
Wyznaczanie wartości całki z wielomianu
będącego kombinacją wielomianów
Czebyszewa I i II rodzaju z wykorzystaniem
metody Trapezów oraz metody Simpsona

Projekt 1

Autorzy

Hubert Kowalski

Adam Kaniasty

25.11.2023

Contents

1	Opis metody matematycznej	3
1.1	Wielomiany Czebyszewa	3
1.2	Metoda trapezów	3
1.3	Metoda Simpsona	4
1.4	Pomiary błędów	5
1.4.1	Metoda optymalizacji liczby przedziałów	5
2	Opis działania programu	7
2.1	Wywołanie	8
2.2	GUI	8
3	Przykłady	9
3.1	Opis przykładów	9
3.2	Tabela wynikowa	10
4	Pomiary błędów	11
4.1	Optymalizacja ilości interwałów	13
5	Wnioski	15

1 Opis metody matematycznej

1.1 Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa I rodzaju oznaczamy przez $T_n(x)$, gdzie n jest stopniem wielomianu. Zdefiniowane są one indukcyjnie jako:

$$\begin{aligned}T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x \\T_n(x) &= 2x * T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)\end{aligned}$$

Wprost z definicji można pokazać, że wielomiany te mają symetrię parzystą dla parzystych n oraz nieparzystą dla nieparzystych n , czyli $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$. Ta informacja może się okazać istotna w kontekście całkowania wielomianów Czebyszewa. Wielomian $T_n(x)$ ma również n różnych pierwiastków na przedziale $[-1, 1]$ określonych wzorem:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Wielomiany te można przedstawić za pomocą funkcji trygonometrycznych na przedziale $[-1, 1]$ przez wzór:

$$T_n(x) = \cos(n * \arccos(x))$$

Wielomiany Czebyszewa II rodzaju oznaczamy przez $U_n(x)$, gdzie n jest stopniem wielomianu. Zdefiniowane są indukcyjnie jako

$$\begin{aligned}U_0(x) &= 1, & U_1(x) &= 2x \\U_n(x) &= 2x * U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)\end{aligned}$$

Wielomiany te mają również symetrię parzystą, czyli $U_n(-x) = (-1)^n U_n(x)$. Wielomian $U_n(x)$ ma również n różnych pierwiastków na przedziale $[-1, 1]$ określonych wzorem:

$$x_k = \cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right), \quad k = 1, \dots, n$$

Można łatwo pokazać, że rozpisując wielomian $T_{n+1}(x)$ na postać iloczynową otrzymamy:

$$T_{n+1}(x) = 2^n (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Korzystając z takiej postaci można łatwo ograniczyć wyrażenie:

$$(x - x_0) \dots (x - x_n) \leq 2^{-n}$$

1.2 Metoda trapezów

Metoda trapezów jest techniką numerycznego całkowania, czyli przybliżania wartości całki oznaczonej:

$$I(f) = \int_a^b f dx$$

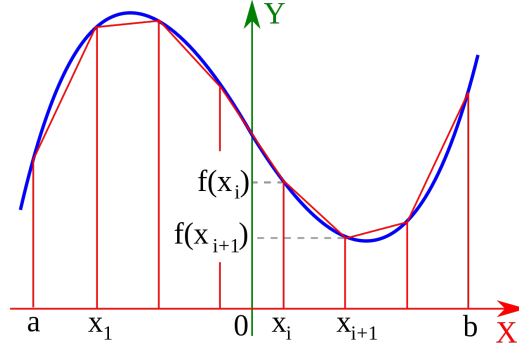


Figure 1: Metoda trapezów
Źródło: Wikipedia

Złożona kwadratura trapezów polega na dzieleniu przedział całkowania na mniejsze podprzedziały $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, N-1$, gdzie N - liczba podprzedziałów i interpolacji funkcji f wielomianem stopnia 1. Jeśli $f(x_k) > 0$ oraz $f(x_{k+1}) > 0$, to wartość kwadratury na tym przedziale może być interpretowana jako pole trapezu utworzonego przez odpowiednie odcinki. Sumując wartości kwadratur na podprzedziałach otrzymujemy przybliżenie całki $S(f)$. Wzór na metodę trapezów jest następujący:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(a + kh) + f(b) \right]$$

gdzie $h = \frac{b-a}{N}$ jest długością podprzedziału, a N jest liczbą podprzedziałów.

