Stödmaterial - Tillämpningssuppgift 1

Finita differensmetoder

Jonas Ekblom

Augusti 2025

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Bakgrund

- Vi startar från en (kontinuerlig) pde med ett randvillkor.
- Analytiska lösningar till pde:er är enbart tillgängliga i specialfall. Med FDM kan vi lösa en stor mängd pde:er approximativt genom att:
  - Diskretisera funktionens **definitionsmängd**, det vill säga skapa en grid.
  - Approximera pde:n utifrån griden, vilket ger oss en uppsättning ekvationssystem.
- För att kunna lösa ekvationssystemen måste vi använda payoff-villkoret för optionen och dessutom ansätta ytterligare två randvillkor.
- Vi löser ekvationssystemen iterativt med start i näst-sista tidssteget ($T - \Delta t$).

Vi har följande pde (BSM pde):

$$\frac{\partial f(t,s)}{\partial t} + rs\frac{\partial f(t,s)}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s^2} - rf(t,s) = 0$$

som beskriver hur optionens pris (funktionens värde) utvecklas över tid och m a p underliggandes värde. Utan randvillkor finns oändligt många lösningar.

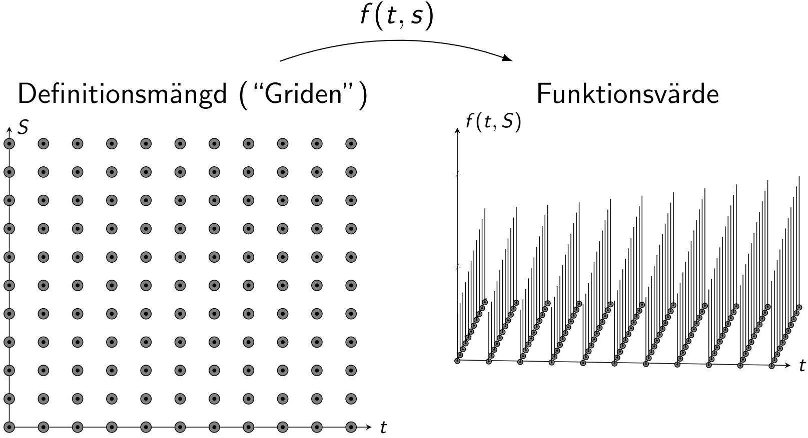
När vi lägger till randvillkoret

$$\begin{cases} \frac{\partial f(t,s)}{\partial t} + rs\frac{\partial f(t,s)}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s^2} - rf(t,s) & = 0, \\ f(T,s) & = \Phi(s), \end{cases}$$

får pde:n **en** (trevlig) lösning.

En lösning till pde:n är en funktion som för alla $t \in [0, T]$ och $s \in (0, \infty)$ ger det arbitragefria priset på optionen. Vi söker optionspriset $f(0, S_0)$, d v s optionspriset idag givet priset S_0 för underliggande.

FDM - Definitionsmängd & funktionsvärde

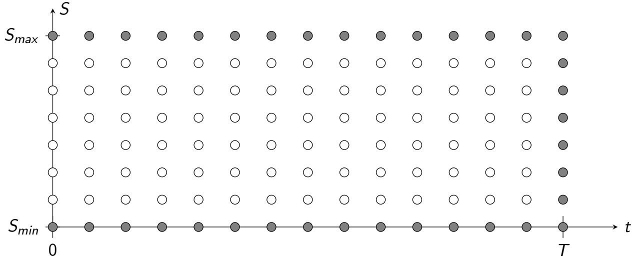


För att få en smidigare notation skriver vi punkten (t_i, S_j) som (i, j), och funktionsvärden som $f_{i,j} = f(t_i, S_j)$. Griden består alltså av punkter (i, j) och utgör definitionsmängden medan $f_{i,j}$ representerar funktionsvärden i punkterna (i, j).

