; 4)$; 2) прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-1}{0}$;
- 3) прямой $x=3t-1, y=-2t+3, z=5t+2$.

3.265. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

- 1) $(3; -1, 2)$ и $(2; 1; 1)$; 2) $(1; 1; -2)$ и $(3; -1; 0)$; 3) $(0; 0; 1)$ и $(0; 1; -2)$.

3.266. Через точки $M_1(-6; 6; -5)$ и $M_2(12; -6; 1)$ проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

3.267. Даны вершины треугольника $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 2; 3)$ и $C(4; -7; -2)$. Составить параметрические уравнения медианы, проведенной из вершины C .

3.268. Даны вершины треугольника $A(3; -1; -1)$, $B(1; 2; -7)$ и $C(-5; 14; -3)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине B .

3.269. Даны вершины треугольника $A(2; -1; -3)$, $B(5; 2; -7)$ и $C(-7; 11; 6)$. Составить канонические уравнения биссектрисы его внешнего угла при вершине A .

3.270. Даны вершины треугольника $A(1; -2; -4)$, $B(3; 1; -3)$ и $C(5; 1; -7)$. Составить параметрические уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

3.271. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1; 3; -5)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

3.272. Составить канонические уравнения следующих прямых:

$$1) \begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 2 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0. \end{cases}$$

3.273. Составить параметрические уравнения следующих прямых:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y - z = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 3x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

3.274. Доказать параллельность прямых:

$$1) \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0; \end{cases}$$

$$2) x - 2t + 5, y = -t + 2, z = t - 7 \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0, \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 2y - 5z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3z - 9 = 0. \end{cases}$$

3.275. Доказать перпендикулярность прямых:

$$1) \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0; \end{cases}$$

$$2) \quad x - 2t + 1, \quad y = -3t - 2, \quad z = -6t + 1 \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0; \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

3.276. Найти острый угол между прямыми: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ и

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

3.277. Найти тупой угол между прямыми: $x=3t-2, y=0, z=-t+3$ и $x=2t-1, y=0, z=t-3$.

3.278. Определить косинус угла между прямыми: $\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0, \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$ и

$$\begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0, \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0. \end{cases}$$

3.279. Доказать, что прямые, заданные параметрическими уравнениями $x = 2t-3, y = 3t-2, z = -4t+6$ и $x = t+5, y = 4t-1, z = t-4$ пересекаются.

3.280. Даны прямые $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$ и $\frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-7}{2}$. При каком значении a они пересекаются?

3.281. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1; 2; -3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = (6; -2; -3)$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

3.282. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-4; -5; 3)$ и пересекает две прямые $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ и $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$.

3.8 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Углом φ между прямой и плоскостью называется острый угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Пусть плоскость задана уравнением $\vec{n} \cdot \vec{r} + D = 0$, а прямая — $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t$. Из геометрических соображений (рис. 3.20) видно, что искомый угол

$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, где α – угол между векторами \vec{n} и \vec{s} . Этот угол может быть найден по формуле

$$\sin \varphi = |\cos \alpha| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| |\vec{s}|} \quad (3.62)$$

или в координатной форме

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \quad (3.63)$$

\vec{n} \vec{s}

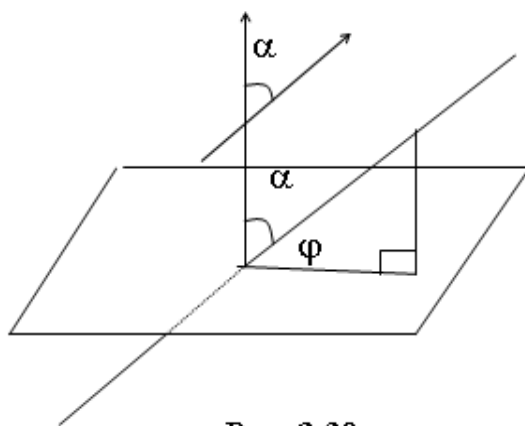


Рис. 3.20

Для того чтобы прямая и плоскость были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были перпендикулярны. Для этого необходимо, чтобы их скалярное произведение было равно нулю, что равносильно условию

$$Al + Bm + Cn = 0. \quad (3.64)$$

Для того чтобы прямая и плоскость были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы вектор нормали к плоскости и направляющий вектор прямой были коллинеарны. Это условие выполняется, если

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \quad (3.65)$$

Пусть некоторая прямая определена как линия пересечения двух плоскостей $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$ и α и β — какие угодно числа, одновременно не равные нулю, тогда уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (3.66)$$

определяет плоскость, проходящую через данную прямую (3.52).

Уравнением вида (3.66) (при соответствующем выборе чисел α, β) можно определить любую плоскость, проходящую через данную прямую (3.52).

Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, называется пучком плоскостей. Уравнение вида (3.66) называется уравнением пучка плоскостей.

Если $\alpha \neq 0$ то, полагая $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, уравнение (3.66) можно привести к виду

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \quad (3.67)$$

В таком виде уравнение пучка плоскостей более употребительно, чем уравнение (3.66), однако уравнением (3.67) можно определить все плоскости пучка, за исключением той, которой соответствует $\alpha=0$, т. е. за исключением плоскости $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Прямая $\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ лежит в плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, если выполняются условия:

$$\begin{cases} Aa + Bb + Cc + D = 0, \\ Al + Bm + Cn = 0. \end{cases} \quad (3.68)$$

Пример 3.33. Найти точку пересечения плоскости $3x - 4y + 5z + 16 = 0$ и прямой $\frac{x+6}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-8}{-3}$.

Решение. Для решения задачи уравнение прямой удобно записать в па-

раметрическом виде $\frac{x+6}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-8}{-3} = t$, отсюда $\begin{cases} x = -6 + 2t, \\ y = 7 - t, \\ z = 8 - 3t. \end{cases}$ Подставим

выражения для x, y, z в уравнение плоскости $3(-6 + 2t) - 4(7 - t) + 5(8 - 3t) + 16 = 0$, отсюда $t = 2$. Из уравнения прямой при $t = 2$ находим координаты точки пересечения $x = -2, y = 5, z = 2$. Искомой точкой пересечения является точка $N(-2; 5; 2)$.

Пример 3.34. Найти проекцию точки $P(5; -6; 7)$ на прямую $x = 7 - 2t, y = 1 + 3t, z = 4 + t$.

Решение. Искомая проекция является точкой пересечения данной прямой и плоскости, проведенной через точку $P(5; -6; 7)$ перпендикулярно этой прямой. Составим уравнение указанной плоскости, выбирая в качестве вектора нормали \vec{n} направляющий вектор прямой $\vec{s} = (-2; 3; 1)$: $-2(x - 5) + 3(y + 6) + (z - 7) = 0$ или $2x - 3y - z - 21 = 0$.

Находим точку пересечения данной прямой и полученной плоскости:

$2(7 - 2t) - 3(1 + 3t) - (4 + t) - 21 = 0$ или $t = -1$. Из уравнения прямой при $t = -1$ находим координаты искомой точки $x = 9, y = -2, z = 3$.

Таким образом, точка $Q(9; -2; 3)$ является проекцией точки $P(5; -6; 7)$ на указанную прямую.

Пример 3.35. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$ и параллельно оси Ox .

Решение. Искомая плоскость принадлежит пучку, определяемому плоскостями $2x - y + z - 3 = 0$ и $x + y + z + 1 = 0$ и, следовательно, задается уравнением $\alpha(2x - y + z - 3) + \beta(x + y + z + 1) = 0$ или $(2\alpha + \beta)x + (-\alpha + \beta)y + (\alpha + \beta)z - 3\alpha + \beta = 0$. Так как искомая плоскость параллельна оси Ox , то коэффициент при x должен быть равен 0, отсюда $\beta = -2\alpha$. Таким образом, $\alpha(2x - y + z - 3) - 2\alpha(x + y + z + 1) = 0$ или $-3y - z - 5 = 0$ — общее уравнение искомой плоскости.

Пример 3.36. Найти острый угол между прямой $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x - y + 4z + 5 = 0 \end{cases}$ и плоскостью $x + y + 3z - 1 = 0$.

Решение. При решении задачи будем использовать формулу (3.63). Для этого необходимо найти направляющие коэффициенты l, m, n прямой по формулам (3.56):

$$l = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad m = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Подставляя найденные значения $l = 5, m = -2, n = -3$ и координаты вектора нормали $\vec{n} = (1; 1; 3)$ плоскости $x + y + 3z - 1 = 0$ в формулу (3.63), имеем

$$\sin \varphi = \frac{|1 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{\sqrt{418}} \approx 0,29, \quad \text{откуда искомый}$$

угол $\varphi \approx 17^\circ$.

Пример 3.37. Показать, что прямая $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3}$ лежит в плоскости $x + y - z - 6 = 0$.

Решение. Необходимо проверить выполнение условий (3.68) для $A=1, B=1, C=-1, D=-6, l=2, m=1, n=3, a=2, b=3, c=-1$. Действительно, $Aa + Bb + Cc + D = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) - 6 = 0$ и $1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 0$.

Так как условия (3.68) выполнены, то прямая $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3}$ лежит в плоскости $x + y - z - 6 = 0$.

Пример 3.38. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x + y - 4z + 5 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ и точку $M(1; -1; 2)$.

Решение. На основании (3.67) уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую, может быть записано в виде $3x + y - 4z + 5 + \lambda(x - y + 2z - 1) = 0$. Из этого пучка плоскостей нам необходимо выбрать ту, которая проходит через точку $M(1; -1; 2)$.

Если плоскость проходит через заданную точку, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению плоскости. Подставляя в уравнение плоскости координаты точки M , получим уравнение для нахождения λ : $5\lambda - 1 = 0$, откуда $\lambda = \frac{1}{5}$. Таким образом, из пучка плоскостей при $\lambda = \frac{1}{5}$ определяем ис-

комую плоскость $3x + y - 4z + 5 + \frac{1}{5}(x - y + 2z - 1) = 0$. Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем общее уравнение искомой плоскости: $8x + 2y - 9z + 12 = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

3.283. В пучке плоскостей $2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0$ найти плоскость, кото-
рая:

- 1) проходит через точку $M_1(1; -2; 3)$; 2) параллельна оси Ox ;
- 3) параллельна оси Oy ; 4) параллельна оси Oz .

3.284. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $3x - y + 2z + 9 = 0$, $x + z - 3 = 0$:

- 1) через точку $M_1(4; -2; -3)$; 2) параллельно оси Ox ;
- 3) параллельно оси Oy ; 4) параллельно оси Oz .

3.285. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 5 = 0$, $x + 2y - z + 2 = 0$ параллельно вектору $\vec{l} = (2; -1; -2)$.

3.286. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей $3x - 2y + z - 3 = 0$, $x - 2z = 0$ перпендикулярно плоскости $x - 2y + z + 5 = 0$.

3.287. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 5x - y - 2z - 3 = 0, \\ 3x - 2y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$ перпендикулярно плоскости $x + 19y - 7z - 11 = 0$.

- 3.288.** Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $2x+y-z+1=0$, $x+y+2z+1=0$ параллельно отрезку, ограниченному точками $M_1(2; 5; -3)$, $M_2(3; -2; 2)$.
- 3.289.** Определить, принадлежит ли плоскость $4x-8y+17z-8=0$ пучку плоскостей $\alpha(5x-y+4z-1)+\beta(2x+2y-3z+2)=0$.
- 3.290.** Определить, при каких значениях l и m плоскость $5x+ly+4z+m=0$ принадлежит пучку плоскостей $\alpha(3x-7y+z-3)+\beta(x-9y-2z+5)=0$.
- 3.291.** Найти уравнение плоскости, которая принадлежит пучку плоскостей $\alpha(4x+13y-2z-60)+\beta(4x+3y+3z-30)=0$ и отсекает от координатного угла Oxy треугольник с площадью, равной 6 кв. ед.
- 3.292.** Доказать, что прямая $x=3t-2$, $y=-4t+1$, $z=4t-5$ параллельна плоскости $4x-3y-6z-5=0$.
- 3.293.** Доказать, что прямая $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0, \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ лежит в плоскости $4x-3y+7z-7=0$.
- 3.294.** Найти точку пересечения прямой и плоскости:
- 1) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$;
 - 2) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0$;
 - 3) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$, $x+2y-2z+6=0$.
- 3.295.** Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; -3; -5)$ перпендикулярно к плоскости $6x-3y-5z+2=0$.
- 3.296.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -1; -1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}$.
- 3.297.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; -2; 1)$ перпендикулярно к прямой $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$
- 3.298.** При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?
- 3.299.** При каком значении C прямая $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ параллельна плоскости $2x-y+Cz-2=0$?

- 3.300.** При каких значениях A и D прямая $x=3+4t, y=1-4t, z=-3+t$ лежит в плоскости $Ax+2y-4z+D=0$?
- 3.301.** При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна к прямой $x=3+2t, y=5-3t, z=-2-2t$?
- 3.302.** При каких значениях t и C прямая $\frac{x-2}{t} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x-2y+Cz+1=0$?
- 3.303.** Найти проекцию точки $P(2; -1; 3)$ на прямую $x=3t, y=5t-7, z=2t+2$.
- 3.304.** Найти точку Q , симметричную точке $P(4; 1; 6)$ относительно прямой
$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$
- 3.305.** Найти точку Q , симметричную точке $P(2; -5; 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5; 4; 6)$ и $M_2(-2; -17; -8)$.
- 3.306.** Найти проекцию точки $P(5; 2; -1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.
- 3.307.** Найти точку Q , симметричную точке $P(1; 3; -4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.
- 3.308.** На плоскости Oxy найти такую точку P , сумма расстояний которой до точек $A(-1; 2; 5)$ и $B(11; -16; 10)$ была бы наименьшей.
- 3.309.** Вычислить расстояние d от точки $P(2; 3; -1)$ до следующих прямых:
- 1) $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}$;
 - 2) $x=t+1, y=t+2, z=4t+13$;
 - 3) $\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0, \\ 2x - 2y + 2z + 17 = 0. \end{cases}$
- 3.310.** Убедившись, что прямые $\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$ и $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ параллельны, вычислить расстояние d между ними.
- 3.311.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1; 2; -3)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+1}{-3}$ и $\frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$.
- 3.312.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2; -2; 1)$ и прямую $x=2t+1; y=-3t+2; z=2t-3$.
- 3.313.** Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ и $x=3t+7, y=2t+2, z=-2t+1$ лежат в одной плоскости, и составить уравнение этой плоскости.

- 3.314.** Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$.
- 3.315.** Найти проекцию точки $C(3; -4; -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$.
- 3.316.** Найти точку Q , симметричную точке $P(3; -4; -6)$ относительно плоскости, проходящей через $M_1(-6; 1; -5)$, $M_2(7; -2; -1)$ и $M_3(10; -7; 1)$.
- 3.317.** Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=3t+1$, $y=2t+3$, $z=-t-2$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x+y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0. \end{cases}$
- 3.318.** Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

3.9. Понятие гиперплоскости. Выпуклые множества

Обобщением понятия плоскости трехмерного пространства на случай n -мерного пространства является понятие *гиперплоскости*. Каждую гиперплоскость можно задать одним линейным уравнением вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \quad (3.69)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n, b – действительные числа, $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \neq 0$.

Очевидно, что на декартовой плоскости ($n=2$) уравнение (3.69) описывает прямую. Если в n -мерном пространстве задана гиперплоскость (3.69), то этой гиперплоскостью все точки пространства разбиваются на два *полупространства*:

$$1) \text{ множество точек, для которых } a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b; \quad (3.70)$$

$$2) \text{ множество точек, для которых } a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b. \quad (3.71)$$

Эти полупространства пересекаются по самой гиперплоскости (3.69).

Множество X точек n -мерного пространства называется *выпуклым*, если для любых $A, B \in X$ справедливо $\lambda A + (1-\lambda)B \in X$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, т.е. выпуклое

множество наряду с любыми двумя своими точками A и B содержит и все точки отрезка AB . Например, на рис. 3.21 первое множество является выпуклым, а второе – нет.

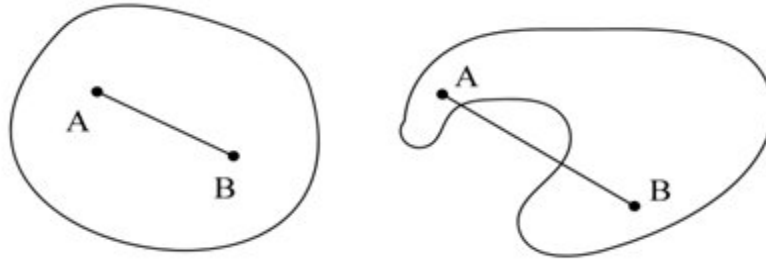


Рис. 3.21

Пересечение любой совокупности выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Каждое полупространство (3.70), (3.71) является выпуклым множеством. Гиперплоскость (3.69), как пересечение выпуклых множеств, есть выпуклое множество.

Через каждую точку границы выпуклого множества на плоскости проходит, по крайней мере, одна *опорная прямая*, имеющая общую точку с границей, но не пересекающая это множество.

В трехмерном пространстве через каждую точку границы выпуклого множества проходит хотя бы одна *опорная плоскость*, оставляющая это множество в одном полупространстве.

Множество X точек n -мерного пространства называется *ограниченным*, если оно имеет конечный диаметр $d(X) = \max_{A \in X, B \in X} \rho(A, B)$, где $\rho(A, B)$ – расстояние между двумя точками A и B множества X .

Пусть в \mathbb{R}^n даны m полупространств, определяемых неравенствами:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{cases} \quad (3.72)$$

Все знаки неравенств одного смысла могут быть достигнуты умножением, в случае необходимости, обеих частей неравенства на -1 . Пересечение этих полупространств, называемое *выпуклой многогранной областью*, определяет множество решений системы линейных неравенств (3.72). Если это пересечение ограничено, оно называется выпуклым многогранником n -мерного пространства \mathbb{R}^n . Таким образом, множество решений системы линейных неравенств (3.72) представляет собой либо выпуклый многогранник, либо выпуклую неограниченную область, либо пустое множество точек.

Частным случаем, но крайне важным с точки зрения графической иллюстрации решения является система m линейных неравенств с двумя переменными, имеющая вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \geq b_m. \end{cases} \quad (3.73)$$

где $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, b_1, \dots, b_m$ – заданные действительные числа.

Системы вида (3.73) возникают при моделировании многих экономических задач.

Так как (3.73) – совокупность линейных неравенств, необходимо определить понятие решения линейного относительно переменных x_1, x_2 неравенства:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b. \quad (3.74)$$

Решением неравенства называется такая пара действительных чисел (x_1, x_2) , которые удовлетворяют неравенству (3.74). Если трактовать x_1 и x_2 как координаты точек пространства R^2 , т.е. плоскости x_1Ox_2 , то *областью решений* неравенства называется совокупность всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству (3.74). Областью решений линейного неравенства является одна из полуплоскостей, на которые *граничная прямая* $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ делит плоскость x_1Ox_2 .

Одной из экономических интерпретацией неравенства (3.74) является *бюджетное множество*, которое определяется как множество наборов товаров $(x_1; x_2)$ в количествах x_1 и x_2 соответственно (первого и второго вида), которые можно приобрести по ценам a_1 и a_2 за единицу товара, имея заданную сумму b денежных единиц.

Пример 3.39. Построить на плоскости x_1Ox_2 область решений системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Построим граничные прямые (рис. 3.22):

$$3x_1 + 2x_2 = 6 \ (L_1); \ x_1 + x_2 = 1 \ (L_2); \ x_1 = 0 \ (L_3); \ x_2 = 0 \ (L_4).$$

Прямые (L_1) и (L_2) строим по двум точкам, а именно, точкам пересечения с осями координат. Построим прямую (L_1) : $3x_1 + 2x_2 = 6$. Если $x_2 = 0$, то $3x_1 + 2 \cdot 0 = 6$, $x_1 = 2$, значит, прямая (L_1) пересекает ось Ox_1 в точке $A(2; 0)$;

если $x_1 = 0$, то $3 \cdot 0 + 2x_2 = 6$, $x_2 = 3$, значит, прямая (L_1) пересекает ось Ox_2 в точке $B(0; 3)$. Аналогично устанавливаем, что прямая (L_2) пересекает оси Ox_1 и Ox_2 в точках $C(1; 0)$ и $D(0; 1)$ соответственно. Прямые (L_3) и (L_4) задают уравнения осей координат Ox_2 и Ox_1 соответственно.

Каждая из построенных прямых разбивает плоскость на две полуплоскости, одна из которых (ее направление укажем стрелкой) является решением неравенства, соответствующего граничной прямой. Для того, чтобы узнать, какая именно из двух полуплоскостей является решением неравенства, в неравенство, соответствующее рассматриваемой граничной прямой, подставим координаты точки, не лежащей на этой прямой, например, для (L_1) и (L_2) подставим точку $O(0; 0)$: $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 6$, (L_1) ; $1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \leq 1$, (L_2) . Получим числовое неравенство $0 \leq 6$, которое является истинным, следовательно, стрелка направлена от прямой (L_1) в полуплоскость с точкой $O(0; 0)$, и $0 \geq 1$, которое является ложным. Следовательно, стрелка направлена от прямой (L_2) в полуплоскость, не содержащую точку $O(0; 0)$. Неравенство $x_1 \geq 0$ задает полуплоскость, лежащую правее прямой (L_1) ; а неравенство $x_2 \geq 0$ задает полуплоскость, лежащую выше прямой (L_2) . Пересечение отмеченных полуплоскостей (четырехугольник $ACDB$) и есть область решений изучаемой системы неравенств:

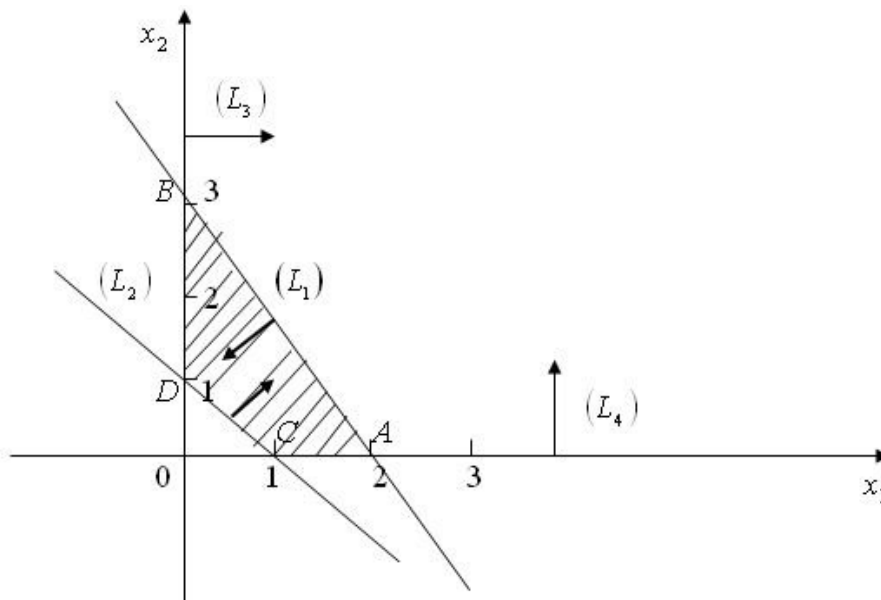


Рис. 3.22

Задачи для самостоятельного решения

Построить на плоскости x_1Ox_2 область решений системы линейных неравенств

$$3.319. \begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3.320. \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3.321. \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3.322. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3.323. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3.324. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3.325. \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3.326. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3.327. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3.328. \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3.329. \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 + 2x_2 \leq 0, \\ x_2 \geq 2. \end{cases}$$

$$3.330. \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 0, \\ x_1 \leq 2, \\ x_2 \geq -1. \end{cases}$$

$$3.331. \begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq 0, \\ x_1 - 3x_2 \geq -2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 3. \end{cases}$$

$$3.332. \begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3.333. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \geq -10, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq -12, \\ x_1 + 2x_2 \geq -2, \\ x_1 \leq 3. \end{cases}$$

$$3.334. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

3.10. Контрольные задания к главе 3

Вариант 1

1. На оси абсцисс найти такую точку M , расстояние которой до точки $N(2; -3)$ равнялось бы 5.
2. Определить площадь параллелограмма, три вершины которого есть точки $A(-1; 2)$, $B(2; -3)$ и $C(-2; 1)$.
3. Определить, при каких значениях m и n две прямые $mx+4y+n=0$ и $x+my-1=0$ 1) параллельны; 2) совпадают; 3) перпендикулярны.
4. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2; 6)$, а также уравнения высоты $x-7y+15=0$ и биссектрисы $7x+y+5=0$, проведённых из одной вершины.
5. Через точку $M(4; 3)$ проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3 кв.ед. Определить точки пересечения этой прямой с осями координат.

Вариант 2

1. Площадь треугольника $S=4$ кв.ед., две его вершины есть точки $A(2; 1)$ и $B(3; -2)$, а третья вершина C лежит на оси Ox , Определить координаты вершины C .
2. Определить, при каких значениях a и b две прямые $ax-y-1=0$ и $3x-2y-b=0$ 1) имеют одну общую точку; 2) параллельны; 3) совпадают.
3. Определить угол φ , образованный двумя прямыми:
 $x\sqrt{3}+y\sqrt{2}-2=0$ и $x\sqrt{6}-3y+3=0$.
4. На оси ординат найти такую точку P , чтобы разность расстояний её до точек $M(-3; 2)$ и $N(2; 5)$ была наибольшей.

5. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $C(4; 3)$, а также уравнения биссектрисы $x+2y-5=0$ и медианы $4x+13y-10=0$, проведённых из одной вершины.

Вариант 3

1. Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами $M_1(1; 1)$, $M_2(0; 2)$ и $M_3(2; -1)$ тупой угол.
2. Составить уравнение прямой, параллельной двум данным прямым и проходящей посередине между ними: $3x-2y-1=0$ и $3x-2y-13=0$.
3. Определить, при каком значении m две прямые $mx+(2m+3)y+m+6=0$ и $(2m+1)x+(m-1)y+m-2=0$ пересекаются в точке, лежащей на оси ординат.
4. Даны последовательные вершины выпуклого четырёхугольника $A(-2; 0)$, $B(1; 3)$, $C(7; -1)$ и $D(3; -6)$. Определить точку пересечения его диагоналей.
5. Даны две точки: $P(2; 3)$ и $Q(-1; 0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку P параллельно отрезку PQ .

Вариант 4

1. Площадь параллелограмма $S=12$ кв. ед.; две его вершины находятся в точках $A(-1; 3)$ и $B(-2; 4)$. Найти две другие вершины этого параллелограмма при условии, что точка пересечения его диагоналей лежит на оси абсцисс.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2; -3)$ параллельно прямой: $3x-7y+3=0$.
3. Установить, пересекаются ли в одной точке три прямые $3x-y+3=0$, $5x+3y-7=0$, $x-2y-4=0$;
4. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат, зная, что длина её отрезка, заключённого между прямыми $2x-y+5=0$ и $2x-y+10=0$, равна $\sqrt{10}$.
5. Составить уравнения сторон треугольника, если даны одна из его вершин $B(-4; -5)$ и уравнения двух высот $5x+3y-4=0$ и $3x+8y+13=0$.

Вариант 5

1. Даны две противоположные вершины квадрата $P(3; 5)$ и $Q(1; -3)$. Вычислить его площадь.

2. Определить, при каких значениях m и n прямая $(m+2n-3)x+(2m-n+1)y+6m+9=0$ параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок, равный -3 (считая от начала координат). Написать уравнение этой прямой.
3. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $P(8; 6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12 кв.ед.
4. На оси абсцисс найти такую точку P , чтобы сумма её расстояний до точек $M(1; 2)$ и $N(3; 4)$ была наименьшей.
5. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B(2; -7)$, а также уравнения высоты $3x+y+11=0$ и медианы $x+2y+7=0$, проведённых из различных вершин.

Вариант 6

1. Длина отрезка MN равна 13; его начало в точке $M(3; -2)$, проекция на ось абсцисс равна -12 . Найти координаты конца этого отрезка при условии, что он образует с осью ординат: а) острый угол, б) тупой угол.
2. Дана прямая $x+2y+3=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1; -1)$ под углом 30° к данной прямой.
3. Даны две вершины треугольника $M_1(-10; 2)$ и $M_2(6; 4)$; его высоты пересекаются в точке $N(5; 2)$. Определить координаты третьей вершины M_3 .
4. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ и одна из его вершин $A(2; -3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.
5. Известны уравнения сторон четырехугольника $x-2y+2=0$, $x-2y-10=0$, $x-4y-8=0$, $x-4y+8=0$. Найти его площадь.

Вариант 7

1. Даны две смежные вершины квадрата $A(2; -5)$ и $B(-1; 3)$. Вычислить его площадь.
2. Даны вершины треугольника $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$ и $C(3; 5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведённую из вершины B .
3. Даны уравнения сторон треугольника $3x+4y-1=0$, $x-7y-17=0$, $7x+y+31=0$. Доказать, что этот треугольник равнобедренный.

4. Определить угол φ , образованный двумя прямыми:

$$x\sqrt{2}-y\sqrt{3}-5=0 \quad \text{и} \quad (3+\sqrt{2})x+(\sqrt{6}-\sqrt{3})y+7=0.$$

5. Через точки $M_1(-1; 2)$ и $M_2(2; 3)$ проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с осями координат.

Вариант 8

1. Даны три вершины $A(2; 3)$, $B(4; -1)$ и $C(0; 5)$ параллелограмма $ABCD$. Найти его четвёртую вершину D .
2. Даны последовательные вершины выпуклого четырёхугольника $A(-3; -1)$, $B(3; 9)$, $C(7; 6)$ и $D(-2; -6)$. Определить точку пересечения его диагоналей.
3. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x-4y-12=0$ от координатного угла.
4. Даны вершины треугольника $M_1(2; 1)$, $M_2(-1; -1)$ и $M_3(3; 2)$. Составить уравнения его высот.
5. Определить, при каких значениях a и b две прямые $ax-2y-1=0$ и $6x-4y-b=0$ 1) имеют одну общую точку; 2) параллельны; 3) совпадают.

Вариант 9

1. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $C(4; -1)$, а также уравнения высоты $2x-3y+12=0$ и медианы $2x+3y=0$, проведённых из одной вершины.
2. Точка $A(5; -1)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $4x-3y-7=0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат остальные стороны квадрата.
3. Даны вершины треугольника $A(1; -2)$, $B(5; 4)$ и $C(-2; 0)$. Составить уравнения биссектрис его внутреннего и внешнего углов при вершине A .
4. Определить угол φ , образованный двумя прямыми: $3x-y+5=0$, $2x+y-7=0$.
5. Через точку $M(4; 3)$ проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3 кв.ед. Определить точки пересечения этой прямой с осями координат.

Вариант 10

1. Найти проекцию точки $P(-8; 12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2; -3)$ и $B(-5; 1)$.
2. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(4; -1)$ и уравнения двух биссектрис $x - 1 = 0$ и $x - y - 1 = 0$.
3. Две смежные вершины квадрата $A(2; 0)$, $B(-1; 4)$. Составить уравнения его сторон.
4. Найти вершины прямоугольного равнобедренного треугольника, если дана вершина прямого угла $C(3; -1)$ и уравнение гипотенузы $3x - y + 2 = 0$.
5. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $P(2; 3)$ и отсекает на координатных осях отрезки равной длины, считая каждый отрезок от начала координат.

Раздел II. Введение в математический анализ

Глава 4. Функция одной переменной

4.1. Функциональная зависимость и способы ее представления

Везде далее в этом параграфе под множествами будут пониматься числовые множества, т.е. множества, состоящие из действительных чисел.

Множество всех действительных чисел будет обозначаться буквой \mathbb{R} .

Понятие функции. Область определения и область значений функции. Если каждому числу x из некоторого множества X по определенному правилу f поставлено в соответствие единственное число y , то говорят, что на множестве X задана *функция* $y = f(x)$, где x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а y – *зависимой переменной*.

Множество X называется *областью определения* данной функции и обозначается $D(f)$, а множество всех чисел y , соответствующих различным числам $x \in X$, – *областью значений (изменения)* функции и обозначается $E(f)$.

Если числу x_0 из области определения функции $f(x)$ соответствует некоторое число y_0 из области значений, то y_0 называется *значением функции* в точке x_0 (или при $x = x_0$).

График функции и способы ее задания. Если задана декартова прямоугольная система координат Oxy , то *графиком* функции $f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$.

Основными способами задания функции являются аналитический (формульный), графический и табличный. При аналитическом задании функции $y = f(x)$ часто не указываются области $D(f)$ и $E(f)$, но они естественным образом определяются из свойств функции $y = f(x)$.

Пример 4.1. Найти область определения и область значений функций:

$$1) f(x) = \frac{1}{\pi} \arcsin 2x; \quad 2) f(x) = \lg(4 - 3x - x^2).$$

Решение: 1) функция $f(x) = \arcsin x$ определена на промежутке $[-1; 1]$, поэтому областью определения $D(f)$ данной функции является отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. В силу того, что справедливо неравенство $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin 2x \leq \frac{\pi}{2}$, обла-

стью значений $E(f)$ функции $f(x) = \frac{1}{\pi} \arcsin 2x$ также будет промежуток $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$;

2) логарифмическая функция определена, если $4 - 3x - x^2 > 0$. Корни квадратного трехчлена $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Записанное выше неравенство равносильно неравенству $-(x + 4)(x - 1) > 0$, решая которое выясняем, что область определения $D(f)$ данной функции есть интервал $(-4; 1)$. Поскольку в области определения имеет место неравенство $0 < 4 - 3x - x^2 \leq \frac{7}{4}$, то областью значений $E(f)$ функции будет интервал $\left(-\infty; \lg \frac{7}{4}\right)$.

Четность и нечетность функции. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если множество $D(f)$ симметрично относительно нуля и для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если множество $D(f)$ симметрично относительно нуля и для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция, не являющаяся ни четной, ни нечетной, называется *функцией общего вида*.

Периодичность функции. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое положительное число $T \neq 0$, называемое *периодом* функции, что для любого $x \in D(f)$ выполняются соотношения $x + T \in D(f)$, $f(x + T) = f(x)$.

Наименьшим же периодом функции называется наименьшее положительное число τ , для которого $f(x + \tau) = f(x)$ при любом значении аргумента x . Следует иметь в виду, что в этом случае $f(x + k\tau) = f(x)$, где k – любое целое число.

Пример 4.2. Определить, какие из данных функций четные, какие – нечетные, а какие – общего вида:

- 1) $f(x) = 3x^4 \sqrt[3]{x} + 2 \sin x$;
- 2) $f(x) = 5^x - 5^{-x}$;
- 3) $f(x) = e^x - 2e^{-x}$;
- 4) $f(x) = \ln|x| - 7e^{-x^4}$;
- 5) $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$.

Решение: 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, т.е. область определения функции симметрична относительно начала координат. Кроме того, имеет место цепочка равенств $f(-x) = 3(-x)^4 \sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = -3x^4 \sqrt[3]{x} - 2\sin x = -f(x)$. Следовательно, данная функция является нечетной;

2) $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $f(-x) = 5^{-x} + 5^{-(-x)} = f(x)$, т.е. данная функция – четная;

3) $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $f(-x) = e^{-x} - 2e^x \neq \pm f(x)$, т.е. данная функция является функцией общего вида;

4) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ и $f(-x) = \ln|-x| - 7e^{-(-x)^4} = \ln|x| - 7e^{-x^4} = f(x)$, т.е. данная функция – четная;

5) $D(f) = (-2; 2)$, т.е. область определения функции симметрична относительно нуля. К тому же $f(-x) = \ln \frac{2+x}{2-x} = \ln \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{-1} = -\ln \frac{2+x}{2-x} = -f(x)$, т.е. функция нечетная.

Пример 4.3. Определить, является ли данная функция периодической, и найти ее наименьший положительный период, если он существует:

$$1) f(x) = \cos 3x; \quad 2) f(x) = \sin^2 2x;$$

$$3) f(x) = \sin 2x + \cos 5x; \quad 4) f(x) = 3x^4 + 1.$$

Решение: 1) число 2π является наименьшим положительным периодом функции $\cos x$. Покажем, что наименьший положительный период функции $f(x) = \cos 3x$ есть число $\frac{2\pi}{3}$. Действительно,

$$\cos 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos(3x + 2\pi) = \cos 3x, \text{ т.е. } T = \frac{2\pi}{3} \text{ – период данной функции.}$$

С другой стороны, если $T_1 > 0$ – какой – либо другой период данной функции, то $\cos 3(x + T_1) = \cos(3x + 3T_1) = \cos 3x$ для всех значений аргумента x . Отсюда следует, что $3T_1$ – период функции $\cos t$, где $t = 3x$, а тогда $3T_1 \geq 2\pi$, т.е. $T_1 \geq \frac{2\pi}{3}$.

Итак, число $T = \frac{2\pi}{3}$ – наименьший положительный период функции $f(x) = \cos 3x$;

2) период данной функции совпадает с периодом функции $\cos 4x$, так как $f(x) = \sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}$. Рассуждая как в пункте 1), можно показать, что наименьший положительный период функции $\cos 4x$ равен $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, наименьший положительный период функции $f(x) = \sin^2 2x$ равен $\frac{\pi}{2}$;

3) наименьшие положительные периоды функций $\sin 2x$ и $\cos 5x$ равны соответственно π и $\frac{2\pi}{5}$ (см. пункты 1) и 2)). Наименьший положительный период суммы этих функций будет равен наименьшему общему кратному их периодов, т.е. числу 2π ;

4) для положительных значений аргумента x функция $f(x) = 3x^4 + 1$ определена и возрастает, поэтому периодической быть не может. Значит, и на всей числовой оси функция не является периодической.

Сложная функция. Пусть область значений функции $y = f(x)$ содержится в области определения функции $g(y)$. Тогда на множестве $D(f)$ определена функция $z = g(f(x))$, которая называется *сложной функцией* или *композицией* функций f и g и обозначается $g \circ f$.

Пример 4.4. Найти сложные функции $g \circ f$ и $f \circ g$, если:

$$1) f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}; \quad 2) f(x) = 3x^2 - 1, g(x) = \sin x.$$

Решение: 1) по определению композиции функций имеем $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$, $x \geq 0$;

2) аналогично получаем $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(3x^2 - 1)$ и $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3\sin^2 x - 1$.

Возрастание и убывание функции. Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)* на множестве $X \subset D(f)$, если для любых значений x_1, x_2 из этого множества X таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Невозрастающие и неубывающие функции называются *монотонными*.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на множестве $X \subset D(f)$, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

Возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*.

Обратная функция. Если для любых различных значений x_1, x_2 из области определения $D(f)$ функции f справедливо соотношение $f(x_1) \neq f(x_2)$, то можно однозначно выразить x через y : $x = g(y)$. Последняя функция называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$ (иногда ее обозначают $x = f^{-1}(y)$). Для функции $x = g(y)$ множество $E(f)$ является областью определения, а множество $D(f)$ – областью значений. Поскольку справедливы тождества $g(f(x)) \equiv x$ и $f(g(y)) \equiv y$, функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$ являются *взаимно обратными*. Обратную функцию $x = g(y)$ обычно переписывают в стандартном виде $y = g(x)$, поменяв x и y местами, придавая тем самым x прежний смысл независимой переменной.

Если функция $f(x)$ имеет обратную, то каждая горизонтальная прямая пересекает ее график не более, чем в одной точке.