Błąd metody trapezów jest różnicą między wartością całki a przybliżeniem numerycznym. Można go oszacować za pomocą wzoru:

$$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{12N^2} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

gdzie $f''(x)$ jest drugą pochodną funkcji podcałkowej. Wzór ten pokazuje, że błąd maleje wraz ze wzrostem liczby podprzedziałów. Jednakże nie gwarantuje to wcale niskiej wartości błędu ze względu na $\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$, które może być dowolnie duże.

1.3 Metoda Simpsona

Metoda Simpsona jest techniką numerycznego całkowania wykorzystującą paraboliczną interpolację funkcji w celu przybliżenia wartości całki oznaczonej:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Prosta kwadratura Simpsona opiera się na podziale przedziału całkowania na dwa równych długości podprzedziały i przybliżeniu funkcji f wielomianem drugiego stopnia. Przyjmuje się, że funkcja f jest dobrze aproksymowana przez parabolę przechodzącą przez punkty $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$, $(b, f(b))$. Wartość kwadratury dla jednego przedziału jest

wtedy równa:

$$S(f) = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

gdzie $h = \frac{b-a}{2}$ jest długością podprzedziału. Błąd prostej kwadratury Simpsona wynosi

$$E(f) = -h^5 \frac{1}{90} * f^{(4)}(\xi)$$

Gdzie ξ jest punktem należącym do (a,b) . Zatem błąd jest równy zero, gdy $f^{(4)}(x) = 0$. Wynika z tego, że błąd przybliżenia jest zerowy dla wielomianów o stopniu maksymalnie 3.

Złożona kwadratura Simpsona korzysta z prostej kwadratury Simpsona, przy podziale przedziału całkowania na N równych podprzedziałów, gdzie N jest liczbą przedziałów dla kwadratury Simpsona. Wzór na złożoną kwadraturę Simpsona ma postać:

$$S(f) = \sum_{k=1}^N \frac{H}{6} \left(f(x_{k-1}) + 4f\left(x_{k-1} + \frac{H}{2}\right) + f(x_k) \right).$$

Widzimy na nim użycie prostych metod Simpsona. W obliczeniach wykorzystujemy jednak przekształcony wzór:

$$S(f) = \frac{H}{6} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(a + kH) + 4 \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + kH + \frac{H}{2}\right) \right).$$

gdzie $h = \frac{b-a}{N}$, a $x_k = a + kh$ dla $k = 0, \dots, N$.

Błąd metody Simpsona można oszacować używając wzoru:

$$|E| \leq \frac{(b-a)^5}{180N^4} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$$

gdzie $f^{(4)}(x)$ jest czwartą pochodną funkcji podcałkowej. Wzór ten wskazuje, że błąd maleje z większą potęgą N niż w metodzie trapezów.

1.4 Pomiary błędów

Błąd bezwzględny definiuje się jako:

$$\Delta = \bar{x} - x,$$

gdzie \bar{x} to wartość przybliżona, a x to wartość dokładna.

Błąd względny, przy założeniu, że $x \neq 0$, wyraża się wzorem:

$$\delta = \frac{\bar{x} - x}{x} = \frac{\Delta}{x},$$

co daje stosunek błędu bezwzględnego do wartości dokładnej.

1.4.1 Metoda optymalizacji liczby przedziałów

Przygotowaliśmy funkcję `kaniastyKowalskiError` służącą do znalezienia optymalnej liczby podprzedziałów N dla numerycznej całki, która minimalizuje łączny błąd całkowania nu-

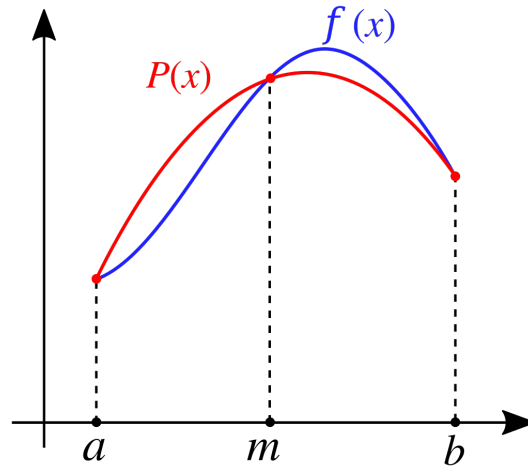


Figure 2: Metoda Simpsona
Źródło: Wikipedia

merycznego. Błąd ten uwzględnia nie tylko różnicę między przybliżoną a dokładną wartością całki, ale także karę za zwiększenie liczby przedziałów, co ma na celu uwzględnienie kosztu obliczeniowego. Kara za zwiększenie liczby przedziałów rośnie logarytmicznie z N .