FDM - Randvillkor

Givet en ekvidistant grid med $\Delta t = (T - t)/N$ och $\Delta S = (S_{\text{max}} - S_{\text{min}})/M$ har vi för den explicita metoden:

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r - q)\left(S_{min} + j\Delta S\right)\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2\left(S_{min} + j\Delta S\right)^2\frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2} = rf_{i,j}.$$

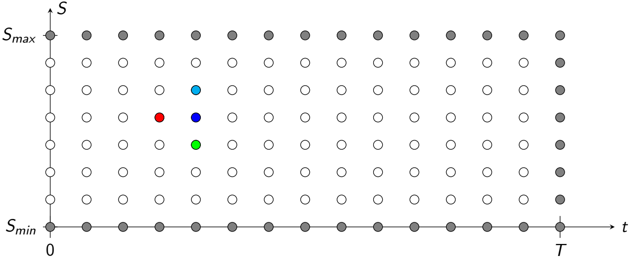


FDM - Randvillkor

Givet en ekvidistant grid med $\Delta t = (T - t)/N$ och $\Delta S = (S_{\max} - S_{\min})/M$ har vi för den explicita metoden:

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r-q)\left(S_{min} + j\Delta S\right)\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2\left(S_{min} + j\Delta S\right)^2\frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2} = rf_{i,j}.$$

För en punkt, $f_{i,j}$, som **inte ligger** på någon av de tre randerna kan vi bestämma värdet (för det explicita fallet) med hjälp av tre andra punkter: $f_{i+1,j}$, $f_{i+1,j+1}$ och $f_{i+1,j-1}$.



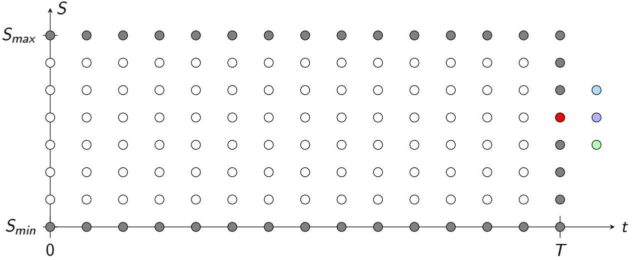
LINKÖPINGS UNIVERSITET

FDM - Randvillkor

Givet en ekvidistant grid med $\Delta t = (T - t)/N$ och $\Delta S = (S_{\max} - S_{\min})/M$ har vi för den explicita metoden:

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r - q)\left(S_{min} + j\Delta S\right)\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2\left(S_{min} + j\Delta S\right)^2\frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2} = rf_{i,j}.$$

För en punkt, $f_{i,j}$, som **ligger** på någon av de tre randerna kan vi inte bestämma värdet, då det "saknas" eller eller flera punkter, således måste optionsvärdet ansättas (tre randvillkor).



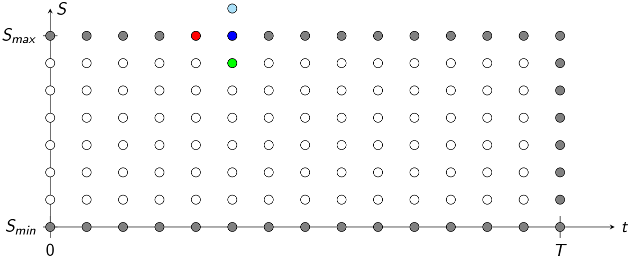
LINKÖPINGS UNIVERSITET

FDM - Randvillkor

Givet en ekvidistant grid med $\Delta t = (T - t)/N$ och $\Delta S = (S_{\max} - S_{\min})/M$ har vi för den explicita metoden:

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r - q)(S_{min} + j\Delta S)\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 (S_{min} + j\Delta S)^2 \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2} = rf_{i,j}.$$

För en punkt, $f_{i,j}$, som **ligger** på någon av de tre randerna kan vi inte bestämma värdet, då det ”saknas” eller eller flera punkter, således måste optionsvärdet ansättas (tre randvillkor).