Пример 4.5. Найти функцию, обратную к данной

$$1) y = \frac{3}{x+5}; \quad 2) y = x^3; \quad 3) y = x^2.$$

Решение: 1) функция $y = f(x) = \frac{3}{x+5}$ убывает на множестве $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$, которое является областью ее определения, а значит для любых $x_1 \neq x_2$ имеем $f(x_1) \neq f(x_2)$. Отсюда следует, что на $D(f)$ функция имеет обратную. Чтобы найти эту обратную функцию, разрешим уравнение $y = \frac{3}{x+5}$ относительно x : $x = \frac{3}{y} - 5$. Записывая полученную формулу в традиционном виде (т.е. меняя x и y местами), найдем окончательно:

$y = \frac{3}{x} - 5$ – обратная функция к исходной. Область определения этой функции совпадает с областью значений исходной функции, т.е. с множеством $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

2) функция $y = x^3$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, а потому имеет обратную на этом промежутке. Рассуждая как в пункте 1), найдем обратную $y = \sqrt[3]{x}$, область определения которой есть множество $(-\infty; +\infty)$, являющееся также и областью значений исходной функции;

3) для любого $y_0 > 0$ уравнение $y_0 = x^2$ имеет два решения $x_1 = \sqrt{y_0}$ и $x_2 = -\sqrt{y_0}$, т.е. для указанных значений $x_1 \neq x_2$ имеем $f(x_1) = f(x_2)$ (каждая горизонтальная прямая $y = y_0$ пересекает график функции $y_0 = x^2$ в двух точках). Значит, на интервале $(-\infty; +\infty)$, являющемся естественной областью определения, данная функция обратной не имеет. Заметим, однако, что функция

$y = x^2$ имеет обратную на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$, где указанная функция является монотонной.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на множестве X* , если существует такое положительное число M , что для любого значения аргумента $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти область определения следующих функций:

- 4.1.** а) $y = \ln x + 2$; б) $y = \sqrt{-px}$, $p \in \mathbb{R}$;
 в) $y = \frac{1}{x^3 - x}$; г) $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$;
 д) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$; е) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{|x^2 - 9|}}$.
- 4.2.** а) $y = \frac{\ln(x+3)}{x-3}$; б) $y = \sqrt{1-2x} + 3 \arcsin \frac{3x-1}{2}$;
 в) $y = \sqrt{9-x^2} + \frac{1}{x-1}$; г) $y = \frac{x-2}{\sin 3x}$;
 д) $y = \frac{5x^4 - 3}{x - \sqrt{x^2 - 4}}$; е) $y = \arcsin \sqrt{2x}$.
- 4.3.** а) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$; б) $y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$;
 в) $y = \frac{3}{4-x^2} + \lg(x^3-x)$; г) $y = \lg \sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}$;
 д) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}$; е) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
- 4.4.** а) $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$; б) $y = \arccos \cos x$;
 в) $y = \cos \arccos x$; г) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$;
 д) $y = \frac{1}{\cos x}$; е) $y = \sqrt{\sin x \cos x}$.

Найти множества значений следующих функций:

- 4.5. а) $f(x) = 3x^2 - 12x + 13$; б) $f(x) = 4^{x^2}$;
 в) $f(x) = 4 - 3 \sin 2x$; г) $f(x) = \pi \operatorname{arctg} x$;
 д) $f(x) = 5 - \frac{1}{x}$; е) $f(x) = \sqrt{4-x} + 3$.
 4.6. а) $f(x) = 4^{-2x^2-4x-5}$; б) $f(x) = \ln \cos^2 4x - 1$;
 в) $f(x) = \frac{\sqrt{\cos 2x}}{7}$; г) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$;
 д) $f(x) = \sin x \cos x$; е) $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

Определить, какие из данных функций четные, какие – нечетные, а какие – общего вида:

- 4.7. а) $y = \frac{|x|}{x}$; б) $y = x^6 - 2x^4$; в) $y = x + x^2$;
 г) $y = \cos 2x$; д) $y = 2^x + 1$; е) $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.
 4.8. а) $y = 4x \cos x$; б) $y = x^4 \sin 3x$;
 в) $y = \sin x - \cos x$; г) $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}, a > 0, a \neq 1$;
 д) $y = 2^{x^2-x^4}$; е) $y = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1}, a > 0, a \neq 1$.

Определить, является ли данная функция периодической, и найти ее наименьший положительный период, если он существует:

- 4.9. а) $y = \cos \frac{\pi}{4}$; б) $y = |x|$; в) $y = \operatorname{tg}(2x - 1)$;
 г) $y = \sin \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x$; д) $y = \sin 3x \cos 3x$; е) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.
 4.10. а) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$; б) $y = \cos x^2$; в) $y = |\sin 2x|$; г) $y = \ln \cos x$;
 д) $y = \sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}$; е) $y = x \sin x$; ж) $y = 2 \cos \frac{x - \pi}{3}$.

Для данных функций найти сложные функции $f \circ f$, $g \circ f$ и $f \circ g$:

4.11. а) $f(x) = x^3$, $g(x) = x - 1$; б) $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$;

в) $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 5x - 3$; г) $f(x) = |x|$, $g(x) = \cos x$;

д) $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $g(x) = \frac{x-1}{x}$;

е) $f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$, $g(x) = -2$;

ж) $f(x) = [x]$ – целая часть числа x – наибольшее целое число, не превосходящее x , $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Какие из данных функций имеют обратную? Для таких функций найти обратные функции:

4.12. а) $y = x$; б) $y = 6 - 3x$; в) $y = 2x^2 + 1$;

г) $y = |x|$; д) $y = 2x^3 + 5$; е) $y = \frac{x-2}{x}$.

4.13. а) $y = 4^{x-5}$; б) $y = 9 - 2x - x^2$; в) $y = \begin{cases} -x^2 & \text{при } x < 0 \\ 2x & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$;

г) $y = \operatorname{sign} x$; д) $y = 1 + \lg(x+2)$; е) $y = \frac{2^x}{1+2^x}$.

Выяснить, какие из данных функций монотонны, какие – строго монотонны, а какие – ограничены:

4.14. а) $f(x) = c$, $c \in R$; б) $f(x) = \cos^2 x$; в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

г) $f(x) = e^{2x}$; д) $f(x) = -x^2 + 2x$; е) $f(x) = \sqrt{2x+5}$;

ж) $y = \operatorname{ctg} 7x$.

4.15. а) $f(x) = 3^{-x^2}$; б) $f(x) = \frac{|x|}{x}$; в) $f(x) = \frac{x+3}{x+6}$;

г) $f(x) = 3x^3 - x$; д) $f(x) = \begin{cases} -10 & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$ е) $f(x) = \frac{3x+5}{x+1}$;

ж) $f(x) = \operatorname{tg}(\sin x)$.

4.2. Элементарные функции. Преобразование графиков функций

Напомним, что *графиком* функции $f(x)$ в декартовой прямоугольной системе координат Oxy называется множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$.

Часто график функции $y = f(x)$ можно построить с помощью преобразований (сдвиг, растяжение) графика некоторой уже известной функции.

В частности, из графика функции $y = f(x)$ получается график функции:

- 1) $y = f(x) + a$ – сдвигом вдоль оси Oy на $|a|$ единиц (вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$;
- 2) $y = f(x - b)$ – сдвигом вдоль оси Ox на $|b|$ единиц (вправо, если $b > 0$, и влево, если $b < 0$;
- 3) $y = kf(x)$ – растяжением вдоль оси Oy в k раз;
- 4) $y = f(mx)$ – сжатием по оси Ox в m раз;
- 5) $y = -f(x)$ – симметричным отражением относительно оси Ox ;
- 6) $y = f(-x)$ – симметричным отражением относительно оси Oy ;
- 7) $y = |f(x)|$, следующим образом: часть графика, расположенная не ниже оси Ox , остается без изменений, а «нижняя» часть графика симметрично отражается относительно оси Ox ;
- 8) $y = f(|x|)$, следующим образом: правая часть графика (при $x \geq 0$) остается без изменений, а вместо «левой» строится симметричное отражение «правой» относительно оси Oy .

Основными элементарными функциями называются:

- 1) *постоянная* функция $y = c$;
- 2) *степенная* функция $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- 3) *показательная* функция $y = a^x$, $a \neq 0, a \neq 1$;
- 4) *логарифмическая* функция $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$;
- 5) *тригонометрические* функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$,
 $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$ (где $\sec x = \frac{1}{\cos x}$), $y = \operatorname{cosec} x$ (где $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$);
- 6) *обратные тригонометрические* функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
 $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарными функциями называются функции, полученные из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций $(+, -, \cdot, \div)$ и композиций (т.е. образования сложных функций $f \circ g$).

Пример 4.6. Построить график функции

1) $y = x^2 + 6x + 7$; 2) $y = -2\sin 4x$.

Решение: 1) путем выделения полного квадрата функция преобразуется к виду $y = (x+3)^2 - 2$, поэтому график данной функции можно получить из графика функции $y = x^2$. Достаточно сначала сместить параболу $y = x^2$ на три единицы влево (получим график функции $y = (x+3)^2$), а затем на две единицы вниз (рис. 4.1);

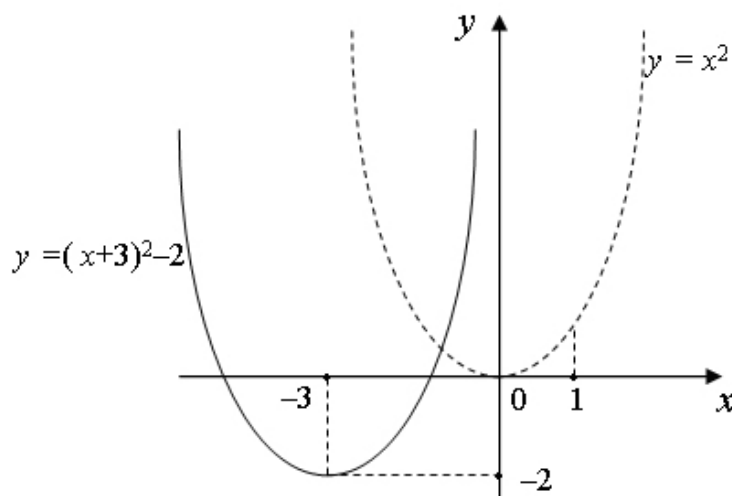


Рис. 4.1

2) сжав стандартную синусоиду $y = \sin x$ в четыре раза по оси Ox , получим график функции $y = \sin 4x$ (рис. 4.2).

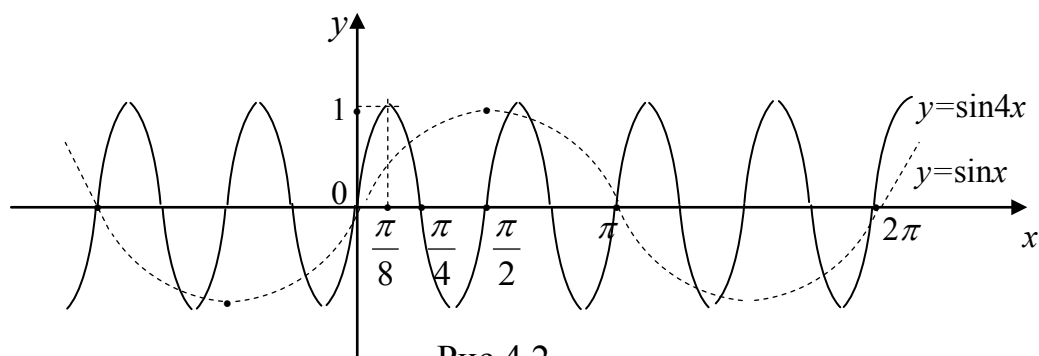


Рис.4.2

Растянув полученный график в два раза вдоль оси Oy , получим график функции $y = 2\sin 4x$ (рис. 4.3). Осталось отразить последний график относительно оси Ox . Результатом будет искомый график (см. рис. 4.3).

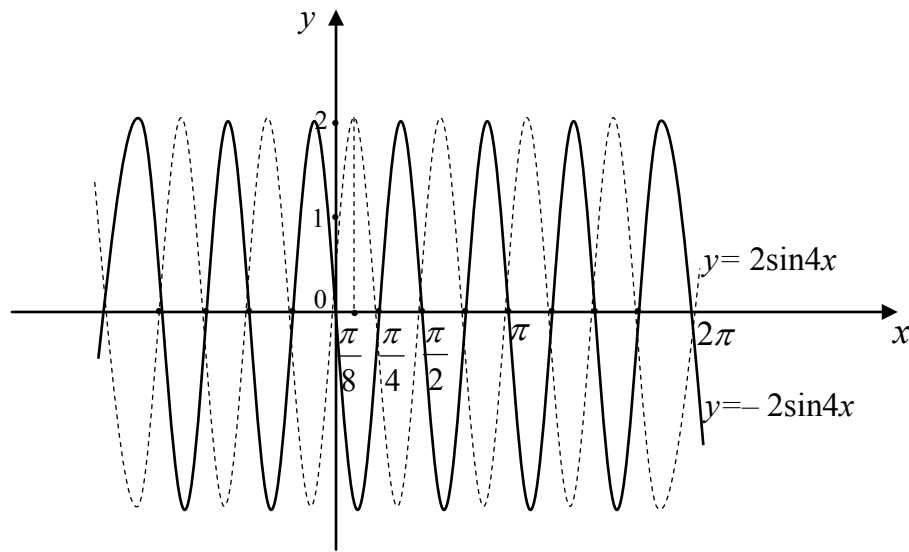


Рис.4.3

Задачи для самостоятельного решения

Построить графики следующих функции, исходя из графиков основных элементарных функций:

4.16. а) $y = x^2 - 6x + 11$; б) $y = 3 - 2x - x^2$.

4.17. а) $y = -2\sin(x - \pi)$; б) $y = 2\cos\frac{x}{2}$.

4.18. а) $y = -\frac{4}{x} - 1$; б) $y = 2 + \frac{5}{x+2}$.

4.19. а) $y = \log_2(-x)$; б) $y = \ln(1-x)$.

4.20. а) $y = |x+5|$; б) $y = |x|^3$.

4.21. а) $y = \operatorname{tg}|x|$; б) $y = |\operatorname{tg} x|$.

4.22. а) $y = \operatorname{sign} x$; б) $y = \operatorname{sign}(\cos x)$.

$$4.23. \text{ а) } y = \frac{x+4}{x+2};$$

$$\text{б) } y = \frac{2x+3}{x-1}.$$

$$4.24. \text{ а) } y = \sin(3x-2) + 2;$$

$$\text{б) } y = \arcsin(x-1).$$

$$4.25. \text{ а) } y = e^{2-x};$$

$$\text{б) } y = 3^{x+2} - 3.$$

$$4.26. \text{ а) } y = \sin^2 x;$$

$$\text{б) } y = |\sin x \cos x|.$$

$$4.27. \text{ а) } y = [x];$$

$$\text{б) } y = \{x\} = x - [x] - \text{дробная часть числа } x.$$

$$4.28. \text{ а) } y = \begin{cases} 3-x & \text{при } x < 3, \\ 2x^2 & \text{при } x \geq 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ e^{-2x} & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$$

$$4.29. \text{ а) } y = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \cos^2 x & \text{при } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} |x+3| & \text{при } x < 0, \\ |3-x| & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

$$4.30. \text{ а) } y = \cos x + \sin x;$$

$$\text{б) } y = |\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x|.$$

Глава 5. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

5.1. Числовая последовательность

Понятие числовой последовательности. Действия над последовательностями. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n , то говорят, что задана *числовая последовательность* $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, которую будем обозначать $\{x_n\}$.

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называют *членами (элементами)* последовательности: x_1 – 1-м членом последовательности, x_2 – 2-м членом последовательности, ..., x_n – n -м (энным) или *общим членом* последовательности.

Числовую последовательность можно рассматривать как функцию f , определенную на множестве \mathbb{N} натуральных чисел. Тогда общий член последовательности $x_n = f(n)$. Последнее выражение называется *формулой общего члена* последовательности.

Суммой, разностью, произведением или отношением двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются последовательности, члены которых образованы соответственно по правилам $z_n = x_n + y_n$; $z_n = x_n - y_n$; $z_n = x_n y_n$; $z_n = \frac{x_n}{y_n}$ при $y_n \neq 0$. Произведением последовательности $\{x_n\}$ на число c называется последовательность с общим членом $z_n = c y_n$.

Последовательность может быть задана, в числе прочего, с помощью *рекуррентных формул*, т.е. формул, позволяющих выразить n -й член последовательности через предыдущие члены.

Пример 5.1. Написать первые пять членов последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$;

2) x_n – n -й знак в десятичной записи числа π .

3) $x_1 = 0$, $x_n = 2x_{n-1} + 1$;

Решение: 1) поочередно подставляя $n = 1, 2, 3, 4, 5$ в формулу общего члена последовательности, найдем $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = -\frac{1}{7}$, $x_4 = \frac{1}{9}$, $x_5 = -\frac{1}{11}$;

2) в силу того, что число $\pi = 3,141592653\dots$, получаем $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$, $x_5 = 9$;

3) имеем $x_1 = 0$. Пользуясь формулой $x_n = 2x_{n-1} + 1$, последовательно находим $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 7$, $x_5 = 15$.

Ограниченность последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M , что для любого номера n справедливо неравенство $x_n < M$ (т.е. все члены последовательности содержатся в интервале $(-\infty; M)$).

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если существует такое число m , что для любого номера n справедливо неравенство $x_n > m$ (т.е. все члены последовательности содержатся в интервале $(m; +\infty)$).

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для любого n выполнено неравенство $|x_n| < M$ (т.е. все члены последовательности содержатся в интервале $(-M; M)$).

Очевидно, ограниченная последовательность является ограниченной как сверху, так и снизу и обратно, ограниченная одновременно сверху и снизу последовательность является ограниченной.

Пример 5.2. Какие из следующих последовательностей ограничены сверху; ограничены снизу; ограничены:

- | | |
|--|---|
| 1) $3, 5, 7, 9, \dots$; | 2) $\frac{-1}{2}, \frac{-4}{3}, \frac{-9}{4}, \frac{-16}{5}, \dots$; |
| 3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots$; | 4) $-3, 9, -27, 81, \dots$? |

Решение: 1) данная последовательность $x_n = 2n + 1$, состоящая из всех нечетных чисел, не превышающих числа три, ограничена снизу, но не ограничена сверху;

2) последовательность $x_n = \frac{-n^2}{n+1} < 0$ ограничена сверху, но не является ограниченной снизу;

3) последовательность ограничена, так как она является ограниченной и снизу и сверху: $0 < x_n = \frac{1}{2^n} < 1$;

4) последовательность $x_n = (-3)^n$ не является ограниченной, так как для любого, сколь угодно большого, числа $M > 0$ можно найти такой номер n (например, $n = \left\lceil \frac{\ln M}{\ln 3} \right\rceil + 2$), что $|x_n| = 3^n > M$.

Возрастание и убывание последовательности. Последовательность, все члены которой равны одному и тому же числу, называется *постоянной*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей (невозрастающей)*, если для любого номера n справедливо неравенство $x_n \leq x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geq x_{n+1}$).

Невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей (убывающей)*, если для любого номера n справедливо неравенство $x_n < x_{n+1}$ (соответственно $x_n > x_{n+1}$).

Возрастающие и убывающие последовательности называются *строго монотонными*.

Пример 5.3. Исследовать данные последовательности на монотонность:

$$1) x_n = 2n + 1; \quad 2) x_n = \frac{(-1)^n}{n}; \quad 3) x_n = \frac{3n+1}{2n-1}; \quad 4) x_n = n^2 - 9n - 100.$$

Решение: 1) данная последовательность является строго монотонной (возрастающей), поскольку $x_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 3 > 2n + 1 = x_n$ для любого натурального числа n ;

2) последовательность не является ни монотонной, ни строго монотонной, так как, например, $x_1 = -1 < x_2 = \frac{1}{2}$, но $x_2 > x_3 = -\frac{1}{3}$;

3) покажем, что данная последовательность строго убывает, т.е. для любого номера n справедливо неравенство $x_n > x_{n+1}$. Для этого рассмотрим отношение n -го члена последовательности к $n+1$ -му:

$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{3n+1}{2n-1} \cdot \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{6n^2 + 5n + 1}{6n^2 + 5n - 4}$. Числитель полученной дроби всегда больше знаменателя и поскольку при этом общий член x_n положителен для любого натурального n , то $\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1$ и $x_n > x_{n+1}$ для всех n ;

4) рассмотрим разность между n -м и $(n+1)$ -м членами последовательности: $x_n - x_{n+1} = n^2 - 9n - 100 - ((n+1)^2 - 9(n+1)n - 100) = -2n + 8$. Выражение, стоящее в правой части равенства, положительно при $n=1,2,3$ (т.е. $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$), равно нулю при $n=4$ (т.е. $x_4 = x_5$) и отрицательно для остальных значений n (при этом $x_n < x_{n+1}$), поэтому, строго говоря, данная последовательность монотонной не является, однако она строго монотонна (возрастает), начиная с пятого члена.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Написать первые пять членов последовательности (x_n) , если:

а) $x_n = 3^{n-1}$;

б) $x_n = (-1)^n + 1$;

в) $x_n = \frac{n+1}{n}$;

г) $x_n = \cos \frac{\pi n}{2}$;

д) $x_n = n^2 - 2n + 3$;

е) $x_n = \frac{1}{n!}$;

ж) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ – последовательность чисел Фибоначчи;

з) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$;

и) $x_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k$.

Для каждой из заданных последовательностей написать формулу общего члена:

5.2. а) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$;

б) $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \dots$;

в) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \dots$;

г) $2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}, \dots$;

д) $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$

5.3. а) $2, 4, 2, 4, 2, 4, \dots$;

б) $-2, 5, -10, 17, -26, \dots$;

в) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \dots$;

г) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}, \dots$;

д) $-2, \frac{4}{2}, -\frac{8}{6}, \frac{16}{24}, -\frac{32}{120}, \dots$

Какие из данных последовательностей ограничены сверху; ограничены снизу; ограничены; монотонны; строго монотонны:

$$5.4. \quad \text{а) } x_n = n; \quad \text{б) } x_n = -\frac{n^2}{n+1}; \quad \text{в) } x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n;$$

$$\text{г) } x_n = -n^3 + 2n; \quad \text{д) } x_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1}?$$

$$5.5. \quad \text{а) } x_n = (-2)^n; \quad \text{б) } x_n = 2^{-n}; \quad \text{в) } x_n = n^{(-1)^n};$$

$$\text{г) } x_n = \frac{n^2}{n!}; \quad \text{д) } x_n = \cos \frac{\pi n}{2}?$$

5.2. Предел последовательности

Определение предела последовательности. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует номер N_ε такой, что для всех членов последовательности с номерами $n > N_\varepsilon$, выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ или $x_n \rightarrow a$.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, которое означает, что точки x_n , начиная с некоторого номера $n > N_\varepsilon$, лежат внутри интервала $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, который называется ε -окрестностью точки a .

Если последовательность, имеет предел, то она называется *сходящейся* (сходится к a), в противном случае последовательность называется *расходящейся*.

Пример 5.4. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что число $a = 2$ является пределом последовательности $x_n = \frac{2n+3}{n+1}$. Для $\varepsilon = 0,001$ найти соответствующий номер N_ε , такой, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех x_n , для которых $n > N_\varepsilon$.

Решение. Рассмотрим любое число $\varepsilon > 0$ и найдем для этого числа номер N_ε такой, что для всех членов последовательности x_n , для которых $n > N_\varepsilon$, будет справедлива цепочка

$$|x_n - a| = \left| \frac{2n+3}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n+3-2n-2}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Решив последнее неравенство относительно n , получим $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Следовательно, можем положить, например, $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$ (где $[\alpha]$ – целая часть числа α). Таким образом, показано, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$, такой, что $|x_n - 2| < \varepsilon$ для всех членов последовательности с номерами $n > N_\varepsilon$. Согласно определению предела последовательности, мы доказали, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n+1} = 2$.

При $\varepsilon = 0,001$ получаем $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{0,001} - 1 \right] + 1 = 1000$, т.е. $|x_n - 2| < 0,001$ при $n > 1000$.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *стремится к плюс бесконечности*, если для любого сколь угодно большого положительного числа M существует номер N_M такой, что для всех членов последовательности с номерами $n > N_M$ выполнено неравенство $x_n > M$.

В этом случае пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ или $x_n \rightarrow +\infty$.

Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *стремится к минус бесконечности*, если для любого сколь угодно большого по модулю отрицательного числа M существует номер N_M такой, что для всех членов последовательности с номерами $n > N_M$ выполнено неравенство $x_n < M$.

В этом случае пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ или $x_n \rightarrow -\infty$.

Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *стремится к бесконечности*, если для любого сколь угодно большого положительного числа M существует номер N_M такой, что для всех членов последовательности с номерами $n > N_M$ выполнено неравенство $|x_n| > M$ (последовательность $\{x_n\}$ стремится к плюс бесконечности).

В этом случае пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ или $x_n \rightarrow \infty$. Очевидно, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, то можно считать также, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, и *бесконечно малой*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Пример 5.5. Доказать, пользуясь определением, что:

- 1) последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ является бесконечно малой;
- 2) последовательность $\{x_n\} = \{2n + 1\}$ является бесконечно большой.

Решение: 1) требуется доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Рассмотрим любое число $\varepsilon > 0$. Тогда $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$ и неравенство $|x_n - 0| < \varepsilon$ будет выполнено в точности тогда, когда $\frac{1}{n} < \varepsilon$, т.е. когда $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Положив $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, получим, что для всех $n > N_\varepsilon$ справедливо неравенство $|x_n - 0| < \varepsilon$. В соответствии с определением предела это и означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$;

2) докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 1) = +\infty$. Рассмотрим любое положительное число M . Неравенство $x_n = 2n + 1 > M$ будет выполнено при $n > \frac{M - 1}{2}$. Положив $N_\varepsilon = \left[\frac{M - 1}{2}\right] + 1$, получим, что для всех $n > N_\varepsilon$ справедливо неравенство $x_n > M$. Это и означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 1) = +\infty$.

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1) сумма и произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

2) произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую есть бесконечно малая последовательность;

3) последовательность $\{x_n\}$, все члены которой отличны от нуля, — бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно большая (символически это можно записать следующим образом: $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$).

Операции над пределами последовательностей:

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm y_n = a \pm b$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = ca$ для любого $c \in \mathbb{R}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, если $b \neq 0$;
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)^k = a^k$, $k \in \mathbb{N}$;
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$.

Пример 5.6. Найти следующие пределы:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n + 1}{3n^3 + 7}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{3n-1}}$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}$;
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 \sqrt{n} + \sqrt[5]{32n^{10} - 7}}{(3n - \sqrt[4]{n})^3 \sqrt[3]{8n^3 + 8}}$.

Решение: 1) последовательность $x_n = \sin n$ является ограниченной, так как $|\sin n| \leq 1$ для любого натурального n , поэтому ее произведение на бесконечно малую последовательность $y_n = \frac{1}{n}$ есть также бесконечно малая последовательность, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$;

2) числитель и знаменатель дроби представляют собой бесконечно большие последовательности. В этом случае говорят, что имеет место неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим числитель и знаменатель выражения, стоящего под знаком предела, на старшую степень n , т.е. на n^3 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n + 1}{3n^3 + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{7}{n^3}}.$$

Используя далее теоремы об операциях над пределами, получим

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{7}{n^3} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^3}} = \frac{2 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}}{3 + 7 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}} = \frac{2 - 0 + 0}{3 + 0} = \frac{2}{3},$$

3) разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень n (выбираем из двух вариантов: $n^{\frac{3}{2}}$ и $n^{\frac{1}{2}}$), т.е. на $n^{\frac{3}{2}}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{3n} - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n^3}} - \frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^3}}}.$$

Последовательность, находящаяся в знаменателе дроби, есть бесконечно малая, как сумма бесконечно малых последовательностей, поэтому исходная последовательность является бесконечно большой, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{3n} - 1} = \infty$;

4) помножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное к нему, после чего воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n-2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) - (n-2)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}}. \end{aligned}$$

Последовательность $\{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}\}$ является бесконечно большой, поэтому последовательность $\left\{ \frac{4}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2}} \right\}$ – бесконечно малая, а значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n-2} = 0$;

5) разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень n (выбираем из $n^{\frac{1}{6}} = n^{\frac{7}{6}}$, $n^{\frac{10}{5}} = n^2$, $n^{\frac{1+3}{3}} = n^2$ и $n^{\frac{1+3}{4+3}} = n^{\frac{5}{4}}$), т.е. на n^2 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 \sqrt{n} + \sqrt[5]{32n^{10} - 7}}{(3n - \sqrt[4]{n}) \sqrt[3]{8n^3 + 8}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[6]{n}}{n} + \sqrt[5]{\frac{32n^{10} - 7}{n^{10}}}}{\frac{3n - \sqrt[4]{n}}{n} \cdot \sqrt[3]{\frac{8n^3 + 8}{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[6]{n^5}} + \sqrt[5]{32 - \frac{7}{n^{10}}}}{\left(3 - \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right) \cdot \sqrt[3]{8 + \frac{8}{n^3}}} = \\ &= \frac{0 + \sqrt[5]{32 + 0}}{(3 - 0) \cdot \sqrt[3]{8 + 0}} = 1. \end{aligned}$$

Связь между сходимостью и ограниченностью последовательностей.

Число e . Справедливы следующие утверждения:

- 1) всякая сходящаяся последовательность является ограниченной;
- 2) всякая монотонная и ограниченная последовательность сходится.

Последовательность $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ возрастает и ограничена сверху, а по-

тому сходится. Ее пределом является число Эйлера $e = 2,71828182845\dots$, служащее основанием натуральных логарифмов. Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$.

Пример 5.7. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n$.

Решение. Имеем: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n \cdot \frac{1}{2}}$.

Обозначив в последнем выражении $2n = k$, продолжим цепочку:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{k \cdot \frac{1}{2}} = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Задачи для самостоятельного решения

5.6. Доказать, пользуясь определением, что число a является пределом последовательности x_n , если:

а) $x_n = \frac{n+1}{n}$, $a = 1$;

б) $x_n = \frac{3n+1}{n-5}$, $a = 3$;

в) $x_n = \frac{2n-2}{5n+2}$, $a = \frac{2}{5}$;

г) $x_n = \frac{3n^2-1}{n^2}$, $a = 3$;

д) $x_n = \frac{3^{n+1}-1}{3^n}$, $a = 3$;

е) $x_n = \frac{5n^2}{n^2+6}$, $a = 5$.

5.7. Доказать, пользуясь определением, что последовательность x_n является бесконечно малой:

а) $x_n = \frac{1}{3^n}$;

б) $x_n = \frac{1}{n-1}$;

в) $x_n = \frac{1}{\ln n}$;

г) $x_n = \frac{1}{n!}$.

5.8. Доказать, пользуясь определением, что последовательность x_n является бесконечно большой:

а) $x_n = \ln n$; б) $x_n = 3^n$; в) $x_n = \frac{n^2 - 1}{n}$; г) $x_n = (-1)^n n^2$.

Найти пределы последовательностей:

5.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{6n+1}$.

5.10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n + 5}{2n^2 - 2n^3 + 7}$.

5.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 1000n^2 + 1}{1000n^2 + 17n}$.

5.12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n^3 - 4n^2}{0,0001n^4 + 10n^3 - 3}$.

5.13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^4}{1-5n^4}$.

5.14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{n-3} - \frac{2}{3n-1} \right)$.

5.15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 5}{4n+1} - \frac{n^2 + 4}{2n+3} \right)$.

5.16. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 + n} - 3n)$.

5.17. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - 4n^2} - n)$.

5.18. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - 7n + 4} - 2n)$.

5.19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{3n + \sqrt{3n + \sqrt{3n}}}}$.

5.20. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 3n} - 3n)$.

5.21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3 - (2-n)^3}{(1-n)^3 - (1+n)^3}$.

5.22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - (n+2)^2}{(n-2)^3 - (n+2)^3}$.

5.23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n+5)^3}{(3-n)^3}$.

5.24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n^2 - 5}}{\sqrt[3]{n^3 + 3} + \sqrt[4]{n^3 + 1}}$.

5.25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt{3n^2} + \sqrt[4]{4n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n})(7 - n + n^2)}$.

5.26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3 - \sqrt{n^3 + 2}}{\sqrt{4n^6 + 3} - n}$.

5.27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$.

5.28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$.

5.29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$.

5.30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}$.

5.31. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n - 1}{7^n + 1}$.

5.32. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{7^n} - 1}{\frac{1}{7^n} + 1}$.

$$5.33. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n.$$

$$5.34. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}.$$

$$5.35. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)^{n+2}.$$

$$5.36. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^4}.$$

5.3. Предел функции. Раскрытие простейших неопределенностей

Определение предела функции в точке. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой ε -окрестности точки x_0 , кроме, быть может, самой точки x_0 (в этом случае говорят, что функция определена в *проколотой* ε -окрестности точки x_0).

Первое определение предела функции (*по Коши*, или «на языке $\varepsilon - \delta$ ») выглядит так.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$, при $x \rightarrow x_0$ (или в точке x_0), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое число $\delta > 0$ (вообще говоря, зависящее от ε), что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначается это так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow x_0$.

Первое определение предела функции равносильно второму определению (*по Гейне*, или «на языке последовательностей»), которое выглядит так.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$, при $x \rightarrow x_0$ (или в точке x_0), если для всякой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящейся к x_0 и такой, что $x_n \neq x_0$ для любого n , соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A .

Пример 5.8. 1. Доказать, пользуясь определением по Коши, что число $A = 7$ является пределом функции $y = 2x + 1$ при $x \rightarrow 3$.

2. Доказать, пользуясь определением по Гейне, что число $A = 3$ является пределом функции $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ при $x \rightarrow 2$.

Решение: 1) рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Требуется найти для него такое число $\delta > 0$, что для всех x , таких, что $|x - 3| < \delta$, $x \neq 3$, было бы выполнено неравенство $|f(x) - 7| = |2x + 1 - 7| < \varepsilon$.

Последнее неравенство приводится к виду $|2x - 6| < \varepsilon$ или $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, если принять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то выполнены все условия определения предела по Коши. Это и значит, что $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$;

2) пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность, такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ и $x_n \neq 2$ для любого n . Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - x_n - 2}{x_n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n + 1)(x_n - 2)}{x_n - 2}$.

Далее, так как $x_n \neq 2$, $x_n - 2 \neq 0$, то мы имеем право сократить дробь на $x_n - 2$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n + 1)(x_n - 2)}{x_n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + 1 = 2 + 1 = 3$.

Согласно определению предела функции по Гейне, это и значит, что $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 3$.

Пример 5.9. Доказать, что функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

Решение. Воспользуемся определением предела функции в точке по Гейне. Рассмотрим последовательность $x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$ и

$x'_n \neq 0$ для всякого $n \in \mathbb{N}$. При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

Если же выбрать последовательность $x''_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}$ ($x''_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$),

которая также является бесконечно малой, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1.$$

Таким образом, мы нашли две различные последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, сходящиеся к числу $x_0 = 0$, для которых соответствующие последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ сходятся к различным числам. Это вступает в про-

творение со вторым определением предела функции, следовательно функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

Определение предела функции на бесконечности. Пусть функция $y = f(x)$ определена на бесконечном промежутке $(a; +\infty)$.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое число $M > 0$, что для всех значений $x > M$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначается это так: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow +\infty$.

Равносильное определение предела функции на «на языке последовательностей» будет выглядеть так.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$, при $x \rightarrow +\infty$, если для всякой последовательности x_n такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к A .

Аналогично определяется $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \rightarrow x_0$ (в точке x_0), если для всякого числа $M > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ выполнено неравенство $|f(x)| > M$ (или если для всякой последовательности x_n такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, имеет место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$).

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$ (в точке x_0), если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Пример 5.10. Доказать, что функция $f(x) = 2^{-x}$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$.

Решение. Требуется доказать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = 0$, т.е. что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$, такое, что $|2^{-x} - 0| < \varepsilon$ для всех $x > M$.

Рассмотрим любое $\varepsilon > 0$. Неравенство $|2^{-x} - 0| < \varepsilon$ равносильно неравенству $2^{-x} < \varepsilon$ и, далее, неравенствам $-x \ln 2 < \ln \varepsilon$, $x > \frac{\ln \varepsilon}{-\ln 2} = \ln 2\varepsilon$. Таким образом, для всякого $\varepsilon > 0$ найдено число $M = \ln 2\varepsilon$ из определения предела. Это и означает, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = 0$.

Свойства бесконечно малых функций.

1. Сумма и произведение любого конечного числа бесконечно малых при $x \rightarrow x_0$ функций есть бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$ функция;
2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно малая функция;
3. Функция $y = f(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$ тогда и только тогда, когда $y = \frac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая при $x \rightarrow x_0$ ($\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$).

Операции над пределами функций.

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, то:

а) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B$;

б) $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = cA$ для любого $c \in \mathbb{R}$;

в) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB$;

г) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, если $B \neq 0$.

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = B$.

3. Для всех основных элементарных функций в любой точке x_0 их области определения имеет место равенство $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0)$.

Говорят, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \rightarrow x_0$ представляет

собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Аналогично

определяются неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ .

Пример 5.11. Найти следующие пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{5x^2 - 4x + 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 4x - 6}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x-10}$;

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-4x+4x^2}{5x^2+1}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-4\cos x)2^{-x}.$$

Решение: 1) справедлива цепочка равенств

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{5x^2 - 4x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2)}{\lim_{x \rightarrow 1} (5x^2 - 4x + 1)} = \frac{3(\lim_{x \rightarrow 1} x)^2 - 2}{5(\lim_{x \rightarrow 1} x)^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 1} x + 1} = \frac{3 - 2}{5 - 4 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Здесь мы воспользовались теоремами об арифметических действиях над пределами и теоремой о пределе элементарной функции:

2) поскольку пределы числителя и знаменателя равны нулю, мы имеем дело с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$. «Раскроем» эту неопределенность, т.е. избавимся от нее, разложив числитель и знаменатель на множители и сократив дробь на $x - 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 4x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{2(x+1)} = \frac{3+3}{2(3+1)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4};$$

3) опять имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\sqrt{x-1} - 3}{x-10} &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(\sqrt{x-1} - 3)(\sqrt{x-1} + 3)}{x-10(\sqrt{x-1} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x-1-9}{x-10(\sqrt{x-1} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 3} = \frac{1}{6}; \end{aligned}$$

4) числитель и знаменатель дроби представляют собой бесконечно большие при $x \rightarrow +\infty$ функции, поэтому здесь имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Поступая как при вычислении предела последовательности, разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-4x+4x^2}{5x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} + 4}{5 + \frac{1}{x^2}} = \frac{4}{5};$$

5) справедливо неравенство $-3 < 1 - 4\cos x < 5$, т.е. функция $y = 1 - 4\cos x$ является ограниченной на всей числовой оси, а потому при ее умножении на бесконечно малую при $x \rightarrow +\infty$ функцию $y = 2^{-x}$ получим так-

же бесконечно малую при $x \rightarrow +\infty$ функцию. Таким образом,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 4 \cos x) 2^{-x} = 0$.

Пределы функций и неравенства.

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, и $f(x) \leq g(x)$ для всех x из некоторой проколотой ε -окрестности точки x_0 , то $A \leq B$.

2. Если предел функции в данной точке положителен (отрицателен), то и все значения указанной функции положительны (отрицательны) в некоторой проколотой окрестности этой точки (обратное, вообще говоря, неверно: например, пределом последовательности с положительными членами $x_n = \frac{1}{n}$ является число ноль).

3. Пусть функции $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ определены в некоторой проколотой ε -окрестности точки x_0 и $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ для всех x из этой окрестности. Пусть также $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = A$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ также существует и равен A (теорема о промежуточной переменной).

4. Если функция имеет предел в данной точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Задачи для самостоятельного решения

5.37. Пользуясь первым определением предела (по Коши), доказать, что:

а) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x + 2) = -1$;

б) $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x) = 1$;

в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

5.38. Пользуясь вторым определением предела (по Гейне), доказать, что:

а) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x) = 6$;

б) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 6) = 4$;

в) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow a} (x + 2a)^5 = 243a^5$.