2 Opis działania programu

Implementacja rozwiązania została przeprowadzona z wykorzystaniem środowiska *MATLAB*. Zasadniczą część stanowią 3 funkcje:

```
trapezoidal(a, b, N, f, a_k),  
simpson(a, b, N, f, coefficients)  
chebyshev_combination(a_k, x)
```

Funkcja *trapezoidal* służy do obliczania przybliżonej całki z wielomianu $w_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(x) U_k(x)$ na przedziale $[a, b]$ za pomocą złożonej metody trapezów składającej się z N podprzedziałów. Podobnie funkcja *simpson* służy do obliczania tej samej całki, jednak przy wykorzystaniu metody Simpsona. Funkcje te działają wyłącznie gdy podana jako argument funkcja f przyjmuje 2 argumenty: a_k - wektor współczynników kombinacji oraz x - punkt, w którym obliczana jest wartość.

Funkcja *chebyshev_combination* oblicza za pomocą związku rekurencyjnego wartość wielomianu $w_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(x) U_k(x)$ w punkcie x dla współczynników a_k .

Użycie funkcji *chebyshev_combination* w połączeniu z *trapezoidal* lub *simpson* do obliczenia wartości przybliżonej całki z wielomianu postaci $w_n(x)$ polega na ustaleniu w skrypcie pożądanych wartości:

- a - początku przedziału całkowania

- b - końca przedziału całkowania

- N - ilości podprzedziałów w złożonej kwadraturze trapezów

- a_k - współczynników kombinacji wielomianów Czebyszewa (przy czym ilość współczynników zapewnia odpowiedni stopień otrzymanego wielomianu $w_n(x)$)

a następnie na wywołaniu funkcji *trapezoidal* :

```
w = trapezoidal(a, b, N, @chebyshev_combination, a_k)
```

lub *simpson*:

```
w = simpson(a, b, N, @chebyshev_combination, a_k)
```

Aby jednak obliczyć całkę dokładną przy użyciu funkcji wbudowanej *integral* należy dostarczyć do niej funkcję przyjmującą tylko jeden argument - x . Zatem w rozwiązaniu znajdują się także funkcje o nazwach:

chebyshev_example_i, i = 1, 2 ... 12

Rozwiązanie zawiera również funkcje *trapezoidal_general*(a, b, N, f) oraz *simpson_general*(a, b, N, f) które pozwalają obliczyć przybliżoną całkę metodą trapezów (lub metodą Simpsona) z dowolnej funkcji $y = f(x)$. W przypadku chęci obliczenia całki dla jednej z funkcji *chebyshev_example_i*, należy skorzystać właśnie z *trapezoidal_general* lub *simpson_general*:

```
wt = trapezoidal_general(a, b, N, @chebyshev_example_1)  
ws = simpson_general(a, b, N, @chebyshev_example_1)
```

2.1 Wywołanie

W celu wywołania aplikacji GUI lub skryptów testujących należy najpierw dodać odpowiednie foldery do *search path*. W środowisku MATLAB, będąc w katalogu *IntegralApproximation* można to zrobić na przykład wywołując w wierszu poleceń komendę :

```
addpath(genpath("./scripts/"))
```

2.2 GUI

Wizualizacja działania funkcji zawarta jest w aplikacji *examplesGUI.mlapp*. Zawiera ona trzy zakładki:

- **ExamplesTab** - sekcja, w której generowane są błędy dla wybranych przez nas przykładów
- **ErrorsTab** - zakładka, w której generowane są losowe kombinacje wielomianów Czebyszewa o wybranym przez użytkownika stopniu. Pokazuje błędy obu metod.
- **HeatmapTab** - sekcja, w której użytkownik bada zależność błędu od ilości interwałów i stopnia wielomianu. Dla podanej przez użytkownika wartości **Max Subintervals** generowane są błędy całkowania w przedziale $[-1, 1]$ dla kombinacji wielomianów pierwszego stopnia, potem pierwszego i drugiego itd. aż do dziesiątego.

Do wizualizacji błędów, lecz tym razem w zależności od przedziału całkowania dla wybranych przykładowych kombinacji wielomianów Czebyszewa można zastosować aplikację *errorsGUI.mlapp*.

