Modelowanie i identyfikacja – laboratorium 10.

Identyfikacja liniowych systemów dynamicznych.

Skorelowane zakłócenie, uogólniona metoda najmniejszych kwadratów

Paweł Wachel

Wymagania wstępne:

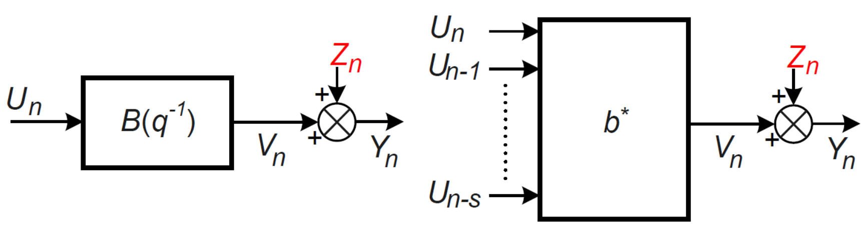
1. Wymagania wstępne z poprzednich zajęć[1].
2. Znajomość podstawowych własności liniowych systemów dynamicznych z czasem dyskretnym: odpowiedź impulsowa i skokowa systemu, reprezentacja za pomocą splotu, stabilność.

Zadania do wykonania:

Dany jest **dynamiczny** system liniowy typu SISO ze skończoną pamięcią o znanej długości s (np. $s = 5, 10$) opisany równaniem

$$Y_n = b_0^* U_n + b_1^* U_{n-1} + b_2^* U_{n-2} + \cdots + b_s^* U_{n-s} + Z_n \tag{1}$$

gdzie $\{U_n\}$, $\{Y_n\}$ to odpowiednio sygnały wejścia i wyjścia, $\{Z_n\}$ jest addytywnym zakłóce-



niem, a $\{b_0^*, b_1^*, \ldots, b_s^*\}$ jest ciągiem szukanych prametrów systemu (odpowiedź imp.). Niech $b^* = [b_0^*, b_1^*, \ldots, b_s^*]^T$ oraz $\varphi_n = [U_n, U_{n-1}, \ldots, U_{n-s}]^T$. Wtedy $Y_n = \varphi_n^T b^* + Z_n$.

1. Ustalić arbitralnie składowe wektora b^*. Wygenerować N-elementową sekwencję obserwacji wejścia $\{U_n\}$ typu *i.i.d.* o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mu, \sigma_U^2)$.
2. Wygenerować zakłócenie $Z_n = e_n$, gdzie $\{e_n\}$ jest białym szumem o rozkładzie normalnym. Skonstruować macierze

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_0 & \cdots & U_{1-s} \\ U_2 & U_1 & \cdots & U_{2-s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_N & U_{N-1} & \cdots & U_{N-s} \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_N = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_N = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix} \tag{2}$$

(wtedy $\mathbf{Y}_N = \Phi_N b^* + \mathbf{Z}_N$)
Skonstruować estmator odpowiedzi impulsowej systemu zgodnie ze wzorem

$$\hat{b}_N = (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T \mathbf{Y}_N. \tag{3}$$

[1] Całkujemy wiedzę... przynajmniej do wakacji.

3. Dla (ustalonego) sygnału wejściowego $\{U_n\}$ z punktu 1. wygenerować L (np. $L = 100$) niezależnych sekwencji $\{Z_n\}$ i utworzyć odpowiadające im zbiory pomiarów wejścia-wyjścia $T_N^{[1]}, T_N^{[2]}, \ldots, T_N^{[L]}$. Niech $\hat{b}_N^{[l]}$ oznacza realizację estymatora $\hat{b}_N$ uzyskaną na podstawie pomiarów ze zbioru $T_N^{[l]}$. Wykreślić błąd

$$Err\{\hat{b}_N\} = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\left\|\hat{b}_N^{[l]} - b^*\right\|^2 \tag{4}$$

w funkcji N.

4. Powtórzyć eksperyment z p. 3. dla zakłócenia

$$Z_n = e_n + \alpha e_{n-1}, \tag{5}$$

gdzie α jest dowolną stałą i porównać uzyskany rezultat z wykresem otrzymanym w punkcie 3.

5. Macierz kowariancji zakłóceń (5) przyjmuje postać

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & c_0 & c_1 & 0 & & 0 \\ 0 & c_1 & c_0 & c_1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}_{N\times N}, \tag{6}$$

gdzie $c_0 = (1+\alpha^2)\sigma_e^2$, $c_1 = \alpha\sigma_e^2$ oraz $\sigma_e^2 < \infty$ jest wariancją sygnału $\{e_n\}$. W wybranym środowisku obliczeniowym skonstruować macierz $\mathbf{R}$ (np. przy użyciu funkcji `toeplitz()`–MATLAB) i sprawdzić czy jest ona nieosobliwa.

6. Skonstruować estymator *uogólnionej metody najmniejszych kwadratów* zgodnie ze wzorem

$$\hat{b}_N^{GLS} = [\Phi_N^T\mathbf{R}^{-1}\Phi_N]^{-1}\Phi_N^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Y}_n. \tag{7}$$

7. Dla estymatora $\hat{b}_N^{GLS}$ powtórzyć ekperyment z pkt. 3 i porównać uzyskane rezultaty z wcześniejszymi wynikami.

Zadania dodatkowe:

1. Powtórzyć przeprowadzone powyżej eksperymenty (dla estymatora $\hat{b}_N$) i zakłócenia

$$Z_n = \alpha Z_{n-1} + e_{n-1}, \tag{8}$$

gdzie $|\alpha| < 1$. Następnie skonstruować macierz kowariancji $\mathbf{R}$ dla ciągu (8) i zbadać własności estymatora $\hat{b}_N^{GLS}$.

Literatura:

1. Söderström, Torsten D., and Petre Gheorghe Stoica. Identyfikacja systemów. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1997.

2. Mańczak, Kazimierz, and Zbigniew Nahorski. Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1983.

3. Wasserman, Larry. All of statistics: a concise course in statistical inference. Springer Science & Business Media, 2013.

4. Gajek Lesław, Kałuszka Marek. Wnioskowanie statystyczne: modele i metody. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1993.

5. Notatki z wykładu.