

LABORATORIUM

MODELOWANIE I IDENTYFIKACJA

Sprawozdanie

Identyfikacja

Laboratorium 7, 8, 9, 10, 11, 12

Autor:

Adam KRZYKAŁA, 235411

Termin: czwartek 9:15

Prowadzący:

dr inż. Paweł WACHEL, prof. ucz.

7 czerwca 2020

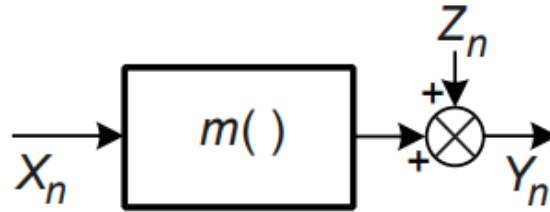
Spis treści

1	Laboratorium 7 - Ortogonalny estymator funkcji regresji	2
1.1	Zadanie 1 - Definicja nieliniowego systemu statycznego	2
1.2	Zadanie 2 - Chmura pomiarowa na tle rzeczywistej charakterystyki	2
1.3	Zadanie 3 - Estymator ortogonalny - baza kosinusowa	3
1.4	Zadanie 4 - Wpływ ilości wyższych harmonicznych na estymator	3
1.5	Zadanie 5 - Minimalizacja błędu estymacji	4
1.6	Zadanie 6 - Rozwiązanie optymalne - minimalizacja wskaźnika jakości	5
1.7	Zadanie 6* - System nieliniowy z parametrem $a = 4$	5
1.8	Zadanie 7 - Estymator ortogonalny a szum Cauchy'ego, $a = 1$	6
1.9	Zadanie 1 -	9
2	Laboratorium 8 - Metoda najmniejszych kwadratów w ujęciu podstawowym	10
2.1	Zadanie 1, 2 - Definicja statycznego systemu liniowego MISO	10
2.2	Zadanie 3 - Podstawowy estymator metody najmniejszych kwadratów	10
2.3	Zadanie 4 - Macierz kowariancji estymatora	11
2.4	Zadanie 5 - Błąd estymatora MNK	11
3	Laboratorium 9 - Metoda najmniejszych kwadratów - skorelowane zakłócenie	13
3.1	Zadanie 1 - Definicja statycznego systemu liniowego MISO	13
3.2	Zadanie 2, 3 - Generacja skorelowanego zakłócenia i chmury pomiarowej do MNK	13
3.3	Zadanie 4 - Estymator metody najmniejszych kwadratów	15
3.4	Zadanie 5 - Macierz kowariancji wektora zakłóceń	15
3.5	Zadanie 6 - Macierz kowariancji estymatora	16
4	Laboratorium 10 - Uogólniona metoda najmniejszych kwadratów	19
4.1	Zadanie 1 - Dynamiczny system SISO	19
4.2	Zadanie 2 - Estymator odpowiedzi impulsowej systemu	19
4.3	Zadanie 3 - Błąd estymatora MNK	20
4.4	Zadanie 4 - Błąd estymatora MNK - skorelowane zakłócenie	20
4.5	Zadanie 5 - konstrukcja macierzy kowariancji toeplitz	21
4.6	Zadanie 6 - Konstrukcja estymatora GLS	22
4.7	Zadanie 7 - Porównanie estymatorów	22
5	Laboratorium 11 - Identyfikacja systemów LTI z nieskończoną pamięcią. Metoda zmiennych instrumentalnych.	23
5.1	Zadanie 1 - Konstrukcja systemu SISO z nieskończoną pamięcią	23
5.2	Zadanie 2 - Odpowiedź impulsowa	23
5.3	Zadanie 3,4 - Generowanie pomiarów na potrzeby badania estymacji	24
5.4	Zadanie 5 - Błąd estymacji MNK w systemach ARMA	24
5.5	Zadanie 6 - Oszacowanie niezaszumionego wyjścia V_n	25
5.6	Zadanie 7 - Konstrukcja macierzy Ψ metody zmiennych instrumentalnych	25
5.7	Zadanie 8 - Konstrukcja estymatora zmiennych instrumentalnych	25
5.8	Zadanie 9 - Błędy estymacji w systemach ARMA dla MNK i metody zmiennych instrumentalnych	26
6	Laboratorium 12 - System Hammersteina	27
6.1	Zadanie 1 - Dynamiczny system nieliniowy typu Hammersteina	27
6.2	Zadanie 2 - Generowanie obserwacji	27
6.3	Zadanie 3 - Estymator jądrowy	27
6.4	Zadanie 5 - Estymator parametrów systemu λ_l	30
6.5	Zadanie 6 - Realizacja estymatora parametrów	30
	Bibilografia	31

1 Laboratorium 7 - Ortogonalny estymator funkcji regresji

1.1 Zadanie 1 - Definicja nieliniowego systemu statycznego

W celu zaimplementowania estymatora ortogonalnego wygenerowano N elementowy wektor wejściowy X_N z rozkładu jednostajnego $\mathcal{U}(-\pi, \pi)$. Wyjście systemu jest zaszumione addytywnym zakłóceniem pochodzącym z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0, 1)$.



Rysunek 1: Statyczny system nieliniowy

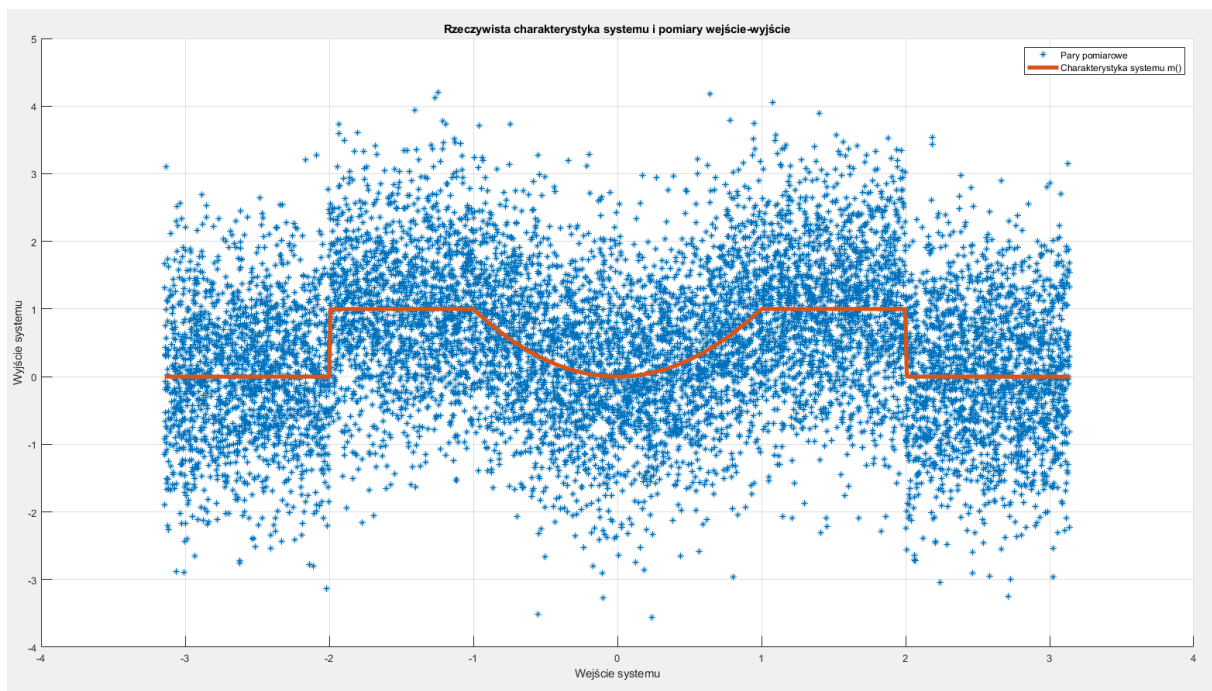
Gdzie $m()$ jest nieliniową charakterystyką systemu zdefiniowaną następująco:

$$m(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{gdy } |x| \in [0, 1) \\ 1 & \text{gdy } |x| \in [1, 2) \\ 0 & \text{gdy } |x| \in [2, \infty) \end{cases}$$

Parametr a jest początkowo przyjęty jako 1.

1.2 Zadanie 2 - Chmura pomiarowa na tle rzeczywistej charakterystyki

Pary pomiarów $\{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)\}$ umieszczono na wykresie na tle rzeczywistej charakterystyki.