3 Przykłady

3.1 Opis przykładów

1. chebyshev_example_1 - współczynniki kombinacji przyjmują postać $\{4, 2\}$. Metoda Simpsona powinna obliczać dokładną wartość całki z tego wielomianu.
2. chebyshev_example_2 - współczynniki kombinacji przyjmują postać $\{15\}$. Metoda Trapezów powinna obliczać dokładną wartość całki z tego wielomianu.
3. chebyshev_example_3 - współczynniki kombinacji przyjmują postać $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$. Wartości całki z tego wielomianu na przedziale większym niż $(-1,1)$ są bardzo duże i szybko rosną.
4. chebyshev_example_4 - współczynniki wielomianu są identyczne jak w przypadku chebyshev_example_3. Wartości całki z tego wielomianu wewnątrz przedziału $(-1,1)$ są relatywnie niskie.
5. chebyshev_example_5 - współczynniki kombinacji przyjmują postać $\{0.2916, 0.1978, 1.5877, -0.8045\}$. Wartość całki z tego wielomianu na przedziale $[-1,1]$ dla dużej liczby podprzedziałów N są dokładniejsze niż dla mniejszego N .
6. Przykład 6 - wielomian jest identyczny jak w przykładzie 5, aby pokazać, że dla zwiększonej liczby podprzedziałów N błąd (zarówno względny jak i bezwzględny) jest mniejszy.
7. chebyshev_example_7 - współczynniki kombinacji przyjmują postać $\{1, 1, 1, 1, 1, -1\}$. Przykład pokazuje, że poza przedziałem $[-1,1]$ o wartości wielomianu decyduje wyłącznie ostatni składnik sumy postaci $a_k * U_n(x) * T_n(x)$ (współczynnik przy najwyższej potęgze).
8. chebyshev_example_8 - współczynniki kombinacji przyjmują postać $\{10^{-8}, 10^{-8}, 10^{-8}, 10^{-8}, 10^{-8}, 10^{-8}\}$. Wszystkie współczynniki równe są 10^{-8} . Nie pomaga to uniknąć dużych wartości wielomianu poza przedziałem $[-1,1]$, natomiast wewnątrz tego przedziału wartość całki jest bliska 0.
9. chebyshev_example_9 - współczynniki kombinacji przyjmują postać $\{1, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}, 10^{-15}\}$. Kolejne elementy kombinacji ważone są coraz mniejszymi wagami. Dzięki temu na przedziale nawet większym niż $[-1,1]$ wartości całki są relatywnie małe.
10. chebyshev_example_10 - współczynniki kombinacji przyjmują postać $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Na podstawie tego przykładu pokazujemy, że z parzystości wielomianu $w_5(x) = \sum_{k=0}^5 a_k T_k(x) U_k(x)$ wynika równość pól pod wykresem tego wielomianu na przedziale $[-a, 0]$ oraz $[0, a]$.
11. example_11 - współczynniki kombinacji przyjmują postać $\{1, 1, 1, 1, 1\}$. Ten wielomian jest postaci sumy od $\sum_{k=0}^n a_k * T_k(x)$. Jest to zatem kombinacja ale tylko wielomianów Czebyszewa I rodzaju.
12. example_12 - na koniec można przetestować działanie metod trapezów i Simpsona na funkcji postaci $y = 5 * \sin(x) - 3 * \cos(x)$.

3.2 Tabela wynikowa

Test #	a	b	N	Integral	Trapezoidal	Trap Abs Error	Trap Rel Error	Simpson	Simp Abs Error	Simp Rel Error
1	-2	10	50	2.2915e+12	2.3037e+12	1.2150e+10	0.0053	2.2915e+12	2.1956e+06	9.2054e-07
2	-2	10	50	180	180	0	0	180	0	0
3	1	3	50	1.4679e+14	1.4780e+14	1.0169e+12	0.0069	1.4679e+14	2.8371e+08	1.9329e-06
4	-0.5000	0.5000	50	5.7523	5.7529	5.3985e-04	9.3118e-05	5.7523	5.6079e-07	1.0097e-07
5	-1	1	5	1.8327	1.8373	0.1965	0.1066	1.7965	0.0342	0.0187
6	-1	1	50	1.8327	1.8294	0.0033	0.0018	1.8327	3.5719e-06	1.9489e-06
7	-1.5000	-1	50	-700.9002	-701.4640	0.0548	7.9152e-04	-700.9002	1.1801e-05	1.6836e-06
8	-1	1	50	7.9152e-06	8.0009e-06	1.2179e-09	0.0156	8.0009e-06	1.2179e-09	0.0156
9	-5	5	50	10.1769	10.1771	1.6403e-04	1.6116e-05	10.1769	1.3696e-09	1.3629e-10
10	-0.7000	0	50	7.4369	7.4372	3.2101e-04	4.3165e-05	7.4369	1.6739e-07	2.1162e-08
11	-1	-0.5000	50	0.1125	0.1126	1.0833e-04	9.6293e-04	0.1125	1.3876e-17	1.2336e-16
12	-10	10	100	3.2641	3.2632	0.0109	0.0033	3.2641	1.6147e-06	5.5894e-07