5.39. Доказать, что функция $y = f(x)$ не имеет предела в точке $x = x_0$:

а) $f(x) = \cos x$, $x_0 = +\infty$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

в) $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x_0 = 0$;

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное} \end{cases} \quad (\text{функция Дирихле}), \quad x_0 = \frac{1}{2}.$$

5.40. Доказать, что функция $y = f(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$:

$$\text{а) } f(x) = \frac{\sin x}{x};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x};$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{\cos^3 x}{\sqrt{x+1}};$$

$$\text{г) } f(x) = (\cos x + \sin x)e^{-x}.$$

Найти пределы:

$$\text{5.41. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}.$$

$$\text{5.42. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}.$$

$$\text{5.43. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{1 - x^3}.$$

$$\text{5.44. } \lim_{x \rightarrow -a} \frac{a^2 - x^2}{a^3 + x^3}.$$

$$\text{5.45. } \lim_{t \rightarrow 1} \frac{3t^2 - t - 2}{2t^2 + 5t - 7}.$$

$$\text{5.46. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$\text{5.47. } \lim_{y \rightarrow -2} \frac{2y^2 + 5y + 2}{2y^3 + 7y^2 + 6y}.$$

$$\text{5.48. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\varphi}{\sin \varphi - \cos \varphi}.$$

$$\text{5.49. } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - 3^{2\alpha}}{3^\alpha - 1}.$$

$$\text{5.50. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 1}.$$

$$\text{5.51. } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right).$$

$$\text{5.52. } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

$$\text{5.53. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x+4}}.$$

$$\text{5.54. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{1 - \sqrt{x}}.$$

$$\text{5.55. } \lim_{p \rightarrow -1} \frac{p+1}{1 - \sqrt{1+p+p^2}}.$$

$$\text{5.56. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+9} - 3}.$$

$$\text{5.57. } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}.$$

$$\text{5.58. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$$

$$\text{5.59. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}.$$

$$\text{5.60. } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}.$$

$$5.61. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1+x+x} - \sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x} \quad 5.62. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}.$$

$$5.63. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{2x^2-x-1}. \quad 5.64. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2-3x+2}.$$

$$5.65. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-2x-1001}{3x^4-x^2-1}. \quad 5.66. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x^3-x+1}{4x^3+3x^2+7x-4}.$$

$$5.67. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}. \quad 5.68. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}.$$

$$5.69. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}). \quad 5.70. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+ax+b} - \sqrt{x^2+cx+d}).$$

$$5.71. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}). \quad 5.72. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2^x+3}{2^x-3}.$$

$$5.73. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1+7^{x+2}}{3-7^x}. \quad 5.74. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$5.75. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}. \quad 5.76. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1+\sqrt{2x^2-1}}{x}.$$

$$5.77. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-3} - x \right). \quad 5.78. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{5x^2+1} - \frac{x^2}{5x-3} \right).$$

5.4. Замечательные пределы

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$

Пример 5.12. Вычислить следующие пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x}, \alpha \in R; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2x - \pi}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+7} \right)^{5x-1}.$$

Решение: 1) имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель дроби на число α , чтобы воспользоваться первым замечательным пределом: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha x} = \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}$. Произведя в последнем выражении замену $y = \alpha x$, получим $\alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \alpha \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \alpha$. Итак, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$;

2) опять имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разделим числитель и знаменатель дроби на x , после чего воспользуемся результатом пункта 1) данного примера: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}} = \frac{2}{3}$;

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1;$$

4) сделаем замену $\arcsin x = y$. Тогда $x = \sin y$ и $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, поэтому $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$;

$$5) \text{ замечая, что } \cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \text{ и } 2x - \pi = -2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

сделаем замену $\frac{\pi}{2} - x = t$, чтобы свести предел к первому замечательному:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2x - \pi} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{-2t} = -\frac{1}{2};$$

6) здесь имеет место неопределенность вида 1^∞ . Сведем данный предел ко второму замечательному пределу:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+7} \right)^{5x-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{3x+2}{3x+7} - 1 \right) \right)^{5x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x+2-3x-7}{3x+7} \right)^{5x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{3x+7} \right)^{5x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{3x+7} \right)^{\frac{3x+7}{-5} \cdot \frac{-5}{3x+7} (5x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{-5}{3x+7} \right)^{\frac{3x+7}{-5}} \right)^{\frac{-5}{3x+7} (5x-1)}. \end{aligned}$$

Выражение $\frac{-5}{3x+7}$ имеет своим пределом ноль при $x \rightarrow \infty$, поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{3x+7} \right)^{\frac{3x+7}{-5}} &= e. \text{ Учитывая далее, что } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{3x+7} (5x-1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-25x+5}{3x+7} = \\ &= -\frac{25}{3}, \text{ окончательно получаем } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+7} \right)^{5x-1} = e^{-\frac{25}{3}}. \end{aligned}$$

Полезно помнить часто используемые следствия из обоих замечательных пределов:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} = \log_a e, \text{ где } a > 0, a \neq 1, \text{ в частности}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \text{ где } a > 0, \text{ в частности } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

а также

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

Пример 5.13. Вычислить следующие пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2-x) - \ln 2}{x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}.$$

Решение: 1) для данной неопределенности вида $\frac{0}{0}$ преобразуем выражение, стоящее под знаком предела так, чтобы воспользоваться одним из следствий из второго замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2-x) - \ln 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{2-x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \left(-\frac{x}{2} \right) \right)}{2 \cdot \frac{x}{2}},$$

после чего, обозначая $-\frac{x}{2} = t$, получим равенства

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \left(-\frac{x}{2} \right) \right)}{2 \cdot \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2-x) - \ln 2}{x} = \frac{1}{2}$;

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha x} = \left| \alpha x = y \right|_{y \rightarrow 0} = \alpha \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \alpha. \quad \text{Здесь мы}$$

также воспользовались одним из следствий из второго замечательного предела;

3) для данной неопределенности вида $\frac{0}{0}$ справедливы равенства

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\beta x} \frac{e^{(\alpha-\beta)x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\beta x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(\alpha-\beta)x} - 1}{x}. \quad \text{Воспользовавшись далее}$$

результатом пункта 2) данного примера, окончательно получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти пределы:

$$5.79. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 9x};$$

$$5.80. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{\arcsin^2 3x};$$

$$5.81. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2};$$

$$5.82. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{3x \operatorname{tg} 3x};$$

$$5.83. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x};$$

$$5.84. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos x}{\sin^2 x};$$

$$5.85. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1};$$

$$5.86. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2};$$

$$5.87. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$$

$$5.88. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(1+3x)}{x};$$

$$5.89. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-6^x}{1-e^x};$$

$$5.90. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 7^x}{6^x - 5^x};$$

$$5.91. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)};$$

$$5.92. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\ln(x+1)};$$

$$5.93. \lim_{t \rightarrow \infty} t(\sqrt[t]{a} - 1), \quad a > 0;$$

$$5.94. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{x^2 + x};$$

$$5.95. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-2} \right)^x;$$

$$5.96. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1} \right)^{2x};$$

$$5.97. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2-3} \right)^{5x^2};$$

$$5.98. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3+2}{5x^3} \right)^{2x^3-1};$$

$$5.99. \lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{1-x}{x}};$$

$$5.100. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^{x+c};$$

$$5.101. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-2}};$$

$$5.102. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[2x]{1+3x};$$

$$5.103. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+5x}{3+2x} \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$5.104. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5-x}{6-x} \right)^{x+2};$$

$$5.105. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2-6x+7}{3x^2+20x-1} \right)^{-x+1};$$

$$5.106. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \ln \sqrt{\frac{2+x}{2-x}};$$

$$5.107. \lim_{x \rightarrow \infty} (3x-1)[\ln(x-3) - \ln x];$$

$$5.108. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(a+x) - \ln x);$$

$$5.109. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^x - a}{x-1};$$

$$5.110. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x-e};$$

$$5.111. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_a x - 1}{x-a};$$

$$5.112. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{\sin x}};$$

$$5.113. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x};$$

$$5.114. \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\operatorname{cosec}^2 x};$$

$$5.115. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}, \alpha \neq \beta;$$

$$5.116. \lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2\alpha} \sin \frac{x - \alpha}{2};$$

$$5.117. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\pi - 4x};$$

$$5.118. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

5.5. Сравнение бесконечно малых

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ есть бесконечно малые функции при $x \rightarrow x_0$, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$. Для сравнения при $x \rightarrow x_0$ двух данных бесконечно малых функций находят предел их отношения $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$* . В этом случае пишут $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \rightarrow x_0$ (читается: $\alpha(x)$ есть «о малое» от $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$).

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, где C — число, отличное от нуля, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка при $x \rightarrow x_0$* , в частности, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми при $x \rightarrow x_0$* , что обозначается так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \rightarrow x_0$.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то это означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$. Таким образом, $\beta(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$, т.е. $\beta(x) = o(\alpha(x))$.

При решении многих задач используются следующие эквивалентности, верные при $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim x, \operatorname{tg} x \sim x,$$

$$\arcsin x \sim x, \operatorname{arctg} x \sim x;$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a} = x \log_a e, \text{ где } a > 0, a \neq 1, \text{ в частности } \ln(1+x) \sim x;$$

$a^x - 1 \sim x \ln a$, где $a > 0$, в частности $e^x - 1 \sim x$;

$(1+x)^m - 1 \sim mx$.

Кроме того, имеет место следующий факт: если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$, и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)\beta(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то справедливы равенства

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)\beta(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_1(x)\beta(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)\beta_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_1(x)\beta_1(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Таким образом, предел произведения или частного двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую, или одну из них, заменить эквивалентной бесконечно малой.

Пример 5.14. Сравнить бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$ величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, если:

1) $\alpha(x) = x^3 - 6x^4 + 9x^2$, $\beta(x) = 5x^4 - x^2$, $x_0 = 0$,

2) $\alpha(x) = x \sin^3 x$, $\beta(x) = 5x^2 \sin x$, $x_0 = 0$;

3) $\alpha(x) = (x-1) \ln x$, $\beta(x) = (x-1)^2$, $x_0 = 1$.

Решение: 1) найдем предел отношения

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 6x^4 + 9x^2}{5x^4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 6x^2 + 9}{5x^2 - 1} = 9. \text{ Предел отношения двух}$$

данных бесконечно малых функций является числом, отличным от нуля, следовательно, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малые одного порядка при $x \rightarrow 0$;

2) поступая так, как в пункте 1), находим

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^3 x}{5x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{5x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \sin x = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 0 = 0,$$

следовательно $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow 0$;

3) имеет место цепочка равенств

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \ln x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} = 1,$$

откуда следует вывод о том, что $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow 1$.

Пример 5.15. Заменяя бесконечно малые эквивалентными, вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5^x - 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 6x \arcsin x) \sin 5x}{(e^x - 1) \operatorname{tg} x^2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2)}{x^4 - 1}.$$

Решение: 1) поскольку $\sin 2x \sim 2x$, $5^x - 1 \sim x \ln 5$ при $x \rightarrow 0$, справедливости равенства $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x \ln 5} = \frac{2}{\ln 5}$;

2) замечая, что $6x \arcsin x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, получим цепочку эквивалентностей: $\ln(1 + 6x \arcsin x) \sim 6x \arcsin x \sim 6x^2$, а также $\sin 5x \sim 5x$, $(e^x - 1) \sim x$, $\operatorname{tg} x^2 \sim x^2$ при $x \rightarrow 0$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 6x \arcsin x) \sin 5x}{(e^x - 1) \operatorname{tg} x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 \cdot 5x}{x \cdot x^2} = 30;$$

3) при $x \rightarrow 1$ имеем $x^2 - 1 \rightarrow 0$, поэтому $\ln x^2 = \ln(1 + (x^2 - 1)) \sim x^2 - 1$, отсюда получаем равенства

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x^2)}{x^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + (x^2 - 1))}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Сравнить бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$ величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, если

5.119. $\alpha(x) = x^2 \sin^2 x$, $\beta(x) = x \sin^3 x$, $x_0 = 0$.

5.120. $\alpha(x) = x^3 - 4x$, $\beta(x) = x + x^4$, $x_0 = 0$.

5.121. $\alpha(x) = (x - 5)^2$, $\beta(x) = (x - 5)^3$, $x_0 = 5$.

5.122. $\alpha(x) = \sin(x - 1)^2$, $\beta(x) = \arcsin(x - 1)$, $x_0 = 1$.

5.123. $\alpha(x) = 1 - \cos x$, $\beta(x) = \frac{x^2}{2}$, $x_0 = 0$.

5.124. $\alpha(x) = 4^x - 1$, $\beta(x) = 5^x - 1$, $x_0 = 0$.

Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые:

5.125. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{2x}$.

5.126. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin 3x}{5 \sin^2 x}$.

5.127. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\arcsin 3x}$.

5.128. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{\sin 2x}$.

$$5.129. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sin^2 2x}.$$

$$5.130. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}.$$

$$5.131. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)}.$$

$$5.132. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x(1 - \operatorname{tg} x)}{\cos 2x}.$$

$$5.133. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3 \operatorname{arctg} x}.$$

$$5.134. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)}.$$

$$5.135. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}.$$

$$5.136. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x}.$$

$$5.137. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x}.$$

$$5.138. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 3x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{tg} 2x)}.$$

$$5.139. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(7^x - 1)(2^x - 1)}{(4^x - 1)(3^x - 1)}.$$

$$5.140. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2 - 2x}.$$

$$5.141. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 3x \ln(1-x^3)}{\operatorname{tg} 9x(1 - \cos 2x)(e^{x^2} - 1)}.$$

$$5.142. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt[3]{x} \ln(1+3x)}{(\operatorname{arctg} \sqrt{x})^2 (e^{5\sqrt[3]{x}} - 1)}.$$

$$5.143. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}.$$

$$5.144. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{(1+x)^3 \sqrt[3]{(1+x)^2} - 1}.$$

$$5.145. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x} - 2}{\sqrt[4]{16+5x} - 2}.$$

$$5.146. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 4x}.$$

$$5.147. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos 2x)}{\ln^2(\sin 3x + 1)}.$$

$$5.148. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x-3x^2+4x^3)}{\ln(1-x+2x^2-7x^3)}.$$

$$5.149. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$5.150. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{2}{x}}.$$

$$5.151. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}.$$

$$5.152. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

5.6. Односторонние пределы

Определение левого и правого пределов функции в точке. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой правой полуокрестности точки x_0 , т.е. на некотором интервале $(x_0; x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$.

Первое определение односторонних пределов функции (*по Коши*, или «на языке $\varepsilon - \delta$ ») выглядит так.

Число A называется *пределом справа функции $f(x)$ в точке x_0* (или *правосторонним пределом*), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x таких, что $0 < x - x_0 < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначается это так: $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$ или $f(x_0 + 0) = A$.

Число A называется *пределом слева функции $f(x)$ в точке x_0* (или *левосторонним пределом*), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x , таких, что $0 < x_0 - x < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначается это так: $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$ или $f(x_0 - 0) = A$.

Первое определение односторонних пределов функции равносильно второму определению (*по Гейне*, или «на языке последовательностей»):

Число A называется *пределом справа функции $f(x)$ в точке x_0* (или *правосторонним пределом*), если для всякой последовательности x_n значений аргумента, стремящейся к x_0 и такой, что $x_n > x_0$ для любого n , соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к A .

Число A называется *пределом слева функции $f(x)$ в точке x_0* (или *левосторонним пределом*), если для всякой последовательности x_n значений аргумента, стремящейся к x_0 и такой, что $x_n < x_0$ для любого n , соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к A .

Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ существует в том и только в том случае, когда существуют односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ и при этом имеют место равенства $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$.

Пример 5.16. Найти односторонние пределы функций:

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leq 1 \\ -x & \text{при } x > 1 \end{cases} \text{ при } x \rightarrow 1;$$

$$2) f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} \text{ при } x \rightarrow 2;$$

$$3) f(x) = \frac{(x+3)\sqrt{1-\cos^2 x}}{x} \text{ при } x \rightarrow 0;$$

$$4) f(x) = 5 + \frac{1}{1 + 4^{\frac{1}{x-1}}} \text{ при } x \rightarrow 1.$$

Решение: 1) рассматриваемая функция определена на всей числовой оси. Пусть $x \leq 1$. Тогда $f(x) = x^2$. Следовательно, $f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1$ – предел функции $f(x)$ в точке $x = 1$ слева.

Если же $x > 1$, то $f(x) = -x$ и $f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (-x) = -1$ – предел справа (рис 5.1);

2) данная функция определена на всем множестве действительных чисел, кроме точки $x = 2$. Преобразуем выражение для $f(x)$, заметив, что в числителе дроби находится полный квадрат:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \frac{(x-2)^2}{x-2} = x - 2$$

при $x \neq 2$. Следовательно,

$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x-2) = 0$, $f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x-2) = 0$, т.е. односторонние пределы функции в исследуемой точке равны между собой;

$$3) \text{ имеем } f(x) = \frac{(x+3)\sqrt{1-\cos^2 x}}{x} = \frac{(x+3)\sqrt{\sin^2 x}}{x} = \frac{(x+3)|\sin x|}{x}.$$

$$\text{Учитывая, что } |\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\sin x & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}, \text{ получаем равенства}$$

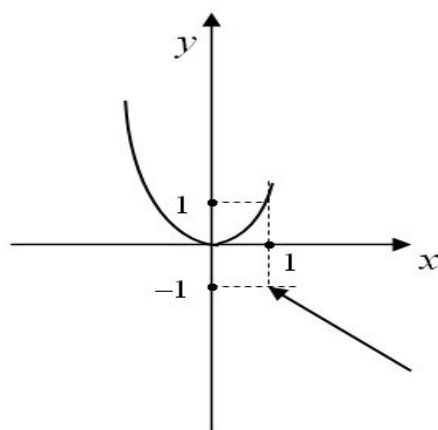


Рис. 5.1

$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} -(x+3) \frac{\sin x}{x} = -(0+3) \cdot 1 = -3$ — предел слева в точке ноль;

$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x+3) \frac{\sin x}{x} = (0+3) \cdot 1 = 3$ — предел справа в точке ноль;

4) найдем левосторонний предел данной функции в точке $x = 1$. Если $x \rightarrow 1-0$, т.е. x стремится к единице, оставаясь меньше единицы, то выражение $x-1$ стремится к нулю, оставаясь при этом меньше нуля, поэтому дробь $\frac{1}{x-1}$ стремится к $-\infty$, а значит, справедливы равенства $\lim_{x \rightarrow 1-0} 4^{\frac{1}{x-1}} = 0$,

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 5 + \frac{1}{1 + 4^{\frac{1}{x-1}}} = 5 + \frac{1}{1+0} = 6.$$

Если же $x \rightarrow 1+0$, то дробь $\frac{1}{x-1}$ стремится к $+\infty$, а значит,

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} 4^{\frac{1}{x-1}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1 + 4^{\frac{1}{x-1}}} = 0,$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 5 + \frac{1}{1 + 4^{\frac{1}{x-1}}} = 5 + 0 = 5.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти левый и правый пределы функции при $x \rightarrow x_0$:

5.153. $f(x) = e^{\frac{1}{x-a}}$, $x_0 = a$.

5.154. $f(x) = \frac{1}{x + 2^{\frac{1}{x-3}}}$, $x_0 = 3$.

5.155. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{x}{10} & \text{при } x > 1. \end{cases}$

а) $x_0 = 1$, б) $x_0 = 10$.

5.156. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x_0 = 1$.

5.157. $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$, $x_0 = 0$.

$$5.158. f(x) = \frac{4 + 3 \cdot 7^{\frac{1}{1-x}}}{1 + 7^{\frac{1}{1-x}}}, x_0 = 1.$$

$$5.159. f(x) = \frac{5}{(x-2)^2}, x_0 = 2.$$

$$5.160. f(x) = \frac{1}{2 - 2^{\frac{1}{x}}}, x_0 = 0.$$

$$5.161. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x_0 = 0.$$

$$5.162. f(x) = \operatorname{tg} x, x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$5.163. f(x) = \frac{|\sin x|}{x}, x_0 = 0.$$

$$5.164. f(x) = [x] - \text{целая часть } x, x_0 = 2.$$

$$5.165. f(x) = \frac{1}{\{x\}}, \{x\} = x - [x] - \text{дробная часть } x, x_0 = 1.$$

$$5.166. f(x) = \cos \frac{\pi}{x}, x_0 = 0.$$

$$5.167. f(x) = 3^{\operatorname{tg} 2x}, x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$5.168. f(x) = \frac{2}{1 + 2^{\operatorname{tg} x}}, x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Найти пределы

$$5.169. \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}.$$

$$5.170. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}.$$

$$5.171. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{\sqrt{1 + \cos 2x}}{\sqrt{\pi} + \sqrt{2x}}.$$

$$5.172. \lim_{x \rightarrow \pi+0} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x}.$$

$$5.172. \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \sec \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right).$$

5.7. Непрерывность и точки разрыва функции

Непрерывность функции в точке. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 , если:

1) эта функция определена в некоторой окрестности точки x_0 ;

2) существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;

3) этот предел равен значению функции в точке x_0 , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Последнее условие равносильно условию $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, где $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx , т.е. функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Односторонняя непрерывность. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной слева* в точке x_0 , если она определена на некотором полуинтервале $(a; x_0]$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной справа* в точке x_0 , если она определена на некотором полуинтервале $[x_0; a)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна слева и справа в этой точке. При этом $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Непрерывность функции на множестве. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на множестве X* , если она является непрерывной в каждой точке x этого множества. При этом если функция определена в конце некоторого промежутка числовой оси, то под непрерывностью в этой точке понимается непрерывность справа или слева. В частности, функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке $[a; b]$* , если она

- 1) непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$;
- 2) непрерывна справа в точке a ;
- 3) непрерывна слева в точке b .

Точки разрыва функции. Точка x_0 , принадлежащая области определения функции $y = f(x)$, или являющаяся граничной точкой этой области, называется *точкой разрыва данной функции*, если $f(x)$ не является непрерывной в этой точке.

Точки разрыва делятся на точки разрыва первого и второго рода:

- 1) если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, причем не все три числа $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$, $f(x_0)$ равны между собой, то x_0 называется *точкой разрыва I рода*.

В частности, если левый и правый пределы функции в точке x_0 равны между собой, но не равны значению функции в этой точке: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A \neq f(x_0)$, то x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.

рыва. В этом случае, положив $f(x_0) = A$, можно видоизменить функцию в точке x_0 так, чтобы она стала непрерывной (*доопределить функцию по непрерывности*).

Разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком функции в точке x_0* . Скачок функции в точке устранимого разрыва равен нулю;

2) точки разрыва, не являющиеся точками разрыва первого рода, называются *точками разрыва II рода*. В точках разрыва II рода не существует или бесконечен хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$.

Свойства функций, непрерывных в точке.

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ (где $g(x) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0 .

2. Если функция $u(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $f(u(x))$ непрерывна в точке x_0 .

3. Все основные элементарные функции (c , x^a , a^x , $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$) непрерывны в каждой точке своих областей определения.

Из свойств 1–3 следует, что все элементарные функции (функции, полученные из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и операции композиции) также непрерывны в каждой точке своих областей определения.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда для любого числа C , заключенного между числами $f(a)$ и $f(b)$, ($f(a) < C < f(b)$) найдется хотя бы одна точка $x_0 \in [a; b]$, такая, что $f(x_0) = C$ (*теорема о промежуточных значениях*).

2. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения различных знаков. Тогда найдется хотя бы одна точка $x_0 \in [a; b]$, такая, что $f(x_0) = 0$ (*теорема Больцано – Коши*).

3. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда эта функция ограничена на этом отрезке (*1-я теорема Вейерштрасса*).

4. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда эта функция достигает на отрезке $[a; b]$ своего наибольшего и наименьшего значений, т.е. существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a; b]$, что для любой точки $x \in [a; b]$ справедливы неравенства $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ (*2-я теорема Вейерштрасса*).

Пример 5.17. Пользуясь определением непрерывности, доказать, что функция $y = 3x^2 + 2x - 5$ непрерывна в произвольной точке x_0 числовой оси.

Решение. I способ. Пусть x_0 – произвольная точка числовой оси. Вычислим сначала предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, применяя теоремы о пределе суммы и произведения функций:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (3x^2 + 2x - 5) = 3(\lim_{x \rightarrow x_0} x)^2 + 2 \lim_{x \rightarrow x_0} x - 5 = 3x_0^2 + 2x_0 - 5.$$

Затем вычисляем значение функции в точке x_0 : $f(x_0) = 3x_0^2 + 2x_0 - 5$.

Сравнивая полученные результаты, видим, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Согласно определению это и означает непрерывность рассматриваемой функции в точке x_0 .

II способ. Пусть Δx – приращение аргумента в точке x_0 . Найдем соответствующее приращение функции:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x)^2 + 2(x_0 + \Delta x) - 5 - (3x_0^2 + 2x_0 - 5) = \\ &= 6x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x = (6x_0 + 2)\Delta x + (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Вычислим теперь предел приращения функции, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x_0 + 2)\Delta x + (\Delta x)^2 = (6x_0 + 2) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + (\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x)^2 = 0.$$

Таким образом, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, что и означает по определению непрерывность функции для любого $x_0 \in R$.

Пример 5.18. Найти точки разрыва функции $f(x)$ и определить их род. В случае устранимого разрыва доопределить функцию по непрерывности:

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= \begin{cases} 1 - x^2 & \text{при } x < 3; \\ 5x & \text{при } x \geq 3 \end{cases}; & 2) f(x) &= \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}; \\ 3) f(x) &= \frac{5}{x^4(x - 2)}; & 4) f(x) &= \operatorname{arctg} \frac{1}{(x - 5)}. \end{aligned}$$

Решение: 1) областью определения данной функции является вся числовая ось $(-\infty; +\infty)$. На интервалах $(-\infty; 3)$, $(3; +\infty)$ функция непрерывна. Разрыв возможен лишь в точке $x = 3$, в которой изменяется аналитическое задание функции.

Найдем односторонние пределы функции в указанной точке:

$$f(3 - 0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (1 - x^2) = 1 - 9 = -8; \quad f(3 + 0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} 5x = 15.$$

Мы видим, что левый и правый пределы конечны, поэтому $x = 3$ – точка разрыва I рода функции $f(x)$. Скачок функции в точке разрыва $f(3+0) - f(3-0) = 15 - 8 = 7$.

Заметим, что $f(3) = 5 \cdot 3 = 15 = f(3+0)$, поэтому в точке $x = 3$ функция $f(x)$ непрерывна справа;

2) функция непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = -1$, в которой она не определена. Преобразуем выражение для $f(x)$, разложив числитель дроби на множители: $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} = \frac{(x+1)(x+3)}{x+1} = x + 3$ при $x \neq -1$.

Найдем односторонние пределы функции в точке $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 3) = 2.$$

Мы выяснили, что левый и правый пределы функции в исследуемой точке существуют, конечны и равны между собой, поэтому $x = -1$ – точка устранимого разрыва функции $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$. График функции представляет собой прямую $y = x + 3$ с «выколотой» точкой $M(-1; 2)$. Чтобы функция стала непрерывной, следует положить $f(-1) = f(-1-0) = f(-1+0) = 2$.

Таким образом, доопределив $f(x)$ по непрерывности в точке $x = -1$, мы получили функцию $f^*(x) = x + 3$ с областью определения $(-\infty; +\infty)$;

3) данная функция определена и непрерывна для всех x , кроме точек $x = 0$, $x = 2$, в которых знаменатель дроби обращается в ноль.

Рассмотрим точку $x = 0$.

Поскольку в достаточно малой окрестности нуля функция принимает только отрицательные значения, то $f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{5}{x^4(x-2)} = -\infty = f(+0)$, т.е. точка $x = 0$ является точкой разрыва II рода функции $f(x)$.

Рассмотрим теперь точку $x = 2$.

Функция принимает отрицательные значения вблизи слева от рассматриваемой точки и положительные – справа, поэтому $f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{5}{x^4(x-2)} = -\infty$, $f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{5}{x^4(x-2)} = +\infty$. Как и в предыдущем случае, в точке $x = 2$ функция не имеет ни левого, ни правого конечного пределов, т.е. терпит в этой точке разрыв II рода;

4) данная функция терпит разрыв в точке $x=5$. При этом $f(5-0) = \lim_{x \rightarrow 5-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{(x-5)} = -\frac{\pi}{2}$, $f(5+0) = \lim_{x \rightarrow 5+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{(x-5)} = \frac{\pi}{2}$, т.е. $x=5$ – точка разрыва I рода. Скачок функции в данной точке равен $f(5+0) - f(5-0) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$ (рис. 5.2).

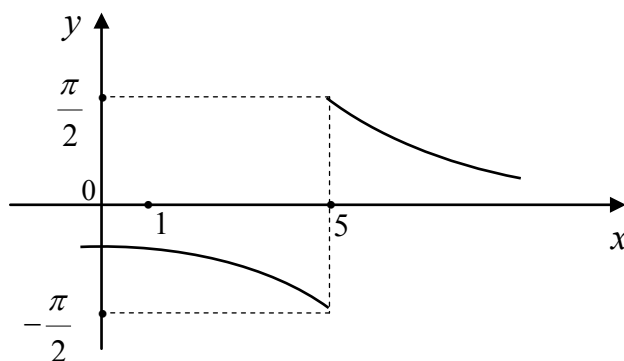


Рис.5.2

Задачи для самостоятельного решения

5.174. Пользуясь лишь определением, доказать непрерывность функции $f(x)$ в каждой точке $x_0 \in R$:

- а) $f(x) = c = \text{const}$; б) $f(x) = x$; в) $f(x) = x^3$;
 г) $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$; д) $f(x) = \sin x$.

5.175. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x \geq 0, \\ 1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$ является непрерывной

на всей числовой оси. Построить график этой функции.

5.176. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$ не является непрерыв-

ной в точке $x = 0$, но непрерывна справа в этой точке. Построить график функции $f(x)$.

5.177. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1 & \text{при } x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x + 2 & \text{при } x > \frac{1}{2} \end{cases}$ не является не-

прерывной в точке $x = \frac{1}{2}$, но непрерывна слева в этой точке. Построить график функции $f(x)$.

5.178. Построить графики функций

а) $y = \frac{x+1}{|x+1|}$;

б) $y = x + \frac{x+1}{|x+1|}$.

Какие из условий непрерывности в точках разрыва этих функций выполнены и какие не выполнены?

5.179. Указать точку разрыва функции

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0 \\ 2, & \text{при } x = 0 \end{cases}.$$

Какие из условий непрерывности в этой точке выполнены и какие не выполнены?

5.180. Указать точку разрыва функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$ и определить ее род. Найти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ и построить эскиз графика функции. Какие условия непрерывности в точке разрыва не выполнены?

Найти точки разрыва функции $f(x)$ и определить их род. Построить график данной функции:

5.181. $f(x) = -\frac{6}{x}$.

5.182. $f(x) = \operatorname{tg} x$.

5.183. $f(x) = \frac{4}{4-x^2}$.

5.184. $f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

5.185. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{a}{x-a}$.

5.186. $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{2|x-1|}$.

Найти точки разрыва функции $f(x)$ и определить их род. В случае разрыва первого рода найти скачок функции в точках разрыва. В случае устранимого разрыва доопределить функцию «по непрерывности»:

$$5.187. f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2}.$$

$$5.188. f(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{1-x}} + 1}.$$

$$5.189. f(x) = \frac{3^{\frac{1}{x-2}} - 1}{3^{\frac{1}{x-2}} + 1}.$$

$$5.190. f(x) = \frac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}.$$

$$5.191. f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{при } x < -1, \\ \frac{1}{x} & \text{при } x > -1. \end{cases}$$

$$5.192. f(x) = 1 - x \sin \frac{1}{x}.$$

$$5.193. f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16} & \text{при } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.194. f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$5.195. f(x) = \frac{1}{1 - e^{1-x}}.$$

$$5.196. f(x) = \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}}{x(x-5)}.$$

$$5.197. f(x) = \frac{x+1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}.$$

$$5.198. f(x) = \frac{1}{x^4 - 26x^2 + 25}.$$

5.8. Контрольные задания к главам 4, 5

1. Найти область определения функции

1. $y = \sqrt{-x^2 + x + 6}$;

2. $y = \sqrt{\lg(x^2 - 5x + 7)}$;

3. $y = \lg \frac{3x+6}{x-2}$;

4. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-x-2}}$;

5. $y = \sqrt{\frac{8-15x-x^2}{x-4}}$;

6. $y = \sqrt{\ln(x^2 - 7x + 13)}$;

7. $y = \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$;

8. $y = \sqrt{5-x} + \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

9. $y = \sqrt{\frac{3-x}{x^2-x-2}}$;

10. $y = \lg \frac{x-1}{x^2+5x+4}$;

11. $y = \frac{1}{\ln(x^2-2)}$;

12. $y = \sqrt{x+3} - \ln(x^2+3x+2)$;

13. $y = \sqrt[3]{\frac{2-x}{\sqrt{-2x^2+3x-1}}}$;

14. $y = 2 \arcsin 3x + \sqrt{1-x^2}$;

15. $y = \sqrt{\frac{x+5}{x-2}}$;

2. Построить график функции

1. $y = 2 \cos(x + \pi)$;

2. $y = 1 - \sqrt{x+1}$;

3. $y = |\sin 2x|$;

4. $y = \cos^2 x$;

5. $y = 2x^2 + 4x + 3$;

6. $y = 1 - e^{x+1}$;

7. $y = \sin^2 x + 1$;

8. $y = \frac{x+2}{x+1}$;

9. $y = -x^2 + 4x - 1$;

10. $y = \frac{1}{|x-3|}$;

11. $y = \cos^2 2x - \sin^2 2x + 1$;

12. $y = |\ln(x-3)|$;

13. $y = 2^{1-x} - 1$;

14. $y = \cos \frac{|x|}{2}$;

15. $y = -x^2 - 4x - 1$.

3. Найти пределы

1. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}};$

б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^3 - 125};$

в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2};$

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 1}{3x + 1} \right)^{2x}.$

2. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - 3)^2}{5x^3 - x + 4};$

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)^3}{x^2 - 4x + 3};$

в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - x^2}{1 + \sqrt[3]{x}};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x \sin^2 x};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5 + 3x}{5 - 2x} \right)^{\frac{2}{3x}}.$

3. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}};$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1};$

в) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{x^2 - 64};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x^2 \operatorname{tg} 6x};$

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1} \right)^{2x - x^3}.$

4. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 9};$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x + 16} - 4};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{1 - \cos x};$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 3x}{2 - 4x} \right)^{\frac{1}{x}}.$

5. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1};$

б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 + x - 1};$

в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{1 - x^2};$

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{2x};$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x-1}.$$

$$6. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x + 7}{4x^3 - 5x^2 + 4x - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 2x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3-7x}{3+x} \right)^{\frac{2}{5x}}.$$

$$7. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4}{(x+2)^3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{\sqrt[3]{x} - 1};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 1} \right)^{x-x^2}.$$

$$8. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - x^2 + 4}{x - x^3 - 15};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos x)};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} (5x + 2)(\ln(x+10) - \ln(x-1)).$$

$$9. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x});$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3 - 2}{5x^3} \right)^{2x^3-1}.$$

$$10. \quad \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - x + 1});$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3 \operatorname{arctg} x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 3x + 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos 4x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7x^2 - 8x + 1}{13x^2 - 10x - 3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 7x + 3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x} - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 6x^2}{5x^2 - 20};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x(1 - \operatorname{tg} x)}{\cos 2x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x + 1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{4x-3}.$$

$$11. \quad а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x^4 + x^3 - 1}{x^4 - 5x^5 + 1};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 3} \right)^{5x^2 + 6}.$$

$$12. \quad а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0,1x^2 - x + 1}{x - x^2};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{1 - \sqrt{3-x}};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5 + x^2}{x^2 - 7} \right)^{x^3}.$$

$$13. \quad а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{\sqrt{2x^2-5}};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{3x^2 - 2} \right)^{5x^2}.$$

$$14. \quad а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2x - x^3}{x^2 + 5x - 1};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{9-x}}{x-6};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-3x}{1+2x} \right)^{\frac{1}{3x}}.$$

$$15. \quad а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5x+7}}{\sqrt[9]{1-8x^3}};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 3x + 1}{x^3 - 1};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{2x^2 - 9x + 5};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{1 - \cos(x+1)};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - 3x - 2};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos(x-3)(x^2-9)}{2x^2-7x+3};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1-e^x)}{\operatorname{tg} x};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x - 3x^2 + 1}{x^2 + x - 2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - 1}{\operatorname{tg}^2 x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x-2} \right)^{5x+2}.$$

4. Найти точки разрыва функции и определить их род. Построить эскиз графика функции. В случае устранимого разрыва доопределить функцию «по непрерывности».

$$1. y = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

$$2. y = \frac{x^3 + 1}{x + 1};$$

$$3. y = 3^{\frac{2}{x-4}};$$

$$4. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1};$$

$$5. y = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{при } x \leq 3; \\ x - 2 & \text{при } x > 3 \end{cases};$$

$$6. y = \begin{cases} 2^x & \text{при } x < 1 \\ 3 - x & \text{при } 1 \leq x < 3; \\ x - 2 & \text{при } x \geq 3 \end{cases}$$

$$7. y = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x & \text{при } 0 < x \leq \pi; \\ x & \text{при } x > \pi \end{cases}$$

$$8. y = \frac{x-1}{|x-1|};$$

$$9. y = \begin{cases} x + 2 & \text{при } x \leq -1 \\ \frac{2}{x} & \text{при } x > -1 \end{cases};$$

$$10. y = 1 - 2^{\frac{1}{x}};$$

$$11. y = \frac{2}{(x-2)^2};$$

$$12. y = 5^{\frac{1}{x-1}};$$

$$13. y = \frac{x-2}{|x-2|};$$

$$14. y = \frac{1}{(x+1)^2};$$

$$15. y = \begin{cases} x + 1 & \text{при } x \leq 0 \\ \cos x + 1 & \text{при } 0 < x < \pi; \\ \sin x & \text{при } x \geq \pi \end{cases}$$

Раздел III. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Глава 6. Производная и дифференциал

6.1. Определение производной. Правила дифференцирования

Приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0 при соответствующем приращении Δx аргумента x называется разность $\Delta y(x_0; \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (рис. 6.1).

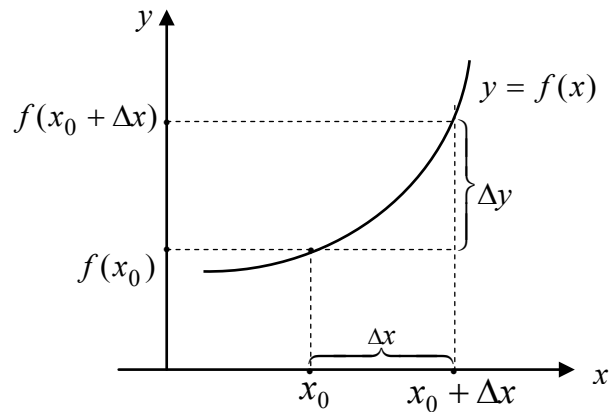


Рис. 6.1

Если существует конечный предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x_0; \Delta x)}{\Delta x}$, то его значение называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 , а сама функция называется дифференцируемой в точке x_0 .

Для производной используются следующие обозначения: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$,

$\frac{dy(x_0)}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$ и др.

Нахождение производной называют дифференцированием функции. Чис-

ла $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y(x_0; \Delta x)}{\Delta x}$ и $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y(x_0; \Delta x)}{\Delta x}$ называются соответственно правой и левой производными функции $y = f(x)$ в точке x_0 . Для существования производной функции в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы ее односторонние производные существовали и были равны $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \alpha \neq 0.$
2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0, a \neq 1.$
3. $(e^x)' = e^x.$
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1.$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$
6. $(\sin x)' = \cos x.$
7. $(\cos x)' = -\sin x.$
8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
10. $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
11. $(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$

Правила дифференцирования

Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – некоторые дифференцируемые функции, c – постоянная величина. Тогда:

1. $(c)' = 0.$
2. $(c \cdot f)' = c \cdot f'.$
3. $(f \pm g)' = f' \pm g'.$
4. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, g \neq 0.$

Пример 6.1. Исходя из определения, найти производную функции $y = x^3$.

Решение. Найдем

$\Delta y(x_0; \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$. Вычислим предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x_0; \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2.$$

Следовательно, $(x^3)' = 3x^2$.

Пример 6.2. Найти производные следующих функций, используя таблицу производных и правила дифференцирования:

1) $y = x^3 \sqrt{x}$,

2) $3 \sin x - \frac{2}{x\sqrt{x}}$,

3) $5\left(\frac{1}{2}\right)^x$,

4) $x^2 \cos x$,

5) $\frac{\ln x}{x}$.

Решение.