Rysunek 2: Chmura pomiarowa na tle charakterystyki rzeczywistej

Komentarz Na podstawie danych z wykresu 2 stworzono estymator ortogonalny funkcji regresji.

1.3 Zadanie 3 - Estymator ortogonalny - baza kosinusowa

Funkcje bazowe Podstawowe funkcje w bazie kosinusowej przedstawiają się następująco:

$$\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \quad (1)$$

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos(kx), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Estymator ortogonalny Estymator ortogonalny jest definiowany wzorem

$$\hat{m}_N(x) = \frac{\hat{g}_N(x)}{\hat{f}_N(x)}, \quad \hat{m}_N(x) = 0 \text{ jeżeli } \hat{f}_N(x) = 0, \quad (3)$$

gdzie

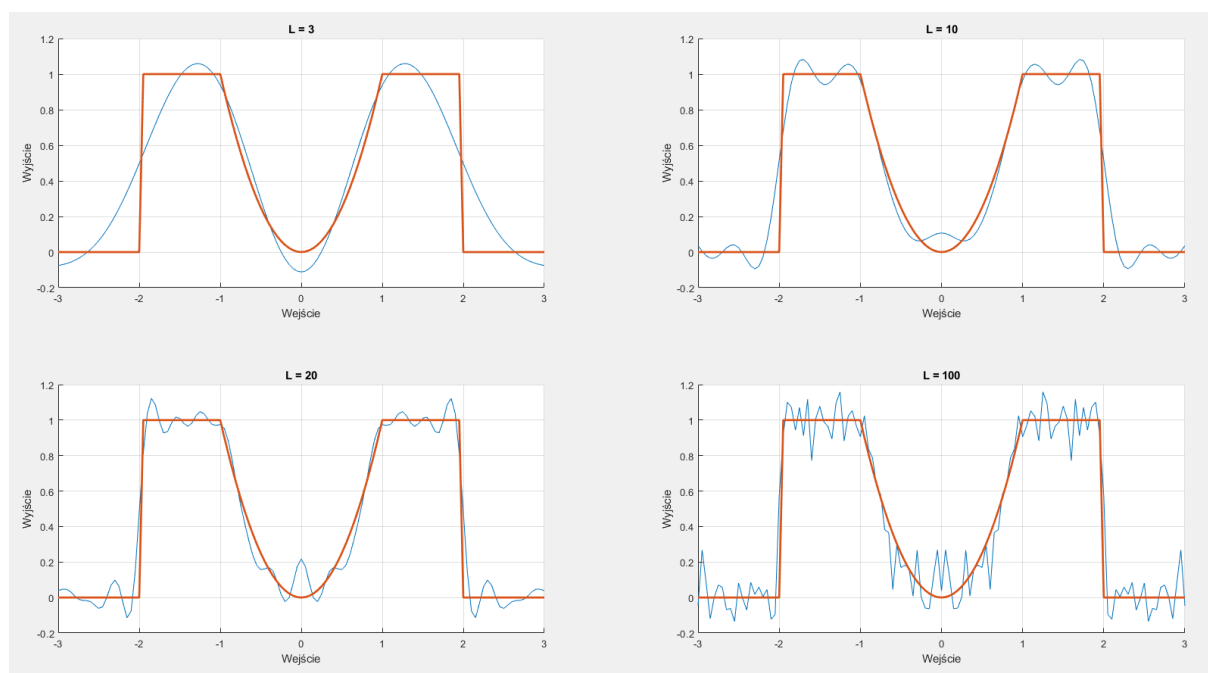
$$\hat{g}_N(x) = \sum_{k=0}^L \hat{\alpha}_k \varphi_k(x), \quad \hat{\alpha}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n \varphi_k(X_n) \quad (4)$$

$$\hat{f}_N(x) = \sum_{k=0}^L \hat{\beta}_k \varphi_k(x), \quad \hat{\beta}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi_k(X_n) \quad (5)$$

Komentarz Tak zdefiniowany estymator ortogonalny funkcji regresji z bazą kosinusową posłużył do estymacji charakterystyki systemu zdefiniowanego w zad 1.

1.4 Zadanie 4 - Wpływ ilości wyższych harmonicznych na estymator

Przetestowano działanie estymatora funkcji regresji dla zmiennego parametru L oznaczającego ilość funkcji kosinus (baza kosinusowa) w estymatorze funkcji regresji. Istnieje zatem L-1 wyższych harmonicznych (każda kolejna funkcja kosinus ma częstotliwość, która jest całkowitą wielokrotnością częstotliwości początkowej pierwszej funkcji kosinus).



Rysunek 3: Wpływ parametru L na estymator ortogonalny

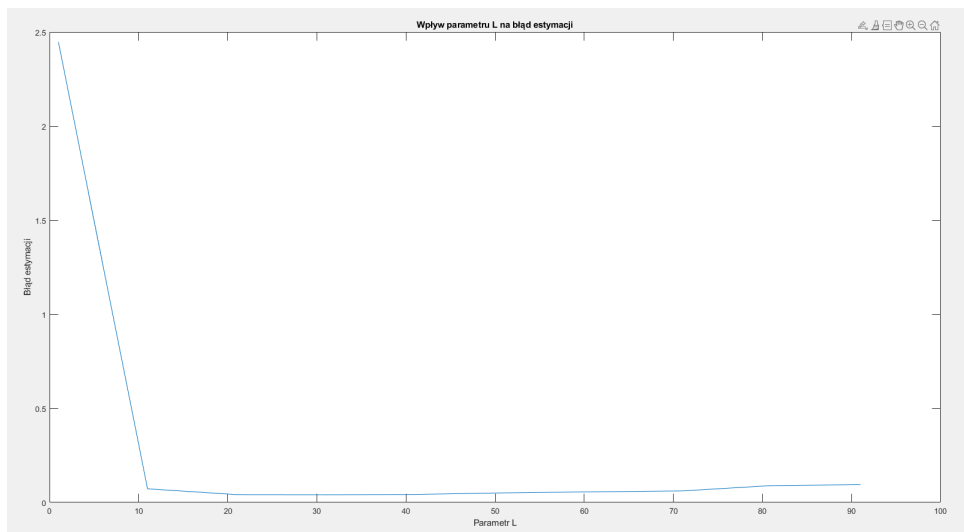
Komentarz Dla różnych parametrów L realizacja estymatora ortogonalnego funkcji regresji była inna. Do pewnego momentu zwiększała się dokładność estymacji. Zbyt duże zwiększanie parametru L spowodowało wprowadzenie oscylacji wokół rzeczywistej charakterystyki i brak tendencji do malejącego błędu. Konieczne zatem było wprowadzenie wskaźnika jakości, bazującego na minimalizacji błędu estymacji.

1.5 Zadanie 5 - Minimalizacja błędu estymacji

Błąd estymacji Na potrzeby minimalizacji błędu estymacji wprowadzono następujący wzór:

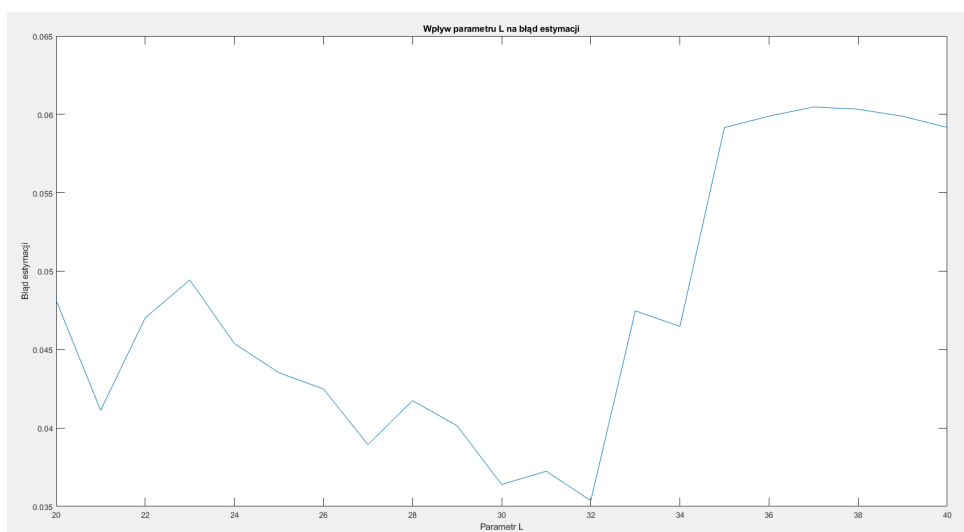
$$valid(L) = \frac{1}{2Q} \sum_{-Q}^Q \left[\hat{m}_N \left(\frac{2q}{Q} \right) - m \left(\frac{2q}{Q} \right) \right]^2 \quad (6)$$

Sprawdzano parametr L od 1 do 100 z dokładnością 10. Następnie zawężono poszukiwania, które znalazły najkorzystniejszą wartość L z dokładnością do 1.