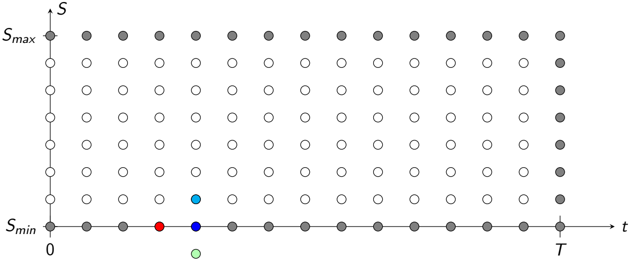
LINKÖPINGS UNIVERSITET

FDM - Randvillkor

Givet en ekvidistant grid med $\Delta t = (T - t)/N$ och $\Delta S = (S_{\max} - S_{\min})/M$ har vi för den explicita metoden:

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r - q)\left(S_{min} + j\Delta S\right)\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2\left(S_{min} + j\Delta S\right)^2\frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2} = rf_{i,j}.$$

För en punkt, $f_{i,j}$, som **ligger** på någon av de tre randerna kan vi inte bestämma värdet, då det "saknas" eller eller flera punkter, således måste optionsvärdet ansättas (tre randvillkor).

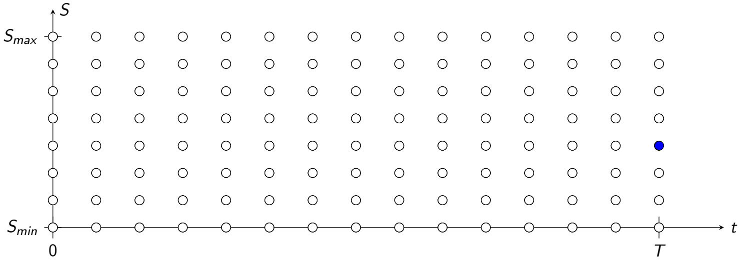


LINKÖPINGS UNIVERSITET

FDM - Payoff-villkoret

Notera att det är funktionsvärdet (optionens värde) som vi ansätter ett värde på och **inte** griden i sig.

Vi börjar med villkoret som ska gälla för optionen på lösendagen, $t = T$. Då bestäms värdet (exakt) av payoff:en för optionen, ex. $\max(S - K, 0)$ för en köpoption. Detta måste uttryckas i termer av diskretiseringen. Studera punkten $(N, 3)$:

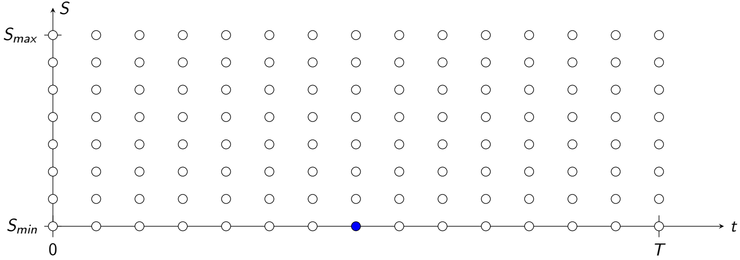


Optionens värde i punkten $(N, 3)$ kan skrivas som $f_{N,3} = \max(S_3 - K, 0) = \max(S_{\min} + 3\Delta S - K, 0)$.

LINKÖPINGS UNIVERSITET

FDM - Undre randvillkor

Vi antar att vi *står* i någon punkt på undre randen, exempelvis $(j, 0)$ för $j < N$ och att vi ansatt $S_{\text{min}} = 0$. Detta innebär att priset på underliggande **aldrig**[1] kommer att bli större än K (ty S är då givet en GBM 0 för all framtid). En köpoption är därför värdelös och det följer att $f_{i,0} = 0$ för alla $i = 0, \ldots, N$. *Vad gäller för en säljoption?*

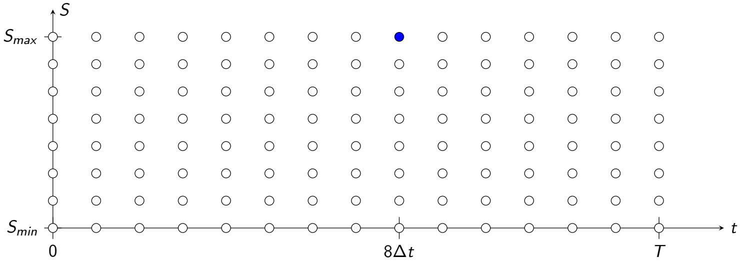


[1] Även om $S_{\text{min}} > 0$ kan ett liknande resonemang användas.

LINKÖPINGS UNIVERSITET

FDM - Övre randvillkor

Antag att vi *står* i någon punkt (j, M) för $j < N$ på den övre randen. Vi har här ansatt priset S_{max} på underliggande så att optionen med sannolikhet 1 förfaller in-the-money (out-of-the-money för säljoption).