Figure 3: Wyniki działania metody trapezów i Simpsona na przykładowych funkcjach

Wyniki działania metody Simpsona i metody trapezów na zadanych przykładach są zgodne z przewidywanymi własnościami. Dla przykładu można zaobserwować, że dla testu numer 3, tzn. funkcji chebyshev_example_3 błąd bezwzględny obliczony przez obie metody jest rzędu 10^{10} . Jednak ze względu na spodziewaną ogromną wartość całki rzeczywistej w danym przedziale, błąd względny (dzielony przez wartości rzeczywistą) pozostaje mały. Jest on rzędu 10^{-2} dla metody trapezów oraz 10^{-8} dla metody Simpsona. Porównując przykład numer 5 z przykładem numer 6 można zaobserwować, że zwiększenie liczby podprzedziałów z 5 do 50, zmniejsza błąd względny obliczania całki 100 - krotnie dla metody trapezów oraz 10 000 - krotnie dla metody Simpsona. Na podstawie przykładu numer 9 można stwierdzić, że zgodnie z oczekiwaniami zastosowanie niskich współczynników (rzędu 10^{-15}) przy najwyższych potęgach wielomianu powoduje zmniejszenie wartości całki na przedziale bliskim $[-1, 1]$ oraz poprawę własności numerycznego całkowania. Warto również zauważyć, że gdy zastosujemy inną kombinację wielomianów, mianowicie kombinację postaci $\sum_{k=0}^n a_k * T_k(x)$ (patrz przykład 10), to błąd numerycznego całkowania takich funkcji jest mniejszy, niż w przypadku wcześniej badanych kombinacji wielomianów Czebyszewa zarówno I jak i II rodzaju.

4 Pomiar błędów

Analiza błędów pomiarowych dla metody Simpsona oraz metody trapezoidalnej wykazuje, że metoda Simpsona generalnie osiąga mniejsze błędy w porównaniu z metodą trapezoidalną. Jest to zgodne z oczekiwaniami, ponieważ metoda Simpsona jest dokładniejsza przy założeniu odpowiedniej gładkości integrowanej funkcji.

Examples	20			Poly degree	10			Start	
Test #	True Integral	Simpson	Simpson Diff	Simpson Error (%)	Trapezoidal	Trapezoidal Diff	Trapezoidal Error (%)		
1.0000	34.9221	34.9233	0.0012	0.0034	35.4304	0.5083	1.4555		
2.0000	43.6781	43.6813	0.0032	0.0073	44.5442	0.8661	1.9830		
3.0000	25.1414	25.1433	0.0018	0.0073	25.5026	0.3612	1.4366		
4.0000	31.4758	31.4774	0.0016	0.0050	31.9745	0.4987	1.5844		
5.0000	28.1822	28.1832	0.0010	0.0036	28.4906	0.3084	1.0943		
6.0000	40.9996	41.0033	0.0037	0.0091	41.9138	0.9142	2.2297		
7.0000	26.5631	26.5652	0.0021	0.0081	27.1713	0.6082	2.2896		
8.0000	28.5824	28.5843	0.0019	0.0065	29.1942	0.6117	2.1403		
9.0000	31.9535	31.9549	0.0015	0.0046	32.4567	0.5032	1.5749		
10.0000	22.7508	22.7525	0.0017	0.0073	23.1751	0.4243	1.8648		
11.0000	28.2144	28.2167	0.0023	0.0080	28.7574	0.5430	1.9244		
12.0000	34.1720	34.1755	0.0034	0.0101	34.9873	0.8152	2.3857		
13.0000	18.2585	18.2586	0.0002	0.0009	18.4255	0.1671	0.9150		
14.0000	33.8998	33.9005	0.0008	0.0022	34.2549	0.3551	1.0474		
15.0000	21.5059	21.5078	0.0019	0.0088	22.0882	0.5823	2.7077		
16.0000	22.9032	22.9034	0.0002	0.0010	23.0665	0.1634	0.7133		
17.0000	28.9199	28.9205	0.0006	0.0020	29.1333	0.2134	0.7378		

Figure 4: Porównanie błędów dla metody Simpsona i metody trapezoidalnej przy różnej liczbie podprzedziałów.