Rysunek 4: Wpływ parametru L na estymator ortogonalny - symulacja zgrubna

Minimum lokalne znajduje się na przedziale $L \in (20, 40)$. Dla tego przedziału przeprowadzono symulację dokładną doboru parametru z dokładnością do 1.

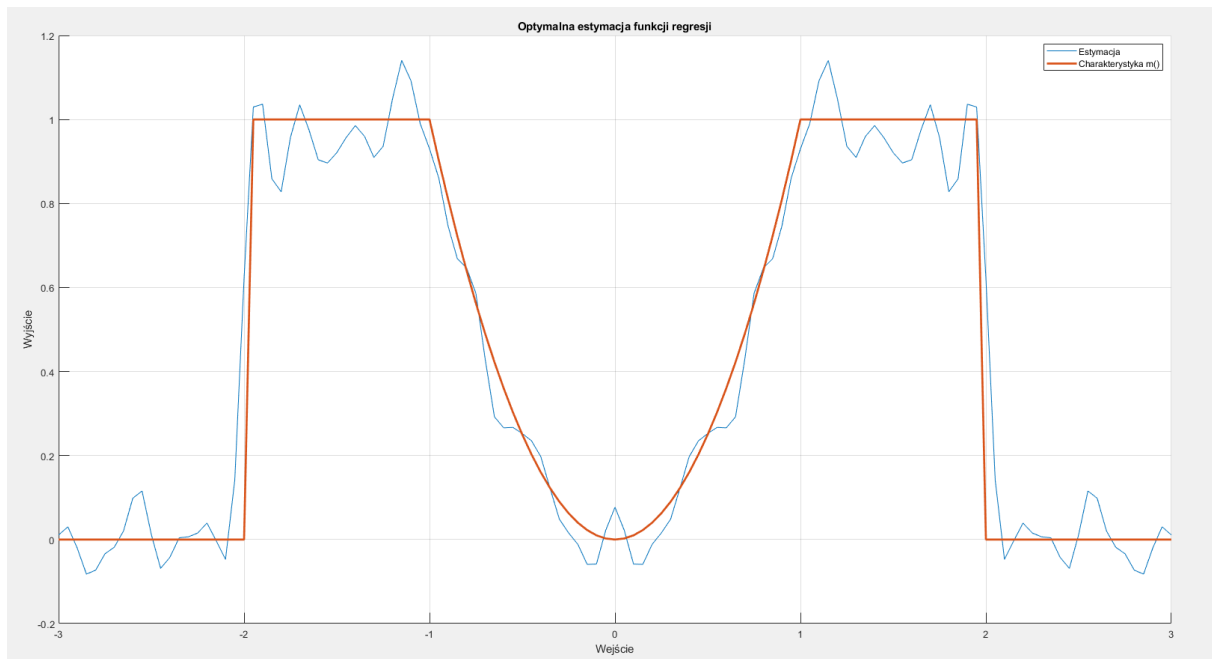


Rysunek 5: Wpływ parametru L na estymator ortogonalny - symulacja dokładna

Komentarz Minimum błędu estymacji otrzymano dla $L = 32$. Najbardziej optymalny parametr ma 32 funkcje kosinus (31 wyższych harmonicznych) i stałą. Minimalny błąd wyniósł 0.036.

1.6 Zadanie 6 - Rozwiązanie optymalne - minimalizacja wskaźnika jakości

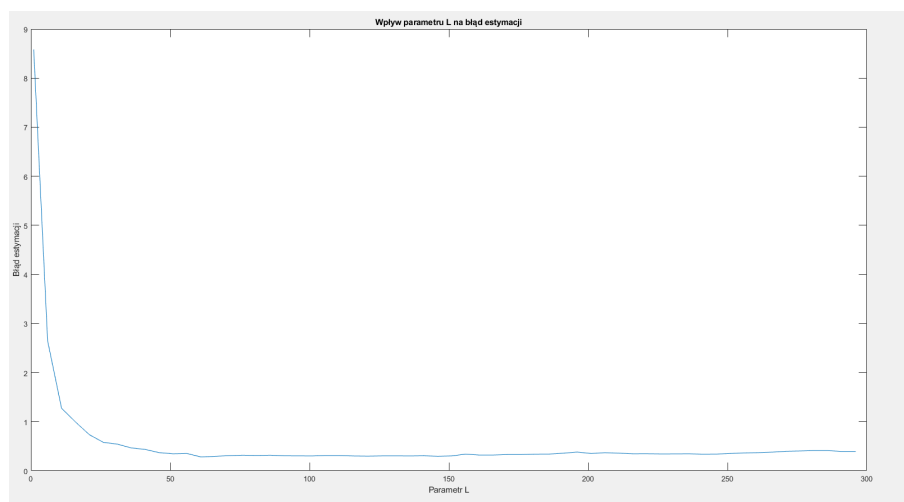
Błąd przyjmuje wartość najmniejszą dla parametru $L = 32$. Dla tej wartości za pomocą estymatora ortogonalnego odtworzono rzeczywistą charakterystykę obiektu.



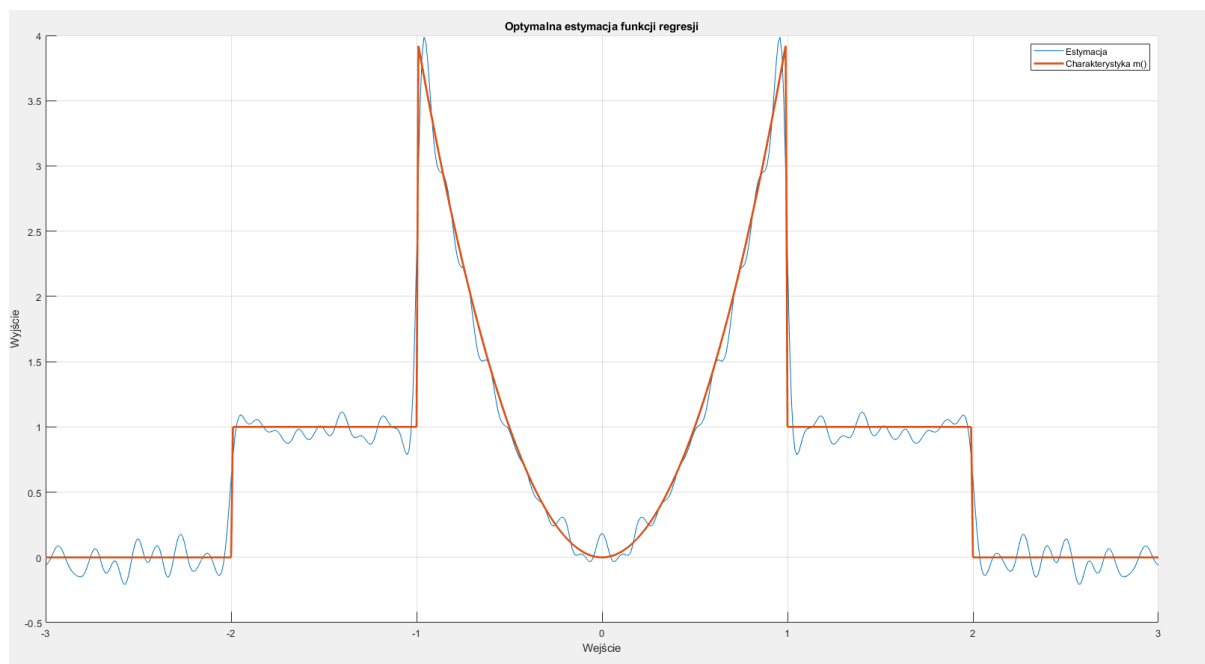
Rysunek 6: Estymacja charakterystyki dla $L = 32$

Komentarz Dla bazy kosinusowej parametr $L = 32$ okazał się najlepszym, minimalizującym sumę błędów estymacji na zadanym przedziale. Mimo wszystko może okazać się, że inne bazy ortogonalne bądź ortonormalne lepiej poradziłyby sobie z estymacją niniejszego systemu. Estymacja najgorzej poradziła sobie dla punktów wykresu, które nie są różniczkowalne oraz na stałych przedziałach.