Optionen fungerar då (principiellt) som ett forward-kontrakt (ej future!) med forwardpris K och vi kan bestämma värdet av optionen på randen genom att värdera detta forwardkontrakt.

FDM - Värdet på randen

Antagande: Vi äger en köpoption och $S_\tau = S_{\max}$ (så att optionen förfaller in-the-money med sannolikhet 1).

Insikt: Optionsinnehavet kan då likställas med att vi äger underliggande och ska betala beloppet K vid tidpunkt T.

Konsekvsens: Värdet är då underliggande minus nuvärdet av lösenpriset, d v s $S_\tau - Ke^{-r(T-\tau)}$.

FDM - Värdet på randen som ett forwardkontrakt

Vi kan visa detta utifrån riskneutral värdering (se föreläsning 2):

$$f(\tau, s) = e^{-r(T-\tau)} \, \mathrm{E}_\tau \left[\Phi(S_T)\right],$$

där $\tau = i\Delta t$ (för *vår* punkt är $\tau = 8\Delta t$).

Givet forwardkontraktets payoff $\Phi(s) = s - K$ erhåller vi:

$$\begin{aligned} f(s, \tau) &= e^{-r(T-\tau)} \, \mathrm{E}_\tau^Q \left[\Phi(S_T)\right] = e^{-r(T-\tau)} \, \mathrm{E}_\tau^Q \left[S_T - K\right] \\ &= e^{-r(T-\tau)} \, \mathrm{E}_\tau^Q \left[S_T\right] - e^{-r(T-\tau)} K = S_\tau - K e^{-r(T-\tau)}. \end{aligned}$$

Notera: Sista likheten följer av att $\mathrm{E}_\tau^Q \left[S_T\right] = S_\tau e^{r(T-\tau)}$ (jmf fö 2).

Randvillkoret blir därmed $f_{i,M} = S_{\max} - K e^{-r(T-8\Delta t)}$ i vår punkt.

Ansätta övre och undre gräns i grid

Uppgift 1b) ger en vägledning för lämpliga val av undre gräns, S_{min}, och övre gräns, S_{max} i griden. För att bestämma S_{max} så att $\mathrm{P}\left(S_T > S_{\text{max}}\right) = 0.0005$ kan vi utnyttja att:

$$\mathrm{P}\left(S_T > S_{\text{max}}\right) = \mathrm{P}\left(\ln S_T > \ln S_{\text{max}}\right) \tag{1}$$

och att

$$\ln S(T) \sim \mathcal{N}\left(\ln S(0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right).$$

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Beräkna Δ utifrån lösningen

Hur kan vi använda estimaten av optionspriser från FDM för att bestämma Δ?

Notera: Eftersom vi har optionspriser för alla S_j, $j = 0, 1, \cdots, M$ kan vi göra en numerisk approximation. Vi använder (generellt) central-approximationen för att erhålla ett så bra estimat som möjligt:

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S}.$$

ABR artikel - Relation till uppgiften

- Från uppgift 2a) ska ni börja arbeta utifrån artikeln av ABR.
- *Motiv:* Ge träning i att ta till sig vetenskapliga artiklar.
- I artikeln presenteras ett tillvägagångssätt för att via $\hat{r}(t)$, $\hat{b}(x, t)$ och $\hat{\nu}(x, t)$ anpassa:
  - riskfri ränta $r(t)$ utifrån terminstrukturen
  - kontinuerlig utdelning $\gamma(t)$ utifrån terminskontrakt
  - lokal volatilitet $\sigma(t, s)$ utifrån en uppsättning optioner
- I uppgiften antar ni (BSM)
  - konstant riskfri ränta
  - ingen utdelning
  - konstant volatilitet
- *Träning:* "Översätt" artikel till er tillämpning!

