LINKÖPINGS UNIVERSITET
Produktionsekonomi, IEI
TPPE53 Finansiell värderingsmetodik
HT 2025

Inlämningsuppgift 1
FINITA DIFFERENSMETODER

Om uppgiften

Denna uppgift behandlar finita differensmetoder (FDM) och specifikt dess tillämpning för värdering av finansiella derivat. Uppgiften genomförs i grupper om 2-3 studenter. Anmälan sker via Lisam.

Mål

Uppgiften syftar till att ge träning i såväl generiska som ämnesspecifika färdigheter. Generiska färdigheter som studenten ges träning är att:

- tillgodogöra sig innehåll i vetenskapliga artiklar;
- tillämpa teoretisk kunskap för analys och lösning av praktiska problem;
- felsöka och rimlighetsbedöma resultat från implementering av matematik;
- arbeta systematiskt vid problemlösning.

De ämnesspecifika färdigheterna som studenten efter godkänd inlämningsuppgift ska ha uppnått presenteras under avsnittet *Lärandemål* nedan.

Examination

Uppgiften examineras i) genom inlämning av MATLAB-kod och svar på en uppsättning frågor (se nedan) och ii) genom redovisning. Se kursinformationen för vad som gäller angående komplettering av inlämning.

Kod och svar på frågor (se svarsmall på Lisam) ska lämnas in via Lisam. Inlämningen ska innehålla alla filer som krävs för att kunna generera efterfrågade resultat. Notera att resultaten ska kunna genereras utifrån maximalt ett skript per deluppgift, d v s totalt maximalt tre skript.

Handledning

Ett handledningstillfälle är schemalagt, se schema för tider och kompletterande information på Lisam. Under Samarbetsytan på Lisam finns också ett Excel-dokument där ni löpande kan ställa frågor om inlämningsuppgiften samt ta del av ett bibliotek av tidigare frågor.

Litteratur

Det finns mycket litteratur som behandlar området derivatprissättning och även specifikt FDM. Ni rekommenderas att använda kurslitteraturen som stöd för att komma igång med uppgiften och ska i deluppgift 2 följa (delar av) artikeln nedan. Om ni önskar är ni (givetvis) fria att söka kompletterande litteratur på egen hand. Stödjande material för MATLAB och LaTeX finns på Lisam.[1]

Leif B. G. Andersen and Rupert Brotherton-Ratcliffe. The equity option volatility smile: an implicit finite-difference approach. *The Journal of Computational Finance*, 1(2): 5–37, 1997.

John C Hull. *Options, Futures and Other Derivatives.* Pearson Education Limited, 11 edition, 2021. ISBN 978-1-292-41065-4.

Analytiska uttryck för binära optioner

Ni ombeds i en deluppgift nedan att värdera binäroptioner för vilka det givet BSMs modell existerar analytiska prissättningsformler enligt nedan.

- En ”Cash-or-nothing” köpoption med utbetalning c har payoff-funktionen $c \cdot \mathbf{1}_{S \geq K}$ (enheten är exempelvis SEK) och den analytiska prissättningsformeln är

$$C_t = c \cdot e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2)$$

- och en ”Asset-or-nothing” köpoption har payoff-funktionen $S_T \cdot \mathbf{1}_{S_T \geq K}$ och den analytiska prissättningsformeln är

$$C_t = S_t e^{-q(T-t)} \mathcal{N}(d_1),$$

där

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

där r är den riskfria räntan, q är den kontinuerliga utdelningstakten[2], σ är volatiliteten hos underliggande, S_t är pris på underliggande (vid värdering), K är lösenpris, $T-t$ är tid till lösendag och $\mathcal{N}$ är den kumulativa standard-normalfördelningen (fördelningsfunktionen).

[1] Ni avgör själva om ni önskar besvara frågor i Word eller LaTeX, se mallar på Lisam.

[2] Vi antar genom hela uppgiften att inga utdelningar sker över optionernas löptid. Formeln presenteras med q enbart för att vara mer generell.

Uppgiften

Uppgifterna behandlar värdering av optioner med det svenska indexet OMXS30 som underliggande tillgång under antagandet att Black-Scholes-Merton (BSM) modell representerar marknaden.

Instruktioner

Frågor markerade med † nedan erfordrar (betydande) implementation. Notera att frågor som efterfrågar analys också kräver att ni kör och eventuellt gör mindre tillägg i kod. Frågor för vilka skriftliga svar ska lämnas in presenteras löpande i uppgiftsbeskrivningen och dessa finns också sammanställda i svarsmallar som Word respektive LaTeX-filer på Lisam. Notera att (en av) mallarna ska användas vid inlämning.