1.7 Zadanie 6* - System nieliniowy z parametrem $a = 4$



Rysunek 7: Zależność błędów estymacji od L

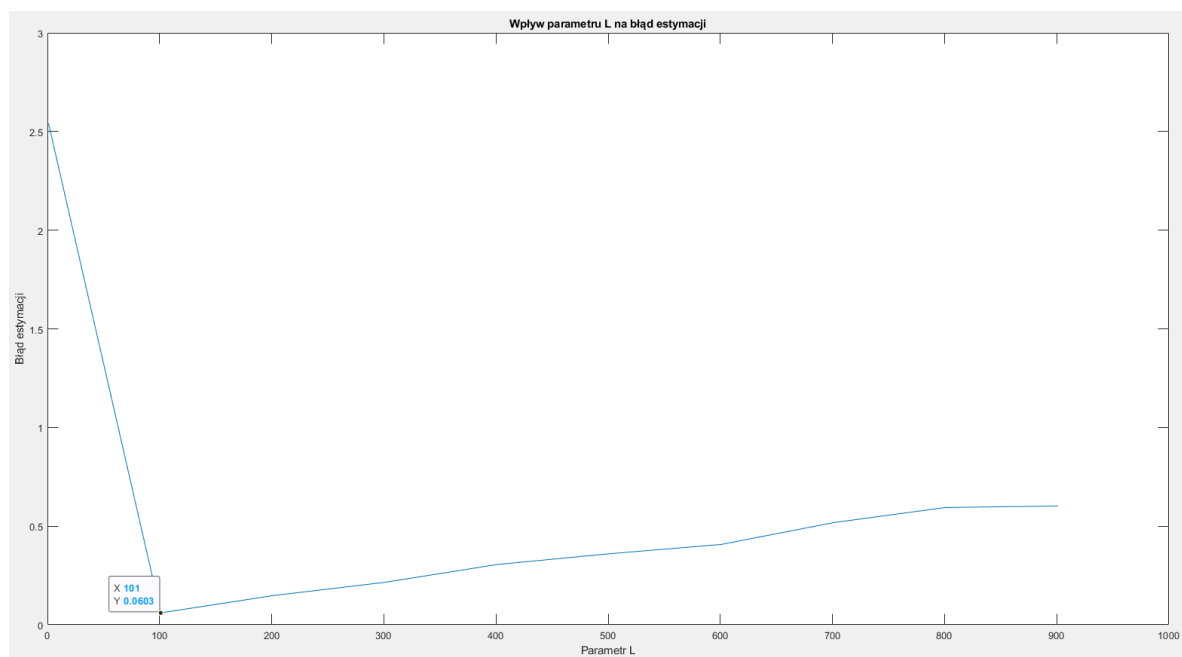


Rysunek 8: Realizacja estymatora dla $a = 4$ i $L = 60$ (optymalne)

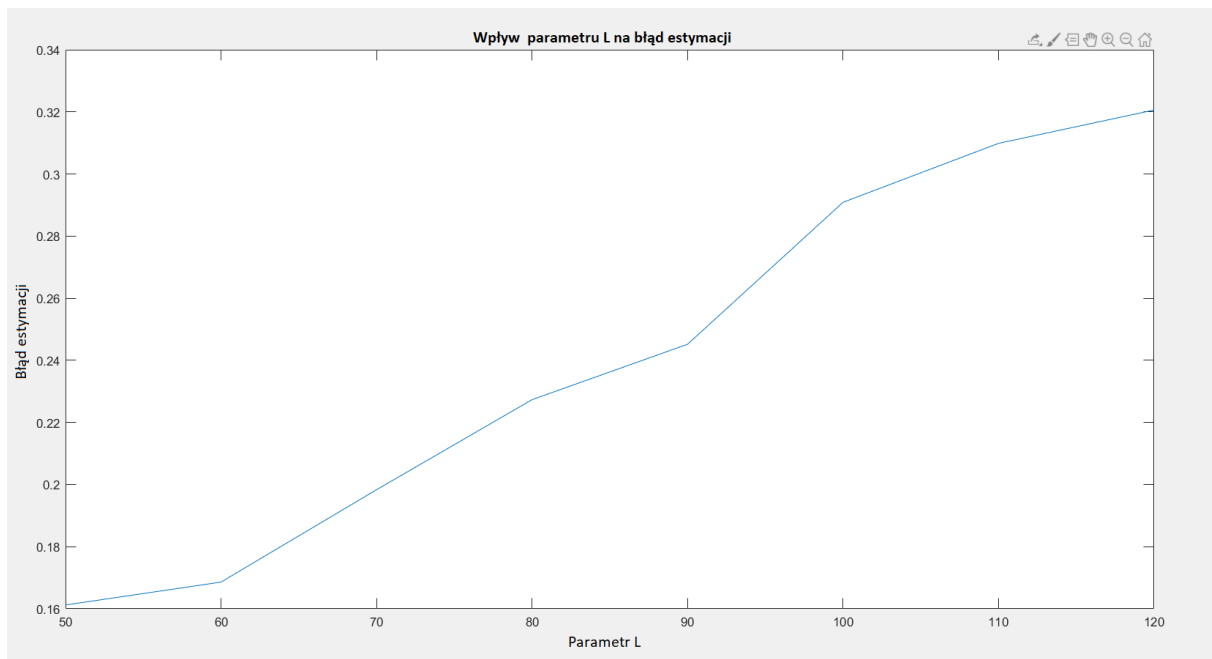
Komentarz Optymalny parametr L jest wyższy niż w przypadku systemu z parametrem $a = 1$. O rząd wyższy okazał się także minimalny błąd estymacji. Estymator gorzej zatem poradził sobie z systemem o większej ilości punktów nieciągłości. Minimalny błąd to 0.2812, a L minimalizujący błąd to 60.

1.8 Zadanie 7 - Estymator ortogonalny a szum Cauchy'ego, $a = 1$

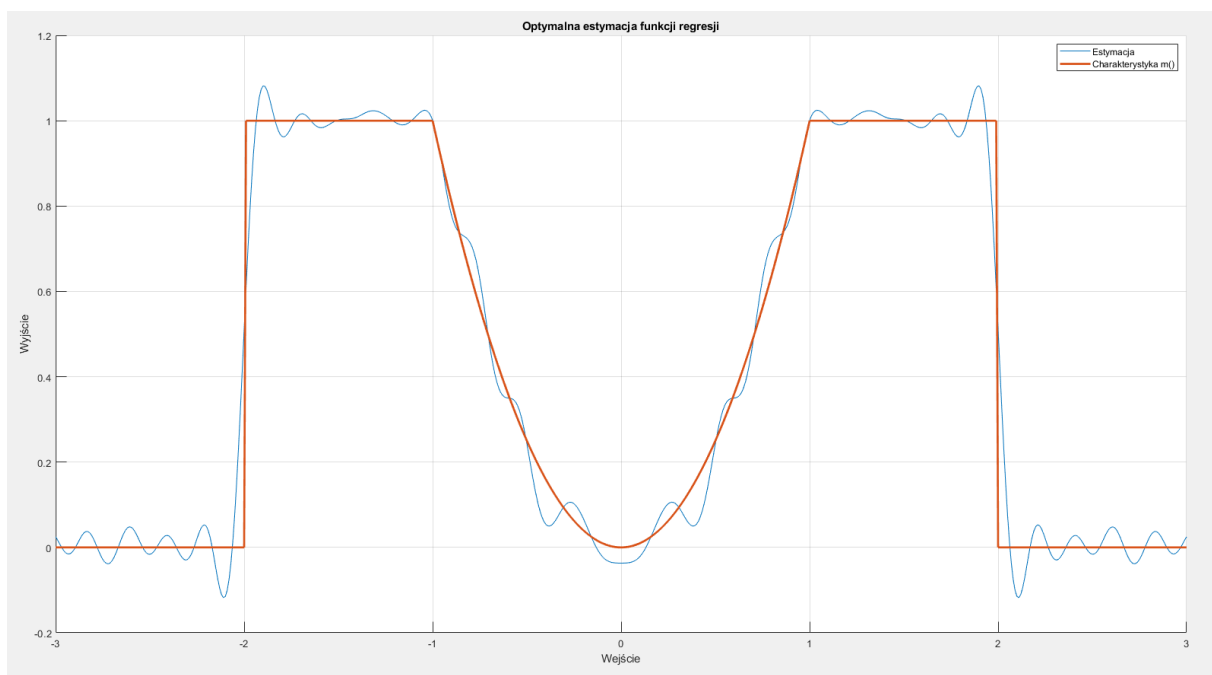
Wyjście systemu uzyskało zakłócenie z rozkładu Cauchy'ego (0,0.01) w miejsce zakłócenia z rozkładu normalnego. Ponownie próbowano znaleźć optymalny parametr L i zastosować go do estymacji charakterystyki systemu.