ABR artikel - Tips på vägen

- Notera relationen mellan nollkupongsobligationer $P(0, t_j)$ och den riskfria räntan i (26) i artikeln.
- Vi har att antagit noll utdelning vilket ger att $\gamma(u) = 0$ och

$$\Gamma_j = \exp\left\{-\int_0^{t_j} \gamma(u) du\right\} = \exp\{0\} = 1, \text{ för all } j.$$

- Vi har funktionen $\nu(x, t) = \sigma^2(e^x, t)$, som diskretiseras till $\nu_{i,j}$. Funktionen ν är den kvadrerade (lokala) volatiliteten. I BSM modellen är σ en **konstant**!
- ABR använder också notationen med i och j, men notera att de använder i som rumsindex och j som tidsindex. Vidare, notera att deras grid, i rumsled, är omvänd mot Hulls.

FDM - Log-rummet (ABR)

Ni ska i uppgift 2 och 3 använda $x = \ln(s)$ som variabel, hur blir payoffen då?

a) $\max(x - K, 0)$,

b) $\max(x - \ln(K), 0)$,

c) $\max(e^x - K, 0)$ är den korrekta payoffen

Obs! Det är **inte** optionens egenskaper som ändras - det är representationen av underliggande! Vi har samma randvillkor som tidigare men de ska uttryckas med den nya variabeln.

Formulera uppgiften i termer av x

BSM pde givet variabelbytet $x = \ln(s)$ ges av:

$$\begin{cases} \frac{\partial H(t,x)}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial H(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 H(t,x)}{\partial x^2} - rH(t,x) & = 0 \\ H(T,x) & = \Phi(x) \end{cases} \tag{2}$$

där H betecknar optionspriset som funktion av tid, t, och log-priset på underliggande $x = \ln(s)$.

Variabelbyte i pde

Det finns olika sätt att göra variabelbytet. Vi kan börja med att skriva $f(t,s) = f(t,e^x) = H(t,x)$ där $x = \ln(s)$. Först kan vi konstatera att

$$\frac{\partial f(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial f(t,e^x)}{\partial t} = \frac{\partial H(t,x)}{\partial t}. \tag{3}$$

Relationen mellan rumsderivatorna erhåller vi genom att tillämpa kedjeregeln:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H(t,x)}{\partial x} &= f'(t,e^x)e^x = \frac{\partial f(t,s)}{\partial s}s \\
\frac{\partial^2 H(t,x)}{\partial x^2} &= f''(t,e^x)e^{2x} + f'(t,e^x)e^x = \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s^2}s^2 + \frac{\partial H(t,x)}{\partial x} \\
&\iff \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s^2}s^2 = \frac{\partial^2 H(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial H(t,x)}{\partial x}
\end{aligned}$$

Vi stoppar in våra derivator i BSM pde, vilket ger (2).

Motivering till variabelbytet från S till $\ln(S)$

Vi genomför variabelbytet eftersom vi får bättre konvergensegenskaper. Intuitionen hittar vi om vi studerar termen med första (eller andra) ordningens derivata:

$$rs\frac{\partial f(t,s)}{\partial s} \approx rs\left(\frac{f(t,s+\Delta s)-f(t,s-\Delta s)}{2\Delta s} + \mathcal{O}((\Delta s)^2)\right).$$

Vi kan då se att multiplikationen med s förstärker approximationsfelen i derivataberäkningen. Den effekten undviker vi genom att göra variabelbytet.

Härledning av Cash-or-Nothing formel

Värdet av en Cash-or-Nothing kan bestämmas utifrån

$$C_t = e^{-r(T-t)} \operatorname{E}_t^Q \left[c \cdot \mathbb{1}_{S_T \geq K} \right], \tag{4}$$

där

$$\operatorname{E}_t^Q \left[\mathbb{1}_{S_T \geq K} \right] = \Pr^Q \left(S_T \geq K | S_t = s \right). \tag{5}$$

Kom ihåg: Vi känner lösningen för en GBM.

Övriga kommentarer

- Approximation i 3b) är **mycket** grov. Den ska enbart fungera som en enkel rimlighetskontroll. Den kan hjälpa till att "avfärda" felaktiga implementeringar men ni kan givetvis inte utifrån denna garantera att ni gjort rätt.
- I uppgiften arbetar vi med BSM-modellen. Då bör man **egentligen inte** använda en FDM-metod, eftersom att det finns analytiska uttryck. Vi gör det ändå för att ni ska lära er att använda FDM och då är det smidigt att ha ett analytiskt uttryck att jämföra mot.