1) Представим $y = x^3 \sqrt{x}$ в виде степенной функции $y = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{2}}$ и

воспользуемся табличной производной (1) $y' = \left(x^{\frac{7}{2}}\right)' = \frac{7}{2} x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2} x^{\frac{5}{2}}$

2) $y' = \left(3 \sin x - \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)' = (\text{правило 3}) = (3 \sin x)' - \left(\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}\right)' = (\text{правило 2}) =$

$= 3(\sin x)' - 2\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)' = 3 \cos x - 2\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} = 3 \cos x + 3x^{-\frac{5}{2}}.$

3) $y' = \left(5\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)' = (\text{правило 2}) = 5\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)' = 5\left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\left(\frac{1}{2}\right).$

4) $y' = (x^2 \cos x)' = (\text{правило 4}) = (x^2)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x.$

5) $y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = (\text{правило 5}) = \frac{(\ln x)'x - \ln x(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$

Пример 6.3. Найти производную функции $y = x^2 - 5x + 4$ в точках $x_0 = 0$ и $x_0 = 4$.

Решение. Найдем производную $y' = 2x - 5$, а затем найдем значение производной в указанных точках. $y'(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$; $y'(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти приращение функции $\Delta y(x_0, \Delta x)$.

6.1. $y = x^2 + 3x + 1$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$;

6.2. $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,2$;

6.3. $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0,41$;

6.4. $y = \lg x$, $x_0 = 10$, $\Delta x = 0,3$.

Найти производные указанных функций, исходя из определения производной.

6.5. $y = 3x + 2$; **6.6.** $y = x^2 - 2x + 3$;

6.7. $y = \sin x$; **6.8.** $y = \log_2 x$; **6.9.** $y = x^{-2}$.

6.10. Показать, что производная функции $y = |x|$ в точке $x = 0$ не существует.

Найти производные указанных функций, используя правила дифференцирования и таблицу производных.

6.11. $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 3$; **6.12.** $y = \frac{x^6}{3} - 4x^4 + 2x^2 + 11$;

6.13. $y = \frac{3x+5}{2}$; **6.14.** $y = (2x-3)^2$;

6.15. $y = 4\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{x}$; **6.16.** $y = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}$;

6.17. $y = 6\sqrt[3]{x^2} + 8\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{x\sqrt{x}}$; **6.18.** $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$;

6.19. $y = 3\cos x - 2\sin x$; **6.20.** $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

6.21. $y = 6 \cdot 2^x + 3 \cdot 4^x$; **6.22.** $y = x^2 \cos x$;

6.23. $y = (2x+3)\sin x$; **6.24.** $y = (x^2 + 2x + 3)e^x$;

6.25. $y = (3x-2)\ln x$; **6.26.** $y = \cos x \cdot e^x$;

6.27. $y = x \cdot \arcsin x$; **6.28.** $y = (x^2 + 1)\operatorname{arctg} x$;

$$6.29. y = \cos^2 x;$$

$$6.30. y = \frac{4x}{1-2x};$$

$$6.31. y = \frac{2x-1}{x^2+x+1};$$

$$6.32. y = \frac{\sin x}{x^2+1};$$

$$6.33. y = \frac{\cos x}{1+\sin x};$$

$$6.34. y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}};$$

$$6.35. y = \frac{2^x-1}{2^x+1};$$

$$6.36. y = \frac{x \ln x}{x^2+1};$$

$$6.37. y = x^2 \cos x \log_2 x.$$

Найти значение производной функции в указанной точке x_0 .

$$6.38. y = (1 + \sqrt[3]{x^2})^2, \quad x_0 = 1;$$

$$6.39. y = (x+2) \sin x, \quad x_0 = 0;$$

$$6.40. y = \cos x - \frac{2}{\pi} x^2 + 1, \quad x_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$6.41. y = \frac{x}{x^2+1} - 4\sqrt{x}, \quad x_0 = 1;$$

$$6.42. y = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}, \quad x_0 = 3;$$

$$6.43. y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-5}}, \quad x_0 = 3;$$

$$6.44. y = 4 \cdot \sqrt[3]{x^2}, \quad x_0 = -8;$$

$$6.45. y = (x^2 - 3x + 2)e^x, \quad x_0 = 0.$$

6.2. Производная сложной функции

Пусть $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция. Если промежуточная функция $u = \varphi(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $y = f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную в точке x_0 , и $y'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0)$, или $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Пример 6.4. Найти производную функции $y = \sin^3(2x+1)$.

Решение. Пусть $y = u^3$, где $u = \sin(2x+1)$. Тогда

$$y' = (u^3)' \cdot u' = 3u^2 \cdot u' = 3 \sin^2(2x+1) \cdot (\sin(2x+1))'.$$

Обозначим, $\sin(2x+1) = \sin v$, где $v = 2x+1$. Тогда $(\sin(2x+1))' = (\sin v)' \cdot v' = \cos v \cdot v' = \cos(2x+1) \cdot (2x+1)' = 2 \cos(2x+1)$.

Окончательно, $y' = 3 \sin^2(2x+1) \cdot 2 \cos(2x+1) = 6 \sin^2(2x+1) \cdot \cos(2x+1)$.

Пример 6.5. Найти производную функции $y = \ln(x^2 + 3x + 5)$.

Решение. Пусть $y = \ln(u)$, где $u = x^2 + 3x + 5$.

$$y' = (\ln u)' \cdot u' = \frac{1}{u} u' = \frac{(x^2 + 3x + 5)'}{x^2 + 3x + 5} = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 5}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти производные функций.

6.46. $y = \sin 3x$;

6.47. $y = \cos(a - bx)$;

6.48. $y = \sqrt{5x - 1}$;

6.49. $y = \sqrt[3]{(2x + 3)^2}$;

6.50. $y = \ln(6x + 5)$;

6.51. $y = \arccos(3x - 1)$;

6.52. $y = \operatorname{ctg}(3x)$;

6.53. $y = 2^x + 2^{-x}$;

6.54. $y = \ln^3 x$;

6.55. $y = \sqrt{(x^2 + 1)}$;

6.56. $y = e^{2x - x^2}$;

6.57. $y = 10^{\sin x}$;

6.58. $y = e^{-x^2}$;

6.59. $y = x \cdot e^{-x^2}$;

6.60. $y = (2x + 4)^6$;

6.61. $y = \arcsin^3(\sqrt{x})$;

6.62. $y = \ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right)$;

6.63. $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;

6.64. $y = \cos 3x \cdot e^{2x}$;

6.65. $y = 3^{\cos^2 x}$;

6.66. $y = \cos(10^x + 10^{-x})$;

6.67. $y = \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$;

6.68. $y = x\sqrt{x^2 + 1}$;

6.69. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

6.70. $y = \sqrt[3]{1 + \cos 6x}$;

6.71. $y = (x^2 - 2x + 3)^4$;

6.72. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$;

6.73. $y = \sin(e^{3x})$;

6.74. $y = \operatorname{tg}(\cos 2x)$;

6.75. $y = 5^{\arccos(3x)}$;

6.76. $y = e^{\sqrt{x^2 + x + 2}}$;

6.77. $y = \operatorname{ctg}(x \cdot \cos x)$;

6.78. $y = 3^{x \cdot \ln x}$;

6.79. $y = \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{4 + e^{2x}}}$;

6.80. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(x^2 + 1))$;

6.81. $y = \lg(x^2 - \cos x)$;

$$6.82. y = \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \sin 4x;$$

$$6.83. y = 3^{2^x};$$

$$6.84. y = A \cdot e^{-bx} \cdot \cos(kx + p);$$

$$6.85. y = \ln(x^2 - 4x);$$

$$6.86. y = \frac{\cos 3x}{e^{2x} + e^x};$$

$$6.87. y = \ln \sin^3 x;$$

$$6.88. y = \log_2 \ln x;$$

$$6.89. y = \arctg^3 \left(\frac{1}{x} \right);$$

$$6.90. y = \sqrt{1 - \tg^2 \frac{x}{2}};$$

$$6.91. y = \arctg \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$6.92. y = x^2 \sqrt{1 + \sqrt{x}};$$

$$6.93. y = \sqrt[3]{2 + x\sqrt{x+1}};$$

$$6.94. y = \arccos(\sqrt{1-2x});$$

$$6.95. y = \ln(e^x \cos x + e^{-x} \sin x);$$

$$6.96. y = e^x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x;$$

$$6.97. y = x\sqrt{1+x^2} \cdot \cos x;$$

$$6.98. y = \ln \cos \arctg \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right).$$

6.3 Логарифмическая производная и производная неявной функции

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е. $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x; y) = 0$, если $F(x, f(x)) = 0$ для всех x из некоторого интервала. Для вычисления производной функции заданной неявно необходимо продифференцировать по x уравнение $F(x; y) = 0$, считая y функцией от x , и из полученного уравнения выразить производную y' .

Пример 6.5. Найти производную функции $y = f(x)^{g(x)}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = \ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \cdot \ln f(x)$.

Так как $z' = \frac{y'}{y}$, имеем $y' = y \cdot z'$. С другой стороны, $z = g(x) \cdot \ln f(x)$ и

$$z' = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Следовательно, $y' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$.

Пример 6.6. Найти производную функции $y = x^{\cos x}$.

Решение. Рассмотрим $z = \ln y = \cos x \cdot \ln x$

$$z' = (\cos x \cdot \ln x)' = -\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}; \quad y' = y \cdot z' = x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x \right).$$

Пример 6.7. Найти производную функции y , заданной неявно уравнением $x^3 + y^3 - 2xy = 0$, в точке $M(1; 1)$.

Решение. Продифференцируем равенство $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ по x , считая y функцией от x : $3x^2 + 3y^2 y' - 2y - 2xy' = 0$.

$$\text{Выразим из этого равенства } y': y'(3y^2 - 2xy) = 2y - 3x^2, \quad y' = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}.$$

Чтобы получить значение производной в точке $M(1; 1)$ необходимо подставить в полученное выражение $x = 1, y = 1$: $y'(1) = \frac{2-3}{3-2} = -1$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти производные функций.

6.99. $y = (x^2 + 1)^{3x}$;

6.100. $y = (\sin x)^{\cos x}$;

6.101. $y = (x+1)^{\frac{4}{x}}$;

6.102. $y = x^{\ln x}$;

6.103. $y = (\operatorname{tg} 2x)^{2x}$;

6.104. $y = (\operatorname{ctg} 3x)^{x^2-x}$;

6.105. $y = (x)^{x^4}$;

6.106. $y = 2x^{\sqrt{x}}$;

6.107. $y = x^3 \cdot e^x \cdot \sin 3x \cdot \sqrt{x^2 + 4}$;

6.108. $y = \frac{(x+2)^3 \sqrt{x^2 + x + 1}}{(2x-1)^2}$;

6.109. $y = \sqrt{x^2 \cdot \cos x} \cdot \sqrt{1+e^x}$;

6.110. $y = (x)^{2x^{3x}}$.

Найти производные функций, заданных неявно.

6.111. $y^2 - 4y = 4x^2$;

6.112. $4 + xe^y - 2y = 0$;

6.113. $y + x = \arctg y$;

6.114. $x \sin y + \cos y = x^2$;

6.115. $x^3 - x^2 y + xy^2 + y^3 = 0$;

6.116. $2y \ln y = x^2$;

6.117. $\cos y - y = x$;

6.118. $\frac{x+y}{2x-y} = 1$;

6.119. $\sqrt{xy} = x - 2y$.

Найти производные функций, заданных неявно, в указанных точках.

6.120. $x^2 + y^2 = 4e^x$, $M_1(0; -2)$, $M_2(0; 2)$.

6.121. $x^2 + y^2 = 8$, $M_1(2; 2)$, $M_2(-2; 2)$.

6.122. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$, $M(1; 9)$.

6.123. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $M\left(1; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

6.124. $x^3 + 3y^2 = 10xy$, $M(3; 1)$.

6.125. $x^2 - y^3 = 3$, $M(2; 1)$.

6.4. Геометрический и механический смысл производной. Производные высших порядков

Геометрический смысл производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 заключается в том, что производная равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$, т. е. $f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол наклона касательной.

Тогда уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеют, соответственно, вид: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, и $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Если графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ пересекаются в точке x_0 , то угол, образуемый графиками функций в данной точке, определяется как угол между касательными в этой точке к графикам данных функций.

В механике, если обозначить $s(t)$ – путь, пройденный телом за время t при прямолинейном движении, производная $s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s(t_0, \Delta t)}{\Delta t}$ определяет скорость $v(t_0)$ тела в момент времени t_0 , т. е. $v(t_0) = s'(t_0)$.

Производной второго порядка или второй производной функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной $(y')'$. Обозначается вторая производная следующим образом: y'' , $f''(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Производной n -го порядка функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка данной функции. Обозначается производная n -го порядка следующим образом: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$. Таким образом, $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

При прямолинейном движении точки по закону $s = s(t)$ вторая производная $s''(t)$ – есть ускорение точки в момент t .

Пример 6.8. Найти угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2 - 2x + 3$ а) в точке $(2; 3)$; б) в точке $(-1; 6)$.

Решение. Так как $f'(x_0) = k$, найдем производную $y' = 2x - 2$ и подставим соответствующее значение x_0 .

а) $k = y'(2) = 4 - 2 = 2$;

б) $k = y'(-1) = -2 - 2 = -4$.

Пример 6.9. В каких точках касательная к графику функции $y = x^2 + x + 2$ а) образует с осью Ox угол 45° ; б) параллельна оси Ox .

Решение. а) Если касательная образует угол 45° с осью Ox , то $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ с одной стороны и $k = y'(x) = 2x + 1$ с другой. Следовательно, $2x + 1 = 1$, $x = 0$.

б) Если касательная параллельна оси Ox , то ее угол наклона равен 0° и $k = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$. Так как $k = y'(x) = 2x + 1$, получим $2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2}$.

Пример 6.10. Расстояние s (в метрах), пройденное телом за время t (в секундах) определяется законом $s(t) = t^2 + 3t + 1$. Найти скорость тела в момент времени $t = 1, t = 4, t = 10$ с, и среднюю скорость за период времени от 1 до 10 с.

Решение. Скорость $v(t) = s'(t) = 2t + 3$. $v(1) = 5$, $v(4) = 11$, $v(10) = 23$. Средняя скорость за промежуток от 1 до 10 с. Может быть найдена как $\frac{s(10) - s(1)}{10 - 1} = \frac{131 - 5}{9} = 14$ м/с.

Пример 6.11. Найти третью производную функции $y = \ln(2x + 3)$ в точке $x = 0$.

Решение. Найдем $y' = \frac{2}{2x + 3} = 2 \cdot (2x + 3)^{-1}$.

Далее $y'' = \left(2 \cdot (2x + 3)^{-1}\right)' = 2 \cdot (-1) \cdot (2x + 3)^{-2} \cdot 2 = -2^2 \cdot (2x + 3)^{-2}$;

$y''' = \left(-4 \cdot (2x + 3)^{-2}\right)' = 8 \cdot (2x + 3)^{-3}$;

$y'''(0) = 8 \cdot 3^{-3}$.

Пример 6.12. Найти вторую производную функции $x^2 + y^2 = 4$ в точке $C(1; \sqrt{3})$.

Решение. Найдем первую производную. Получим, $2x + 2y \cdot y' = 0$,
 $y' = -\frac{x}{y}$

Еще раз дифференцируем полученное соотношение: $2 + 2y' \cdot y' + 2y \cdot y'' = 0$

Выразим вторую производную: $y'' = -\frac{(y')^2 + 1}{y} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3},$

$$y''(1) = -\frac{1+3}{3\sqrt{3}} = -\frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

6.126. $y = 2x^2 - 3x + 1, x_0 = 2;$

6.127. $y = 3 \sin 2x, x_0 = \frac{\pi}{6};$

6.128. $y = 5 \ln(1 + x^2), x_0 = 2;$

6.129. $y = \frac{2x-3}{x+1}, x_0 = 1.$

Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в данной точке x_0 .

6.130. $y = x^2 - 5x + 4, x_0 = -1;$

6.131. $y = \sqrt{x}, x_0 = 4;$

6.132. $y = \ln x, x_0 = 1;$

6.133. $y = e^{1-x^2}, x_0 = -1.$

6.134. Под каким углом график функции $y = \sin x$ пересекает ось Ox ?

6.135. Под каким углом пересекаются кривые $2y = x^2$ и $2y = 8 - x^2$?

6.136. Найти углы, образованные графиком функции $y = 4x - x^2$ и осью Ox в точках их пересечения.

В каких точках касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна указанной прямой $y = kx + b$?

6.137. $y = 4x + x^2 + 1, y = 8x - 1;$

6.138. $y = 2 \ln(x^2 + 2), y = x - 3;$

6.139. $y = 6\sqrt[3]{x^2}, y = 4x + 1.$

6.140. Зависимость пути s , пройденного телом за время t определяется законом $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t + 1$, где время измеряется в секундах, а путь в метрах. Найти скорость тела в момент времени $t = 1, t = 3$ с. И среднюю скорость за промежутки времени от 1 до 3 с.

6.141. Закон движения материальной точки $s(t) = t^2 + 3t + 1$. В какой момент времени ее скорость будет равна 15 м/с?

6.142. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = t^3 - 12t^2 + 45t + 3$. В какие моменты времени тело меняет направление движения?

Найти производные второго порядка от данных функций в точке x_0 .

6.143. $y = \arctg x, x_0 = 1;$

6.144. $y = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$;

6.145. $y = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

6.146. $y = x^2 \ln x$, $x_0 = 1$.

Найти производные второго порядка от функций в указанных точках.

6.147. $x^2 - xy + y^2 = 1$, $M(1; 0)$;

6.148. $e^y + y - x = 2$, $M(-1; 0)$.

6.149. Показать, что функция $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ удовлетворяет уравнению $y'' - 4y = 0$ при любых значениях постоянных C_1, C_2 .

Найти производные третьего порядка в точке x_0 .

6.150. $y = e^{3x+2}$, $x_0 = 0$;

6.151. $y = \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

6.152. $y = \ln 3x$, $x_0 = 1$;

6.153. $y = \sqrt[3]{1+2x}$, $x_0 = 0$.

Найти производные n -го порядка указанных функций в точке $x_0 = 0$.

6.155. $y = x^3 - 2x^2 + 4x + 6$;

6.156. $y = x^4 + 1$;

6.157. $y = e^x$;

6.158. $y = \sin x$;

6.159. $y = \cos x$;

6.160. $y = \ln(1+2x)$;

6.161. $y = \sqrt[4]{1-x}$.

6.5. Дифференциал функции. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0 , то приращение функции в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta y(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad (1),$$

где $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Главная, линейная относительно Δx , часть приращения $f'(x_0) \cdot \Delta x$ называется дифференциалом функции и обозначается dy или $df(x)$. Так как $dx = \Delta x$, можем записать $dy = f'(x) \cdot dx$.

Если $f'(x_0) \neq 0$, то при $\Delta x \rightarrow 0$ из формулы (1) получаем приближенное равенство $\Delta y(x_0, \Delta x) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x = dy$, из которого следует формула, используемая для вычисления приближенных значений функций:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (2).$$

Геометрический смысл дифференциала состоит в том, что он равен приращению ординаты касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ при заданном приращении аргумента Δx (рис. 6.2),

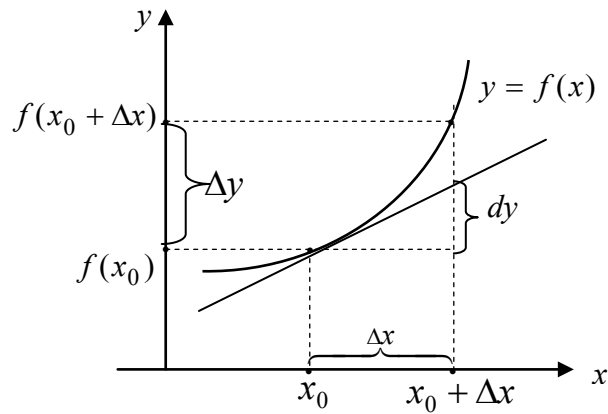


Рис. 6.2

т.е. $dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Пример 6.13. Дана функция $y = x^2 + 3x + 1$. Найти приращение функции и ее дифференциал в точке $x_0 = 4$ при Δx равном: а) 1; б) 0,5; в) 0,1. В каждом случае найти значение $|\Delta y - dy|$.

Решение. Найдем приращение и дифференциал функции в произвольной точке x_0 :

$$\Delta y(x_0, \Delta x) = ((x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) + 1) - (x_0^2 + 3x_0 + 1) = (2x_0 + 3) \cdot \Delta x + (\Delta x)^2,$$

$dy = (2x_0 + 3) \cdot \Delta x$, $|\Delta y - dy| = (\Delta x)^2$, т. е. разность между дифференциалом и приращением в данном случае равна квадрату приращения аргумента и стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$.

В точке $x_0 = 4$, $\Delta y(4, \Delta x) = 11 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$, $dy = 11 \cdot \Delta x$.

В случае $\Delta x = 1$, получим $\Delta y = 12$, $dy = 11$, $|\Delta y - dy| = 1$.

При $\Delta x = 0,5$, получим $\Delta y = 5,75$, $dy = 5,5$, $|\Delta y - dy| = 0,25$.

При $\Delta x = 0,1$, получим $\Delta y = 1,11$, $dy = 1,1$, $|\Delta y - dy| = 0,01$.

Пример 6.14. Найти дифференциал функции $y = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ в точках $x_0 = 0$,

$$x_0 = \frac{\pi}{6}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Найдем дифференциал функции в произвольной точке x_0 .

Найдем $f'(x_0) = 2 \cdot \sin \frac{x_0}{2} \cdot \cos \frac{x_0}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin x_0$. Следовательно, $dy = \frac{1}{2} \sin x_0 \cdot dx$.

При $x_0 = 0$, $dy = 0 \cdot dx = 0$, при $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $dy = \frac{1}{4} dx$, при $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $dy = \frac{1}{2} dx$.

Пример 6.15. Найти приближенно значение $\sin 28^\circ$.

Решение. Так как $\sin 30^\circ = 0,5$, возьмем в качестве x_0 угол 30° . Тогда

$\Delta x = 28^\circ - 30^\circ = -2^\circ$. Необходимо градусную меру угла перевести в радианную. $\Delta x = -2^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \approx -0,034$.

В силу формулы (2), $\sin 28^\circ \approx \sin 30^\circ + dy$. Вычислим dy .

Рассматриваемая функция $y = \sin x$, $dy = \cos x \cdot dx$. При $x_0 = \frac{\pi}{6}$,
 $dy = \cos \frac{\pi}{6} \cdot dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot dx$. Подставляя $dx = \Delta x = -0,034$, получим
 $dy = \frac{\sqrt{3}}{2}(-0,034) \approx -0,029$. Окончательно, $\sin 28^\circ \approx 0,5 - 0,029 = 0,471$.

Задачи для самостоятельного решения

6.162. Дана функция $y = x^2 + 2x$. В точке $x_0 = 2$ вычислить Δy и dy при Δx равном: а) 0,5; б) 0,1; в) 0,04. В каждом случае найти значение $|\Delta y - dy|$.

6.163. Какое приращение получает функция $y = 3x^2 - x$ при переходе независимой переменной от значения $x_0 = 1$ к значению $x = 1,04$. Найти соответствующее значение дифференциала этой функции и $|\Delta y - dy|$.

6.164. Дана функция $y = x^3 - x$. В точке $x_0 = 2$ вычислить значение Δy и dy при $\Delta x = 1$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta x = 0,01$. В каждом случае найти $|\Delta y - dy|$.

6.165. Доказать, что для линейной функции $y = ax + b$ приращение Δy и дифференциал dy равны.

6.166. Ребро куба равно 10 см. На какую величину изменится объем куба V , если его ребро увеличить на 2 мм? Найти точное значение величины ΔV и ее приближенное значение dV .

6.167. Радиус круга увеличен на 1 см. Дифференциал площади круга при этом оказался равным 16π . Найти первоначальную величину радиуса.

Найти дифференциалы указанных функций при произвольном значении аргумента x .

6.168. $8\sqrt{x}$;

6.169. $\ln x$;

6.170. $\sin x$;

6.171. 2^x ;

6.172. $2x^4$;

6.173. $\frac{2}{x^2}$;

6.174. $x \cdot \sqrt{4 - x^2}$;

6.175. $\sin x - x \cdot \cos x$;

6.176. $(1 - x^2)^3$;

6.177. $x \cdot \ln x - x + 1$;

6.178. $x \cdot \operatorname{arctg} x$

6.179. $3 \arcsin x - 4 \operatorname{arctg} x$;

6.180. $\ln(1 + 3x + 2x^2)$;

6.181. e^{-x^2} ;

6.182. $\operatorname{tg}^4 x$;

6.183. $\cos(5x)$.

Найти приближенные значения функций:

6.184. $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$, при $x = 1,98$;

6.185. $y = \cos x$, при $x = 63^\circ$;

6.186. $y = x \cdot (x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}}$, при $x = 4,1$;

6.187. $y = \sqrt{x^2 + 2x + 12}$, при $x = 3,96$;

6.188. $y = \sqrt{\frac{x+4}{x-1}}$, при $x = 5,05$.

Вычислить приближенно.

6.189. $\sqrt{65}$;

6.190. $\sqrt[3]{123}$;

6.191. $\sqrt[4]{258}$;

6.192. $\sqrt{621}$;

6.193. $\sin 88^\circ$;

6.194. $\operatorname{tg} 49^\circ$;

6.195. $\cos 2^\circ$;

6.196. $\ln(0,98)$;

6.197. $\arcsin(0,55)$;

6.198. $\operatorname{arctg}(1,1)$;

6.199. $(2,95)^4$;

6.200. $\sqrt{\frac{(2,04)^2 - 3}{(2,04)^2 + 5}}$.

6.6. Контрольные задания к главе 6

Вариант 1

1. Найти производные функций

а) $y = 3x^4 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$; б) $y = \sin^3(2x) \cos(5x^3)$; в) $y = (2x+1)^{4x}$.

2. Найти производную функции, заданной неявно, в указанной точке:
 $y^2 = 5x + y$, $M(4; -4)$.

3. Получить уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 4x + 2$ в точке $x_0 = 1$.

4. Найти производную третьего порядка функции $y = \sin^2 x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

5. Найти дифференциал функции $y = \sqrt{9 + x^2}$ в точке $x_0 = 4$ при $\Delta x = 0,2$.

Вариант 2

1. Найти производные функций

а) $y = 3x^4 + \sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}$; б) $y = \operatorname{tg}^4 x \arcsin(5x)$; в) $y = x^{\cos x}$.

2. Найти производную функции, заданной неявно, в указанной точке:
 $y^2x^2 + x = 6y$, $M(2;1)$.
3. Получить уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x-4}$ в точке $x_0 = 8$.
4. Найти производную третьего порядка функции $y = \ln(2 + x^2)$ в точке $x_0 = 0$.
5. Найти дифференциал функции $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ в точке $x_0 = 1$ при $\Delta x = 0,1$.

Вариант 3

1. Найти производные функций
 а) $y = 5x - \frac{3}{x^3} + 2\sqrt[5]{x^3} + 6$; б) $y = \operatorname{tg}^3(2x)\arccos(3x)$; в) $y = (x^2 + 1)^{\ln x}$.
2. Найти производную функции, заданной неявно, в указанной точке:
 $y + 4x = 4e^y$, $M(1;0)$.
3. Получить уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 6x + 2$ в точке $x_0 = 2$.
4. Найти производную третьего порядка функции $y = (5x - 4)^6$ в точке $x_0 = 1$.
5. Найти дифференциал функции $y = 2e^{3x} + 4x - 4$ в точке $x_0 = 0$ при $\Delta x = 0,1$.

Вариант 4

1. Найти производные функций
 а) $y = 6\sqrt{x} - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^4} - 5x^3 + 10$; б) $y = 8\cos(3x)\operatorname{arctg}(x^5)$; в) $y = (2x + 1)^{\sin x}$.
2. Найти производную функции, заданной неявно, в указанной точке:
 $3y = 1 + xy^3$, $M(2;1)$.
3. Получить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{2x-2}{x+2}$ в точке $x_0 = 2$.
4. Найти производную третьего порядка функции $y = x + \operatorname{arctg}x$ в точке $x_0 = 1$.
5. Найти дифференциал функции $y = x \ln x$ в точке $x_0 = 1$ при $\Delta x = -0,2$.

Вариант 5

1. Найти производные функций
 а) $y = \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x} + 7x^2 - 2\sqrt[4]{x^3} + 3$; б) $y = 10\sin(7x)\operatorname{arctg}(x^2)$; в) $y = x^{\sqrt{x}}$.
2. Найти производную функции, заданной неявно, в указанной точке:
 $xy^2 = y^3 + 4x - 7$, $M(2;1)$.

- Получить уравнение касательной к графику функции $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 3$ в точке $x_0 = 1$.
- Найти производную третьего порядка функции $y = x^2 \ln x$ в точке $x_0 = 1$.
- Найти дифференциал функции $y = 3e^x + 2x - 1$ в точке $x_0 = 0$ при $\Delta x = -0,1$.

Вариант 6

- Найти производные функций
а) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 5} + \frac{4}{(x-1)^2}$; б) $y = \cos(3x) \ln(2x + 3)$; в) $y = (\arctg x)^{\sin x}$.
- Найти производную функции, заданной неявно, в указанной точке:
 $x^2 + y^3 = 5$, $M(2;1)$.
- На графике функции $y = x^3 - 4x^2 + 6x + 2$ найти точки, в которых касательная параллельна прямой $y = x + 9$.
- Найти производную n -го порядка функции $y = e^{5x}$.
- Найти приближенно с помощью дифференциала значение $\sqrt[3]{63,5}$.

Вариант 7

- Найти производные функций
а) $y = \sqrt[3]{(x-3)^2} - \frac{4}{x^2 + 2}$; б) $y = e^{-2x} \cdot \sin(3x)$; в) $y = (\cos x)^{x^2}$.
- Найти производную функции, заданной неявно, в указанной точке:
 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$, $M(9;4)$.
- На графике функции $y = 2x^2 - 3x + 1$ найти точки, в которых касательная параллельна прямой $y = 5x - 3$.
- Найти производную n -го порядка функции $y = \sin(3x)$.
- Найти приближенно с помощью дифференциала значение $\operatorname{tg}(48^\circ)$.

Вариант 8

- Найти производные функций
а) $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{(x+3)^3}$; б) $y = (x^2 + 3) \ln(3x + 2)$; в) $y = (x + 2)^{\ln x}$.
- Найти производную функции, заданной неявно, в указанной точке:
 $y + x^2 y^2 = 6$, $M(1;2)$.
- На графике функции $y = 2\operatorname{tg} x$ найти точки, в которых касательная параллельна прямой $y = x + 3$.
- Найти производную n -го порядка функции $y = \ln(2x + 3)$.
- Найти приближенно с помощью дифференциала значение $(2,1)^{10}$.

Вариант 9

1. Найти производные функций

а) $y = \sqrt[4]{(x+2)^3} - \frac{3}{1-x^2}$; б) $y = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} \cdot \ln(3x+5)$; в) $y = (\arcsin x)^{3x}$.

2. Найти производную функции, заданной неявно, в указанной точке:
 $xy + 2 = 2 \cos y$, $M(2; 0)$.

3. На графике функции $y = \frac{3x+1}{3x-2}$ найти точки, в которых касательная параллельна прямой $y = 2 - 9x$.

4. Найти производную n -го порядка функции $y = \cos(2x)$.

5. Найти приближенно с помощью дифференциала значение $\sqrt[4]{620}$.

Вариант 10

1. Найти производные функций

а) $y = \sqrt[4]{x^2 + 6x + 10} + \frac{5}{(x-4)^5}$; б) $y = (x^2 - 3x + 11)e^{-2x}$; в) $y = (3x-1)^{\operatorname{tg} x}$.

2. Найти производную функции, заданной неявно, в указанной точке:
 $y^2 = x + \ln\left(\frac{y}{x}\right)$, $M(1; 1)$.

3. На графике функции $y = 3x^2 - 5x - 11$ найти точки, в которых касательная параллельна прямой $y - x + 10 = 0$.

4. Найти производную n -го порядка функции $y = \frac{3}{(2x+1)}$.

5. Найти приближенно с помощью дифференциала значение $(1,9)^8$.

Глава 7. Приложения производной

7.1. Теоремы о среднем значении. Формула Тейлора

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$: 1) непрерывна на отрезке $[a; b]$, 2) дифференцируема в интервале $(a; b)$, 3) $f(a) = f(b)$, то найдется такая точка $c \in (a; b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$: 1) непрерывна на отрезке $[a; b]$, 2) дифференцируема в интервале $(a; b)$, то найдется точка $c \in (a; b)$, в которой $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Теорема Коши. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$: 1) непрерывны на отрезке $[a; b]$, 2) дифференцируемы в интервале $(a; b)$, причем $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a; b)$, то найдется такая точка $c \in (a; b)$, в которой

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Формула Тейлора. Если функция $f(x)$ имеет производные до $(n + 1)$ -го порядка включительно в интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, то для всех x из этого интервала справедлива формула Тейлора (порядка n)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

где

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) - \text{остаточный член в форме}$$

Лагранжа. Формула Тейлора в точке $x_0 = 0$ называется *формулой Маклорена*.

Пример 7.1. Выяснить, удовлетворяет ли функция $y = x^2 + x - 3$ условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[-2; 2]$. Если да, то найти точку с отрезка, в которой выполняется теорема.

Решение. Так как функция $y = x^2 + x - 3$ непрерывна и дифференцируема на всей числовой прямой, к ней применима теорема Лагранжа на любом отрезке. $y'(x) = 2x + 1$, $y(2) = 3$, $y(-2) = -1$. По теореме Лагранжа найдется точка $c \in (-2; 2)$ такая, что $y'(c) = 2c + 1 = \frac{y(2) - y(-2)}{2 - (-2)} = \frac{3 + 1}{4} = 1$.

Отсюда получим $c = 0$.

Пример 7.2. Написать формулу Тейлора 2-го порядка для функции $y = \frac{x}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Найдем $y'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$; $y''(x) = 2(x-1)^{-3}$. Найдем значения $y(2)$, $y'(2)$ и $y''(2)$. $y(2) = 2$; $y'(2) = -1$; $y''(2) = 2$. Подставляя полученные значения в формулу Тейлора, получим

$$\frac{x}{x-1} = 2 - (x-2) + 2(x-2)^2 + R_3(x),$$

где $R_3(x) = \frac{y'''(\xi)}{6}(x-2)^3$ – остаточный член в форме Лагранжа, $\xi \in (x_0; x)$.

Задачи для самостоятельного решения

- 7.1. Написать формулу Лагранжа для функции $y = \sqrt{x}$ на отрезке $[1; 4]$ и найти значение c .
- 7.2. Применима ли теорема Ролля к функции $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-1; 1]$?
- 7.3. Выяснить, применима ли теорема Ролля к функции $y = x^2 - 5x + 7$ на отрезке $[1; 4]$.
- 7.4. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y = \ln \sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.
- 7.5. Написать формулу Лагранжа и найти соответствующее значение c для функций а) $y = \ln x$ на отрезке $[1; 2]$; б) $y = \arcsin x$ на отрезке $[0; 1]$.
- 7.6. Написать формулу Коши и найти соответствующее значение c для функций а) $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ на отрезке $[1; 4]$.
- 7.7. В какой точке касательная к графику функции $y = 4 - x^2$ параллельна хорде, соединяющей точки $A(-2; 0)$ и $B(1; 3)$.
- 7.8. Написать формулу Лагранжа для функции $y = \arcsin(2x)$ на отрезке $[x_0; x_0 + \Delta x]$.
- 7.9. Показать, что уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ не может иметь двух различных корней в интервале $(0; 1)$.
- 7.10. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ в точке $x_0 = -1$.
- 7.11. Для многочлена $x^4 + 4x^2 - x + 3$ написать формулу Тейлора 2-го порядка в точке $x_0 = 1$.
- 7.12. Написать формулу Маклорена 3-го порядка для функции $y = \arcsin x$.
- 7.13. Написать формулу Маклорена 4-го порядка для функций а) $y = e^x$; б) $y = \sin x$; в) $y = \cos x$; г) $y = \ln(1+x)$; д) $y = (1+x)^{-2}$.

7.14. Используя разложение по формуле Маклорена, вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + x^3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{2x^2}.$$

7.2. Правило Лопиталья-Бернулли

Если при вычислении предела вида $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, т.е. имеет место неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$,

но при этом существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Аналогичным образом, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, т.е. имеет место неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, но при этом существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Неопределенность вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 сводятся к неопределенностям $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ путем алгебраических преобразований.

Пример 7.3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x = 0$, имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Применим правило Лопиталья-Бернулли.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

Пример 7.4. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$, имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применим правило Лопиталья-Бернулли.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \left(\text{так как неопределенность вида } \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ сохраняется, еще раз}\right.$$

$$\left.\text{используем правило Лопиталья}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Пример 7.5. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x$.

Решение. В данном примере имеется неопределенность вида $0 \cdot \infty$. В таких случаях произведение функций $f(x)g(x)$ представляют в виде дроби

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ или } \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}; \text{ после чего неопределенность приобретает вид } \left(\frac{0}{0}\right) \text{ или } \left(\frac{\infty}{\infty}\right). \text{ Тогда } \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Пример 7.6. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. В данном примере имеется неопределенность вида 1^∞ . В таких случаях, а также в случаях неопределенности вида 0^0 и ∞^0 необходимо предел искомой функции $y = f(x)^{g(x)}$ выразить через предел функции $z = \ln y$. Так

как $y = e^z$, $\lim_{x \rightarrow x_0} y = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} z}$, а

$\lim_{x \rightarrow x_0} z = \lim_{x \rightarrow x_0} \ln y = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot \ln f(x)$. Последний предел представляет собой не-

определенность вида $0 \cdot \infty$ и сводится к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

В данном примере $Z = \ln y = \ln(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \ln \cos x = \frac{\ln \cos x}{x}$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \cos x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg} x}{1} = 0. \quad \lim_{x \rightarrow 0} y = e^{\lim_{x \rightarrow 0} z} = e^0 = 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти пределы.

7.16. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^4-81};$

7.17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{2x}}{\sin x};$

7.18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos 4x};$

7.19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x^2};$

7.20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x^4 + x^3 - 2};$

7.21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{\operatorname{tg} x};$

7.22. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x};$

7.23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3};$

7.24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{2x^3};$

7.25. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}};$

7.26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x};$

7.27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 3^x}{\sin 2x};$

$$\begin{array}{lll}
7.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}; & 7.29. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos 2x}; & 7.30. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x^3}; \\
7.31. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 2x)}; & 7.32. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}; & 7.33. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x}; \\
7.34. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{6 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}; & 7.35. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 4^x}{x \sqrt{1 - x^2}}; & 7.36. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x; \\
7.37. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}; & 7.38. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right); & 7.39. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{x^{-2}}; \\
7.40. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} 3x; & 7.41. \lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right); & 7.42. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right); \\
7.43. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right); & 7.44. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right); & 7.45. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right); \\
7.46. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}; & 7.47. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}; & 7.48. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}; \\
7.49. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{3x}; & 7.50. \lim_{x \rightarrow 0} x^x; & 7.51. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{1-x}}; \\
7.52. \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{(x^2 - 1)}; & 7.53. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}.
\end{array}$$

7.3. Интервалы монотонности и экстремумы функции. Наибольшее, наименьшее значения функции на отрезке

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на интервале (a, b) , если для любых $x_2 > x_1$, $x_2, x_1 \in (a, b)$ выполняется неравенство

$$f(x_2) > f(x_1) \quad (f(x_2) < f(x_1)).$$

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a, b) .

Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ этой точки, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Точки минимума и максимума функции называются ее точками экстремума.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, то производная функции в этой точке равна нулю либо не существует.

Точки, в которых производная функции равна нулю либо не существует, называются *критическими точками*.

Первое достаточное условие экстремума функции. Пусть x_0 – критическая точка функции $y = f(x)$ и $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , за исключением, быть может, самой точки x_0 . Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$.

Если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.

Если производная $f'(x)$ одного знака слева и справа от точки x_0 , точка x_0 не является точкой экстремума.

