Граничные условия дают:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0;$$
$$X(l) = C_1 e^a + C_2 e^{-a} = 0 (a = l\sqrt{-\lambda}),$$

т. е.

$$C_1 = -C_2 \text{ и } C_1(e^a - e^{-a}) = 0.$$

Но в рассматриваемом случае α - действительно и положительно, так что $(e^\alpha - e^{-\alpha}) \neq 0$. Поэтому

$$C_1 = 0, C_2 = 0$$

и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

2. При $\lambda = 0$ также не существует нетривиальных решений. Действительно, в этом случае общее решение уравнения (8) имеет вид

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0;$$
$$\mathrm{X(l)} = \mathrm{C}_1 l = 0,$$

т. е. $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, и следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

3. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения может быть записано в виде

$$X(x) = D_1 x \cos\sqrt{\lambda}x + D_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = D_1 = 0;$$
$$\mathrm{X(l)} = \mathrm{D}_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0;$$

Если $X(x)$ не равно тождественно нулю, то $D_2 \neq 0$, поэтому

$$\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \qquad (12)$$

или

$$\sqrt{\lambda} = \tfrac{\pi n}{l},$$

где n — любое целое число. Следовательно, нетривиальные решения задачи (11) возможны лишь при значениях

$$\lambda = \lambda_n = (\tfrac{\pi n}{l})^2.$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(X) = D_n \sin \tfrac{\pi n}{l} x,$$

где D_n — произвольная постоянная.

Итак, только при значениях λ, равных

$$\lambda_n = (\frac{\pi n}{l})^2, \qquad (13)$$

существуют нетривиальные решения задачи (11)

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \qquad (14)$$

определяемые с точностью до произвольного множителя, который мы положили равным единице. Этим же значениям λ_n соответствуют решения уравнения (9)

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at, \qquad (15)$$

где A_n и B_n - произвольные постоянные.

Возвращаясь к задаче (1)—(3), заключаем, что функции

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = (A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at) \sin \frac{\pi n}{l} x \qquad (16)$$

являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими граничным условиям (4) и представимыми в виде произведения (5) двух функций, одна из которых ависит только от x, другая от t. Эти решения могут удовлетворить начальным условим (3) нашей исходной задачи только для частных случаев начальных функций $\phi(x)$ и $\psi(x)$.

Обратимся к решению задачи (1)—(3) в общем случае. В силу линейности и однородности уравнения (1) сумма частных решений

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at) \sin \frac{\pi n}{l} x \qquad (17)$$

также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (2). На этом вопросе мы подробнее остановимся несколько позже (см. п. 3 этого параграфа). Начальные условия позволяют определить A_n и B_n. Потребуем, чтобы функция (17)