Genom hela inlämningsuppgiften kommer vi anta att utdelningar ej sker under optionernas löptid. Notera att er värdering ska vara konsistent med marknaden i de fall marknadsdata existerar!

Resultaten från er implementering ska kunna genereras utifrån (maximalt) ett Matlab-skript per deluppgift, alltså totalt tre skript. Ni rekommenderas att skapa (och återanvända) funktioner i era skript!

Lärandemål

Inlämningsuppgiften anknyter direkt till kursens lärandemål 2 och 5 men är också nära kopplad till lärandemål 3 (se kursinformationen). Uppgiften är formulerad så att ni steg-för-steg ska bygga upp förståelse och färdigheter, genom inläsning av grundläggande teori; implementering av kod och svar på förformulerade frågor.

Efter godkänd inlämningsuppgift ska studenten kunna:

- förklara och tolka en FDM-representation av en kontinuerlig pde samt kunna härleda densamma;
- föreslå och motivera lämpliga val av randvillkor, storlek på grid samt diskretisering;
- redogöra för hur metoderna explicit, implicit och Crank-Nicholson skiljer sig åt, dels i termer av antagna differensapproximationer och dels i termer av stabilitetsegenskaper;
- tillämpa (implementera) FDM för värdering av finansiella derivat.
- härleda och tolka det analytiska priset för en *cash-or-nothing* option givet BSM modellen;

Uppgiftsbeskrivning

I deluppgifterna 1 och 2 nedan ska en valfri At-the-Money (ATM)[3] plain-vanilla köpoption på OMXS30 med lösendag i november eller december 2025 värderas. Ni ska hämta egen data från Eikon, men som stöd finns en screenshot under Inlämningsuppgift 1 på Lisam som visar ett exempel på Eikon-vyn. Observera att optionerna förfaller den tredje fredagen i respektive månad. Vid värdering, antag att den riskfria räntan är 0.05 % och beräkna den implicita volatiliteten utifrån marknadspriserna (ask/mid) i SEK. Notera att optioner som har OMXS30 som underliggande är av europeisk typ.

1. a) Utgå från Black-Scholes-Merton (BSM) pde:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(t,s)}{\partial t} + rs\frac{\partial f(t,s)}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial s^2} - rf(t,s) & = 0, \\ f(T,s) & = \Phi(s). \end{cases} \tag{1}$$

- Antag att ni har bestämt en (ändlig) grid (bestäms i nästa uppgift). Härled ekvationssystemen (exklusive randvillkor) som ska gälla om vi använder den *explicita* finita differensmetoden, se exempelvis föreläsning 3.
- Förklara (i ord) vad ekvationen som ni har härlett betyder samt hur den relaterar till den grid som illustreras i föreläsning 3 (se också Hull, 2021).

b) I föregående uppgift bestämde vi ett ekvationssystem. För att det systemet ska bli ändligt (och lösbart) måste vi begränsa vilka värden som priset på den underliggande kan anta. Detta innebär att vi måste begränsa griden.

Vi vill att funktionsapproximationerna ska få liten påverkan på optionspriset. Ett sätt att motivera valet av undre och övre gräns är att utgå ifrån sannolikhetsfördelningen för underliggande och välja gridens gränser så att observationer utanför dessa har sannolikhet (nära) noll. Givet en GBM är principen enligt följande exempel:

- Antag att $S_t = 100$, $r = 0.01$, $\sigma = 0.20$ samt $T - t = 1$. Bestäm den undre gränsen, S_{lower}, så att $\mathrm{P}\left(S_T \leq S_{\text{lower}}\right) = 0.0005$ och den övre gränsen, S_{upper} så att $\mathrm{P}\left(S_T \geq S_{\text{upper}}\right) = 0.0005$, det vill säga så att vi med 99.9 % sannolikhet täcker utfallen på lösendagen.

Notera: Extrema utfall kan (beroende på optionstyp och antagen modell) ha stor påverkan på optionsvärdet, vilket motiverar att välja ett ännu större intervall.

c) Utöver ekvationssystemet erfordras randvillkor för att kunna prissätta optionerna. Payoff-funktionen för studerad option ger randvillkoret på lösendagen och dessutom erfordras att vi ansätter randvillkor för den undre och övre gränsen i griden.