Rysunek 9: Zależność błędu estymacji od L , $\sigma = 0.01$

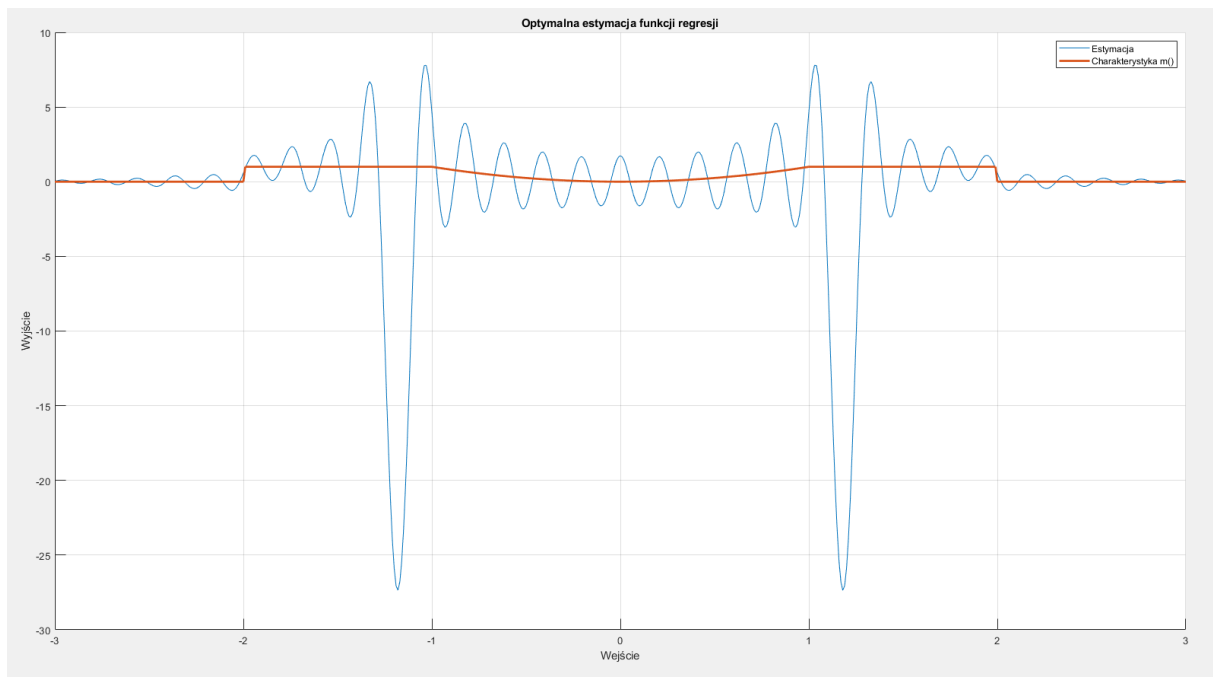


Rysunek 10: Zależność błędu estymacji od L , $\sigma = 0.01$

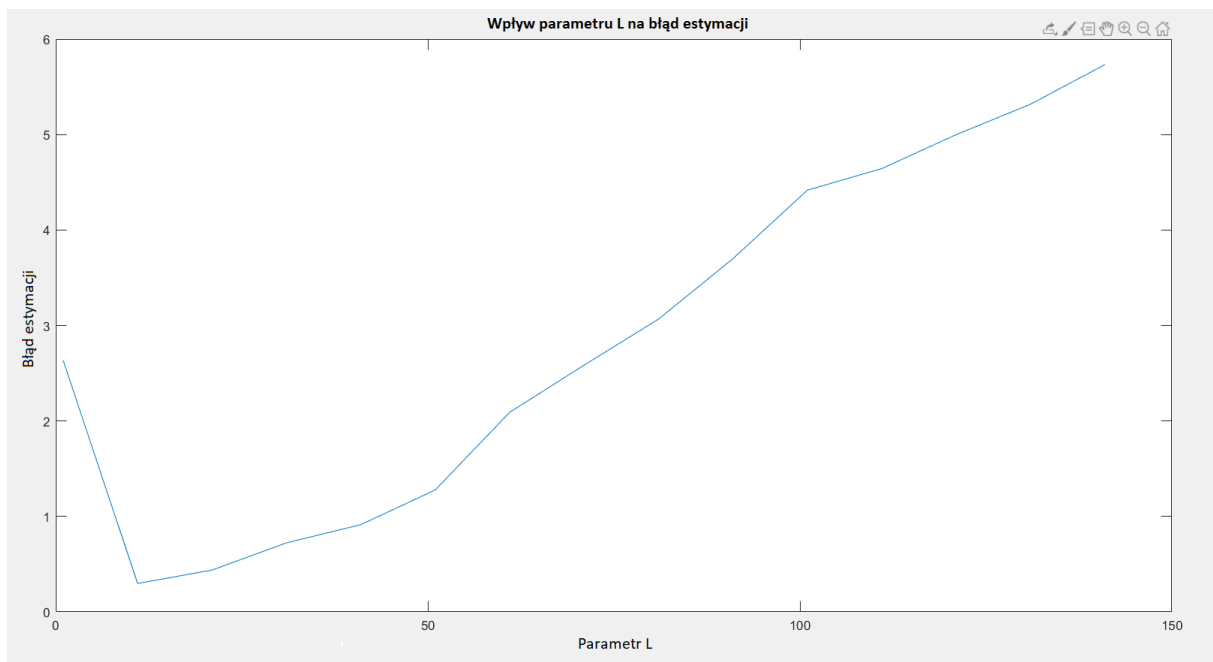


Rysunek 11: Realizacja estymatora dla $\sigma = 0.01$ i $L = 30$ (biskie optymalnemu)

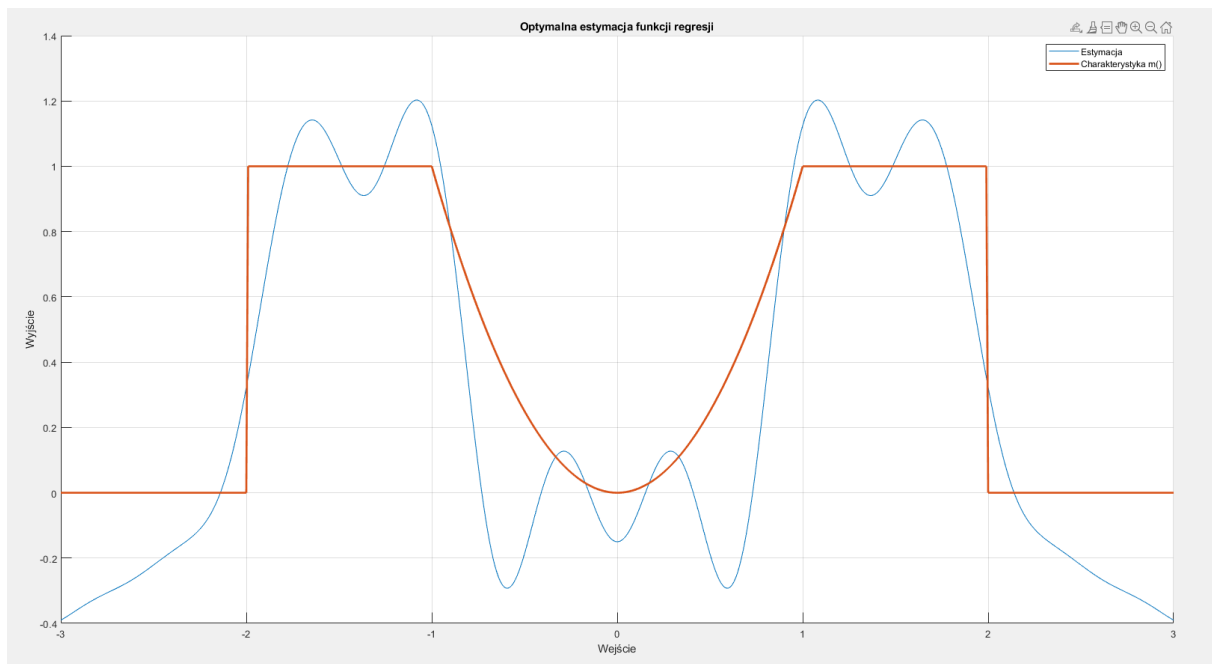
Komentarz Dla szumu Cauchy’ego również możliwe było wyznaczenie parametru L minimalizującego błąd estymacji. Wyzaczenie jednak nie było jednoznaczne, gdyż w kilku symulacjach optymalny parametr się zmieniał. Zauważono zatem brak powtarzalności w wyliczaniu optymalnego parametru L . Dla małych wartości σ możliwe było uzyskanie błędu zbliżonego do tego uzyskiwanego z białym szumem. Zwiększenie parametru sigma do 0.1 spowodowało znaczne trudności w estymacji obiektu. Szum Cauchy’ego miał charakter destrukcyjny.