Jak widać na Rysunku 4, dla kombinacji wielomianów stopnia 10, metoda Simpsona osiąga wartości błędów mniejsze lub równe 0.01%, podczas gdy dla metody trapezoidalnej błędy są mniejsze lub równe 2%. Jest to istotne z punktu widzenia wyboru metody numerycznej dla konkretnych zastosowań, gdzie wymagana jest wysoka precyzja.

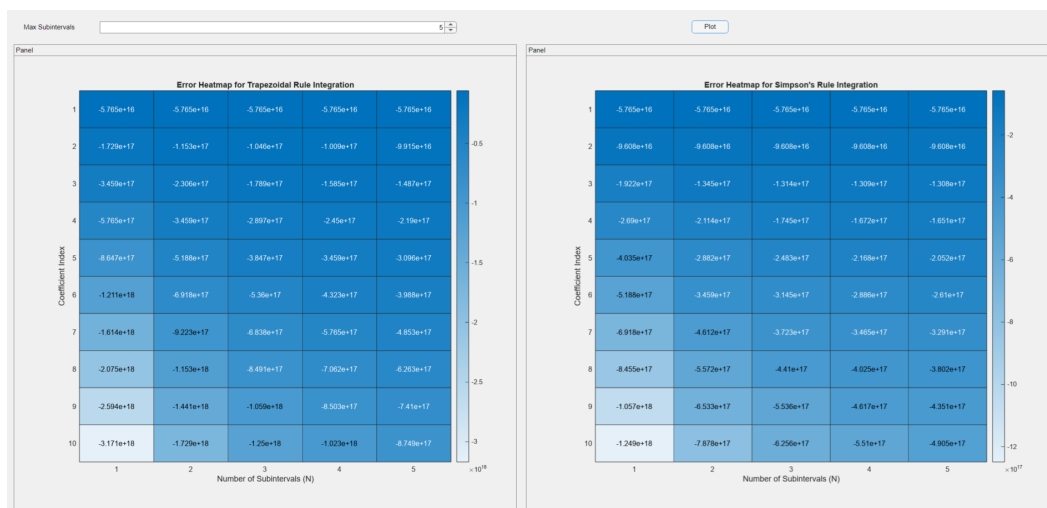


Figure 5: Mapa ciepła błędów dla metody trapezoidalnej (po lewej) i metody Simpsona (po prawej) w zależności od liczby podprzedziałów oraz indeksu współczynnika.

Mapa ciepła na Rysunku 5 przedstawia rozkład błędów w zależności od liczby podprzedziałów (osi poziomej) oraz ilości współczynników (osi pionowej). Kolory reprezentują

wielkość błędu, gdzie ciemniejsze odcienie niebieskiego wskazują na większe błędy. Z mapy ciepła można wywnioskować, że zwiększenie liczby podprzedziałów (N) prowadzi do zmniejszenia błędów, szczególnie w metodzie Simpsona. Warto zauważyć co się dzieje dla kombinacji wielomianów pierwszego stopnia. Mimo, że obie te metody powinny być dokładne możemy zaobserwować minimalne błędy wynikające z zapisu liczb w pamięci komputera.

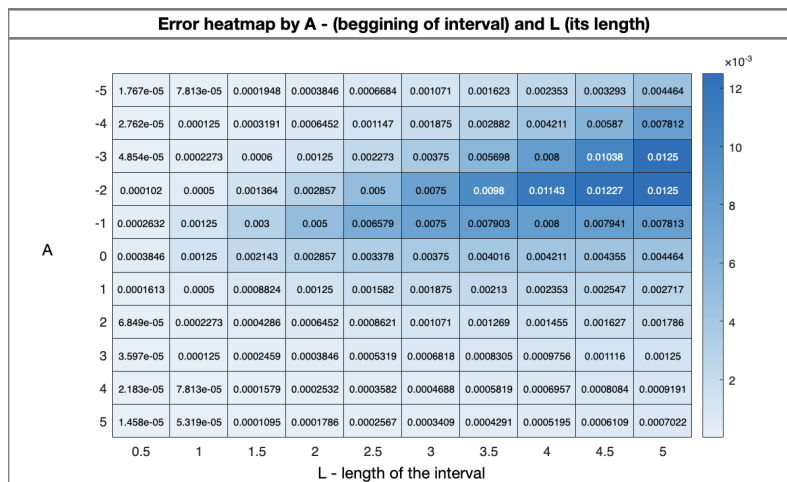


Figure 6: Mapa ciepła błędów dla metody trapezów w zależności od początku przedziału (A) oraz jego długości (L)