Второе достаточное условие экстремума функции. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и $f'(x_0) = 0$, то при условии $f''(x_0) > 0$ точка x_0 является точкой минимума функции, при условии $f''(x_0) < 0$ точка x_0 является точкой максимума функции. В случае $f''(x_0) = 0$ требуется дополнительное исследование.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то ее наибольшее (наименьшее) значение на данном отрезке достигается либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на концах отрезка.

Пример 7.7. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = x^2 - 4x - 2 \ln(x - 2) + 8$ и исследовать ее на экстремум.

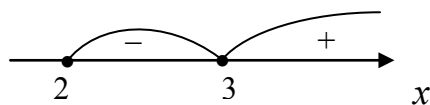
Решение. Для решения задачи необходимо

а) найти область определения функции: $x - 2 > 0$, следовательно, функция определена в интервале $(2; +\infty)$;

б) найти ее критические точки, т.е. точки, в которых производная равна нулю или не существует. С этой целью вычисляем производную и приравниваем ее к нулю: $y' = 2x - 4 - \frac{2}{x-2} = 0$. Получим, что производная равна нулю при

$x = 3$ и $x = 1$, но последняя точка не принадлежит области определения функции. Так как производная определена всюду в области определения функции, у функции есть одна критическая точка $x = 3$;

в) на числовую ось нанести область определения функции и ее критические точки. В полученных интервалах определить знаки производной.



Окончательно получаем: функция убывает на интервале $(2; 3)$, возрастает на интервале $(3; +\infty)$, в точке $x = 3$ производная меняет знак с « $-$ » на « $+$ », следовательно, эта точка является точкой минимума функции, а минимум функции равен $y(3) = 5$.

Пример 7.8. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 5$ на отрезке $[1; 4]$.

Решение. Найдем критические точки функции, принадлежащие отрезку $[1; 4]$, для чего производную функции приравняем к нулю.

$y' = 3x^2 - 6x = 0$. Получим, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ (эта точка не принадлежит данному интервалу).

Поскольку наибольшее, наименьшее значения функции достигаются либо в критических точках, либо в границах интервала, необходимо найти значение функции в этих точках и выбрать из них наибольшее и наименьшее: $f(1) = 3$, $f(4) = 21$, $f(2) = 1$. Следовательно, наибольшее значение функции равно 21 и достигается в точке $x = 4$, наименьшее значение равно 1 и достигается в точке $x = 2$.

Пример 7.9. Из куска жести размером 16×30 см необходимо изготовить коробку (без крышки) наибольшего объема, вырезая равные квадраты по углам листа и затем загибая их для образования боковых стенок коробки. Найти размеры коробки.

Решение.

Площадь основания коробки будет равна $S = (16 - 2x)(30 - 2x)$, а высота равна x , где x — сторона вырезаемого квадрата (рис. 7.1). Тогда объем $V = S \cdot x = (16 - 2x)(30 - 2x)x$. Исследуем функцию V на экстремум, учитывая, что $0 < x < 8$. Найдем производную

$V' = 12x^2 - 184x + 480 = 0$. Получим $x_1 = \frac{10}{3}$, $x_2 = 12$,

но 12 больше 8. Точка $\frac{10}{3}$ является точкой максимума функции V , так как

$V''\left(\frac{10}{3}\right) = -104 < 0$. Стороны основания коробки — $\frac{28}{3}$ и $\frac{70}{3}$, высота равна $\frac{10}{3}$.

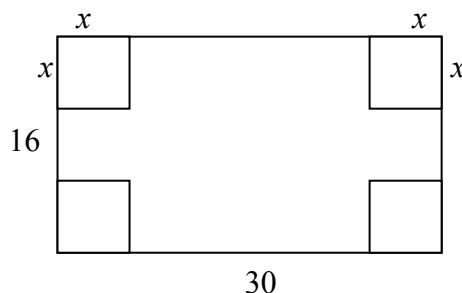


Рис. 7.1

Задачи для самостоятельного решения

Найти интервалы возрастания и убывания функций.

- 7.54. $y = x^2 - 6x + 8$; 7.55. $y = x^3 - 9x^2 - 21x + 1$; 7.56. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;
 7.57. $y = x^4 - 2x^3 + 5$; 7.58. $y = x \cdot e^{-x}$; 7.59. $y = e^{-x^2}$;
 7.60. $y = 2^x + 4^{-x}$; 7.61. $y = 2x - e^{2x}$; 7.62. $y = x \ln x$;

$$\begin{array}{lll}
7.63. y = \frac{2x}{1+x^2}; & 7.64. y = (x-3)^4(x+1)^3; & 7.65. y = \frac{x}{\ln x}; \\
7.66. y = x\sqrt{2x-x^2}; & 7.67. y = 2x^2 - \ln 2x; & 7.68. y = x^3 + x; \\
7.69. y = \operatorname{arctg} x - x.
\end{array}$$

Исследовать функции на экстремум.

$$\begin{array}{lll}
7.70. y = x^2 - 4x + 5; & 7.71. y = 3 + 8x - 2x^2; & 7.72. y = 3x^4 - 4x^3 + 3; \\
7.73. y = 32x - x^4; & 7.74. y = x^3 - 9x^2 + 15x - 2; & 7.75. y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 1; \\
7.76. y = x\sqrt{1-x^2}; & 7.77. y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}; & 7.78. y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}; \\
7.79. y = x^2 \cdot \sqrt[3]{7-x}; & 7.80. y = \sqrt{2x-6}; & 7.81. y = x + \sqrt{x^2 + 1}; \\
7.82. y = e^{4x-x^2}; & 7.83. y = e^x + e^{-x}; & 7.84. y = 2e^{-x^2}; \\
7.85. y = 3x \cdot e^{-x^2}; & 7.86. y = e^x \sin x; & 7.87. y = 2^{\cos x}; \\
7.88. y = \frac{\ln x}{x}; & 7.89. y = x - \ln(1+x); & 7.90. y = x - \ln(1+x^2); \\
7.91. y = \ln x - 2\operatorname{arctg} x; & 7.92. y = \frac{x}{x^2 + x + 1}; & 7.93. y = \frac{x^4 - 1}{x^2}; \\
7.94. y = \frac{2x^2 - 1}{x^4}; & 7.95. y = 3x^{\frac{2}{3}} - x.
\end{array}$$

Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанных отрезках.

$$\begin{array}{ll}
7.96. y = x^3 - 9x^2 + 15x + 1, \quad [-2; 6]; & 7.97. y = x^3 - 3x^2 - 3, \quad [1; 4]; \\
7.98. y = x^2(x-2), \quad [1; 2]; & 7.99. y = 4x^4 - 2x^2 + 2, \quad [0; 2]; \\
7.100. y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3, \quad [-2; 3]; & 7.101. y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5, \quad [-2; 2]; \\
7.102. y = x^2 - 4x + 3, \quad [0; 3]; & 7.103. y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}, \quad [1; 5]; \\
7.104. y = \frac{2x}{x-x^2-1}, \quad [0; 2]; & 7.105. y = \frac{x^3}{x^2-3}, \quad [2; 4]; \\
7.106. y = \frac{x^3 + 2x^2}{x-2}, \quad [-1; 1]; & 7.107. y = x - 2\sqrt{x}, \quad [0; 4]; \\
7.108. y = 4x + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2, \quad \left[\frac{1}{9}; 1\right]; & 7.109. y = \sqrt[3]{x^5} - \sqrt[3]{x^2} + 1, \quad [-1; 0];
\end{array}$$

$$7.110. y = \sqrt{x^2 - 6x + 16}, \quad [0; 6];$$

$$7.111. y = \ln 2x - x^2 + x, \quad \left[\frac{1}{2}; 2 \right];$$

$$7.112. y = \sin 2x - x, \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right];$$

$$7.113. y = 2x - \operatorname{tg} x, \quad \left[0; \frac{\pi}{3} \right];$$

$$7.114. y = 2 \sin x - \cos 2x, \quad \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right].$$

Доказать справедливость неравенств в указанных интервалах.

$$7.115. e^x \geq x + 1, \quad x \in R;$$

$$7.116. \ln(1 + x) < x, \quad x > 0;$$

$$7.117. \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x \in R;$$

$$7.118. \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad x > 0.$$

7.119. Число 12 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

7.120. Число 16 представить в виде произведения двух множителей так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

7.121. Найти отношение радиуса R к высоте H цилиндра объема $V = 4\pi$, при котором его полная поверхность будет наименьшей.

7.122. На параболе $y = x^2$ найти точку наименее удаленную от прямой $y = 2x - 4$.

7.123. Из круга радиуса R вырезают сектор, содержащий угол α , а затем сектор свертывают в конус с образующей, равной R . При каком значении угла α объем конуса будет наибольшим?

7.124. Консервная банка данного объема $V = 250\pi$ л³ должна иметь форму цилиндра. Каковы должны быть ее размеры (высота H и диаметр D) чтобы на ее изготовление ушло наименьшее количество жести?

7.125. Какими должны быть размеры открытого бассейна с квадратным дном и объемом 32 м³, чтобы на облицовку плиткой стен и дна бассейна ушло наименьшее количество материала?

7.4. Выпуклость (вогнутость) графика функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* на интервале (a, b) , если дуга кривой на этом интервале расположена ниже касательной, проведенной к графику функции в любой точке $x \in (a, b)$. Если на интервале (a, b) любая касательная располагается ниже дуги кривой графика функции, то он называется *вогнутым* на данном интервале.

Точка $(x_0, f(x_0))$, в которой выпуклость меняется на вогнутость или наоборот, называется *точкой перегиба*.

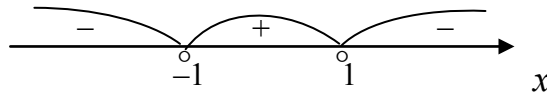
Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции.

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и для всех $x \in (a, b)$ $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то функция выпукла (вогнута) на интервале (a, b) .

Достаточное условие точки перегиба. Если в точке x_0 вторая производная $f''(x_0) = 0$ или не существует и при этом при переходе через точку x_0 меняет знак, то точка x_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$.

Пример 7.10. Найти интервалы выпуклости, вогнутости функции $y = \ln(1 + x^2)$ и точки перегиба.

Решение. Найдем вторую производную функции: $y' = \frac{2x}{1+x^2}$,
 $y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. Вторая производная существует при всех x и равна нулю при $x = \pm 1$. Нанесем на числовую ось точки $x = \pm 1$ и определим на полученных интервалах знаки второй производной.



Функция выпукла на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ и вогнута на промежутке $(-1; 1)$. В точках $x = \pm 1$ вторая производная функции равна нулю и меняет знак, следовательно, эти точки являются точками перегиба.

Задачи для самостоятельного решения

Найти интервалы выпуклости, вогнутости точки перегиба кривых.

7.126. $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$;

7.127. $y = x^4 - 6x^2 + x$;

7.128. $y = 3x^5 - 5x^4 + 2x + 3$;

7.129. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$;

7.130. $y = \frac{2x^2 + 4}{x^2 - 4}$;

7.131. $y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$;

7.132. $y = x^{-4} - 8x^{-2}$;

7.133. $y = \frac{x^4 - x + 1}{x^3 - 1}$;

7.134. $y = xe^{-x^2}$;

7.135. $y = (x + 1)e^{-x}$;

7.136. $y = x^2 + 2 \ln x$;

7.137. $y = \frac{\ln x}{x}$;

7.138. $y = \ln(x^2 - 1)$;

7.139. $y = x^2 \ln x$;

7.140. $y = 4 - \sqrt[3]{x-1}$;

7.141. $y = 2 + \sqrt[5]{(x-4)^3}$;

7.142. $y = x + 8\sqrt[4]{x^3}$;

7.143. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

7.5. Асимптоты. Построение графиков функций

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x, f(x))$ до данной прямой стремится к нулю при удалении точки M в бесконечность.

Если существуют конечные пределы $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$, то прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции при $x \rightarrow +\infty$. Если существуют аналогичные пределы $x \rightarrow -\infty$, то прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции при $x \rightarrow -\infty$. Следует отметить, что асимптоты при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$ могут быть различными.

Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке x_0 равен бесконечности.

Для исследования функции и построения ее графика может использоваться следующая схема:

- 1) найти область определения функции;
- 2) определить четность (нечетность) функции, ее периодичность;
- 3) найти точки разрыва функции, ее вертикальные асимптоты;
- 4) найти точки пересечения с осями координат;
- 5) найти интервалы возрастания, убывания функции и ее экстремумы;
- 6) найти интервалы выпуклости, вогнутости функции, точки перегиба;
- 7) найти наклонные асимптоты графика функции;
- 8) построить график функции.

Пример 7.11. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} = +\infty$, а $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} = -\infty$, получаем, что прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой.

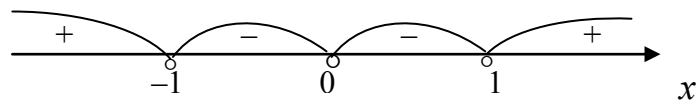
Найдем наклонные асимптоты. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 2 = k$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$. Так как пределы равны при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$, то в обоих случаях наклонной асимптотой является $y = 2x + 1$.

Пример 7.12. Исследовать функцию $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ и построить ее график.

Решение.

- 1) Область определения $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
- 2) Так как $f(-x) = \frac{x^2 + 1}{-x} = -f(x)$, функция является нечетной.
- 3) Так как $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 + 1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^2 + 1}{x} = -\infty$, точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода, а прямая $x = 0$ — вертикальной асимптотой. В остальных точках функция непрерывна.
- 4) $f'(x) \neq 0$ ни при каких x . Точки пересечения с осью Ox отсутствуют, так как при $x = 0$ функция не определена.
- 5) Найдем производную функции: $y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. Производная равна нулю при $x = \pm 1$ и не определена при $x = 0$. Нанесем эти точки на ось Ox и определим знаки производной на полученных интервалах. Получим, что функция возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, убывает на интервалах $(-1; 0)$, $(0; 1)$, точка $x = -1$ является точкой максимума функции, $f(-1) = -2$, точка $x = 1$ является точкой минимума, $f(1) = 2$.



- 6) Найдем вторую производную: $y'' = 2x^{-3}$. Вторая производная не определена при $x = 0$ и нигде не равна нулю. Так как $y''(x) < 0$ при $x < 0$ и $y''(x) > 0$ при $x > 0$, делаем заключение, что на интервале $(-\infty; 0)$ функция выпукла, на интервале $(0; +\infty)$ — вогнута, точка $x = 0$ является точкой перегиба.
- 7) Найдем наклонные асимптоты: $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1$,
 $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$. Следовательно, уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = x$.
- 8) Используя полученные сведения, строим график функции (рис. 7.2).

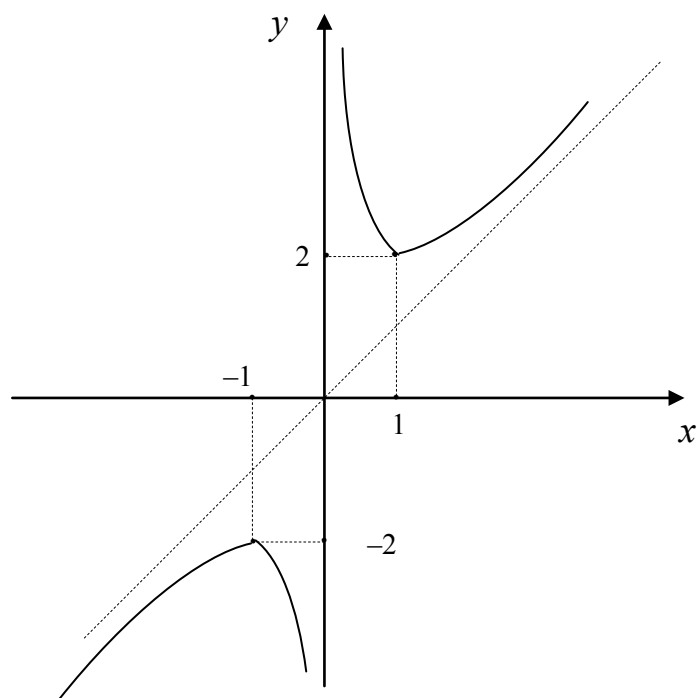


Рис. 7.2

Задачи для самостоятельного решения

Найти асимптоты кривых.

7.144. $y = \frac{x+2}{x-1}$;

7.145. $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x-2}$;

7.146. $y = \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 1}$;

7.147. $y = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$;

7.148. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$;

7.149. $y = \sqrt{x^2 - x}$;

7.150. $y = xe^x$;

7.151. $y = \frac{\ln x}{x}$.

Построить графики функций.

7.152. $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

7.153. $y = \frac{x}{1+x^2}$;

7.154. $y = \frac{2x}{1-x^2}$;

7.155. $y = x + \frac{1}{x}$;

7.156. $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$;

7.157. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$;

7.158. $y = \frac{3-x^2}{x+2}$;

7.159. $y = x^5 - 5x^3$;

7.160. $y = \frac{x^3 - 3x}{x^3 - 1}$;

7.161. $y = \frac{3x^3}{x^2 - 3}$;

7.162. $y = \frac{4}{1+x^2}$;

7.163. $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$;

7.164. $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$;

7.165. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$;

7.166. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$;

$$\begin{array}{lll}
7.167. y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}; & 7.168. y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}; & 7.169. y = x\sqrt{1-x}; \\
7.170. y = xe^{-x}; & 7.171. y = e^{2x-x^2}; & 7.172. y = e^{\frac{x^2}{2}}; \\
7.173. y = xe^{-x^2}; & 7.174. y = xe^{\frac{1}{x}}; & 7.175. y = (x-2)e^{\frac{1}{x}}; \\
7.176. y = \frac{\ln x}{x}; & 7.177. y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); & 7.178. y = x^2 \ln x; \\
7.179. y = x \ln x; & 7.180. y = x - 3 \ln x; & 7.181. y = \ln(x^2 + 1); \\
7.182. y = x - \arctg x; & 7.183. y = \sin^4 x + \cos^4 x; & 7.184. y = x \arctg x;
\end{array}$$

7.6. Применение производной в задачах с экономическим содержанием

Введем обозначения: x – количество произведенной и проданной продукции, $R(x)$ – выручка от реализации этой продукции, $C(x)$ – соответствующие этому выпуску издержки, $P(x) = R(x) - C(x)$ – полученная при этом прибыль, $p(x)$ – цена единицы продукции. Функцию спроса будем записывать в виде $p = f(x)$ или $x = \varphi(p)$.

Предельные издержки обозначаются $MC(x)$ и равны дополнительным издержкам, необходимым для производства одной дополнительной единицы продукции, т.е.

$$MC(x) = \Delta C(x) = C(x+1) - C(x) \approx dC = C'(x).$$

В связи с этим будем считать, что $MC(x) = C'(x)$, т.е. предельные издержки равны производной от функции издержек.

Аналогичным образом определяются предельные прибыль $P'(x)$ и выручка $R'(x)$, которые определяют, соответственно, прибыль и выручку от производства и продажи одной дополнительной единицы продукции.

Если прибыль при некотором значении x_0 максимальна, то $P'(x_0) = R'(x_0) - C'(x_0) = 0$, откуда следует, что $R'(x_0) = C'(x_0)$. Таким образом максимум прибыли достигается при количестве x_0 произведенной продукции, для которого предельная выручка равна предельным издержкам.

Эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительного приращения функции $\frac{\Delta y}{y}$ к относительному приращению аргумента

$$\frac{\Delta x}{x} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0, \text{ т.е.}$$

$$E_y(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Эластичность функции в точке x показывает, на сколько процентов изменится значение функции при изменении аргумента на 1%. Функция эластична в точке x , если $|E_y(x)| > 1$ и неэластична, если $|E_y(x)| < 1$.

Пример 7.13. Функция спроса на некоторый продукт задана уравнением $p = \sqrt{400 - x}$, $0 \leq x \leq 400$. На сколько изменится выручка, если объем продаж увеличится с 256 до 257 единиц? Сравнить эту величину с предельной выручкой.

Решение. Выручка $R(x) = xp = x\sqrt{400 - x}$.

$\Delta R = R(257) - R(256) = 257\sqrt{400 - 257} - 256\sqrt{400 - 256} \approx 1,27$. Предельная вы-

ручка равна $\frac{dR}{dx} = \sqrt{400 - x} - \frac{x}{2\sqrt{400 - x}}$. При $x = 256$ получим

$\frac{dR(256)}{dx} \approx 1,33$. Сравнивая ΔR и $\frac{dR}{dx}$, получим $\left| \Delta R - \frac{dR}{dx} \right| = 0,06$.

Пример 7.14. Предприятие быстрого питания выпекает пирожки. Выручка от продажи x пирожков за неделю равна $R(x) = \frac{1}{20000}(60000x - x^2)$, а издержки составляют $C(x) = 5000 + 0,56x$, $0 \leq x \leq 56000$. Сколько пирожков в неделю необходимо выпекать, чтобы прибыль была максимальной? Вычислить прибыль при $x = 20000$, $x = 30000$, $x = 40000$ и сравнить с максимальной.

Решение. $P = R - C$; $\frac{dP}{dx} = \frac{dR}{dx} - \frac{dC}{dx} = 3 - \frac{x}{10000} - 0,56 =$

$= 2,44 - \frac{x}{10000} = 0$, откуда $x = 24400$. Так как $\frac{d^2P}{dx^2}(24400) = -\frac{1}{10000} < 0$, заключаем, что точка $x = 24400$ является точкой максимума прибыли P . Прибыль при этом составит 24768. При $x = 20000$ прибыль равна 23800, при $x = 30000$ прибыль равна 23200, а при $x = 40000$ прибыль равна 12600.

Пример 7.15. Издержки компании в евро при производстве x единиц продукции заданы функцией $C(x) = 800 + 0,4x + 0,0002x^2$. При каком объеме производства x средние издержки будут наименьшими.

Решение. Средние издержки $\bar{C}(x)$ находятся, как полные издержки $C(x)$, отнесенные к объему x произведенной продукции, т.е.

$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{800}{x} + 0,4 + 0,0002x$. Исследуем эту функцию на экстремум.

$\frac{d\bar{C}}{dx} = -\frac{800}{x^2} + 0,0002 = 0$, $x^2 = 4 \cdot 10^6$, $x = 2000$.

Так как $\frac{d^2\bar{c}}{dx^2}(2000) = \frac{1600}{(2000)^3} > 0$, заключаем, что при $x = 2000$ средние

издержки будут наименьшими и составят 1,2 евро на единицу продукции.

Пример 7.16. Функция спроса задана уравнением $p = 30 - 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 196$.

- а) Найти интервалы, на которых спрос эластичен, неэластичен и точку, в которой он имеет единичную эластичность.
 б) Найти промежутки, на которых выручка R возрастает и убывает сопоставить результаты с результатами пункта а).

Решение. Ценовая эластичность спроса

$$E_x(p) = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta x / x}{\Delta p / p} = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} = \frac{p/x}{dp/dx}; \quad (\text{будем рассматривать эластичность, как}$$

функцию от x).

$$\text{а) } E_x(p) = \frac{30 - 2\sqrt{x}}{x} : \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{2\sqrt{x} - 30}{\sqrt{x}}. \quad \text{Спрос имеет единичную эластич-}$$

ность, если $|E_x(p)| = 1$; $\left|\frac{2\sqrt{x} - 30}{\sqrt{x}}\right| = 1$, так как $0 \leq x \leq 196$, получим $\sqrt{x} = 10$,

$x = 100$. При $x < 100$, $|E_x(p)| > 1$, т.е. спрос эластичен; при $x > 100$, $|E_x(p)| < 1$, т.е. спрос неэластичен.

- б) Выручка $R(x) = xp = 30x - 2x\sqrt{x}$. $R'(x) = 30 - 3\sqrt{x} = 0$, $\sqrt{x} = 10$, $x = 100$. При $x < 100$, $|R'(x)| > 0$, следовательно, выручка возрастает. При $x > 100$, $|R'(x)| < 0$ она убывает. Точка $x = 100$ является точкой максимума выручки. Таким образом, в области, в которой спрос эластичен увеличение объема производства ведет к увеличению выручки, а в области, где он неэластичен, наоборот, к ее снижению.

Пример 7.17. Найти эластичность функции $y = \frac{20+x}{10+2x}$ в точке $x = 10$.

На сколько процентов изменится значение функции в этой точке, если аргумент увеличить: а) на 1%; б) на 4% ?

Решение. Найдем эластичность функции

$$E_y(x) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x(10+2x)}{(20+x)} \cdot \frac{-30}{(10+2x)^2} = \frac{-30x}{(20+x)(10+2x)}; \quad E_y(10) = -\frac{1}{3}.$$

Следовательно, если значение аргумента увеличится на 1%, то значение функции уменьшится на $\frac{1}{3}\%$; если значение аргумента увеличится на 4%, то значе-

ние функции уменьшится на $-\frac{4}{3}\%$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти объем продукции x , при котором выручка R будет наибольшей.

7.185. $R = 800x - 0,2x^2$;

7.186. $R = 48x^2 - 0,02x^3$;

7.187. $R = 400x - x^2$;

7.188. $R = 30x^{\frac{2}{3}} - 2x$.

Найти объем продукции x , при котором средние издержки \bar{C} на единицу продукции наименьшие.

7.189. $C = 1,25x^2 + 25x + 500$;

7.190. $C = 0,001x^3 + 5x + 250$;

7.191. $C = 2x^2 + 255x + 80000$;

7.192. $C = 0,002x^3 + 55x + 4000$;

7.193. Функция спроса для некоторого товара имеет вид $p = 1000 - 0,5x^2$, где x – количество единиц произведенного и проданного товара, p – цена одной единицы при данном уровне производства x . Общие издержки заданы функцией $C(x) = 400x + 1000$. При каком объеме выпуска продукции прибыль будет максимальной? Какова при этом цена одного изделия и средние издержки?

7.194. Компания производит игрушки. Выручка и издержки заданы соответственно функциями $R(x) = 500x - \frac{x^2}{20}$, $C(x) = 75000 + 2x$, где x – число игрушек, произведенных за неделю. При каком объеме выпуска продукции прибыль будет наибольшей?

7.195. Функция спроса для некоторого товара имеет вид $p = \frac{50}{\sqrt{x}}$, $0 \leq x \leq 8000$, где p – цена единицы товара, x – количество товара, а издержки равны $C(x) = 0,5x + 500$. Найти: а) максимальную прибыль; б) предельную прибыль в точках $x = 900$, $x = 1600$, $x = 2500$, $x = 3600$.

7.196. Выручка от сдачи в аренду x единиц площади определяется функцией $R(x) = 2x(900 + 32x - x^2)$. Найти: а) дополнительный доход при увеличении арендуемой площади с 14 до 15 единиц; б) предельный доход при $x = 14$. Сравнить результаты пунктов а) и б).

Найти ценовую эластичность спроса в указанной точке и установить, будет ли спрос в этой точке эластичным, неэластичным или же он равен единице.

7.197. $p = 400 - 5x$, $x = 20$;

7.198. $p = 20 - 0,0002x$, $x = 30$;

7.199. $p = \frac{500}{x+3}$, $x = 20$;

7.200. $p = \frac{100}{x^2} + 2$, $x = 10$;

7.201. $p = 100 - \sqrt{0,2x}$, $x = 125$.

7.202. Функция спроса имеет вид $x = p^2 - 20p + 120$. Найти, на сколько процентов изменится спрос, если цена, равная 2 \$, увеличится а) на 1%; б) на 5%.

Найти эластичность функций в указанных точках.

7.203. $y = 3x^5 + 12$, $x = 1$, $x = 2$; **7.204.** $y = \frac{2+3x}{5x+5}$, $x = 1$, $x = 2$;

7.205. $y = 3e^{2x}$, $x = 0$, $x = 1$; **7.206.** $y = 5\sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$;

7.207. $y = 3 \ln x$, $x = e$, $x = e^2$.

Найти эластичность функций.

7.208. $y = ax + b$; **7.209.** $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; **7.210.** $y = ax^n$.

7.7. Контрольные задания к главе 7

Вариант 1

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^5 - 32}$.
2. Найти интервалы монотонности функции $y = x^3 - 3x^2 - 36x + 1$.
3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции $y = x^2 e^{-x}$ и точки перегиба.
4. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{2+x}{1-x}$.
5. Найти цену p , которая обеспечивает максимальную прибыль, если функция издержек имеет вид $C(x) = 35x + 500$, а функция спроса $p = 50 - 0,1x$, где x – количество выпущенной продукции.

Вариант 2

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{1 - \cos 4x}$.
2. Найти интервалы монотонности функции $y = xe^{-x^2}$.
3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции $y = x^3 + 6 \ln x$ и точки перегиба.
4. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x}{x^2 - 4}$.
5. Найти цену p , которая обеспечивает максимальную прибыль, если функция издержек имеет вид $C(x) = 0,5x + 600$, а функция спроса $p = \frac{60}{\sqrt{x}}$, где x – количество выпущенной продукции.

Вариант 3

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin x}$.
2. Найти интервалы монотонности функции $y = (x+3)^2(x-2)^4$.
3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции $y = \ln(x^2 + 1)$ и точки перегиба.
4. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$.
5. Найти цену p , которая обеспечивает максимальную прибыль, если функция издержек имеет вид $C(x) = 8000 + 50x + 0,03x^2$, а функция спроса $p = 70 - 0,001x$, где x – количество выпущенной продукции.

Вариант 4

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{1 - \cos 3x}$.
2. Найти экстремумы функции $y = e^x + e^{-x}$.
3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции $y = e^{-2x^2}$ и точки перегиба.
4. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2}{x^2 - 16}$.
5. Издержки заданы функцией $C(x) = 50000 + 400x - 0,25x^2$. Найти предельные издержки при $x = 400$ и объяснить их смысл.

Вариант 5

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x^2 + 4x - 2}{x^3 - 3x + 2}$.
2. Найти экстремумы функции $y = x^3 e^{-x^2}$.
3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции $y = x^3 - 12x + 20$ и точки перегиба.
4. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 3}$.
5. Доход при производстве x единиц продукции задан функцией $R(x) = 240x - 3x^2 + 2000$. При каком объеме выпуска продукции доход будет наибольшим и чему равен при этом предельный доход?

Вариант 6

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{tg} x}$.
2. Найти экстремумы функции $y = 3e^{6x - x^2}$.
3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции

$$y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5 \text{ и точки перегиба.}$$

4. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{2x}{1-x^2}$.

5. Функция, характеризующая прибыль при производстве x единиц продукции имеет вид $P(x) = -0,25x^2 + 2000x - 1500000$. При каком значении x прибыль максимальна и чему равна при этом предельная прибыль?

Вариант 7

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x}$.

2. Найти экстремумы функции $y = x^2 \ln x$.

3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции $y = 2x + \frac{\ln x}{x}$ и точки перегиба.

4. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{2x-3}{x+1}$.

5. Найти ценовую эластичность спроса в точке $x_0 = 20$, если функция спроса имеет вид $p = \frac{500}{x^3 + 0,5}$.

Вариант 8

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 5$ на отрезке $[-1; 1]$.

3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 + 3$ и точки перегиба.

4. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{2x^2 - x + 3}{x - 1}$.

5. Найти ценовую эластичность спроса в точке $x_0 = 50$, если функция спроса имеет вид $p = 800 - 4x$.

Вариант 9

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{x^2}$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x - \sqrt{x} + 4$ на отрезке $[0; 1]$.

3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции $y = \frac{x^3}{x^2 + 12}$ и точки перегиба.

4. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{3x}{9 - x^2}$.
5. Найти эластичность функции $y = \frac{2 + 3x}{4 + x}$ в точке $x_0 = 6$.

Вариант 10

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^x}{\sin 4x}$.
2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 4x + 9}$ на отрезке $[0; 4]$.
3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции $y = 6 - \sqrt[3]{x - 4}$ и точки перегиба.
4. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$.
5. Найти эластичность функции $y = 2\sqrt[3]{x}$ в точке $x_0 = 125$.

Примерные варианты тестовых заданий

Задания к главе 1

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
1	Вычислить элемент a_{32} матрицы $A = 3C - B$, если $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.		11
2	Вычислить элемент a_{33} матрицы $A = B - 5E$, если $B = \begin{pmatrix} -10 & 3 & -9 \\ -6 & 4 & 12 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$		2
3	Найдите сумму элементов главной диагонали матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.		6
4	Найдите произведение элементов побочной диагонали матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.		40
5	Укажите размерность матрицы B , которую можно умножить как слева, так и справа на матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.	1) 2×3 ; 2) 3×2 ; 3) 3×3 ; 4) 1×3 ; 5) 3×1 .	3)
6	Укажите размерность матрицы B , которую можно умножить как слева, так и справа на матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	1) 2×3 ; 2) 3×2 ; 3) 3×3 ; 4) 1×3 ; 5) 3×1 .	2)

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
7	Найдите элемент c_{43} матрицы $C = B^T$, если $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 7 & 8 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$		9
8	Найти элемент c_{12} матрицы $C = A \cdot B$, если, $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$		16
9	Вычислить элемент b_{22} матрицы $B = A^2$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$		10
10	Вычислить элемент c_{21} матрицы $C = AA^T$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$		23
11	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. Какие из произведений существуют?	1) AB и AC ; 2) AC и CB ; 3) BC и CA ; 4) BA , AB и AC ; 5) CA , AC и BC .	3)
12	Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Какие из произведений существуют?	1) CA , AC и BA ; 2) только AC ; 3) BA и BC ; 4) BA , AC , CA и CB ; 5) AB , AC , CA и BC .	5)

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
13	Даны матрица $A_{2 \times 3}$ и $B_{3 \times 4}$. Определить размеры матрицы AB .	1) 2×3 ; 2) 3×3 ; 3) 2×4 ; 4) 4×2 ; 5) 4×3 .	3)
14	Чему равен ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$?		1
15	Чему равен ранг матрицы $C = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$?		2
16	Чему равен ранг матрицы $F = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -9 & -9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?		1
17	Вычислить определитель системы уравнений $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 30, \\ 2x_1 + 5x_2 = 1 \end{cases}$		22
18	Вычислить определитель системы уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -5x_2 + x_3 = 7, \\ 4x_3 = 6 \end{cases}$		-20
19	Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.		-30
20	При каком значении α определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ равен нулю?		7
21	При каком значении α определитель $\begin{vmatrix} 4 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ равен нулю?		2

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
22	Как изменится определитель третьего порядка, если его первый столбец умножить на 2?	1) увеличится в 8 раз; 2) увеличится в 2 раза; 3) не изменится; 4) увеличится в 6 раз; 5) увеличится в 4 раза.	2)
23	Как изменится определитель пятого порядка, если каждый его столбец умножить на 2?	1) увеличится в 10 раз; 2) увеличится в 2 раза; 3) не изменится; 4) увеличится в 5 раз; 5) увеличится в 32 раза.	5)
24	Даны системы линейных уравнений: $a) \begin{cases} x + y = 1, \\ 2x - y = 2; \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2; \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 3. \end{cases}$ Совместной определенной системой является:	1) c); 2) b); 3) a); 4) a) и b); 5) b) и c).	3)
25	Даны системы линейных уравнений: $a) \begin{cases} 2x + y = 3, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - 2y = -1, \\ -2x + 4y = 2; \end{cases} \quad c) \begin{cases} -x - y = 1, \\ 3x + 3y = 3. \end{cases}$ Совместной неопределенной системой является:	1) c); 2) b); 3) a); 4) a) и c); 5) b) и c).	2)
26	Даны системы линейных уравнений: $a) \begin{cases} 6x - 3y = 1, \\ 2x - y = 2; \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = -2; \end{cases}$ $c) \begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2. \end{cases}$ Несовместной системой является:	1) c); 2) b); 3) a); 4) a) и b); 5) b) и c).	4)

Задания к главе 2

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
1	Даны векторы: $\vec{a} = (2; 1; 3)$, $\vec{b} = (2; 1; 4)$, $\vec{c} = (1; 1; 5)$, $\vec{d} = (6; 3; 9)$. Какие из них являются коллинеарными?	1) \vec{a} , \vec{b} ; 2) \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ; 3) \vec{a} , \vec{d} ; 4) \vec{c} , \vec{d} ; 5) \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} .	3)
2	Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (3; 2; 1)$ и $\vec{b} = (0; -1; 4)$ равно:	1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 9; 5) вектору $\vec{c} = (-2; 0; 4)$.	3)
3	Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (-2; 1; 4)$ и $\vec{b} = (2; 2; -1)$ равно:	1) -6; 2) 2; 3) вектору $\vec{c} = (0; -2; 4)$; 4) 6; 5) 3.	1)
4	При каком значении x векторы $\vec{a}(x; 4)$ и $\vec{b}(2; 8)$ коллинеарны?		1
5	При каком значении y векторы $\vec{a}(-3; 6)$ и $\vec{b}(-4; y)$ ортогональны?		-2
6	Даны векторы: $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (1; 0; 2)$. Найдите вектор $2\vec{a} + \vec{b}$.	1) $(3; 4; 8)$; 2) $(2; 2; 5)$; 3) $(2; 4; 6)$; 4) $(1; 0; 6)$; 5) $(3; 2; 7)$.	1)
7	Длина вектора $\vec{c}(-3; 4)$ равна:	1) 1; 2) 7; 3) 5; 4) $2\sqrt{3}$; 5) 25.	3)
8	Длина вектора $\vec{a}(3; -5; 4)$ равна:	1) 2; 2) 0; 3) 15; 4) $5\sqrt{2}$; 5) 50.	4)
9	Угол между векторами $\vec{a}(4; 2)$ и $\vec{b}(6; 3)$ равен:	1) 0° ; 2) 90° ; 3) 45° ; 4) 180° ; 5) 360° .	1)
10	Угол между векторами $\vec{a}(-1; 4)$ и $\vec{b}(3; -12)$ ра- вен:	1) 0° ; 2) 90° ; 3) 60° ; 4) 180° ; 5) 360° .	4)

11	Угол между векторами $\vec{a}(1;-6)$ и $\vec{b}(6;3)$ равен:	1) 0° ; 2) 90° ; 3) 30° ; 4) 180° ; 5) 360° .	2)
12	Даны точки $A(3;8)$, $B(-5;4)$. Найдите координаты вектора \vec{AB} .	1) $(-2;12)$; 2) $(8;4)$; 3) $(-1;6)$; 4) $(-4;-2)$; 5) $(-8;-4)$.	5)
13	Какие из приведенных систем векторов являются линейно зависимыми: а) $\vec{a}_1 = (2; 0; -1)$, $\vec{a}_2 = (-4; 0; 2)$; б) $\vec{a}_1 = (2; 0; 0)$, $\vec{a}_2 = (0; 1; 0)$, $\vec{a}_3 = (1; 1; 0)$; в) $\vec{a}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\vec{a}_2 = (0; 1; 0; 0)$, $\vec{a}_3 = (0; 1; 0; 1)$; г) $\vec{a}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{a}_2 = (0; 1; 0)$, $\vec{a}_3 = (0; 0; 1)$.	1) a, b ; 2) a, c ; 3) b, v ; 4) a, b, v ; 5) b, c .	1)
14	Какие из приведенных систем векторов являются линейно независимыми: а) $\vec{a}_1 = (0; 0; 1; 0)$, $\vec{a}_2 = (1; 0; 2; 0)$, $\vec{a}_3 = (1; 0; 1; 0)$; б) $\vec{a}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{a}_2 = (0; 2; 0)$, $\vec{a}_3 = (1; 1; 1)$; в) $\vec{a}_1 = (2; 1; 1; 3)$, $\vec{a}_2 = (4; 2; 2; 6)$.	1) a ; 2) a, v ; 3) b ; 4) b, v ; 5) a, b, v .	3)
15	Найти ранг системы векторов $\vec{a}_1 = (5; 0)$, $\vec{a}_2 = (0; -6)$, $\vec{a}_3 = (2; 3)$.		2
16	Найти ранг системы векторов $\vec{a}_1 = (3; 0; 0)$, $\vec{a}_2 = (0; -2; 0)$, $\vec{a}_3 = (0; 0; 1)$.		3
17	Ранг системы векторов $\vec{a}_1 = (2; 0; 0)$, $\vec{a}_2 = (0; 1; 0)$, $\vec{a}_3 = (2; 3; 0)$ равен...		2