Rysunek 12: Realizacja estymatora dla $\sigma = 0.01$ i $L = 30$ (biskie optymalnemu) - kolejna realizacja



Rysunek 13: Wpływ parametru L na system z zakłóceniem Cauchy'ego $\sigma = 0.1$



Rysunek 14: Realizacja estymatora dla $\sigma = 0.1$ i $L = 10$ (biskie optymalnemu)

Wniosek Niemożliwe było określenie jednoznacznie optymalnego parametru L , gdyż za każdym razem uzyskiwano inne wartości. Dla małych parametrów σ możliwe okazało się otrzymanie niskiego błędu estymacji, porównywalnego z szumem białym. Jednakże nawet ten wynik przy próbie ponownego wyliczenia okazał się dwukrotnie wyższy. Zwiększanie parametru sigma całkowicie uniemożliwiło identyfikację systemu (duże wahania wyników i małe dokładności estymacji).

1.9 Zadanie 1 -

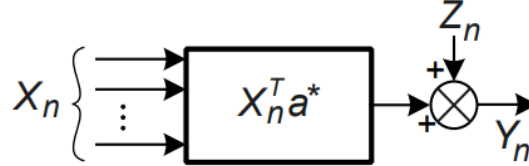
2 Laboratorium 8 - Metoda najmniejszych kwadratów w ujęciu podstawowym

2.1 Zadanie 1, 2 - Definicja statycznego systemu liniowego MISO

Ilość wejść przyjęto jako 20. System jest opisany równaniem:

$$Y_n = X_n^T a^* + Z_n, \quad (7)$$

gdzie $X_n = [X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nD}]^T$, $a^* = [1, 4, 7, 3, 2, 6, 1, 9, 3, 2, 1, 5, 4, 7, 4, 3, 9, 0, 1, 2]^T$, $Y_n, Z_n \in \mathbb{R}^1$



Rysunek 15: System MISO

Założono wstępną znajomość parametru D. Macierz X_n jest generowana z pomocą funkcji $\text{mvrnd}(\mu, \sigma, N)$, gdzie μ to wektor D elementowy z wartościami oczekiwanymi (w tym przypadku wektor zerowy), σ to macierz kowariancji (macierz jednostkowa - sygnały na wejściach nieskorelowane). Sygnał zakłócający generowany jest z rozkładu normalnego $N(0,1)$.

Dla postawionych założeń wygenerowano macierz pomiarów wejścia X_n rozmiaru 10 000 x 20, wektor zakłóceń długości 10 000 oraz wyjście systemu, będące wektorem 10 000 elementowym.

2.2 Zadanie 3 - Podstawowy estymator metody najmniejszych kwadratów

Zdefiniowano następująco X_N, Y_N, Z_N

$$\mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \vdots \\ X_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1D} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N1} & X_{N2} & \cdots & X_{ND} \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_N = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_N = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix}.$$

Estymator MNK powstaje zgodnie ze wzorem [1]

$$\hat{a}_N = (X_N^T X_N)^{-1} X_N^T Y_N. \quad (8)$$

Początkowy wektor wyznaczony arbitralnie:

$$a^* = [1, 4, 7, 3, 2, 6, 1, 9, 3, 2, 1, 5, 4, 7, 4, 3, 9, 0, 1, 2]^T \quad (9)$$

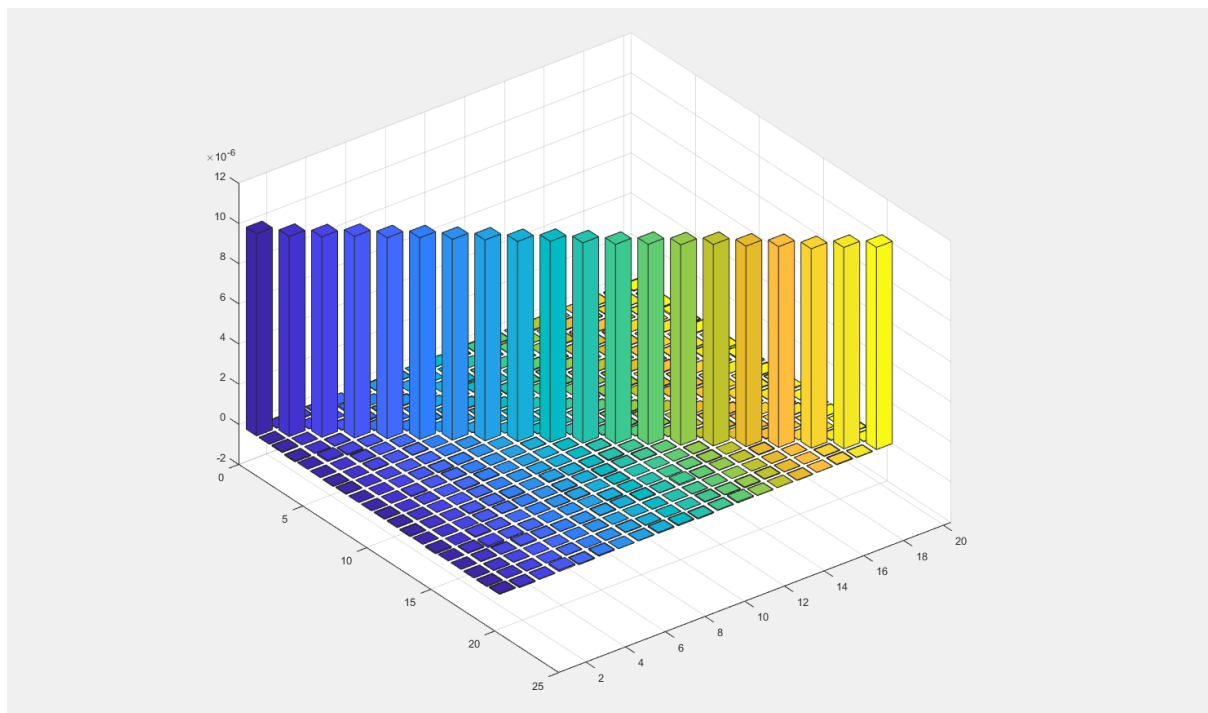
Estymowany wektor MNK dla 10 000 pomiarów:

$$\hat{a} = [0.9986, 4.0120, 6.9898, 2.9950, 1.9970, 6.0027, 0.9892, 8.9879, 3.0015, 2.020, 0.9808, 4.9988, 3.9778, 7.0007, 3.9833, 2.9893, 9.0070, 0.0130, 1.007, 1.9922]^T \quad (10)$$

Komentarz Wektor estymowany jest zgodny z wektorem rzeczywistym przy pewnym poziomie ufności.

2.3 Zadanie 4 - Macierz kowariancji estymatora

Dla estymowanego wektora istnieje macierz kowariancji, która określa wzajemną korelację pomiędzy składowymi wektora. Macierz kowariancji w postaci macierzy jednostkowej wskazuje na brak skorelowanego zakłócenia lub brak skorelowania pomiędzy wejściami systemu.