Na podstawie mapy ciepła 6 można stwierdzić, że im dłuższy przedział całkowania, tym większy błąd względny obliczania przybliżonej wartości całki. Zależność ta na ogół nie zależy od początku przedziału całkowania. Warto jednak zwrócić uwagę, że wartość względnego błędu zależy silnie od miejsca, w którym funkcja jest całkowana. Dla przykładu całka na przedziale $[5, 10]$ została obliczona z błędem dwudziestokrotnie mniejszym niż całka na przedziale $[-2, 3]$. Może być to konsekwencją własności wielomianów Czebyszewa wyższych stopni, które w przedziale $[-1, 1]$ zachowują się oscylacyjnie.

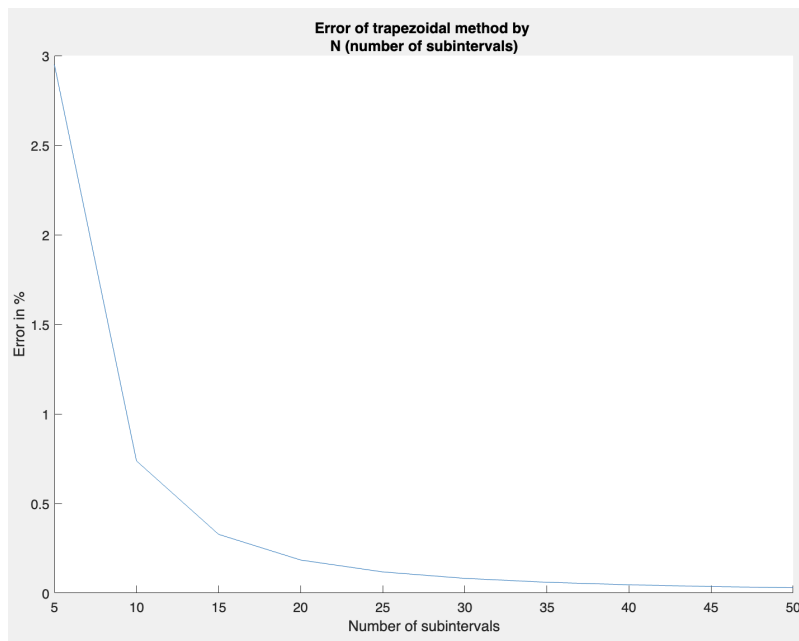


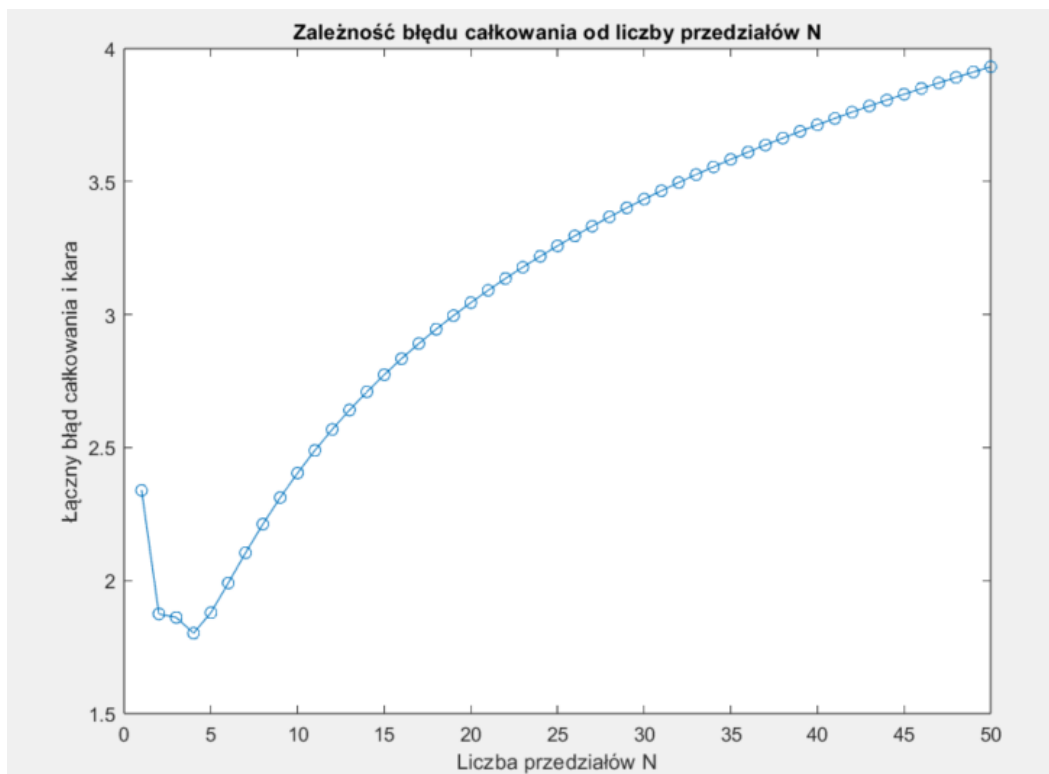
Figure 7: Wykres zależności błędu względnego wyrażonego w (%) od ilości podprzedziałów w całkowaniu metodą trapezów