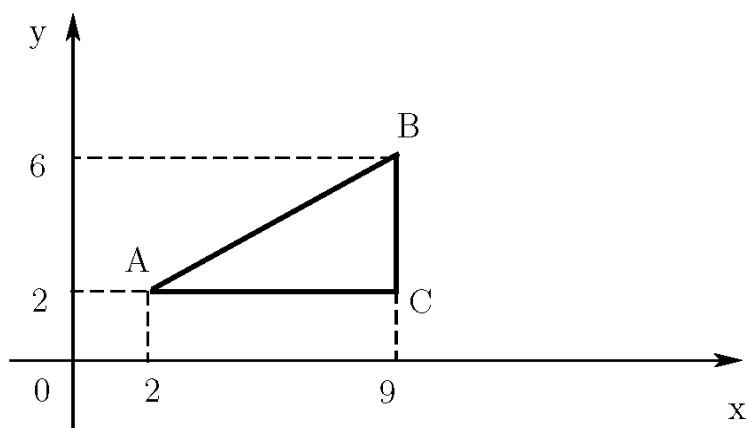
Задания к главе 3

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
1	Дан треугольник с вершинами $A(2; -4)$, $B(4; 4)$ и $C(6; 0)$. Укажите координаты середины стороны AB .	1) $(-2; -2)$; 2) $(0; 2)$; 3) $(3; 0)$; 4) $(3; 2)$; 5) $(1; 0)$.	3)
2	Дан треугольник с вершинами $A(1; 0)$, $B(2; -4)$ и $C(5; 3)$. Найдите длину стороны AC .	1) 5; 2) $5\sqrt{5}$; 3) 25; 4) 125; 5) 7.	1)
3	Дан треугольник с вершинами $A(-1; 0)$, $B(3; 2)$ и $C(1; 0)$. Найдите длину медианы BE .	1) 29; 2) $\sqrt{5}$; 3) 5; 4) $\sqrt{29}$; 5) 4.	3)
4	Дан треугольник ABC с вершинами $A(-2; 1)$, $B(-5; -1)$ и $C(3; 0)$. Составьте уравнение стороны AB .	1) $2x - 3y + 8 = 0$; 2) $3x + 2y - 9 = 0$; 3) $3y - 2x - 7 = 0$; 4) $3x - 2y + 9 = 0$; 5) $3x - 2y - 9 = 0$.	3)
5	Укажите уравнение прямой, угловой коэффициент которой равен 2, и которая пересекает ось Oy в точке с ординатой -1 .	1) $y = 2x - 1$; 2) $-2x + 3y = 0$; 3) $y = 3x - 2$; 4) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$; 5) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2}$.	1)
6	Угловой коэффициент прямой $4y - 9x + 5 = 0$ равен...	1) 2; 2) -3 ; 3) 1,5; 4) -5 ; 5) 2,25.	5)

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
7	Абсцисса точки пересечения прямой $5y - 2x + 6 = 0$ с осью Ox равна...	1) -2 ; 2) 3 ; 3) -6 ; 4) $1\frac{1}{3}$; 5) 4 .	2)
8	Уравнение прямой, пересекающей ось Ox в точке с абсциссой 2 , а ось Oy в точке с ординатой 3 имеет вид...	1) $y = 3x + 8$; 2) $8y = x + 3$; 3) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$; 4) $3x + 8y = 0$; 5) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.	3)
9	Площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$, равна...	1) 36 ; 2) $4,5$; 3) 9 ; 4) 10 ; 5) $\frac{1}{36}$.	4)
10	Длина отрезка прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{2\sqrt{3}} = 1$, заключенного между точками пересечения прямой с осями координат, равна...	1) 4 ; 2) 12 ; 3) 25 ; 4) 5 ; 5) $4\sqrt{3}$.	1)
11	Какие из данных прямых проходят через начало координат: а) $x + y = 0$; б) $x + 2y = 1$; в) $y - 15 = 0$; г) $5x = 0$; д) $2 - 3x = 0$?	1) a и b 2) b и c 3) b и e 4) c и d 5) d и a	5)
12	Какие из данных прямых параллельны? а) $2x - 3y + 4 = 0$; б) $3x + 2y - 1 = 0$; в) $4x + 6y + 7 = 0$; г) $4x - 6y + 3 = 0$; д) $2x + 4y - 9 = 0$.	1) a и d 2) a и c 3) b и e 4) b и d 5) d и e	1)

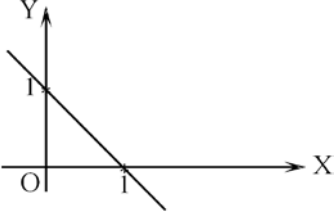
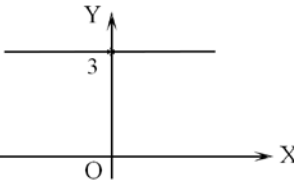
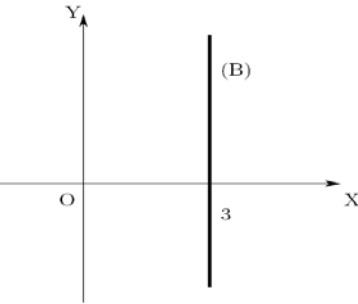
№	Задание	Варианты ответов	Отв.
13	При каком значении α прямые $x - 3y + 4 = 0$ и $\alpha x + 6y + 7 = 0$ параллельны?	1) 3; 2) 2; 3) 4; 4) -2 ; 5) -3 ;	4)
14	Какие из данных прямых перпендикулярны? a) $y = 2x - 3$; b) $y = 3x + 2$; c) $y = -0,5x + \frac{1}{3}$; d) $y = -1,5x$; e) $y = -\frac{1}{3}$.	1) a и d 2) a и c 3) b и e 4) c и d 5) b и e	2)
15	При каком значении k прямые $y = -5x - 2$ и $y = kx + 5$ параллельны?	1) -2 ; 2) $0,2$; 3) -5 ; 4) $-0,2$; 5) 5 .	3)
16	При каком значении k прямые $y = 4x + 2$ и $y = kx - 3$ перпендикулярны?	1) -2 ; 2) $-0,5$; 3) $0,5$; 4) $-0,25$; 5) 2 .	4)
17	Найдите точку пересечения прямых $x + 3y - 3 = 0$ и $2x + y - 11 = 0$.	1) $(6; -1)$; 2) $(-1; -2)$; 3) $(3; 2)$; 4) $(1; 2)$; 5) $(-2; 3)$.	1)

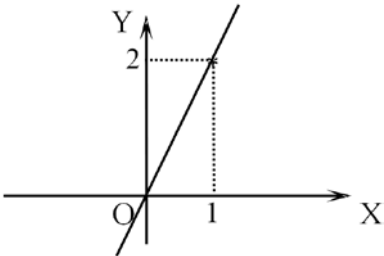
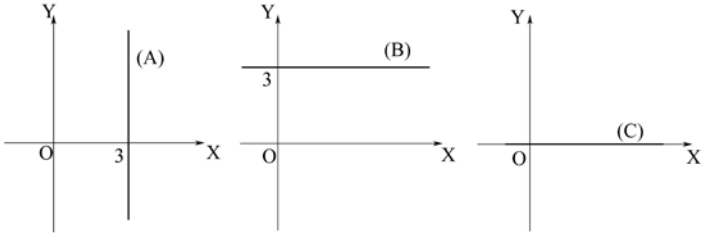
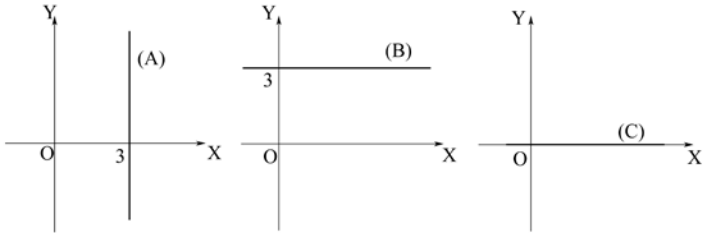
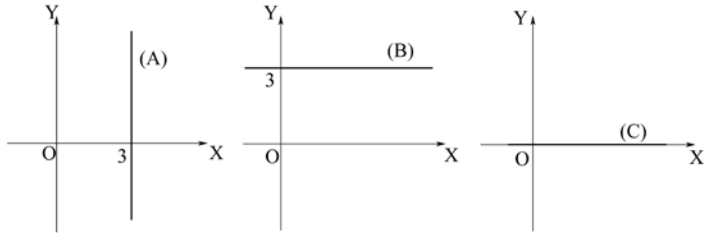
На рисунке изображен треугольник ABC:



№	Задание	Варианты ответов	Отв.
18	По рисунку составьте уравнение стороны AC $\triangle ABC$	1) $x=2$; 2) $x=1$; 3) $y=1$; 4) $y=2$; 5) другой ответ.	4)
19	По рисунку составьте уравнение стороны CB $\triangle ABC$	1) $x=2$; 2) $x=9$; 3) $y=1$; 4) $y=2$; 5) другой ответ.	2)
20	По рисунку составьте уравнение стороны AB $\triangle ABC$	1) $-4x+7y-6=0$; 2) $3x-4y+10=0$; 3) $3x-4y-20=0$; 4) $3x+4y-22=0$; 5) другой ответ.	1)
21	Если на рисунке дан треугольник ABC, то длина стороны AC равна.....		7
22	Если на рисунке дан треугольник ABC, то длина стороны BC равна.....		4
23	Если на рисунке дан треугольник ABC, то длина стороны AB равна.....		$\sqrt{65}$

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
24	По рисунку треугольника ABC составьте уравнение биссектрисы угла C $\triangle ABC$	1) $x-y-1=0$; 2) $x+y-11=0$; 3) $x-y+1=0$; 4) $x+y+1=0$; 5) другой ответ.	2)
25	По рисунку треугольника ABC составьте уравнение медианы, проведенной из вершины A	1) $7x-2y-10=0$; 2) $-7y+2x+5=0$; 3) $7y-2x-10=0$; 4) $4x-3y-2=0$; 5) другой ответ.	3)
26	По рисунку треугольника ABC составьте уравнение высоты, проведенной из вершины C	1) $4x-7y+14=0$; 2) $7x-4y-14=0$; 3) $7x+4y-71=0$; 4) $4x-7y+10=0$; 5) другой ответ.	3)
27	По рисунку треугольника ABC составьте уравнение высоты, проведенной из вершины A	1) $y-2=0$ 2) $x-2=0$ 3) $x-y=2$ 4) $x+y=2$ 5) другой ответ.	1)
28	По рисунку треугольника ABC определить угловой коэффициент прямой, на которой лежит сторона AB	1) 4; 2) 7; 3) 1,75; 4) $\frac{4}{7}$; 5) другой ответ.	4)
29	Найти тангенс угла наклона к оси Oх прямой, совпадающей со стороной AC треугольника ABC, изображённого на рисунке		0
30	Если $tg\varphi$ – тангенс угла наклона к оси Oх прямой, проходящей по стороне AB треугольника ABC, изображённого на рисунке, то $14 \cdot tg\varphi$ равно....		8
31	Если x и y – координаты точки пересечения прямой, проходящей по медиане, проведенной из вершины A треугольника ABC, изображённого на рисунке, то $x - 2y$ равно...		1
32	Если d – длина медианы, проведенной из вершины A треугольника ABC, изображённого на рисунке, то $d^2 - 3$ равно...		50

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
33	Если c – длина средней линии, параллельной стороне ВС треугольника ABC, изображённого на рисунке, а S – его площадь, то $S - a^2$ равно...		10
34	Если x и y – координаты точки пересечения прямой, проходящей по медиане, проведенной из вершины В треугольника ABC, изображённого на рисунке, то $2x + y$ равно...		13
35	Какие из прямых: а) $x - y = 0$; в) $2x + 2y + 1 = 0$; с) $x = 1$; d) $y = 1$ параллельны прямой, изображённой на рисунке. 	1) ни одна; 2) прямая а); 3) прямая в); 4) прямая с); 5) прямая d).	3)
36	Какие из прямых: а) $3x + y + 3 = 0$; в) $x - 3y + 9 = 0$; с) $x - 3 = 0$; d) $5y = 0$ параллельны прямой, изображённой на рисунке. 	1) прямая d); 2) прямая с); 3) прямая в); 4) прямая а); 5) ни одна.	1)
37	Какие из прямых: а) $2x + y + 4 = 0$; в) $3x - 6y = 0$; с) $2x = 0$; d) $y + 2 = 0$ параллельны прямой, изображённой на рисунке. 	1) ни одна; 2) прямая а); 3) прямая в); 4) прямая с); 5) прямая d).	4)

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
38	<p>Какие из прямых: а) $x + 2y = 0$; в) $2x - y + 8 = 0$; с) $2x + y = 0$; д) $y - 2 = 0$ параллельны прямой, изображённой на рисунке.</p> 	1) ни одна; 2) прямая в); 3) прямая а); 4) прямая с); 5) прямая д).	2)
39	<p>Какие из прямых (А), (В), (С) проходят через точку (0; 3)?</p> 	1) все; 2) прямая (В) 3) ни одна не проходит; 4) прямая (А) 5) все, кроме прямой (А).	2)
40	<p>На каких прямых (А), (В), (С) лежит точка (-3; 3)?</p> 	1) на прямой (А); 2) на прямой (В); 3) ни на одной; 4) на всех, кроме прямой (С); 5) ни на одной.	2)
41	<p>На каких прямых (А), (В), (С) не лежит точка (3; 0)?</p> 	1) на всех; 2) на прямых (А) и (В); 3) на прямой (В); 4) на прямых (А) и (С); 5) на прямой (А).	3)

Задания к главам 4,5

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
1	Среди следующих функций указать функции, в область определения которых входит полуинтервал $(0;1]$: а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = \ln x$; в) $y = \frac{1}{x^2 - x}$; д) $y = \sqrt{1-x}$; е) $y = \ln \ln x$.	1) а), б), д); 2) только д); 3) б), е); 4) а), в); 5) а), д), е).	1)
2	Если $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sin x$, то композицией функций g и f ($g \circ f$) является функция а) $\sin^2 x + 1$; б) $\sin(x^2 + 1)$; в) $\sin x^2 + 1$; д) $(x^2 + 1)\sin x$; е) $\sin(x^3 + x)$.	1) а); 2) б); 3) в); 4) д); 5) е).	2)
3	Какие из данных функций являются четными: а) $y = x^6$; б) $y = x^3$; в) $y = e^x$; д) $y = \cos x$; е) $y = \sin x^2$.	1) а); 2) д), е); 3) а), д), е); 4) в), б); 5) ни одна не является.	3)
4	Какие из данных функций являются нечетными: а) $y = x^6$; б) $y = x^3$; в) $y = e^x$; д) $y = \sin x$; е) $y = 2x^2 - x^4$.	1) а), б), е); 2) ни одна не является; 3) только б); 4) б), д); 5) в), д).	4)
5	Обратной к функции $y = x^3 + 1$ является функция	1) $y = \frac{1}{x^3 + 1}$; 2) $y = \sqrt[3]{x-1}$; 3) $y = \sqrt[3]{x} - 1$; 4) $x = y^3 + 1$; 5) $x = \frac{1}{y^3 + 1}$.	2)

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
6	<p>Бесконечно малыми при $x \rightarrow \infty$ функциями являются</p> <p>a) $y = \frac{1}{x^2}$; b) $y = \frac{\sin x^2}{x}$;</p> <p>c) $y = \frac{\cos x + \sin x}{x}$; d) $y = \frac{2x}{2x^2 + 1}$;</p> <p>e) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$.</p>	<p>1) все, кроме b);</p> <p>2) a), d);</p> <p>3) a), d), e);</p> <p>4) b), c);</p> <p>5) все.</p>	5)
7	<p>Бесконечно большими при $x \rightarrow 0$ функциями являются</p> <p>a) $y = \sin \frac{1}{x}$; b) $y = \frac{1}{x}$;</p> <p>c) $y = \frac{1}{\ln x}$; d) $y = \frac{1}{e^x}$;</p> <p>e) $y = \frac{\sin x}{x}$.</p>	<p>1) только b);</p> <p>2) a), b);</p> <p>3) c), d);</p> <p>4) a), b), e);</p> <p>5) все.</p>	1)
8	<p>Какие из следующих пределов равны числу 1:</p> <p>a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$;</p> <p>c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x-1}$;</p> <p>e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.</p>	<p>1) a), c);</p> <p>2) a), c), d);</p> <p>3) только b);</p> <p>4) a), e);</p> <p>5) a), c), e).</p>	2)
9	Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$		3
10	Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 1}{x^3 - 2x + 1}$		0
11	Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x^3 - 1}{x^3 - 2x + 1}$		1
12	Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0,1x^2 - 1}{0,01x^2 - 2x + 1}$		10
13	Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x}$		3
14	Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \operatorname{tg}^2 2x}{\operatorname{tg} x}$		4

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
15	Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{10x} - 1}{\sin 2x}$		5
16	Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 6x^2)}{\sin 2x \arcsin x}$		3
17	Если $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = e^k$, то k равно		2
18	Если $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^k$, то k равно		2
19	Если $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^x = e^k$, то k равно		1
20	Если $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{-2x} = e^k$, то k равно		8
21	Найти $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$.		1
22	Найти $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \leq \pi \\ \sin x & \text{при } x > \pi \end{cases}$.		0
23	Найти $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$, если $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{при } x < 0 \\ x + 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 4 \\ 3 + \sqrt{x} & \text{при } x > 4 \end{cases}$.		5
24	Найти $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$, если $f(x) = 3^{\frac{1}{x-1}}$.		0
25	Найти $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x)$, если $f(x) = \frac{ x-3 }{x-3}$.		-1
26	Найти $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$, если $f(x) = \frac{x^2 - 14x + 49}{x - 7}$, $x_0 = 7$.		0

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
27	<p>Какие из следующих функций являются не-прерывными в точке $x_0 = 0$:</p> <p>а) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ x + 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$</p> <p>б) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$; в) $f(x) = \ln(x - 1)$;</p> <p>д) $f(x) = (x - 1)^2$;</p> <p>е) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$.</p>	<p>1) а), д); 2) а), е); 3) б), д); 4) с), д); 5) с), б).</p>	1)
28	<p>Какие из следующих функций имеют устранимый разрыв в точке $x = 1$:</p> <p>а) $y = \frac{1}{(x - 1)^2}$; б) $y = \frac{x - 1}{ x - 1 }$;</p> <p>с) $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$; д) $y = \frac{\sin(x - 1)}{x - 1}$;</p> <p>е) $y = \frac{\sin x}{x - 1}$.</p>	<p>1) б), с); 2) с), д); 3) д), с); 4) а), б), с); 5) только с).</p>	2)
29	<p>Какие из данных функций имеют разрыв первого рода в точке $x = 2$:</p> <p>а) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$; б) $f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4}$;</p> <p>с) $f(x) = \frac{\operatorname{tg}(x - 2)}{x - 2}$; д) $f(x) = \frac{\sin(x - 2)}{x - 2}$;</p> <p>е) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 2 \\ \frac{1}{x - 2} & \text{при } x > 2 \end{cases}$.</p>	<p>1) а), д); 2) а), д), б); 3) б), с), д); 4) с), е); 5) только б).</p>	3)
30	<p>Какие из данных функций имеют разрыв второго рода в точке $x = 3$:</p> <p>а) $f(x) = \sin \frac{1}{x - 3}$; б) $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 9}$;</p> <p>в) $f(x) = \frac{\sin(x - 3)}{x - 3}$; д) $f(x) = 3^{\frac{1}{x - 3}}$;</p> <p>е) $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 9}$.</p>	<p>1) а), с), д); 2) б), с); 3) с), д); 4) а), б), д); 5) а), б), е).</p>	4)

Задания к главам 6,7

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
1	Производная функции $y = 3x^4 - 5x^2 + 3x - 4$ в точке $x = 1$ равна	1) 3; 2) 5; 3) 10; 4) 6; 5) 4.	2)
2	Производная функции $y = 4 \sin 2x - 2 \cos 3x$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$ равна	1) 8; 2) 14; 3) - 6; 4) 0; 5) - 14.	5)
3	Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 12\sqrt{x} - 0,5x^2$ в точке $x = 4$ равен	1) 4; 2) 0; 3) - 1; 4) - 2; 5) 1.	3)
4	Вторая производная функции $y = x^3 - 2x^2 + 5x + 6$ равна	1) $6x - 4$; 2) $3x^2 - 4x + 5$; 3) $x^2 - 2x + 5$; 4) $3x - 2$; 5) $6x + 8$	1)
5	Дифференциал функции $y = 2x^3$ в точке $x = 1$ при $\Delta x = 0,3$ равен	1) 0,6; 2) 0,12; 3) 0,4; 4) 1,2; 5) 1,8.	5)
6	Дифференциал функции $y = e^{x^2}$ равен	1) $2xe^{x^2} dx$; 2) $e^{x^2} dx$; 3) $2e^{x^2} dx$; 4) $x^2 e^{x^2-1} dx$; 5) $2x dx$.	1)

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
7	Уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - x + 3$ в точке $M(1; 3)$ имеет вид	1) $y = 3x$; 2) $y = 3x + 2$; 3) $y = x + 2$; 4) $y = 2x + 1$; 5) $y = x - 3$.	3)
8	В какой из перечисленных точек касательная к графику функции $y = x^2$ параллельна прямой $y = 4x - 2$	1) (1; 1); 2) (2; 4); 3) (-2; 4); 4) (3; 9); 5) (0; 0).	2)
9	Производная функции $y = x^{2x}$ в точке $x_0 = 1$ равна	1) 2; 2) 1; 3) 0; 4) -1; 5) 3.	1)
10	Производная функции $x^2 + 4y^2 = 4$ в точке $M\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ равна	1) 1; 2) 0,5; 3) 0; 4) -1; 5) -0,5.	5)
11	Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$ равен	1) 1; 2) 4; 3) 0; 4) не существует; 5) 0,25.	2)
12	Предел $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{2}{x}}$ равен	1) 1; 2) ∞ ; 3) e ; 4) e^2 ; 5) e^4 .	5)
13	Функция $y = e^{2x-x^2}$ возрастает на промежутке	1) $(-\infty; 1)$; 2) $(0; 2)$; 3) $(1; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$; 5) $(-\infty; 2)$.	1)

№	Задание	Варианты ответов	Отв.
14	Производная функции равна $y' = (x+1)^3(x-1)^4(x-4)$. Число точек экстремума этой функции равно	1) 3; 2) 1; 3) 0; 4) 2; 5) 4.	4)
15	Максимум функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ равен	1) 6; 2) 2; 3) 3; 4) 9; 5) 5.	1)
16	Объем продукции x , при котором выручка $R(x) = 600x - 0,1x^2$ будет наибольшей, равен	1) 2000; 2) 3500; 3) 6000; 4) 3000; 5) 5000.	4)
17	Наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 8$ на отрезке $[1; 3]$ равно	1) 8; 2) 2; 3) 3; 4) 6; 5) 4.	5)
18	Если вторая производная функции y имеет вид $y'' = x^4(x+1)(x-1)^2(x-2)^3$, то число точек перегиба графика этой функции равно	1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 1.	1)
19	Горизонтальной асимптотой функции $y = \frac{4x^2 + 3x + 5}{2x^2 + x - 3}$ будет прямая	1) $y = 3$; 2) $y = 5$; 3) $y = 2$; 4) $y = -3$; 5) $y = 4$.	3)
20	Наибольшее значение функции $y = x^2 - 6x + 10$ на отрезке $[1; 4]$ равно	1) 1; 2) 5; 3) 10; 4) 2; 5) 12	2)

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.6. $AB = \begin{bmatrix} 3200 & 1400 \\ 4000 & 4500 \\ 200 & 4900 \end{bmatrix}$, BA не существует.

1.7. а) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $AB = BA = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $AB = BA = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; г) $AB = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

д) $AB = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ -2 & -8 & 0 \\ -3 & -12 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = [-9]$. **1.8.** $AX = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$, $YA = [7 \ 12 \ -4]$, $XY = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.11. 0. **1.13.** а) $[5]$; б) $[10]$. **1.14.** $AB = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 & 12 \\ 2 & -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, $BX = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$B'BX = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}$, $AY = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A'AY = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix}$. **1.15.** 1) 6; 2) 0; 3) 6; 4) 0.

1.16. $\begin{bmatrix} 20400 & 0 \\ 0 & 20400 \end{bmatrix}$. **1.17.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. **1.18.** а) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 16 & -10 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

1.19. $\begin{bmatrix} -18 & 40 \\ 0 & 62 \end{bmatrix}$. **1.20.** $\begin{bmatrix} -8 & -6 \\ -6 & -20 \end{bmatrix}$. **1.21.** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. **1.22.** $\begin{bmatrix} -29 & 20 \\ -10 & -39 \end{bmatrix}$.

1.23. а) $\begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 4 & 19 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix}$.

1.24. а) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.25. а) 26; б) -2; в) 0; г) 17; д) -55; е) -31; ж) 0; з) 0; и) 0.

1.26. а) 50; б) 900; в) 1; г) -16; д) 160; е) 50; ж) 0; з) 0; и) 0; к) 415.

1.27. 162. 1.28. 96. 1.29. $k^n b$. 1.30. а) $\alpha = \frac{5}{3}$; б) $\alpha = -1, \alpha = 4$; в) $\alpha = -3$;

г) $\alpha = 0, \alpha = 3$; д) ни при каком α ; е) при любом α . 1.33. а) -22; б) 32; в) 44;

г) 108. 1.34. $-8x - 15y - 12z + 19t$. 1.35. $2a - 8b + c + 5d$. 1.36. а) $abcd$;

б) $abcd$; в) $xyzuv$. 1.40. а) $x \in R$; б) $x_1 = -1, x_2 = 2$; в) $x_1 = -2, x_2 = 4$.

1.41. а) первую строчку вычесть из остальных; б) первую строчку прибавить к остальным. 1.42. а) -252; б) -261; в) 5. 1.44. -6. 1.45. -3. 1.46. а) $x = 3, y = -1$;

б) $x = 1, y = 1$; в) $x = 1, y = -1$; г) (3, 1, 1); д) (1, 2, -1); е) (1, 0, 5);

ж) (1, 0, -1); з) (-2; 2; 1); и) несовместна. 1.47. а) если $m \neq 1, m \neq -3$, то $x = \frac{m-3}{m-1}, y = \frac{m+3}{1-m}$; если $m = 1$, то нет решений; если $m = -3$, то $y = 3 - 2x, x \in R$;

б) если $m \neq 0, m \neq -1$, то $x = \frac{4+m-m^2}{m+1}, y = \frac{-m-2}{m+1}$; если $m = -1$, то нет решений; если $m = 0$, то $y = 2 - x, x \in R$. 1.48. а) нет; б) нет; в) да; г) нет.

1.49. Являются. 1.50. б) $k \neq 1, k \neq 4$; в) ни при каком k ; г) при любом k .

1.51. $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. 1.52. а) $\frac{19}{3}$; б) 0; в) 1.

1.53. а) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -3/5 & 4/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$; в) не существует; г) $\begin{bmatrix} -1/5 & 4/15 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$;

д) $\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -8 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$; е) $\frac{1}{38} \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 9 & -7 & -5 \\ 5 & 13 & -7 \end{bmatrix}$; ж) $\frac{1}{60} \begin{bmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{bmatrix}$; з) $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$;

и) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$; к) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; л) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; м) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1.54. а) (1, 2, -1); б) (1, 0, -1); в) (3, 7, -1); г) (5, -11, -13); д) (1, 1, 1);

е) $(1, 0, -1)$. **1.55.** а) $\begin{bmatrix} 0,1 & -0,2 \\ 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$; г) нет решений;

д) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} (2+3x_3)/2 & (3+3x_4)/2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$, где $x_3, x_4 \in R$; ж) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$;

з) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. **1.56.** а) $\begin{bmatrix} -5 & 16 & -8 \\ 4 & -7 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -21 & 45 & -156 \\ -21 & 15 & -21 \\ 51 & 20 & -79 \end{bmatrix}$.

1.59. а) $r=2, M=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$; б) $r=2, M=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$; в) $r=1, M=\begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix}$;

г) $r=2, M=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$; д) $r=1, M=\begin{vmatrix} 4 \end{vmatrix}$; е) $r=3, M=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$;

ж) $r=3, M=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 20 & 10 & -40 \\ 10 & -30 & 40 \end{vmatrix}$; з) $r=3, M=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

1.60. а) $r=2$; б) $r=2$; в) $r=3$; г) $r=5$; д) $r=3$; е) $r=2$.

1.61. а) $r=2$; б) $r=3$; в) $r=2$; г) $r=2$; д) $r=3$.

1.62. $\lambda=0,5$. **1.63.** а) $\lambda=3$; б) $\lambda_1=0, \lambda_2=2$; в) при любом λ ; г) $\lambda=\frac{7}{9}$.

1.64. а) λ — любое; б) $\lambda \neq 2$; в) $\lambda \neq -17$; г) $\lambda \neq 0$. **1.65.** а) ни при каких λ ;

б) $\lambda=-3$; в) $\lambda \neq -3$. **1.66.** а) $\lambda=\frac{1}{2}$; б) $\lambda \neq \frac{1}{2}$; в) ни при каких λ .

1.67. $r=0$, если $\lambda=0$; $r=2$, если $\lambda \neq 0$. **1.70.** $r=2$ при $\lambda=0$; $r=3$ при $\lambda \neq 0$.

1.71. $r=2$ при $\lambda=3$; $r=3$ при $\lambda \neq 3$. **1.72.** а) $r=3$; б) $r=2$.

1.74. а) несовместна; б) $\left(\frac{5-7x_3}{5}, \frac{8x_3}{5}, x_3\right)$, где $x_3 \in R$; в) $(1, 1, 1)$;

г) $(11x_3-4, 3-7x_3, x_3)$, где $x_3 \in R$; д) $(1, 1, 1)$; е) несовместна;

ж) $(x_1, (5x_1-4x_4-11)/10, (-7-3x_4)/5, x_4)$, где $x_1, x_4 \in R$;

з) несовместна; и) $(x_1, x_2, (3-5x_1+25x_2)/9, (10x_2-2x_1)/3)$, где $x_1, x_2 \in R$;

к) $((9-x_3-14x_4-x_5)/7, ((-1+4x_3-7x_4-3x_5)/7, x_3, x_4, x_5))$, где $x_3, x_4, x_5 \in R$.

- 1.75.** а) $\lambda \neq 6$; б) λ – любое. **1.76.** $\lambda = -2$. **1.77.** $\left((18-15x_2)/10, x_2, -7/5\right)$, где x_2 – любое число. **1.78.** $\left((7-x_3)/3, (4+2x_3)/3, x_3\right)$, где x_3 – любое число.
- 1.79.** $(x_1, x_2, -3x_1+6x_2+4, 2x_1-4x_2-3)$, где x_1, x_2 – любые числа.
- 1.80.** $(x_3+x_4-1, 2x_3+x_4+5, x_3, x_4)$, где x_3, x_4 – любые числа.
- 1.81.** $(-2, 3)$. **1.82.** $\left(\frac{1}{2}(-2x_3+x_4-1), x_3-2x_4+2, x_3, x_4\right)$, где x_3, x_4 – любые числа. **1.83.** $(1, 1, 1)$. **1.84.** $(1, 1, 0)$. **1.85.** $(0, 1, 1)$.
- 1.86.** $(1, 1, 1)$. **1.87.** Несовместна. **1.88.** $(1, 0, 0, 0)$.
- 1.89.** $(x_1, x_2, (34x_1-17x_2-29)/5, (16x_1-8x_2-16)/5)$, где x_1, x_2 – любые числа.
- 1.90.** $\left(x_1, x_2, 2-\frac{27}{13}x_1+\frac{9}{13}x_2, -1+\frac{3}{13}x_1-\frac{1}{13}x_2\right)$, где x_1, x_2 – любые числа.
- 1.91.** $(x_1, x_2, 1-3x_1-4x_2, 1)$. **1.92.** Несовместна. **1.93.** Несовместна.
- 1.94.** $(x_1, x_2, 13, 19-3x_1-2x_2, -3)$, x_1, x_2 – любые числа.
- 1.95.** $\left(x_1, x_2, -\frac{9}{2}-x_1-2x_2, -\frac{25}{2}-2x_1-4x_2, -\frac{15}{2}-2x_1-4x_2\right)$, где x_1, x_2 – любые числа. **1.96.** $(3, 0, -5, 11)$.
- 1.97.** а) При $\lambda \neq 0$ система несовместна. При $\lambda = 0$ она совместна и имеет общее решение $\left(\frac{-5x_3-13x_4-3}{2}, \frac{-7x_3-19x_4-7}{2}, x_3, x_4\right)$, где x_3, x_4 – любые числа;
- б) При $\lambda = 1$ система несовместна. При $\lambda \neq 1$ система совместна и имеет общее решение $x_1 = 1 - \frac{9}{2}x_2 - \frac{10}{\lambda-1}$, $x_2 \in R$, $x_3 = 4x_2 + \frac{5}{\lambda-1}$, $x_4 = \frac{5}{\lambda-1}$.
- 1.98.** $(c, -2c, c)$, $c \in R$. **1.99.** $(0, 0, 0)$. **1.100.** $\left(\frac{4c_1-c_2}{3}, c_1, c_2, 0\right)$, $c_1, c_2 \in R$.
- 1.101.** $\left(-\frac{1}{4}c, c, \frac{3}{4}c, 0\right)$, $c \in R$. **1.102.** $(5c, 1c, 7c)$, $c \in R$.
- 1.103.** $\left(-\frac{1}{4}c_1, \frac{5}{4}c_1+c_2, c_1, c_2\right)$, $c_1, c_2 \in R$. **1.104.** $(0, 0, 0)$.
- 1.105.** $\left(-\frac{4}{3}(c_1+c_2), \frac{1}{3}(c_2-5c_1), c_1, c_2\right)$, $c_1, c_2 \in R$.
- 1.106.** $(2c_1+3c_2-c_3, c_1+c_2-c_3, -c_1+2c_2+c_3, c_1, c_2, c_3)$, $c_1, c_2, c_3 \in R$.

- 1.107.** $(c_1, c_2, c_1 + 3c_2, 0, 0)$. **1.108.** Нет. **1.109.** Да. **1.110.** Нет. **1.111.** Да.
1.112. $\{(2, 3, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$. **1.113.** $\{(1, 0, 3, 1, 0), (2, 1, 0, 0, 0), (\frac{1}{3}, 0, -\frac{4}{3}, 0, 1)\}$.
1.114. $\{(1, 2, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)\}$. **1.115.** $(1, 1, 2, -1)$.

Глава 2

- 2.2.** а) $\overline{CB} = -3\vec{q}$; $\overline{CB} = -4\vec{p}$; $\overline{AC} = 4\vec{p} + 3\vec{q}$; б) $\overline{AM} = 4\vec{p} + 1,5\vec{q}$; $\overline{AN} = 3\vec{q} + 2\vec{p}$;
 $\overline{MN} = 1,5 - 2\vec{p}$. **2.3.** а) $\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$; б) $\vec{a} = 2\vec{c} - \vec{b}$. **2.4.** $\vec{c} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})$. **2.5.** $\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{a}$.
2.6. $\overline{OA} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$; $\overline{OB} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$; $\overline{OC} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$. **2.7.** $\overline{AC_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;
 $\overline{A_1C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; $\overline{BD_1} = \vec{b} - \vec{a} + \vec{c}$; $\overline{B_1D} = \vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$. **2.8.** $\overline{OA_1} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$;
 $\overline{OB_1} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$; $\overline{OC_1} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$; $\overline{OD_1} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$. **2.9.** $x = -1$.
2.11. $C(10; 4)$. **2.12.** $C(10; -2)$. **2.13.** $x = 5$. **2.14.** $7; \sqrt{69}$. **2.15.** 7.
2.16. а) $(5; 7, 5; -2, 5)$; б) $(4; 6; -2)$; $(6; 9; -3)$. **2.17.** 5. **2.18.** $B(11; 3; 1)$.
2.19. а) $\vec{a} = -20\vec{p} + 11\vec{q}$; б) $\vec{a} = 6\vec{p} - 7\vec{q}$. **2.20.** а) $\vec{a} = -2\vec{p} + 4\vec{q} + \vec{r}$; б) $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q} - \vec{r}$.
2.21. $|\overline{OM}| = 5\sqrt{2}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5}$, $\cos \beta = \frac{-3\sqrt{2}}{10}$, $\cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2.22. $\Pi_{p_{Ox}} \overline{AB} = 2$, $\Pi_{p_{Oy}} \overline{AB} = -6$, $\Pi_{p_{Oz}} \overline{AB} = 3$, $\cos \alpha = \frac{2}{7}$, $\cos \beta = \frac{-6}{7}$, $\cos \gamma = \frac{3}{7}$.
2.23. $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\sqrt{2}\vec{j} + 2\sqrt{2}\vec{k}$. **2.24.** а) 70° ; б) $(1; -1; \sqrt{2})$. **2.25.** $(2; 2; 2)$. **2.26.** 10.
2.27. а) 3; б) -10 ; в) $2\sqrt{7}$. **2.28.** 5. **2.29.** 3. **2.30.** $\sqrt{7}$. **2.31.** $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$. **2.32.** 45° .
2.33. 60° . **2.34.** 45° . **2.35.** 120° . **2.36.** 60° . **2.37.** $\arccos 0,8$. **2.38.** $\arccos \frac{5}{6}$.
2.39. $\frac{-4}{49}$. **2.40.** $\Pi_{p_{\vec{b}}} \vec{a} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$; $\Pi_{p_{\vec{a}}} \vec{b} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. **2.41.** $\sqrt{3}$. **2.42.** 2. **2.43.** $(0; 0,8; 0,6)$;
 $(0; -0,8; -0,6)$. **2.44.** $\left(\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}; 0\right)$. **2.45.** $\left(-\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{3}{7}\right)$. **2.46.** $(2\alpha; 3\alpha; \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.
2.47. 8. **2.48.** 6. **2.49.** а) $\vec{c} = -6\vec{j}$; б) $\vec{c} = -2\vec{k}$; в) $\vec{c} = 6\vec{i} - 9\vec{j} + 6\vec{k}$. **2.50.** $\sqrt{21}$.
2.52. 2,5. **2.53.** $50\sqrt{2}$. **2.54.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **2.55.** $\sqrt{26}$. **2.56.** $\frac{2\sqrt{21}}{3}$. **2.57.** -8 . **2.58.** а) да;
б) нет, левая; в) нет, правая. **2.59.** 14. **2.60.** а) да; б) нет. **2.61.** 6. **2.62.** $4\frac{1}{3}$. **2.63.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
2.64. $2V$. **2.66.** У к а з а н и е : умножить скалярно обе части равенства на \vec{a} .
2.67. а) да; б) да; в) нет; г) да; д) да. **2.68.** а) нет; б) нет; в) да; г) нет; д) да.

2.69. а) 1; б) 2; в) 3; г) 2; д) 4. **2.70.** а) $\vec{x}_1(1); \vec{x}_2(-2); \vec{x}_3(3)$; б) $\vec{x}_1(1;0); \vec{x}_2(0;1); \vec{x}_3(3;-2); \vec{x}_4(2;1)$; в) $\vec{x}_1(1;0;0); \vec{x}_2(0;1;0); \vec{x}_3(1;-2;0); \vec{x}_4(0;0;1)$; г) $\vec{x}_1(1;0;0); \vec{x}_2(0;1;0); \vec{x}_3(0;0;1); \vec{x}_4(-2;1;3)$; д) $\vec{x}_1(1;0;0); \vec{x}_2(0;1;0); \vec{x}_3(0;0;1); \vec{x}_4(-1;0;1)$.

2.71. а) да; б) да; в) нет; г) нет; д) да. **2.72.** а) $\lambda \neq 0$; б) $\lambda \neq 0$; в) ни при каких λ .

2.73. да. **2.74.** $\alpha \neq -8, \beta \neq 3$. **2.75.** а) да; б) нет.