[3] ATM är ingen precis definition utan avser optioner vars lösenpris ligger "nära" nuvarande pris på underliggande. I Eikon finns optionerna under RIC:en: 0#OMXS30*.ST++

- Ange payoff-villkoret för vald option med differensapproximation-notation.
- Ange och motivera vilka randvillkor ni väljer på den övre och undre randen.

d) (†) Värdera vald option utifrån BSM pde i (1) genom att använda *explicita* FDM. Jämför ert pris med BSMs analytiska formel (marknadspriser). Observera att indata i värderingen ska vara konsistent med marknadspriser!

Tips:

i Gå igenom beskrivningen av explicita FDM i Hull (2021). Notera att Hull i sin beskrivning antar att den undre gränsen för underliggande är 0. Kontrollera överensstämmelse med er härledning!

ii Starta med en gles grid och förfina stegvis diskretiseringen för att hitta en grid som "fungerar", d v s som ger noggranna prisestimat.

e) Beräkna ett approximativt Δ för optionen utifrån er lösning i d). Jämför med det analytiska uttrycket för Δ (se exempelvis Wikipedia). Beskriv i ord och/eller med matematik hur ni har bestämt Δ.

2. a) Genom att genomföra ett variabelbytet $x = \ln(s)$ kan BSM pde i (1) skrivas om till en form med bättre numeriska egenskaper. Vi använder här att $H(t,x) = f(t, e^x)$ och att $\Psi(x) = \Phi(e^x)$, vilket ger (se stödmaterial för härledning):

$$\begin{cases} \frac{\partial H(t,x)}{\partial t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial H(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 H(t,x)}{\partial x^2} - rH(t,x) & = 0, \\ H(T,x) & = \Psi(x). \end{cases} \tag{2}$$

Funktionen f beskriver hur värdet på optionen beror på tiden och pris på underliggande och $\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}$ är derivatan av optionens pris med avseende på underliggande. Vad representerar (jämför s och x) funktionen H respektive $\frac{\partial H(t,x)}{\partial x}$?

b) (†) Värdera vald option med hjälp av (2) genom att implementera FDM enligt Andersen and Brotherton-Ratcliffe (1997)[4]. Det ska vara möjligt att välja $\Theta \in [0,1]$, där $\Theta = 1$ ger explicit metod, $\Theta = 0$ ger implicit metod och $\Theta = 0.5$ ger Crank-Nicholson. Bestäm lämpliga val av tids- och rumsdiskretiseringar som ger noggranna och stabila prisestimat.

[4] **Tips:** Er uppgift är att implementera ekvation (22). Ni rekommenderas att fokusera på kapitel 3.1 samt ekvationerna (26) och (30). Vidare vägledning ges i stödmaterialet till uppgiften.

3. Värdera köpoptioner av typen *Cash-or-Nothing* respektive *Asset-or-Nothing* som har OMXS30 som underliggande. Låt optionerna ha samma lösenpris och tid till lösendag som tidigare vald plain vanilla-option.[5]

   a) Härled den analytiska prisformeln (se ovan) för en *Cash-or-Nothing* köpoption.

   b) Motivera med ord utifrån $C_t = e^{-r(T-t)}\,\mathrm{E}_t^Q\left[\Phi(S_T)\right]$ varför ett approximativt uttryck för värdet av en *Asset-or-Nothing* option med lösenpris ATM är $S_0/2$. Detta approximativa värde kan användas som en rimlighetsbedömning för uppgift 3 c).

   c) (†) Värdera optionerna utifrån implementationen i uppgift 2 och säkerställ överensstämmelse med det analytiska priset för *Cash-or-Nothing* optionen.

Några avslutande kommentarer om uppgiften

I inlämningsuppgiften har vi utgått från en kontinuerlig pde och bestämt approximativa lösningar numeriskt med FDM givet en uppsättning antaganden.

Med syftet att förenkla har vi antagit att utdelningar ej sker under optionernas löptid. Givet en (nollskiljd) kontinuerlig utdelning är den generella lösningsgången densamma men i fallet med diskreta utdelningar behöver vi införa hoppvillkor för att kunna lösa uppgiften, vilket ligger utanför kursen.

Ett annat förenklande antagande i uppgiften är att BSM-modellen gäller, vilket implicerar antagande om att priset på underliggande följer en GBM och att räntan är konstant. Det är då möjligt för de optioner vi har prissatt att härleda exakta analytiska prissättningsuttryck. Om vi i ”verkligheten” antar modeller för vilka det finns analytiska uttryck skulle vi generellt använda dessa direkt och inte de numeriska approximationer som exempelvis FDM ger. I uppgiften är dock målet att lära sig använda FDM och då är det en fördel att kunna testa sina implementeringar emot ”exakta” priser.

[5] Notera att priser ej kvoteras i Eikon för dessa exotiska optioner.