Na podstawie wykresu 7 można zaobserwować, że dla pewnej przykładowej kombinacji wielomianów Czebyszewa, całka z uzyskanego wielomianu jest obliczana dokładniej, gdy przedział całkowania podzielony jest na więcej podprzedziałów (N). Jest to własność zgodna z przewidywaniami teoretycznymi, zgodnie z którymi oszacowanie błędu jest odwrotnie proporcjonalne do wartości N:

$$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{12N^2} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

4.1 Optymalizacja ilości interwałów

Zastosowaliśmy naszą testową funkcję optymalizacyjną na przykładzie kombinacji wielomianów Czebyszewa o współczynnikach [1, 2, 3, 4, 5], przy maksymalnej liczbie przedziałów wynoszącej 50, w przedziale (-10,10).



Dla analizowanej funkcji "optymalna" liczba przedziałów wynosi 4, co wydaje się być zbyt niską wartością, by użyć jej w zastosowaniach. Podejrzewamy, że istnieją lepsze funkcje penalizujące, które biorą pod uwagę dodawanie liczby przedziałów oraz oczekiwany stopień dokładności. Naszą funkcję przedstawiamy jako ciekawostkę, która może zostać rozwinięta w przyszłości.

5 Wnioski

Projekt ten koncentrował się na wykorzystaniu metod numerycznych, takich jak metoda trapezów i metoda Simpsona, do obliczania całek z wielomianów Czebyszewa. Wielomiany Czebyszewa są szczególnie interesującymi funkcjami w analizie numerycznej ze względu na swoje unikalne właściwości.

1. **Dokładność metod:** Metoda Simpsona generalnie zapewnia większą dokładność w porównaniu z metodą trapezów, szczególnie dla funkcji o wyższej gładkości. Jest to widoczne w analizach błędów pomiarowych, gdzie metoda Simpsona osiąga znacznie mniejsze błędy względne w stosunku do metody trapezów, co jest zgodne z teoretycznymi oszacowaniami błędu dla obu metod.
2. **Zachowanie wielomianów Czebyszewa:** Wielomiany Czebyszewa mają unikalne własności oscylacyjne na przedziale $[-1, 1]$, co wpływa na wyniki całkowania numerycznego. Dla przedziałów poza $[-1, 1]$ wartości tych wielomianów rosną bardzo szybko, co może prowadzić do dużych błędów, jeśli współczynniki nie są odpowiednio dostosowane (patrz przykład *chebyshev.example_9*).
3. **Wpływ liczby podprzedziałów:** Zwiększenie liczby podprzedziałów N prowadzi do zmniejszenia błędu przybliżenia całki dla obu metod. Jest to zgodne z teoretycznymi oszacowaniami błędów, które są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu (dla metody trapezów) lub czwartej potęgi (dla metody Simpsona) liczby N .
4. **Zastosowania:** Zależnie od wymaganej dokładności i charakterystyki funkcji podcałkowej, wybór między metodą trapezów a metodą Simpsona powinien być dokonany z uwzględnieniem zarówno kosztu obliczeniowego, jak i oczekiwanej precyzji.