2.76. 1. а) $3x_1 + 5x_2 = 15, x_1 = 1, x_2 = 2, 4$; б) $3x_1 + 5x_2 = 30, x_1 = 5, x_2 = 3$;

в) $3x_1 + 5x_2 = 45, x_1 = 3, x_2 = 7, 2$. 2. а) $3x_1 + 5x_2 > 4x_1 + 4x_2, 3x_1 + 5x_2 = 30, x_1 = 1, x_2 = 5, 4$;

б) $3x_1 + 5x_2 < 4x_1 + 4x_2, 3x_1 + 5x_2 = 30, x_1 = 5, x_2 = 3$;

в) $3x_1 + 5x_2 = 4x_1 + 4x_2, 3x_1 + 5x_2 = 30, x_1 = 3, 75, x_2 = 3, 75$.

2.77. 1. а) $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 19, \bar{x} = (1; 2; 1,5)$ или $\bar{x} = (1; 3; 0,25)$;

б) $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 34, \bar{x} = (2; 4; 2)$ или $\bar{x} = (0; 6; 1)$;

в) $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 53, \bar{x} = (10; 4; ,75)$ или $\bar{x} = (1; 3; 0,25)$. 2. а) $\bar{x} = (0, 6, 1)$;

б) $(2, 2, 4, 25)$; в) $(2, 4, 2)$. **2.78.** 1. а) $(6000, 8000, 12000, 2000)$;

б) $(6000, 12000, 18000, 3000)$; в) $(1500, 2000, 3000, 500)$.

2. а) $\lambda_1 \bar{G}_1 + \lambda_2 \bar{G}_2 = 1 \cdot \bar{G}_1 + 2 \cdot \bar{G}_1 = (11000, 14000, 18000, 1000)$;

б) $2 \cdot \bar{G}_1 + 3 \cdot \bar{G}_1 = (18000, 23000, 30000, 2000)$ велосипедов каждого вида.

3. Умножение вектора на число и нахождение линейной комбинации векторов.

$$\mathbf{2.79.} \text{ а) } \frac{1}{2}(A+B) = \begin{bmatrix} 485 & 845 & 215 & 855 \\ 1065 & 410 & 190 & 680 \\ 1430 & 475 & 595 & 11 \end{bmatrix}; \text{ б) } B-A = \begin{bmatrix} 70 & 130 & 10 & 110 \\ 30 & 340 & 200 & 40 \\ -40 & 710 & 10 & 20 \end{bmatrix}.$$

2.80. $\bar{p} = AB = [1380, 2040, 340], S = 3760$.

2.81. $S = \bar{g} \cdot \bar{s} = 570, T = \bar{g} \cdot \bar{t} = 1220, P = \bar{g} \cdot \bar{p} = 35000$.

2.82. $\bar{S} = \bar{g}A = (575, 550, 835, 990)$.

2.83. $90p_1 + 100p_2 + 110p_3 + 90p_4 = 3480; p_1 = 10, p_2 = 5, 8, p_3 = 10, p_4 = 10$.

2.84. $c \geq 9$. **2.85.** 2 грузовика 1-го типа, 3 грузовика 2-го типа, 4 грузовика 3-го типа.

2.86. 2 ед. первого вида, 3 ед. второго вида, 4 ед. третьего вида.

2.87. 2 кг корма A , 1 кг корма B , 3 кг корма C . **2.88.** 100 свитеров, 120 джемперов, 150 жакетов. **2.89.** 10 изделий A , 20 изделий B , 30 изделий C .

2.90. 20 лис, 30 песцов, 10 норок. **2.91.** 50 столов, 70 шкафов, 100 стульев.

Глава 3

3.3 1) $X=1, Y=3$; 2) $X=-4, Y=-2$; 3) $X=1, Y=-7$; 4) $X=5, Y=3$.

3.4. (3; -1). **3.5.** (-3; 2). **3.8.** 1) $X=-6, Y=6\sqrt{3}$ 2) $X=3\sqrt{3}, Y=-3$;

3) $X=\sqrt{2}, Y=-\sqrt{2}$. **3.9.** 1) $d=2, \theta=\frac{\pi}{3}$; 2) $d=6, \theta=-\frac{\pi}{4}$; 3) $d=4, \theta=\frac{5}{6}\pi$.

3.10. 1) $d=\sqrt{2}, \theta=-\frac{3}{4}\pi$; 2) $d=5, \theta=\arctg\frac{4}{3}-\pi$; 3) $d=13, \theta=\pi-\arctg\frac{12}{5}$;

4) $d=\sqrt{234}, \theta=-\arctg 5$. **3.11.** а) 3; б) -3. **3.12.** а) (-15; -12);

б) (1; -12). **3.13.** -2. **3.14.** $\frac{3\sqrt{3}-4}{2}$. **3.15.** 1) -5; 2) 5. **3.16.** 1) 5; 2) 10; 3) 5; 4) $\sqrt{5}$;

5) $2\sqrt{2}$; 6) 13. **3.17.** 137 кв. ед. **3.18.** $8\sqrt{3}$ кв. ед. **3.19.** 13, 15. **3.20.** 150 кв. ед.

3.21. $4\sqrt{2}$. **3.26.** $\angle BAC = 45^\circ, \angle ABC = 45^\circ, \angle ACB = 90^\circ$. **3.27.** 60° . Указание.

Вычислить длины сторон треугольника, а затем применить теорему косинусов.

3.26. $M_1(0; 28)$ и $M_2(0; -2)$. **3.29.** $P_1(1; 0)$ и $P_2(6; 0)$. **3.30.** $M_2(3; 0)$.

3.31. $B(0; 4)$ и $D(-1; -3)$. **3.32.** Условию задачи удовлетворяют два квадрата, симметрично расположенных относительно стороны AB . Вершины одного квадрата

суть точки $C_1(-5; 0), D_1(-2; -4)$, вершины другого - $C_2(3; 6), D_2(6; 2)$.

3.33. 1) $M(1; 3)$; 2) $N(4; -3)$. **3.34.** (1; -3), (3; 1) и (-5; 7). **3.35.** $D(-3; 1)$.

3.36. (5; -3), (1; -5). **3.37.** 13. **3.38.** (2; -1) и (3; 1). **3.39.** $(\frac{5}{2}; -2)$. **3.40.** $\frac{14}{3}\sqrt{2}$.

3.41. (-11; -3). **3.42.** 4. **3.43.** $\lambda_1 = \frac{AB}{BC} = 2; \lambda_2 = \frac{AC}{CB} = -3; \lambda_3 = \frac{BA}{AC} = -\frac{2}{3}$

3.44. $A(3; -1)$ и $B(0, 8)$. **3.45.** 1) 14 кв. ед.; 2) 12 кв. ед.; 3) 25 кв. ед.

3.46. 5. **3.47.** 20 кв. ед. **3.48.** 7,4. **3.49.** $x = -\frac{6}{11}, y = 4\frac{1}{11}$. **3.50.** (0; -8) или

(0; -2). **3.51.** $C_1(-2; 12), D_1(-5; 16)$ или $C_2(-2; \frac{2}{3}), D_2(-5; \frac{14}{3})$.

3.52. Точки M_1, M_3 и M_4 лежат на данной прямой; точки M_2, M_5 и M_6 не лежат на ней.

3.53. 3, -3, 0, -6 и -12. **3.54.** 1, -2, 4, -5 и 7. **3.55.** (6; 0), (0; -4).

3.56. (3; -5). **3.57.** $A(2; -1), B(-1; 3), C(2; 4)$. **3.58.** (1; -3), (-2; 5), (5; -9) и (8; -17).

3.59. $S = 17$ кв. ед. **3.60.** $C_1(-1; 4)$ или $C_2(\frac{25}{7}; -\frac{36}{7})$. **3.61.** 1) $2x - 3y + 9 = 0$;

2) $3x - y = 0$; 3) $y + 2 = 0$; 4) $3x + 4y - 12 = 0$; 5) $2x + y + 5 = 0$; 6) $x + 3y - 2 = 0$.

3.62. 1) $k=5, b=3$; 2) $k=-\frac{2}{3}, b=2$; 3) $k=-\frac{5}{3}, b=-\frac{2}{3}$; 4) $k=-\frac{3}{2}, b=0$; 5) $k=0, b=3$.

3.63. 1) $-\frac{5}{3}$; 2) $\frac{3}{5}$. **3.64.** 1) $2x + 3y - 7 = 0$; 2) $3x - 2y - 4 = 0$. **3.65.** (2; 1), (4; 2), (-1; 7),

(1; 8). **3.66.** (-2; -1). **3.67.** $Q(11; -11)$. **3.68.** 1) $5x + y - 7 = 0$; 2) $8x + 12y + 5 = 0$;

3) $5x + 7y + 9 = 0$; 4) $6x - 30y - 7 = 0$. **3.69.** а) $k = 7$; б) $k = \frac{7}{10}$; в) $k = -\frac{3}{2}$.

3.70. $5x - 2y - 33 = 0$, $x + 4y - 11 = 0$, $7x + 6y + 33 = 0$. **3.71.** $7x - 2y - 12 = 0$, $5x + y - 28 = 0$, $2x - 3y - 18 = 0$. **3.72.** $x + y + 1 = 0$. **3.73.** $2x + 3y - 13 = 0$.

3.74. (3; 4). **3.75.** $x - 5 = 0$. **3.76.** Уравнение стороны AB : $2x + y - 8 = 0$;

BC : $x + 2y - 1 = 0$; CA : $x - y - 1 = 0$. Уравнение медианы, проведённой из вершины A : $x - 3 = 0$; из вершины B : $x + y - 3 = 0$; из вершины C : $y = 0$.

3.77. $3x - 5y + 4 = 0$; $x + 7y - 16 = 0$; $3x - 5y - 22 = 0$; $x + 7y + 10 = 0$.

3.78. Уравнения сторон прямоугольника: $2x - 5y + 3 = 0$, $2x - 5y - 26 = 0$; уравнение его диагонали: $7x - 3y - 33 = 0$. **3.79.** $x + y - 8 = 0$, $11x - y - 28 = 0$.

У к а з а н и е . Условию задачи удовлетворяют две прямые: одна из них проходит через точку P и середину отрезка, соединяющего точки A и B ; другая проходит через точку P параллельно отрезку AB . **3.80.** $M_1(10; -5)$. **3.81.** $P(2; -1)$. **3.82.** $P(2; 5)$.

3.83. $x - 5y + 3 = 0$ или $5x + y - 11 = 0$. **3.84.** Уравнение сторон квадрата: $4x + 3y + 1 = 0$, $3x - 4y + 32 = 0$, $4x + 3y - 24 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$; уравнение его второй диагонали: $x + 7y - 31 = 0$. **3.85.** $3x - 4y + 15 = 0$, $4x + 3y - 30 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$.

3.86. $2x + y - 16 = 0$, $2x + y + 14 = 0$, $x - 2y - 18 = 0$. **3.87.** 1) $2x - 3y - 13 = 0$;

2) $x - 2 = 0$; 3) $y + 3 = 0$. **3.88.** Перпендикулярны 2) и 3). **3.89.** $4x - y - 13 = 0$, $x - 5 = 0$, $x + 8y + 5 = 0$. **3.90.** BC : $3x + 4y - 22 = 0$; CA : $2x - 7y - 5 = 0$; CN : $3x + 5y - 23 = 0$.

3.91. $x + 2y - 7 = 0$; $x - 4y - 1 = 0$; $x - y + 2 = 0$. У к а з а н и е . Задача может быть решена по следующей схеме: 1. Устанавливаем, что вершина A не лежит ни на одной из данных прямых. 2. Находим точку пересечения медиан и обозначаем её какой-нибудь буквой, например M . Зная вершину A и точку M , мы можем составить уравнение третьей медианы. 3. На прямой, проходящей через точки A и M , строим отрезок $MD = AM$. Затем определяем координаты точки D , зная точку M — середину отрезка AD и один из его концов A . 4. Устанавливаем, что четырёхугольник $BDCM$ — параллелограмм (его диагонали взаимно делятся пополам), составляем уравнения прямых DB и DC . 5. Вычисляем координаты точек B и C . 6. Зная координаты всех вершин треугольника, мы можем составить уравнения его сторон.

3.92. $4x + 7y - 1 = 0$, $y - 3 = 0$, $4x + 3y - 5 = 0$. **3.93.** $2x + 9y - 65 = 0$, $6x - 7y - 25 = 0$, $18x + 13y - 41 = 0$. **3.94.** $x + 2y = 0$, $23x + 25y = 0$. **3.95.** $8x - y - 24 = 0$.

3.96. $3x + 4y - 1 = 0$, $7x + 24y - 61 = 0$. **3.97.** 1) $a = -2$; $5y - 33 = 0$;

2) $a_1 = -3$, $x - 56 = 0$; $a_2 = 3$, $5x + 8 = 0$; 3) $a_1 = 1$, $3x - 8y = 0$; $a_2 = \frac{5}{3}$, $33x - 56y = 0$.

3.98. $m = -4$, $n = 2$; $x - 5 = 0$. **3.99.** 1) (5; 6); 2) $(\frac{1}{4}; \frac{1}{3})$; 3) $(2; -\frac{1}{11})$; 4) $(-\frac{5}{3}; 2)$.

3.102. 1) $m = -4$, $n \neq 2$ или $m = 4$, $n \neq -2$; 2) $m = -4$, $n = 2$ или $m = 4$, $n = -2$;

3) $m = 0$, где n — любое значение. **3.103.** $m = \frac{7}{12}$. **3.104.** 1) пересекаются; 2) не

пересекаются. **3.105.** $a = -7$. **3.106.** 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 3) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$;

$$4) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad 5) \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1; \quad 6) \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1; \quad 7) \frac{x^2}{5} + y^2 = 1; \quad 8) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1;$$

$$9) \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{117/4} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad 10) \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1. \quad \mathbf{3.107.} \quad 1) 4 \text{ и } 3; \quad 2) 2 \text{ и } 1;$$

$$3) 5 \text{ и } 1; \quad 4) \sqrt{15} \text{ и } \sqrt{3}; \quad 5) \frac{5}{2} \text{ и } \frac{5}{3}; \quad 6) \frac{1}{3} \text{ и } \frac{1}{5}. \quad \mathbf{3.108.} \quad 1) 5 \text{ и } 3; \quad 2) F_1(-4; 0), F_2(4; 0);$$

$$3) \varepsilon = \frac{4}{5}; \quad 4) x = \pm \frac{25}{4}. \quad \mathbf{3.109.} \quad 16 \text{ кв. ед.} \quad \mathbf{3.110.} \quad (-3; -\frac{8}{5}), (-3; \frac{8}{5}). \quad \mathbf{3.111.} \quad \text{Точки } A_1 \text{ и } A_6$$

лежат на эллипсе; A_2, A_4 и A_8 — внутри эллипса; A_3, A_5, A_7, A_9 и A_{10} — вне эллипса.

$$\mathbf{3.113.} \quad 20. \quad \mathbf{3.114.} \quad 10. \quad \mathbf{3.115.} \quad (-5; 3\sqrt{3}) \text{ и } (-5; -3\sqrt{3}).$$

$$\mathbf{3.116.} \quad 1) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad 2) \frac{x^2}{16} + \frac{3y^2}{16} = 1; \quad 3) \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1; \quad 4) \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

$$5) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1; \quad 6) \frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{192} = 1; \quad 7) \frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1. \quad \mathbf{3.117.} \quad \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1.$$

$$\mathbf{3.118.} \quad \frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1. \quad \mathbf{3.119.} \quad 1) C(3; -1), \text{ полуоси } 3 \text{ и } \sqrt{5}, \quad \varepsilon = \frac{2}{3}; \text{ уравнения}$$

$$\text{директрис: } 2x-15=0, 2y+3=0; \quad 2) C(-1; 2), \text{ полуоси } 5 \text{ и } 4, \quad \varepsilon = \frac{3}{5}; \text{ уравнения дирек-$$

$$\text{трис: } 3x-22=0; 3x+28=0; \quad 3) C(1; -2), \text{ полуоси } 2\sqrt{3} \text{ и } 4, \quad \varepsilon = \frac{1}{2};$$

$$a2xy + 2y^2 - 3 = 0; \quad 3) 68x^2 + 48xy + 82y^2 - 625 = 0;$$

$$4) 11x^2 + 2xy + 11y^2 - 48x - 48y - 24 = 0. \quad \mathbf{3.122.} \quad 4x^2 + 3y + 32x - 14y + 59 = 0.$$

$$\mathbf{3.123.} \quad 4x^2 + 5y^2 + 14x + 40y + 81 = 0. \quad \mathbf{3.124.} \quad (4; \frac{3}{2}), (3; 2). \quad \mathbf{3.125.} \quad 1) \text{ Прямая пересекает}$$

эллипс; 2) проходит вне эллипса; 3) касается эллипса. $\mathbf{3.126.}$ 1) При $|m| < 5$ — пересекает эллипс;

2) при $m = \pm 5$ — касается эллипса; 3) при $|m| > 5$ — проходит вне эллипса.

$$\mathbf{3.127.} \quad 3x + 2y - 10 = 0 \text{ и } 3x + 2y + 10 = 0. \quad \mathbf{3.128.} \quad x + y - 5 = 0 \text{ и } x + y + 5 = 0.$$

$$\mathbf{3.129.} \quad M_1(-3; 2); d = \sqrt{13}. \quad \mathbf{3.130.} \quad x + y - 5 = 0 \text{ и } x + 4y - 10 = 0. \quad \mathbf{3.131.} \quad 4x - 5y - 10 = 0.$$

$$\mathbf{3.132.} \quad \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{80} + \frac{4y^2}{5} = 1. \quad \mathbf{3.133.} \quad \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1. \quad \mathbf{3.134.} \quad \frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

$$\mathbf{3.135.} \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1. \quad \mathbf{3.135.} \quad (3; 2) \text{ и } (3; -2). \quad \mathbf{3.137.} \quad 1) x^2 + y^2 = 9; \quad 2) (x-2)^2 + (y+3)^2 = 49;$$

$$3) (x-6)^2 + (y+8)^2 = 100; \quad 4) (x+1)^2 + (y-2)^2 = 25; \quad 5) (x-1)^2 + (y-4)^2 = 8;$$

$$6) x^2 + y^2 = 16; \quad 7) (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4; \quad 8) (x-2)^2 + (y-4)^2 = 10; \quad 9) (x-1)^2 + y^2 = 1;$$

$$10) (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25. \quad \mathbf{3.140.} \quad (x-4)^2 + (y+1)^2 = 5 \text{ и } (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5.$$

$$\mathbf{3.141.} \quad (x+2)^2 + (y+1)^2 = 20. \quad \mathbf{3.142.} \quad (x-5)^2 + (y+2)^2 = 20 \text{ и } (x-\frac{9}{5})^2 + (y-\frac{22}{5})^2 = 0.$$

3.143. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$. **3.144.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ и $(x-\frac{22}{5})^2 + (y+\frac{31}{5})^2 = \frac{289}{5}$.

3.145. Уравнения 1), 2), 4), 5), 8) и 10) определяют окружности; 1) $C(5; -2)$, $R = 5$; 2) $C(-2; 0)$, $R = 8$; 3) уравнение определяет единственную точку $(5; -2)$; 4) $C(0; 5)$, $R = \sqrt{5}$; 5) $C(1; -2)$, $R = 5$; 6) уравнение не определяет никакого геометрического образа на плоскости; 7) уравнение определяет единственную точку $(-2; 1)$;

8) $C(-\frac{1}{2}; 0)$, $R = \frac{1}{2}$; 9) уравнение не определяет никакого геометрического образа на плоскости; 10) $C(0; -\frac{1}{2})$, $R = \frac{1}{2}$. **3.147.** 1) Вне окружности; 2) на окружности; 3) внутри окружности; 4) на окружности; 5) внутри окружности. **3.148.** $2x - 5y + 19 = 0$.

3.149. $M_1(-1; 5)$ и $M_2(-2; -2)$. **3.150.** 1) Пересекает окружность; 2) касается окружности; 3) проходит вне окружности. **3.151.** 1) $|k| < \frac{3}{4}$; 2) $k = \pm \frac{3}{4}$; 3) $|k| > \frac{3}{4}$.

3.152. $\frac{b^2}{1+k^2} = R^2$. **3.153.** $x^2 + y^2 + 6x - 9y - 17 = 0$. **3.154.** $7x - 4y = 0$.

3.155. $x - 2y + 5 = 0$. **3.156.** $x_1x + y_1y = R^2$. **3.157.** 45° . **3.158.** 90° . **3.159.** 90° .

3.160. $x + 2y + 5 = 0$. **3.161.** $d = 7,5$. **3.162.** 3. **3.163.** $2x + y - 1 = 0$ и $2x + y + 19 = 0$.

3.164. 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 4) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; 5) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$; 6) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$; 7) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 8) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 9) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

3.165. 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{324} = -1$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$; 3) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1$; 4) $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{25} = -1$;

5) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$. **3.166.** 1) $a = 3, b = 2$; 2) $a = 4, b = 1$; 3) $a = 4, b = 2$; 4) $a = 1, b = 1$;

5) $a = \frac{5}{2}, b = \frac{5}{3}$; 6) $a = \frac{1}{5}, b = \frac{1}{4}$. **3.167.** 1) $a = 3, b = 4$; 2) $F_2(-5; 0), F_2(5; 0)$;

3) $\varepsilon = \frac{5}{3}$; 4) $y = \pm \frac{4}{3}x$; 5) $x = \pm \frac{9}{5}$. **3.168.** 12 кв. ед. **3.170.** 12. **3.171.** 10.

3.172. $(-6; 4\sqrt{3})$ и $(-6; -4\sqrt{3})$. **3.173.** 1) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$; 2) $x^2 - y^2 = 16$;

3) $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$; 4) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ или $\frac{x^2}{\frac{61}{9}} - \frac{y^2}{\frac{305}{16}} = 1$; 5) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

3.174. $\varepsilon = \sqrt{2}$. **3.175.** $\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{40} = 1$. **3.176.** 1) $C(2; -3)$, $a = 3, b = 4, \varepsilon = 5/3$, уравнения директрис: $5x - 1 = 0, 5x - 19 = 0$, уравнения асимптот: $4x - 3y - 17 = 0, 4x + 3y + 1 = 0$;

2) $C(-5; 1)$, $a = 8$, $b = 6$, $\varepsilon = 1,25$; уравнения директрис: $x = -11,4$ и $x = 1,4$, уравнения асимптот: $3x + 4y + 11 = 0$ и $3x - 4y + 19 = 0$; 3) $C(2; -1)$, $a = 3$, $b = 4$, $\varepsilon = 1,25$, уравнения директрис: $y = -4,2$, $y = 2,2$, уравнения асимптот: $4x + 3y - 5 = 0$, $4x - 3y - 11 = 0$.

3.178. 1) $\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$; 2) $24xy + 7y^2 - 144 = 0$; 3) $2xy + 2x - 2y + 7 = 0$.

3.179. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **3.180.** 1) $C(0; 0)$, $a = b = 6$, уравнения асимптот: $x = 0$ и $y = 0$;

2) $C(0; 0)$, $a = b = 3$, уравнения асимптот: $x = 0$ и $y = 0$; 3) $C(0; 0)$, $a = b = 5$, уравнения асимптот: $x = 0$ и $y = 0$. **3.181.** $(\frac{25}{4}; 3)$ — прямая касается гиперболы.

3.182. 1) Касается гиперболы; 2) пересекает гиперболу в двух точках; 3) проходит вне гиперболы. **3.183.** 1) При $|m| > 4,5$ — пересекает гиперболу; 2) при $m = \pm 4,5$ — касается гиперболы; 3) при $|m| < 4,5$ — проходит вне гиперболы. **3.184.** $k^2 a^2 - b^2 = m^2$.

3.185. $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$. **3.186.** $5x - 3y - 16 = 0$, $13x + 5y + 48 = 0$.

3.187. $2x + 5y - 16 = 0$. **3.188.** $d = \frac{17}{10}\sqrt{10}$. **3.189.** $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{45} = 1$, $\frac{3x^2}{10} - \frac{4y^2}{45} = 1$.

3.190. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. **3.191.** $x = -4$, $x = 4$, $y = -1$, $y = 1$. **3.192.** $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$.

3.193. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **3.194.** 1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = -x$; 3) $x^2 = \frac{1}{2}y$; 4) $x^2 = -6y$.

3.195. 1) $p = 3$; в правой полуплоскости симметрично оси Ox ; 2) $p = 2,5$; в верхней полуплоскости симметрично оси Oy ; 3) $p = 2$; в левой полуплоскости симметрично оси Ox ; 4) $p = \frac{1}{2}$; в нижней полуплоскости симметрично оси Oy . **3.196.** 1) $y^2 = 4x$;

2) $y^2 = -9x$; 3) $x^2 = y$; 4) $x^2 = -2y$. **3.197.** $x^2 = -12y$. **3.199.** $F(6; 0)$, $x + 6 = 0$.

3.200. 12. **3.201.** $y^2 = -28x$. **3.202.** 1) $A(2; 0)$, $p = 2$, $x - 1 = 0$; 2) $A(\frac{2}{3}; 0)$, $p = 3$,

$6x + 11 = 0$; 3) $A(0; -\frac{1}{3})$, $p = 3$, $6y - 13 = 0$; 4) $A(0; 2)$, $p = \frac{1}{2}$; $4y - 9 = 0$.

3.203. 1) $A(-2; 1)$, $p = 2$; 2) $A(1; 3)$, $p = \frac{1}{8}$; 3) $A(6; -1)$, $p = 3$. **3.204.** 1) $A(-4; 3)$, $p = \frac{1}{4}$;

2) $A(1; 2)$, $p = 2$; 3) $A(0; 1)$, $p = \frac{1}{2}$. **3.206.** $x = \frac{1}{4}y^2 - y + 7$.

3.207. $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$. **3.208.** $F(9; -8)$.

3.209. $(-4; 6)$ — прямая касается параболы. **3.210.** 1) Касается параболы; 2) пересекает параболу в двух точках; 3) проходит вне параболы. **3.211.** 1) $k < \frac{1}{2}$; 2) $k = 1/2$;

3) $k > 1/2$. **3.212.** $p = 2bk$. **3.213.** $x + y + 2 = 0$. **3.214.** $2x - y - 16 = 0$. **3.215.** $d = 2\sqrt{13}$.

3.216. $3x - y + 3 = 0$ и $3x - 2y + 12 = 0$. **3.217.** $5x - 18y + 25 = 0$. **3.218.** $(6; 12)$ и $(6; -12)$.

3.219. $(10; \sqrt{30})$, $(10; -\sqrt{30})$, $(2; \sqrt{6})$, $(2; -\sqrt{6})$. **3.220.** $(2; 1)$, $(-1; 4)$,

$(\frac{3+\sqrt{13}}{2}; \frac{7+\sqrt{13}}{2})$ и $(\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{7-\sqrt{13}}{2})$. **3.221.** $x-2y+3z+3=0$.
3.222. $2x-y-z-6=0$ **3.223.** $x-y-3z+2=0$. **3.224.** $x+4y+7z+16=0$.
3.225. $x-y-z=0$. **3.226.** $3x+3y+z-8=0$.
3.227. 1) $\vec{n} = \{2; -1; -2\}$, $\vec{n} = \{2\lambda; -\lambda; -2\lambda\}$; 2) $\vec{n} = \{1; 5; -1\}$, $\vec{n} = \{\lambda; 5\lambda; -\lambda\}$;
3) $\vec{n} = \{3; -2; 0\}$, $\vec{n} = \{3\lambda; -2\lambda; 0\}$; 4) $\vec{n} = \{0; 5; -3\}$, $\vec{n} = \{0; 5\lambda; -3\lambda\}$;
5) $\vec{n} = \{1; 0; 0\}$, $\vec{n} = \{\lambda; 0; 0\}$. 6) $\vec{n} = \{0; 1; 0\}$, $\vec{n} = \{0; \lambda; 0\}$. **3.228.** 1) и 3)
3.229. 1) и 2) **3.230.** 1) $l=3, m=-4$; 2) $l=3, m=-\frac{2}{3}$; 3) $l=-3, m=-1\frac{1}{5}$.
3.231. 1) 6; 2) -19; 3) $-\frac{1}{7}$. **3.232.** 1) $\frac{1}{3}\pi$ и $\frac{2}{3}\pi$; 2) $\frac{1}{4}\pi$ и $\frac{3}{4}\pi$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos \frac{2}{15}$ и
 $\pi - \arccos \frac{2}{15}$. **3.233.** $4x-3y+2z=0$. **3.234.** $7x-y-5z=0$. **3.235.** $4x-y-2z-9=0$.
3.236. $x=1$; $y=-2$; $z=2$. **3.239.** 1) $a \neq 7$; 2) $a=7, b=3$; 3) $a=7, b \neq 3$.
3.240. 1) $z-3=0$; 2) $y+2=0$; 3) $x+5=0$. **3.241.** 1) $2y+z=0$; 2) $3x+z=0$;
3) $4x+3y=0$. **3.242.** 1) $y+4z+10=0$; 2) $x-z-1=0$; 3) $5x+y-13=0$. **3.243.** $(12; 0; 0)$,
 $(0; -8; 0)$, $(0; 0; -6)$. **3.244.** $a=-4, b=3, c=\frac{1}{2}$. **3.245.** 240 кв.ед. **3.246.** 8 куб.ед.
3.247. $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1$. **3.248.** $\frac{x}{-3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-\frac{3}{2}} = 1$. **3.249.** $x+y+z+5=0$.
3.250. $2x-21y+2z+88=0$, $2x-3y-2z+12=0$. **3.251.** $x+y+z-9=0$,
 $x-y-z+1=0$, $x-y+z-3=0$, $x+y-z-5=0$. **3.252.** $2x-y-3z-15=0$.
3.253. $2x-3y+z-6=0$. **3.254.** $x-3y-2z+2=0$.
3.255. $\begin{cases} 5x-7y-3=0 \\ z=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 5x+2z-3=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 7y-2z+3=0 \\ x=0 \end{cases}$.
3.256. $\begin{cases} 3x-y-7z+9=0 \\ 5x+2z=0 \end{cases}$. **3.257.** $(2; -1; 0)$; $(1\frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{3})$; $(0; 2; -1)$.
3.259. 1) $D=-4$; 2) $D=9$; 3) $D=3$. **3.260.** 1) $A_1=A_2=0$ и хотя бы одно из чисел D_1 ,
 D_2 отлично от нуля; 2) $B_1=B_2=0$ и хотя бы одно из чисел D_1, D_2 отлично от нуля;
3) $C_1=C_2=0$ и хотя бы одно из чисел D_1, D_2 отлично от нуля. **3.261.** 1) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{D_1}{D_2}$;
2) $\frac{B_1}{B_2} = \frac{D_1}{D_2}$; 3) $\frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$; 4) $A_1=D_1=0, A_2=D_2=0$; 5) $B_1=D_1=0, B_2=D_2=0$;
6) $C_1=D_1=0, C_2=D_2=0$. **3.262.** 1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$;
3) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$; 5) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$.

$$3.263. 1) \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}; \quad 2) \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3} \quad 3) \frac{x}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{-2};$$

$$4) \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{0}. \quad 3.264. 1) x=2t+1, y=-3t-1, z=4t-3;$$

$$2) x=2t+1, y=4t-1, z=-3; \quad 3) x=3t+1, y=-2t-1, z=5t-3. \quad 3.265. 1) x=t+2, y=-2t+1, z=t+1; \quad 2) x=t+3, y=-t-1, z=t; \quad 3) x=0, y=t, z=-3t+1. \quad 3.266. (9; -4; 0), (3; 0; -2),$$

$$(0; 2; -3). \quad 3.267. x=5t+4, y=-11t-7, z=-2. \quad 3.268. \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+7}{-8}.$$

$$3.269. \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-7}. \quad 3.270. x=3t+3, y=15t+1, z=19t-3.$$

$$3.271. \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+5}{-5}. \quad 3.272. 1) \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}.$$

Решение. Полагая, например, $z_0=0$, находим из данной системы: $x_0=2, y_0=-1$; таким образом мы уже знаем одну точку прямой; $M_0(2; -1; 0)$. Теперь найдём направляющий вектор. Имеем $n_1=\{1; -2; 3\}$, $n_2=\{3; 2; -5\}$; отсюда $a=[n_1, n_2]=\{4; 14; 8\}$, т.е. $l=4, m=14, n=8$. Канонические уравнения данной прямой мы получим, подставляя найденные значения

$$x_0, y_0, z_0 \text{ и } l, m, n \text{ в равенства } \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}; \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8} \text{ или}$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}; \quad 2) \frac{x}{-5} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-1}{13}. \quad 3.273. 1) x=t+1, y=-7t, z=-19t-3;$$

$$2) x=-t+1, y=3t+2, z=5t-1. \quad 3.276. 60^\circ. \quad 3.277. 135^\circ. \quad 3.278. \cos \varphi = \pm \frac{4}{21}.$$

$$3.280. a=3. \quad 3.281. \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}. \quad 3.282. \frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}.$$

$$3.283. 1) 2x+15y+7z+7=0; \quad 2) 9y+3z+5=0; \quad 3) 3x+3z-2=0; \quad 4) 3x-9y-7=0.$$

$$3.284. 1) 23x-2y+21z-33=0; \quad 2) y+z-18=0; \quad 3) x+z-3=0; \quad 4) x-y+15=0.$$

$$3.285. 5x+5z-8=0. \quad 3.286. 11x-2y-15z-3=0.$$

3.287. $\alpha(5x-y-2z-3)+\beta(3x-2y-5z+2)=0$. Указание. Прямая пересечения плоскостей $5x-y-2z-3=0, 3x-2y-5z+2=0$ перпендикулярна к плоскости $x+19y-7z-11=0$; следовательно, условию задачи будут удовлетворять все плоскости, принадлежащие пучку плоскостей, проходящих через эту прямую. 3.288. $9x+7y+8z+7=0$.

$$3.289. \text{Принадлежит.} \quad 3.290. l=-5, m=-11.$$

$$3.291. 4x-3y+6z-12=0, \quad 12x-49y+38z+84=0. \quad 3.294. 1) (2; -3; 6); \quad 2) \text{ прямая параллельна плоскости; } \quad 3) \text{ прямая лежит на плоскости.}$$

$$3.295. \frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}. \quad 3.296. 2x-3y+4z-1=0. \quad 3.297. x+2y+3z=0.$$

$$3.298. m=-3. \quad 3.299. C=-2. \quad 3.300. A=3, D=-23. \quad 3.301. A=-3, B=4\frac{1}{2}.$$

$$3.302. l=-6, C=\frac{3}{2}. \quad 3.303. (3; -2; 4). \quad \text{Решение. Искомую точку найдём, решая}$$

совместно уравнения данной прямой с уравнением плоскости, проведённой из точки P перпендикулярно к этой прямой. Прежде всего заметим, что направляющий вектор

данной прямой $\{3; 5; 2\}$ будет являться нормальным вектором искомой плоскости. Уравнение плоскости, которая проходит через точку $P(2; -1; 3)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = \{3; 5; 2\}$, будет иметь вид $3(x-2) + 5(y+1) + 2(z-3) = 0$ или $3x + 5y + 2z - 7 = 0$.

Решая совместно уравнения
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 5t - 7 \\ z = 2t + 2, \\ 3x + 5y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$
 найдём координаты искомой проек-

ции $x=3, y=-2, z=4$. **3.304.** $Q(2; -3; 2)$. **3.305.** $Q(4; 1; -3)$. **3.306.** $(1; 4; -7)$.

Р е ш е н и е. Искомую точку найдём, решая совместно уравнение данной плоскости с уравнениями прямой, проведённой из точки P перпендикулярно к этой плоскости. Прежде всего заметим, что нормальный вектор данной плоскости $\{2; -1; 3\}$ будет являться направляющим вектором искомой прямой. Параметрические уравнения прямой, которая проходит через точку $P(5; 2; -1)$ и имеет направляющий вектор $\vec{a} = \{2; -1; 3\}$ будут иметь вид: $x = 2t + 5, y = -t + 2, z = 3t - 1$. Решая совместно уравнения

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 23 = 0, \\ x = 2t + 5 \\ y = -t + 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases}$$
 найдем координаты искомой проекции: $x=1, y=4, z=-7$.

3.307. $Q(-5; 1; 0)$. **3.308.** $P(3; -4; 0)$. **У к а з а н и е.** Задача может быть решена по следующей схеме: 1) устанавливаем, что точки A и B расположены по одну сторону от плоскости Ox ; 2) Находим точку, симметричную одной из данных точек относительно плоскости Oxy ; например, точку B_1 симметричную точке B ; 3) Составляем уравнение прямой, проходящей через точки A и B_1 ; 4) Решая совместно найденные уравнения прямой с уравнением плоскости Oxy , получим координаты искомой точки.

3.309. 1) 21; 2) 6; 3) 15. **3.310.** $d = 25$. **3.311.** $9x + 11y + 5z - 16 = 0$. **3.312.** $4x + 6y + 5z - 1 = 0$. **3.314.** $6x - 20y - 11z + 1 = 0$. **3.315.** $(2; -3; -5)$. **3.316.** $Q(1; -2; 2)$. **3.317.** $13x - 14y + 11z + 51 = 0$. **3.318.** $x - 8y - 13z + 9 = 0$.

Глава 4

4.1. а) $(0; +\infty)$; б) $[0; +\infty)$ при $p < 0$, $(-\infty; 0]$ при $p > 0$, $(-\infty; +\infty)$ при $p = 0$;

в) $(-\infty; 0) \cup (0; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; г) $[-1; 1]$; д) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$;

е) $(0; 3) \cup (3; +\infty)$. **4.2.** а) $(-3; 3) \cup (3; +\infty)$; б) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$; в) $[-3; 1) \cup (1; 3]$;

г) $x \neq \frac{\pi k}{3}$, или $\left(\frac{\pi k}{3}; \frac{\pi(k+1)}{3}\right)$, $k \in Z$; д) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; е) $[0; 2]$.

4.3. а) $\left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$; б) $\{1\}$; в) $(-1; 0) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$;

г) $(3 - 2\pi; 3 - \pi) \cup (3; 4]$; д) $[-4; -\pi] \cup [0; \pi]$; е) нигде не определена ($D(y) = \emptyset$).

4.4. а) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $[-1; 1]$; г) $x \neq \frac{\pi k}{2}$, или $\left(\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi(k+1)}{2}\right)$, $k \in Z$;

д) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, или $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$; е) $\left[\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right]$, $k \in Z$.

4.5. а) $[1; +\infty)$; б) $[1; +\infty)$; в) $[1; 7]$; г) $\left(-\frac{\pi^2}{2}; \frac{\pi^2}{2}\right)$; д) $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$; е) $(3; +\infty)$.

4.6. а) $\left(\frac{1}{64}; 0\right)$; б) $(-\infty; -1)$; в) $\left[0; \frac{1}{7}\right]$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; е) $\{-1; 1\}$.

4.7. а) нечетная; б) четная; в) общего вида; г) четная; д) общего вида; е) нечетная. 4.8. а) нечетная; б) нечетная; в) общего вида; г) нечетная; д) четная; е) четная. 4.9. а) периодическая, наименьший положительный период $T = 8\pi$;

б) не является периодической; в) периодическая, $T = \frac{\pi}{2}$; г) периодическая, $T = 12\pi$;

д) периодическая, $T = \frac{\pi}{3}$; е) периодическая, $T = \pi$. 4.10. а) периодическая, $T = \pi$;

б) не является периодической; в) периодическая, $T = \frac{\pi}{2}$; г) не является периодической; д) периодическая, $T = \pi$; е) не является периодической; ж) периодическая,

$T = 6\pi$. 4.11. а) x^9 , $x^3 - 1$, $(x-1)^3$; б) e^{e^x} , x , x ; в) $9x + 4$, $15x + 2$, $15x - 8$;

г) $|x|$, $\cos|x|$, $|\cos x|$; д) $\frac{x-3}{10-3x}$, $4-x$, $-\frac{x}{2x+1}$; е) $\operatorname{sign} x$, -2 , -1 ; ж) $[x]$, $\frac{1}{[x]^2 + 1}$,

$\begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0 \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$. 4.12. а) $y = x$; б) $y = \frac{6-x}{3}$; в), г) функция не имеет обратной в

естественной области определения; д) $y = \sqrt[3]{\frac{x-5}{2}}$; е) $y = \frac{2}{1-x}$. 4.13. а) $y = 5 + \log_4 x$;

б), г) функция не имеет обратной в естественной области определения;

в) $y = \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{при } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$; д) $y = -2 + 10^{x-1}$; е) $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$.

4.14. а) монотонна, ограничена; б) ограничена; в) строго монотонна (возрастающая), ограничена; г) строго монотонна (возрастающая); д) не является ни монотонной, ни ограниченной; е), ж) строго монотонна (возрастающая). 4.15. а) ограничена; б) ограничена; в) строго монотонна (убывающая); г) не является ни монотонной, ни ограниченной; д) монотонна (неубывающая); е) строго монотонна (убывающая); ж) ограничена.

Глава 5

5.2. а) $x_n = \frac{1}{2n-1}$; б) $x_n = \frac{1}{n^3}$; в) $x_n = \frac{n+1}{n+2}$; г) $x_n = \frac{n+1}{n}$; д) $x_n = (-1)^n$.

5.3. а) $x_n = (-1)^n + 3$; б) $x_n = (-1)^n(n^2 + 1)$; в) $x_n = \frac{1}{3n-1}$; г) $x_n = \frac{1}{(n+1)!}$;

д) $x_n = \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$. 5.4. а) ограничена снизу, строго монотонна (возрастает);

б) ограничена сверху, строго монотонна (убывает); в) ограничена, не является монотонной; г) ограничена сверху, строго монотонна (убывает); д) ограничена, строго монотонна (убывает). 5.5. а) не является ни ограниченной сверху, ни ограниченной снизу, ни монотонной; б) ограничена, строго монотонна (убывает); в) ограничена снизу, не является монотонной; г) строго монотонна (убывает), начиная со второго члена; д) ограничена, не является монотонной.

5.9. $\frac{1}{6}$; 5.10. $-\frac{1}{2}$; 5.11. ∞ ; 5.12. 0; 5.13. $-\frac{1}{5}$; 5.14. 0; 5.15. $\frac{5}{8}$; 5.16. $\frac{1}{6}$; 5.17. $-\frac{4}{3}$;

5.18. $-\frac{7}{4}$; 5.19. $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 5.20. ∞ ; 5.21. 0; 5.22. ∞ ; 5.23. 1; 5.24. -1; 5.25. $\sqrt{2}$;

5.26. 5; 5.27. $\frac{1}{2}$; 5.28. $\frac{4}{3}$; 5.29. $\frac{1}{2}$; 5.30. 3; 5.31. 1; 5.32. 0; 5.33. e^2 ; 5.34. e ;

5.35. e^{-4} ; 5.36. 0; 5.41. $\frac{1}{6}$; 5.42. $\frac{1}{2}$; 5.43. $\frac{2}{3}$; 5.44. $\frac{2}{3a}$; 5.45. $\frac{5}{9}$; 5.46. -2; 5.47. $-\frac{3}{2}$;

5.48. $-\sqrt{2}$; 5.49. -2; 5.50. $\frac{5}{4}$; 5.51. $\frac{1}{6}$; 5.52. -1; 5.53. -4; 5.54. 4; 5.55. 2;

5.56. $\frac{3}{2}$; 5.57. 12; 5.58. $\frac{3}{2}$; 5.59. 7; 5.60. $-\frac{1}{\sqrt{7}}$; 5.61. $\frac{\sqrt{7}}{4}$; 5.62. $-\frac{\sqrt{2}}{8}$; 5.63. $\frac{1}{2}$;

5.64. 0; 5.65. $\frac{1}{3}$; 5.66. $-\frac{1}{2}$; 5.67. ∞ ; 5.68. 2; 5.69. 0; 5.70. $\frac{a-c}{2}$; 5.71. 0;

5.72. $\begin{cases} 1 & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ -1 & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$; 5.73. $\begin{cases} -49 & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{3} & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$; 5.74. $\begin{cases} 1 & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ -1 & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$; 5.75. $-\frac{1}{2}$;

5.76. $\begin{cases} \sqrt{2} & \text{при } x \rightarrow +\infty \\ -\sqrt{2} & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases}$; 5.77. 0; 5.78. $-\frac{3}{25}$; 5.79. $\frac{1}{9}$; 5.80. $\frac{4}{9}$; 5.81. $\frac{2}{3}$; 5.82. 2;

5.83. $\frac{25}{9}$; 5.84. 3; 5.85. 3; 5.86. $\frac{1}{2}$; 5.87. $\frac{1}{2}$; 5.88. $\frac{3}{\ln 10}$; 5.89. $\ln 6$; 5.90. $\frac{\ln \frac{8}{7}}{\ln \frac{6}{5}}$; 5.91. 2;

5.92. 2; 5.93. $\ln a$; 5.94. $\ln \frac{6}{3} = \ln 2$; 5.95. e^{10} ; 5.96. $e^{\frac{4}{3}}$; 5.97. e^{15} ;

5.98. $e^{\frac{4}{5}}$; 5.99. e^{-4} ; 5.100. e^{a-b} ; 5.101. \sqrt{e} ; 5.102. $e^{\frac{3}{2}}$; 5.103. e ; 5.104. e ; 5.105. $e^{\frac{26}{3}}$;

5.106. $\frac{1}{4}$; 5.107. -9; 5.108. a ; 5.109. $a \ln a$; 5.110. e^{-1} ; 5.111. $\frac{1}{a} \log_a e$; 5.112. e ;

5.113. 1; 5.114. \sqrt{e} ; 5.115. $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}$; 5.116. $-\frac{\alpha}{\pi}$; 5.117. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; 5.118. 1.

5.119. $\alpha(x) \sim \beta(x)$, при $x \rightarrow 0$; 5.120. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малые одного порядка при $x \rightarrow 0$; 5.121. $\beta(x) = o(\alpha(x))$ при $x \rightarrow 5$;

5.122. $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow 1$; 5.123. $\alpha(x) \sim \beta(x)$, при $x \rightarrow 0$; 5.124. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малые одного порядка при $x \rightarrow 0$; 5.125. 3; 5.126. $\frac{3}{5}$; 5.127. $\frac{2}{3}$;

5.128. $\frac{1}{8}$; 5.129. $-\frac{1}{16}$; 5.130. $\frac{3}{8}$; 5.131. $\frac{1}{4}$; 5.132. $\frac{\pi}{4}$; 5.133. $\frac{1}{12}$;

5.134. $-\frac{1}{2}$; 5.135. $\frac{a^2}{b^2}$; 5.136. 1; 5.137. 1; 5.138. $\frac{3}{4}$; 5.139. $\frac{\ln 7}{\ln 9}$; 5.140. $-\frac{1}{2}$;

5.141. $-\frac{1}{2}$; 5.142. $\frac{3}{5}$; 5.143. $-\frac{1}{2}$; 5.144. $\frac{9}{25}$; 5.145. 1,6; 5.146. $\frac{1}{8}$; 5.147. $\frac{2}{9}$;

5.148. -2; 5.149. e^{-2} ; 5.150. 1; 5.151. $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 5.152. $e^{\frac{2}{\pi}}$. 5.153. $f(a-0) = 0$,

$f(a+0) = +\infty$; 5.154. $f(3-0) = \frac{1}{3}$, $f(3+0) = 0$; 5.155. а) $f(1-0) = -2 = f(1)$,

$f(1+0) = 0$; б) $f(10-0) = f(10+0) = f(10) = 1$; 5.156. $f(1-0) = -2$, $f(1+0) = 2$;

5.157. $f(-0) = -\sqrt{2}$, $f(+0) = \sqrt{2}$; 5.158. $f(1-0) = 3$, $f(1+0) = 4$;

5.159. $f(2-0) = -\infty$, $f(2+0) = +\infty$; 5.160. $f(-0) = \frac{1}{2}$, $f(+0) = 0$;

5.161. $f(-0) = -\frac{\pi}{2}$, $f(+0) = \frac{\pi}{2}$; 5.162. $f(\frac{\pi}{2}-0) = +\infty$, $f(\frac{\pi}{2}+0) = -\infty$;

5.163. $f(-0) = -1$, $f(+0) = 1$; 5.164. $f(2-0) = 1$, $f(2+0) = 2$; 5.165. $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = +\infty$; 5.166. функция не имеет односторонних пределов в точке $x_0 = 0$;

5.167. $f(\frac{\pi}{4}-0) = +\infty$, $f(\frac{\pi}{4}+0) = 0$; 5.168. $f(\frac{\pi}{2}-0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}+0) = 2$;

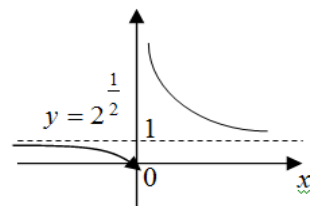
5.169. $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{2}|\sin x|}{x} = -\sqrt{2}$; 5.170. $-\frac{1}{2}$; 5.171. $-\sqrt{2\pi}$; 5.172. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; 5.173. $\frac{1}{2}$.

5.178. а) $y = \begin{cases} -1 & \text{при } x < -1, \\ 1 & \text{при } x > -1 \end{cases}$; б) $y = \begin{cases} x-1 & \text{при } x < -1, \\ x+1 & \text{при } x > -1 \end{cases}$. При $x = 1$ функции имеют

разрыв первого рода (выполнено только первое условие непрерывности);

5.179. $x = 0$ – точка устранимого разрыва, не выполнено только третье условие непрерывности; 5.180. $x = 0$ – точка разрыва I рода, $\lim_{x \rightarrow +0} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$

(см. рис); 5.181. $x = 0$ – точка разрыва II рода;

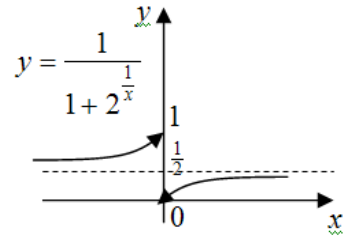


точ-

5.182. $x = \frac{2n-1}{2}\pi$ (n – целое) – точки разрыва II рода;

5.183. $x = \pm 2$ – точки разрыва II рода; **5.184.** $x = 0$ – точка разрыва I рода, $f(+0) = 0$, $f(-0) = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2} \text{ (см. рис.)};$$



5.185. $x = a$ – точка разрыва I рода, $f(a+0) = \frac{\pi}{2}$,

$$f(a-0) = -\frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \text{ **5.186.** } f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{при } x < 1, \\ \frac{x^2}{2} & \text{при } x > 1 \end{cases}, x = 1 -$$

точка разрыва I рода, $f(1+0) = \frac{1}{2}$, $f(1-0) = -\frac{1}{2}$; **5.187.** $x = 0$, $x = 1$ – точки разрыва

II рода; **5.188.** $x = 1$ – точка разрыва I рода, скачок функции в точке равен 1;

5.189. $x = 2$ – точка разрыва I рода, скачок функции в точке равен 2; **5.190.** $x = -2$ – точка разрыва I рода, скачок функции в точке равен 2; **5.191.** $x = -1$ – точка разрыва I рода, скачок функции в точке равен -4; $x = 0$ – точка разрыва I рода; **5.192.** $x = 0$ –

точка устранимого разрыва, $f^*(0) = 1$, **5.193.** $x = \frac{\pi}{4}$ – точка разрыва I рода, скачок

функции в точке равен $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, в точках $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \pi$ функция непрерывна слева, в

точке $x = \frac{\pi}{2}$ функция непрерывна справа; **5.194.** $x = 0$ – точка устранимого разрыва, $f^*(0) = n$;

5.195. $x = 1$ – точка разрыва II рода; **5.196.** $x = 5$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{N}$) – точки разрыва

II рода; $x = 0$ – точка устранимого разрыва, $f^*(0) = \frac{\arctg \frac{1}{3}}{5}$; **5.197.** $x = -2$, $x = -3$ –

точки разрыва II рода; $x = -1$ – точка устранимого разрыва, $f^*(-1) = \frac{1}{2}$.

5.198. $x = \pm 1$, $x = \pm 25$ – точки разрыва II рода;

Глава 6

6.1. 0,51. **6.2.** $-\frac{1}{21}$. **6.3.** 0,1. **6.4.** 0,014. **6.5.** $\Delta y = 3\Delta x$. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$.

6.6. $\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x$. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 2$.

6.7. $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right). \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x.$
6.8 $\Delta y = \log_2 \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right). \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln 2}.$ **6.9** $\Delta y = -\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{(x + \Delta x)^2 x^2}. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2}{x^3}.$
6.11. $3x^2 - 8x + 5.$ **6.12.** $2x^5 - 16x^3 + 4x.$ **6.13.** $1, 5.$ **6.14.** $8x - 12.$
6.15. $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^3} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x^5}}.$ **6.16.** $-\frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{12}{x^4}.$ **6.17.** $4x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{4}} + 3x^{\frac{5}{2}}.$
6.18. $-2x^{\frac{5}{4}} + x^{\frac{4}{3}}.$ **6.19.** $-3 \sin x - 2 \cos x.$ **6.20.** $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}.$
6.21. $6 \cdot 2^x \ln 2 + 3 \cdot 4^x \ln 4.$ **6.22.** $2x \cos x - x^2 \sin x.$ **6.23.** $2 \sin x + (2x + 3) \cos x.$
6.24. $(x^2 + 4x + 5)e^x.$ **6.25.** $3 \ln x + \frac{3x - 2}{x}.$ **6.26.** $e^x (\cos x - \sin x).$
6.27. $\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$ **6.28.** $2x \operatorname{arctg} x + 1.$ **6.29.** $-\sin 2x.$ **6.30.** $\frac{4}{(2x - 1)^2}.$
6.31. $\frac{3 + 2x - 2x^2}{(x^2 + x + 1)^2}.$ **6.32.** $\frac{\cos x(x^2 + 1) - 2x \sin x}{(x^2 + 1)^2}.$ **6.33.** $\frac{-\sin x - 1}{(1 + \sin x)^2}.$
6.34. $\frac{1}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}.$ **6.35.** $\frac{2^{x+1} \ln 2}{(2^x + 1)^2}.$ **6.36.** $\frac{x^2 + 1 + \ln x - x^2 \ln x}{(x^2 + 1)^2}.$
6.37. $2x \cos x \log_2 x + \frac{x \cos x}{\ln 2} - x^2 \log_2 x \sin x.$ **6.38.** $\frac{8}{3}.$ **6.39.** $2.$ **6.40.** $-3.$ **6.41.** $-2.$
6.42. $\frac{2}{3}.$ **6.43.** $-1.$ **6.44.** $-\frac{4}{3}.$ **6.45.** $-1.$ **6.46.** $3 \cos 3x.$ **6.47.** $b \sin(a - bx).$
6.48. $\frac{2,5}{\sqrt{5x - 1}}.$ **6.49.** $\frac{4}{3}(2x + 3)^{\frac{1}{3}}.$ **6.50.** $\frac{6}{6x + 5}.$ **6.51.** $\frac{-3}{\sqrt{6x - 9x^2}}.$ **6.52.** $\frac{-3}{\sin^2 3x}.$
6.53. $(2^x - 2^{-x}) \ln 2.$ **6.54.** $\frac{3 \ln^2 x}{x}.$ **6.55.** $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$ **6.56.** $(2 - 2x)e^{2x - x^2}.$
6.57. $10^{\sin x} \ln 10 \cos x.$ **6.58.** $-2x e^{-x^2}.$ **6.59.** $e^{-x^2} (1 - 2x^2).$ **6.60.** $12(2x + 4)^5.$
6.61. $\frac{3 \arcsin^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 - x}}.$ **6.62.** $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}.$ **6.63.** $\frac{2}{1 - x^2}.$ **6.64.** $e^{2x} (2 \cos 3x - 3 \sin 3x).$
6.65. $-3^{\cos^2 x} \ln 3 \sin 2x.$ **6.66.** $(10^{-x} - 10^x) \ln 10 \cdot \sin(10^x + 10^{-x}).$
6.67. $\frac{2 \sin x \cos^2 x + 3 \sin^3 x}{\cos^4 x}.$ **6.68.** $\frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$ **6.69.** $-\sin 4x.$
6.70. $-2(1 + \cos 6x)^{\frac{2}{3}} \sin 6x.$ **6.71.** $8(x^2 - 2x + 3)^3(x - 1).$ **6.72.** $\frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{2x - \sin 2x}}.$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{6.73.} \ 3e^{3x} \cos(e^{3x}). \quad \mathbf{6.74.} \ \frac{-2 \sin 2x}{\cos^2(\cos 2x)}. \quad \mathbf{6.75.} \ \frac{-3 \cdot 5^{\arccos 3x} \ln 5}{\sqrt{1-9x^2}}. \\
& \mathbf{6.76.} \ \frac{(2x+1)e^{\sqrt{x^2+x+2}}}{2\sqrt{x^2+x+2}}. \quad \mathbf{6.77.} \ \frac{x \sin x - \cos x}{\sin^2(x \cos x)}. \quad \mathbf{6.78.} \ 3^{x \ln x} (\ln x + 1) \ln 3. \quad \mathbf{6.79.} \ \frac{4}{4+e^{2x}}. \\
& \mathbf{6.80.} \ \frac{-2x}{(x^2+1)^2}. \quad \mathbf{6.81.} \ \frac{2x + \sin x}{(x^2 - \cos x) \ln 10}. \quad \mathbf{6.82.} \ 4 \cos 4x \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \sin 4x. \\
& \mathbf{6.83.} \ 3^{2x} \cdot 2^x \ln 3 \cdot \ln 2. \quad \mathbf{6.84.} \ -Ae^{-bx} (b \cos(kx+p) + k \sin(kx+p)). \quad \mathbf{6.85.} \ \frac{2x-4}{x^2-4x}. \\
& \mathbf{6.86.} \ \frac{-e^x(3 \sin 3x + \cos 3x) - e^{2x}(3 \sin 3x + 2 \cos 3x)}{(e^x + e^{2x})^2}. \quad \mathbf{6.87.} \ 3 \operatorname{ctg} x. \quad \mathbf{6.88.} \ \frac{1}{x \ln x \ln 2}. \\
& \mathbf{6.89.} \ -3 \operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{x}\right)(1+x^2)^{-1}. \quad \mathbf{6.90.} \ -\frac{\sin \frac{x}{2}}{2\sqrt{\cos x} \cos^2 \frac{x}{2}}. \quad \mathbf{6.91.} \ \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}. \\
& \mathbf{6.92.} \ \frac{8x+9x\sqrt{x}}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}. \quad \mathbf{6.93.} \ \frac{(2+x\sqrt{x+1})^{\frac{2}{3}}(3x+2)}{6\sqrt{x+1}}. \quad \mathbf{6.94.} \ \frac{1}{\sqrt{2x} \sqrt{1-2x}}. \\
& \mathbf{6.95.} \ \frac{(e^x + e^{-x})(\cos x - \sin x)}{e^x \cos x + e^{-x} \sin x}. \quad \mathbf{6.96.} \ \sin x \cdot e^x (2 \cos^2 x + \sin x \cos x - \sin^2 x). \\
& \mathbf{6.97.} \ \frac{(1+2x^2) \cos x - (x+x^3) \sin x}{\sqrt{1+x^2}}. \quad \mathbf{6.98.} \ \frac{e^{-2x} - e^{2x}}{6 + e^{2x} + e^{-2x}}. \\
& \mathbf{6.99.} \ 3(x^2+1)^{3x} \left(\ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1} \right). \quad \mathbf{6.100.} \ (\sin x)^{\cos x - 1} (\cos^2 x - \sin^2 x \ln \sin x). \\
& \mathbf{6.101.} \ (x+1)^{\frac{4}{x}} \left(\frac{4x}{x+1} - 4 \ln(x+1) \right) x^{-2}. \quad \mathbf{6.102.} \ 2x^{\ln x - 1} \cdot \ln x. \\
& \mathbf{6.103.} \ 2(\operatorname{tg} 2x)^{2x} \left(\ln \operatorname{tg} 2x + \frac{4x}{\sin 4x} \right). \quad \mathbf{6.104.} \ (\operatorname{ctg} 3x)^{x^2-x} \left((2x-1) \ln(\operatorname{ctg} 3x) - \frac{6(x^2-x)}{\sin 6x} \right). \\
& \mathbf{6.105.} \ (x)^{x^4+3} (4 \ln x + 1). \quad \mathbf{6.106.} \ (x)^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} (\ln x + 2). \\
& \mathbf{6.107.} \ x^3 e^x \sin 3x \sqrt{x^2+4} \left(\frac{3}{x} + 1 + 3 \operatorname{ctg} 3x + \frac{x}{x^2+4} \right). \\
& \mathbf{6.108.} \ (x+2)^3 \sqrt{x^2+x+1} (2x-1)^{-2} \left(\frac{3}{x+2} + \frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{4}{2x-1} \right). \\
& \mathbf{6.109.} \ \frac{1}{2} \sqrt{x^2 \cos x \sqrt{1+e^x}} \left(\frac{2}{x} - \operatorname{tg} x + \frac{e^x}{2(1+e^x)} \right).
\end{aligned}$$

6.110. $3x^{2x^{3x}} (2x)^{3x} \left(\ln 2x \ln x + \ln x + \frac{1}{3x} \right)$. **6.111.** $\frac{4x}{y-2}$. **6.112.** $\frac{e^y}{2-xe^y}$. **6.113.** $-\frac{1+y^2}{y^2}$.
6.114. $\frac{2x - \sin y}{x \cos y - \sin y}$. **6.115.** $\frac{2xy - y^2 - 3x^2}{2xy + 3y^2 - x^2}$. **6.116.** $\frac{x}{1 + \ln y}$. **6.117.** $-\frac{1}{1 + \sin y}$.
6.118. $\frac{1}{2}$. **6.119.** $\frac{2\sqrt{xy} - y}{4\sqrt{xy} + x}$. **6.120.** $-1; 1$. **6.121.** $-1; 1$. **6.122.** -3 . **6.123.** $-0,5\sqrt{3}$.
6.124. $\frac{17}{24}$. **6.125.** $\frac{4}{3}$. **6.126.** 5 . **6.127.** 3 . **6.128.** 4 . **6.129.** $1,25$.
6.130. $y = -7x + 3$; $y = \frac{1}{7}x + \frac{71}{7}$. **6.131.** $y = \frac{1}{4}x + 1$; $y = -4x + 18$.
6.132. $y = x - 1$; $y = -x + 1$. **6.133.** $y = 2x + 3$; $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. **6.134.** 45^0 ; 135^0 .
6.135. $\arctg \frac{4}{3}$. **6.136.** $\arctg 4$; $\pi - \arctg 4$. **6.137.** 2 . **6.138.** $2 \pm \sqrt{2}$. **6.139.** 1 .
6.140. $-1; 11; 3$. **6.141.** $6c$. **6.142.** $t = 3$ и $t = 5$. **6.143.** $-0,5$. **6.144.** -2 . **6.145.** 1 .
6.146. 3 . **6.147.** 6 . **6.148.** $-0,25$. **6.150.** $27e^2$. **6.151.** 0 . **6.152.** 2 . **6.153.** $\frac{80}{27}$.
6.155. $y' = 3x^2 - 4x + 4$; $y'' = 6x - 4$; $y''' = 6$; $y^{(n)} = 0$ при $n \geq 4$. **6.156.** $y' = 4x^3$;
 $y'' = 12x^2$, $y''' = 24x$, $y^{(4)} = 24$, $y^{(n)} = 0$, при $n \geq 5$. **6.157.** $y^{(n)} = e^x$, $n \geq 1$.
6.158. $y^{(4n+1)} = \cos x$, $y^{(4n+2)} = -\sin x$, $y^{(4n+3)} = -\cos x$, $y^{(4n)} = \sin x$, $n \geq 0$.
6.159. $y^{(4n+1)} = -\sin x$, $y^{(4n+2)} = -\cos x$, $y^{(4n+3)} = \sin x$, $y^{(4n)} = \cos x$, $n \geq 0$.
6.160. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^n (n-1)!}{(1+2x)^n}$, $n \geq 1$.
6.161. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n (-3)(-7)\dots(5-4n)}{4^n} (1-x)^{\frac{1-4n}{4}}$, $n \geq 1$.
6.162. при $\Delta x = 0,5$: $\Delta y = 3,25$, $dy = 3$, $|\Delta y - dy| = 0,25$,
при $\Delta x = 0,1$: $\Delta y = 0,61$, $dy = 0,6$, $|\Delta y - dy| = 0,01$,
при $\Delta x = 0,04$: $\Delta y = 0,2416$, $dy = 0,24$, $|\Delta y - dy| = 0,0016$.
6.163. $\Delta y = 0,2048$, $dy = 0,2$, $|\Delta y - dy| = 0,0048$.
6.164. при $\Delta x = 1$: $\Delta y = 18$, $dy = 11$, $|\Delta y - dy| = 7$,
при $\Delta x = 0,1$: $\Delta y = 1,161$, $dy = 1,1$, $|\Delta y - dy| = 0,061$,
при $\Delta x = 0,01$: $\Delta y = 0,110601$, $dy = 0,11$, $|\Delta y - dy| = 0,000601$.
6.166. $\Delta V = 61,208$, $dV = 60$. **6.167.** $R = 8$. **6.168.** $\frac{4dx}{\sqrt{x}}$. **6.169.** $\frac{dx}{x}$. **6.170.** $\cos x dx$.
6.171. $2^x \ln 2 dx$. **6.172.** $8x^3 dx$. **6.173.** $-\frac{4dx}{x^3}$. **6.174.** $\frac{(4-2x^2)dx}{\sqrt{4-x^2}}$. **6.175.** $x \sin x dx$.

6.176. $-6x(1-x^2)^2 dx$. **6.177.** $\ln x dx$. **6.178.** $\left(\arctg x + \frac{x}{1+x^2}\right) dx$.
6.179. $\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{1+x^2}\right) dx$. **6.180.** $\frac{(4x+3)dx}{1+3x+2x^2}$. **6.181.** $-2xe^{-x^2} dx$. **6.182.** $\frac{4tg^3(x) dx}{\cos^2 x}$.
6.183. $-5 \sin 5x dx$. **6.184.** 19,56. **6.185.** 0,4557. **6.186.** 0,8072. **6.187.** 5,9777.
6.188. 1,4948. **6.189.** 8,0625. **6.190.** 5,0267. **6.191.** 4,0078. **6.192.** 24,92. **6.193.** 1.
6.194. 1,1396. **6.195.** 1. **6.196.** -0,02. **6.197.** $33,3^0$. **6.198.** $47,9^0$. **6.199.** 75,6.
6.200. 0,357.

Глава 7

7.1. $c = 2,25$. **7.2.** нет. **7.3.** Применима. **7.4.** Применима. **7.5.** а) $c = \ln^{-1} 2$;
 б) $c = \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}$. **7.6.** а) $c = \frac{\pi}{4}$; б) $c = \left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$. **7.7.** $c = -0,5$.
7.8. $\arcsin(2x_0 + 2\Delta x) - \arcsin(2x_0) = 2\Delta x(1 - 4c^2)^{-\frac{1}{2}}$, $c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$.
7.10. $y = -9 + 17(x+1) - 9(x+1)^2 + 2(x+1)^3$.
7.11. $y = 7 + 11(x-1) + 10(x-1)^2 + 4 \cdot \xi \cdot (x-1)^3$, где $\xi \in (1, x)$.
7.12. $y = x - \frac{x^3}{6} + R_4(x)$. **7.13.** а) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_5(x)$;
 б) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_5(x)$; в) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_5(x)$;
 г) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + R_5(x)$; д) $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + R_5(x)$.
7.14. а) 0,5; б) 0,25. **7.16.** $\frac{1}{108}$. **7.17.** -1. **7.18.** $\frac{1}{16}$. **7.19.** 4. **7.20.** $-\frac{2}{7}$. **7.21.** $\ln 1,5$.
7.22. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **7.23.** $-\frac{1}{6}$. **7.24.** $\frac{1}{6}$. **7.25.** $\frac{2^{\frac{5}{6}}}{3}$. **7.26.** 2. **7.27.** $0,5 \cdot \ln\left(\frac{5}{3}\right)$. **7.28.** 0. **7.29.** 1.
7.30. $-\frac{1}{3}$. **7.31.** 1. **7.32.** 1. **7.33.** 0. **7.34.** 18. **7.35.** $\ln(0,75)$. **7.36.** 0. **7.37.** 0.
7.38. 1. **7.39.** ∞ . **7.40.** $-\frac{2}{3}$. **7.41.** -2. **7.42.** 0,5. **7.43.** -1. **7.44.** ∞ . **7.45.** $\frac{1}{6}$. **7.46.** 1.
7.47. 1. **7.48.** 1. **7.49.** 1. **7.50.** 1. **7.51.** e^{-2} . **7.52.** 1. **7.53.** 1. **7.54.** Убывает при $x \in (-\infty; 3)$,
 возрастает при $x \in (3; +\infty)$. **7.55.** Убывает при $x \in (-1; 7)$, возрастает при
 $x \in (-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$. **7.56.** Возрастает при всех x . **7.57.** Убывает при $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$,

возрастает при $x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **7.58.** Убывает при $x \in (1; +\infty)$, возрастает при $x \in (-\infty; 1)$.

7.59. Убывает при $x \in (0; +\infty)$, возрастает при $x \in (-\infty; 0)$.

7.60. Убывает при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, возрастает при $x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **7.61.** Убывает при

$x \in (0; +\infty)$, возрастает при $x \in (-\infty; 0)$. **7.62.** Убывает при $x \in \left(0; \frac{1}{e}\right)$, возрастает при

$x \in \left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$. **7.63.** Убывает при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, возрастает при $x \in (-1; 1)$.

7.64. Убывает при $x \in \left(\frac{5}{7}; 3\right)$, возрастает при $x \in \left(-\infty; \frac{5}{7}\right) \cup (3; +\infty)$. **7.65.** Убывает при

$x \in (0; 1) \cup (1; e)$, возрастает при $x \in (e; +\infty)$. **7.66.** Убывает при $x \in \left(\frac{3}{2}; 2\right]$,

возрастает при $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right)$. **7.67.** Убывает при $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, возрастает при $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

7.68. Возрастает при всех x . **7.69.** Убывает при всех x . **7.70.** $x = 2$ — точка минимума.

7.71. $x = 2$ точка максимума. **7.72.** $x = 1$ точка минимума, $x = 0$ не является экстремумом. **7.73.** $x = 2$ точка максимума. **7.74.** $x = 1$ точка максимума, $x = 5$ точка минимума.

7.75. $x = -1$ точка максимума, $x = 3$ точка минимума. **7.76.** $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ точка минимума,

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ точка максимума. **7.77.** $x = 3$ точка минимума. **7.78.** $x = 0$ точка максимума,

$x = 2$ точка минимума. **7.79.** $x = 0$ точка минимума, $x = 6$ точка максимума.

7.80. Экстремумов нет. **7.81.** Экстремумов нет. **7.82.** $x = 2$ точка максимума.

7.83. $x = 0$ точка минимума. **7.84.** $x = 0$ точка максимума. **7.85.** $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ точка

минимума, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ точка максимума. **7.86.** $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ точки минимума,

$x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ точки максимума. **7.87.** $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ точки максимума,

$x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ точки минимума. **7.88.** $x = e$ точка максимума, **7.89.** $x = 0$ точка

минимума. **7.90.** Экстремумов нет. **7.91.** Экстремумов нет. **7.92.** $x = -1$ точка минимума, $x = 1$ точка максимума. **7.93.** Экстремумов нет. **7.94.** $x = \pm 1$ точки максимума.

7.95. $x = 8$ точка максимума.

7.96. Наименьшее значение $y(-2) = -73$, наибольшее значение $y(1) = 8$.

7.97. Наименьшее значение $y(2) = -7$, наибольшее значение $y(4) = 13$.

7.98. Наименьшее значение $y\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{32}{27}$, наибольшее значение $y(2) = 0$.

7.99. Наименьшее значение $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1,75$, наибольшее значение $y(2) = 58$.

- 7.100.** Наименьшее значение $y(2) = -29$, наибольшее значение $y(-2) = 35$.
- 7.101.** Наименьшее значение $y(-2) = -21$, наибольшее значение $y(2) = 7$.
- 7.102.** Наименьшее значение $y(2) = -1$, наибольшее значение $y(0) = 3$.
- 7.103.** Наименьшее значение $y(3) = 2$, наибольшее значение $y(1) = \frac{10}{3}$.
- 7.104.** Наименьшее значение $y(1) = -2$, наибольшее значение $y(0) = 0$.
- 7.105.** Наименьшее значение $y(3) = 4,5$, наибольшее значение $y(2) = 8$.
- 7.106.** Наименьшее значение $y(1) = -3$, наибольшее значение $y(0) = 0$.
- 7.107.** Наименьшее значение $y(1) = -1$, наибольшее значение $y(0) = y(4) = 0$.
- 7.108.** Наименьшее значение $y\left(\frac{1}{4}\right) = 5$, наибольшее значение $y(1) = 7$.
- 7.109.** Наименьшее значение $y(-1) = -1$, наибольшее значение $y(0) = 1$.
- 7.110.** Наименьшее значение $y(3) = \sqrt{7}$, наибольшее значение $y(0) = y(6) = 4$.
- 7.111.** Наименьшее значение $y(2) = \ln 4 - 2$, наибольшее значение $y(1) = \ln 2$.
- 7.112.** Наименьшее значение $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$, наибольшее значение $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.
- 7.113.** Наименьшее значение $y(0) = 0$, наибольшее значение $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$.
- 7.114.** Наименьшее значение $y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{7\pi}{6}\right) = -1,5$, наибольшее значение $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.
- 7.119.** $12 = 6 + 6$. **7.120.** $16 = 4 \cdot 4$. **7.121.** $1 : 2$. **7.122.** $(1; 1)$. **7.123.** $\alpha = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}}$.
- 7.124.** $D = H = 10$ см. **7.125.** $4 \cdot 4 \cdot 2$. **7.126.** Функция выпукла при $x \in (-\infty; 1)$, вогнута при $x \in (1; +\infty)$, $x = 1$ точка перегиба. **7.127.** Функция выпукла при $x \in (-1; 1)$, вогнута при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $x = \pm 1$ точки перегиба. **7.128.** Функция выпукла при $x \in (-\infty; 1)$, вогнута при $x \in (1; +\infty)$, $x = 1$ точка перегиба.
- 7.129.** Функция выпукла при $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$, вогнута при $x \in (-3; 2)$, $x = 2$, $x = -3$ точки перегиба. **7.130.** Функция выпукла при $x \in (-2; 2)$, вогнута при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, $x = \pm 2$ точки перегиба. **7.131.** Функция выпукла при $x \in (-\infty; -2)$, вогнута при $x \in (-2; +\infty)$, $x = -2$ точка перегиба.
- 7.132.** Функция выпукла при $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{5}{12}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{5}{12}}; +\infty\right)$, вогнута при $x \in \left(-\sqrt{\frac{5}{12}}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{5}{12}}\right)$, $x = \pm\sqrt{\frac{5}{12}}$ точки перегиба. **7.133.** Функция выпукла при $x \in \left(-\infty; -\sqrt[3]{0,5}\right) \cup (0; 1)$, вогнута при $x \in \left(-\sqrt[3]{0,5}; 0\right) \cup (1; +\infty)$, $x = 0$, $x = 1$, $x = -\sqrt[3]{0,5}$ точки перегиба. **7.134.** Функция выпукла при $x \in \left(-\infty; -\sqrt{1,5}\right) \cup (0; \sqrt{1,5})$, вогнута при $x \in \left(-\sqrt{1,5}; 0\right) \cup \left(\sqrt{1,5}; +\infty\right)$, $x = 0$, $x = \pm\sqrt{1,5}$ точки перегиба. **7.135.** Функция выпукла при $x \in (1; +\infty)$, вогнута при $x \in (-\infty; 1)$, $x = 1$ точка перегиба.

7.136. Функция выпукла при $x \in (0; 1)$, вогнута при $x \in (1; +\infty)$, $x = 1$ точка перегиба.
7.137. Функция выпукла при $x \in (0; e^{1,5})$, вогнута при $x \in (e^{1,5}; +\infty)$, $x = e^{1,5}$ – точка перегиба. **7.138.** Функция выпукла при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **7.139.** Функция выпукла при $x \in (0; e^{-1,5})$, вогнута при $x \in (e^{-1,5}; +\infty)$, $x = e^{-1,5}$ точка перегиба. **7.140.** Функция выпукла при $x \in (-\infty; 1)$, вогнута при $x \in (1; +\infty)$, $x = 1$ точка перегиба. **7.141.** Функция выпукла при $x \in (4; +\infty)$, вогнута при $x \in (-\infty; 4)$, $x = 4$ точка перегиба. **7.142.** Функция выпукла при $x \in [0; +\infty)$. **7.143.** Функция выпукла при $x \in (-1; 1)$, вогнута при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $x = \pm 1$ точки перегиба.
7.144. $x = 1$ вертикальная асимптота, $y = 1$ горизонтальная асимптота.
7.145. $x = 2$ вертикальная асимптота, $y = 2x + 5$ наклонная асимптота. **7.146.** $y = 2$ горизонтальная асимптота. **7.147.** $x = \pm 2$ вертикальная асимптота, $y = 2x$ при $x \rightarrow +\infty$, $y = -2x$ при $x \rightarrow -\infty$. **7.148.** $y = 1$ горизонтальная асимптота.
7.149. $y = x - \frac{1}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$, $y = -x + \frac{1}{2}$ при $x \rightarrow -\infty$. **7.150.** $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$.
7.151. $x = 0$ вертикальная асимптота, $y = 0$ горизонтальная асимптота при $x \rightarrow +\infty$.
7.185. 2000. **7.186.** 1600. **7.187.** 200. **7.188.** 1000. **7.189.** 20. **7.190.** 50. **7.191.** 200.
7.192. 100. **7.193.** $x = 20$, $p = 800$, $\bar{c} = 450$. **7.194.** 4980. **7.195.** $P = 750$, $P'(900) = \frac{1}{3}$,
 $P'(1600) = \frac{1}{8}$, $P'(2500) = 0$, $P'(3600) = -\frac{1}{12}$. **7.196.** $\Delta R = 2394$, $R'(14) = 2416$.
7.197. $-\frac{1}{3}$. **7.198.** $-0,0003$. **7.199.** $-\frac{20}{23}$. **7.200.** $-\frac{2}{3}$. **7.201.** $-\frac{1}{38}$. **7.202.** а) уменьшится
на 0,4%; б) уменьшится на 2%. **7.203.** $1; \frac{40}{9}$. **7.204.** $\frac{1}{10}; \frac{2}{35}$. **7.205.** 0; 2. **7.206.** 0,5; 0,5.
7.207. 1; 0,5. **7.208.** $\frac{ax}{(ax+b)}$. **7.209.** $\frac{(ad-bc)x}{(ax+b)(cx+d)}$; **7.210.** n .

Литература

1. Кузнецов А.В. и др. Под общей редакцией Яблонского А.И. Высшая математика. Общий курс. Мн.: – Выш. шк., 1993.
2. Общий курс высшей математики для экономистов. Учебник. Под редакцией проф. В.И. Ермакова. – М. Инфра-М, 2007.
3. Высшая математика для экономистов. Под редакцией проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2007.
4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. – М.: Дело, 2006.
5. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. – СПб: Питер, 2004.
6. Е.И. Гурский. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Минск, «Вышэйшая школа», 1982.
7. В.П. Минорский. Сборник задач по высшей математике. – М., «Наука», 1987.
8. Индивидуальные задания по высшей математике. Под ред. А.П. Рябушко. Минск, «Вышэйшая школа», 2005.
9. И.В.Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1970.
10. А.В.Кузнецов, Д.С.Кузнецова, Е.И.Шилкина и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Общий курс. – Минск, «Вышэйшая школа», 1994.
11. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие для вузов. 20-е изд. – М.: Наука, 1985.
12. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Л. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учебное пособие для студентов вузов. В 2-х ч. Ч.1. 4-е изд., испр. и доп. – М.: Высш.шк., 1986.
13. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. 4-е изд. – М.: Высш.шк., 1966.
14. Кастрица О.А. Высшая математика: примеры, задачи, упражнения: Учебное пособие для вузов. – М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2003.
15. Лунгу К.Н., Письменный Д.Г., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Рольф, 2001.
16. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (функции одной переменной). 2-е изд. – М.: Наука, 1973.