Rysunek 16: Wizualizacja macierzy kowariancji

Komentarz Wykres na rys. nr 17 udowadnia brak wykrytej korelacji sygnałów na wejściu. Wysokość słupków na diagonalu to $1/N$, gdzie N w symulacji wynosiło 100 000. Wariancja zakłócenia wynosiła 1. Macierz kowariancji powstała zgodnie ze wzorem:

$$\text{cov}(\hat{a}_N) = \sigma_Z^2 (X_N^T X_N)^{-1} \quad (11)$$

2.4 Zadanie 5 - Błąd estymatora MNK

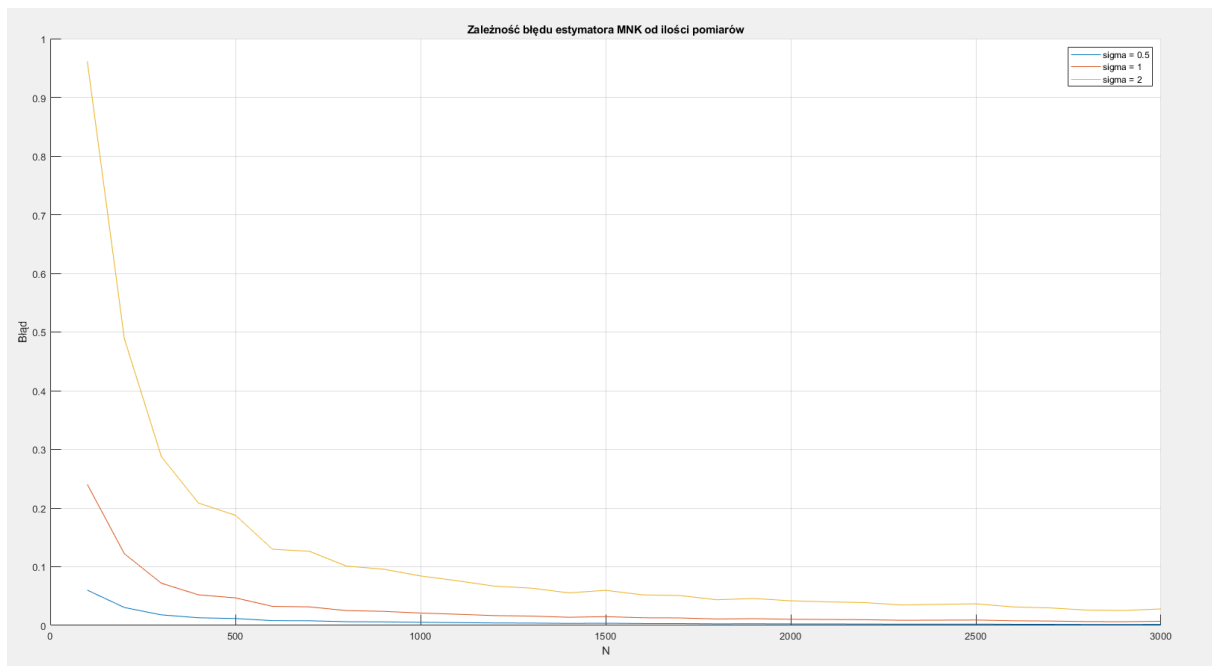
Dla ustalonego sygnału wejściowego X_N wygenerowano 20 niezależnych wektorów błędów z rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$. Następnie utworzono zbiory pomiarów wejście - wyjście. L - krotnie realizowano estymator MNK, co dało podstawę do określenia błędów estymacji w zależności od N (ilość par pomiarowych).

Wzór na błąd przedstawia się następująco:

$$\text{Err}(\hat{a}_N) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \|\hat{a}_N^{[l]} - a^*\|^2, \quad (12)$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest normą euklidesową.

Wykreślono błąd estymacji w zależności od N dla trzech różnych wartości wariancji zakłócenia - 0.5, 1, 2.



Rysunek 17: Błąd estymatora w funkcji N dla trzech różnych wartości wariancji zakłócenia

Komentarz Niezależnie od wartości wariancji zakłócenia, błąd estymatora wraz ze zwiększającą się liczbą pomiarów maleje do zera. Dla mniejszych wariancji obserwuje się jednak mniejsze błędy. Dwa razy mniejsza wariancja implikuje cztery razy mniejsze błędy estymacji (zależność kwadratowa). Estymator podstawowy MNK jest zgodny dla systemów z zakłóceniem nieskorelowanym.

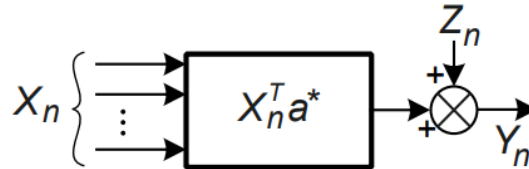
3 Laboratorium 9 - Metoda najmniejszych kwadratów - skorelowane zakłócenie

3.1 Zadanie 1 - Definicja statycznego systemu liniowego MISO

Ilość wejść przyjęto jako 20. System jest opisany równaniem:

$$Y_n = X_n^T a^* + Z_n, \quad (13)$$

gdzie $X_n = [X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nD}]^T$, $a^* = [1, 4, 7, 3, 2, 6, 1, 9, 3, 2, 1, 5, 4, 7, 4, 3, 9, 0, 1, 2]^T$, $Y_n, Z_n \in \mathbb{R}^1$



Rysunek 18: System MISO

Założono wstępną znajomość parametru D . Macierz X_n jest generowana z pomocą funkcji $\text{mvrnd}(\mu, \sigma, N)$, gdzie μ to wektor D elementowy z wartościami oczekiwanymi (w tym przypadku wektor zerowy), σ to macierz kowariancji (macierz jednostkowa - sygnały na wejściach nieskorelowane). W tym przypadku sygnał zakłócający będzie miał charakter skorelowany.

Dla postawionych założeń wygenerowano macierz pomiarów wejścia X_n rozmiaru $N \times 20$,

3.2 Zadanie 2, 3 - Generacja skorelowanego zakłócenia i chmury pomiarowej do MNK

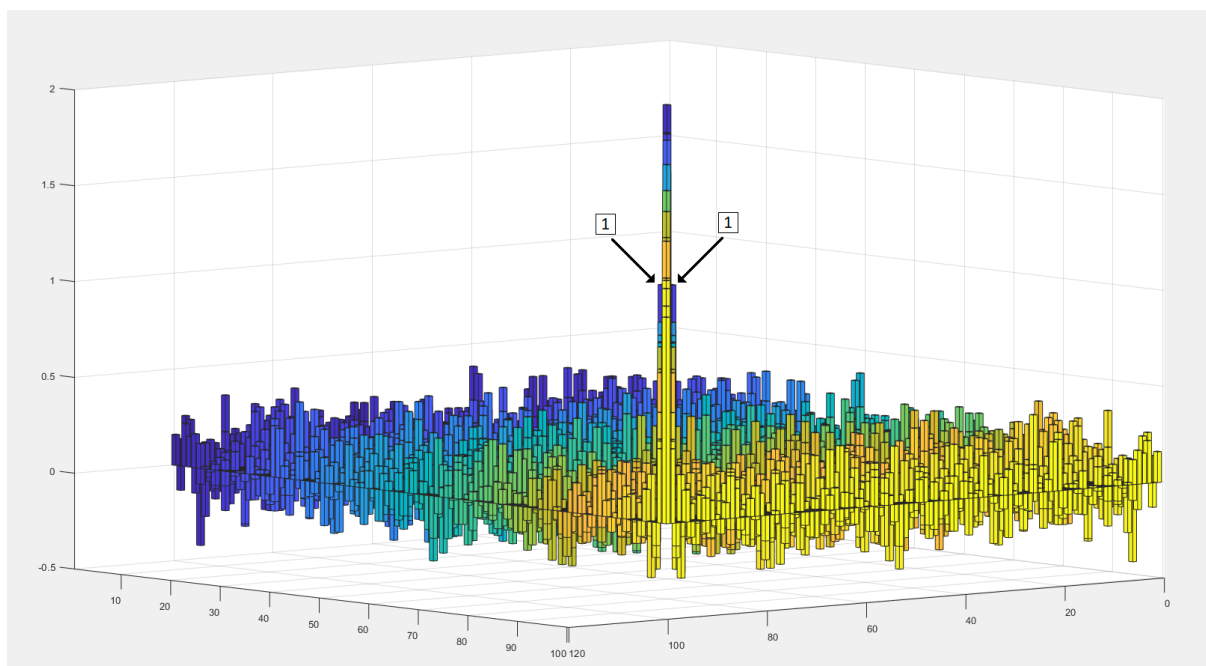
W celu sprawdzenia, jak wpływa na metodę najmniejszych kwadratów skorelowane zakłócenia, generowano wektor Z_N w oparciu o zależność:

$$Z_n = \epsilon_n + b_1 \epsilon_{n-1}. \quad (14)$$

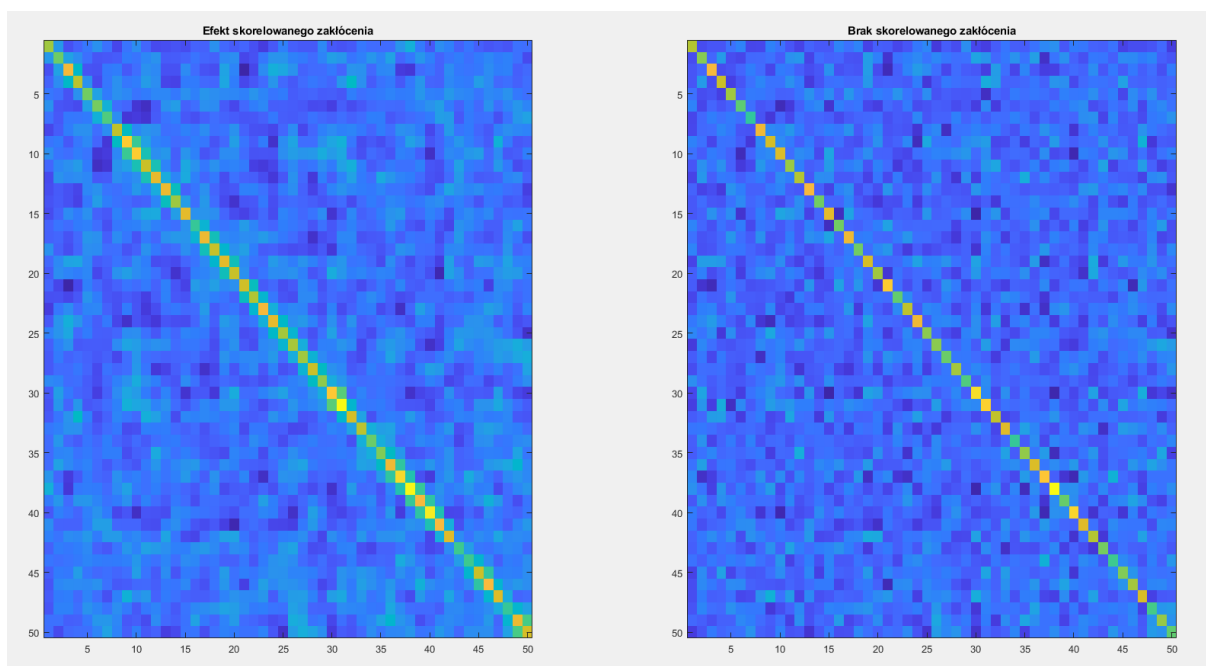
,

gdzie ϵ_n jest zmienną losową liczb i.i.d. wygenerowaną z rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

Komentarz Na podstawie wykresów na rys. nr 19 i 20 stwierdzono, że pojawienie się skorelowanego zakłócenia wpływa na wartości macierzy kowariancji znajdujące się przy diagonalu. Już nie tylko wartości na diagonalu są znaczące. Wystąpienie znaczących wartości tylko na pierwszych przydiagonalach oznacza, że zakłócenia zależało w znacznym stopniu od zakłócenia poprzedniego. Dokładanie zależności obecnego zakłócenia od zakłóceń historycznych powodowałoby pojawianie się znaczących wartości na całej macierzy kowariancji.



Rysunek 19: 1. Efekt skorelowanego zakłócenia



Rysunek 20: Efekt skorelowanego zakłócenia w porównaniu do sytuacji bez korelacji

3.3 Zadanie 4 - Estymator metody najmniejszych kwadratów

Zdefiniowano następująco X_N, Y_N, Z_N

$$\mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \vdots \\ X_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1D} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N1} & X_{N2} & \cdots & X_{ND} \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_N = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_N = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix}.$$

Estymator MNK powstaje zgodnie ze wzorem

$$\hat{a}_N = (X_N^T X_N)^{-1} X_N^T Y_N. \quad (15)$$

Początkowy wektor wyznaczony arbitralnie:

$$a^* = [1, 4, 7, 3, 2, 6, 1, 9, 3, 2, 1, 5, 4, 7, 4, 3, 9, 0, 1, 2]^T \quad (16)$$

Estymowany wektor MNK z \hat{a}_N dla 1000 pomiarów (nieskorelowane zakłócenie):

$$\hat{a} = [0.9993, 3.9992, 7.0005, 2.9988, 1.9996, 6.0005, 1.0006, 9.0009, 3.0010, 1.9988, 1.0012, 4.9999, 3.9993, 6.9983, 3.9995, 3.0017, 8.9991, -0.0023, 1.0007, 1.9994]^T \quad (17)$$

Estymowany wektor MNK z \hat{a}_N dla 1000 pomiarów (skorelowane zakłócenie):

$$\hat{a} = [0.9989, 3.9988, 7.0007, 2.9981, 1.9994, 6.0008, 1.0009, 9.0014, 3.0015, 1.9982, 1.0018, 4.9998, 3.9989, 6.9975, 3.9992, 3.0025, 8.9987, -0.0034, 1.0010, 1.9992]^T \quad (18)$$

Dla dwóch oszacowań zbadano normę euklidesową wektora $[\hat{a} - a^*]$:

- Skorelowane zakłócenia: 0.0069
- Nieskorelowane zakłócenie: 0.0046

Komentarz Wektory estymowane są zgodne z wektorem rzeczywistym przy pewnym poziomie ufności zarówno przy zakłóceniu skorelowanym jak i nieskorelowanym, jednak estymacja systemu z nieskorelowanym zakłóceniem wprowadziła mniejszy błąd niż estymacja z zakłóceniem skorelowanym.

3.4 Zadanie 5 - Macierz kowariancji wektora zakłóceń

Na potrzeby zdefiniowania w następnym kroku macierzy kowariancji estymatora należy znaleźć macierz kowariancji wektora zakłóceń. Przy nieskorelowanym zakłóceniu macierz ta jest macierzą jednostkową, jednakże w sytuacji skorelowanego szumu macierz ta będzie miała znaczące wartości poza diagonalą macierzy.

$$R = cov Z_N = \mathbb{E}\{Z_N Z_N^T\} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2N} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & c_{N3} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \quad (19)$$

gdzie $c_{ii} = var\{Z_N(i)\}$, $c_{ij} = cov\{Z_N(i), Z_N(j)\}$.

Znaczące dla macierzy będą jedynie wartości na diagonalu i dwie przydiagonale.

Elementy na diagonalu to $var\{Z_n\}$. Przydiagonale to elementy, w których $i = j + 1$, lub $j = i + 1$.

Wzory na analityczne wyprowadzenie macierzy R [2]

$$Var\{Z_n\} = Var\{\epsilon_{n-1}\alpha\} + Var\{\epsilon_n\} + 2Cov\{\epsilon_{n-1}\alpha, \epsilon_n\}$$

Wektory $\epsilon_{n-1}\alpha$ oraz ϵ_n są niezależne, dlatego

$$Var\{Z_n\} = \alpha^2 Var\{\epsilon_{n-1}\} + Var\{\epsilon_n\} = (1 + \alpha^2)\sigma_e^2$$

Z tego względu elementy na diagonalu to $(1 + \alpha^2)\sigma_e^2$.

$$Cov\{Z_{n-1}, Z_n\} = \mathbb{E}\{Z_{n-1}Z_n\} - \mathbb{E}\{Z_{n-1}\}\mathbb{E}\{Z_n\},$$

gdzie

$$\mathbb{E}\{Z_n\} = \mathbb{E}\{\epsilon_{n-1}\alpha + \epsilon_n\} = \alpha\mathbb{E}\{Z_{n-1}\} + \mathbb{E}\{\epsilon_n\} = 0.$$

$$\mathbb{E}\{Z_{n-1}Z_n\} = \mathbb{E}\{Z_{n-1}(Z_{n-1}\alpha + \epsilon_n)\} = \mathbb{E}\{Z_{n-1}^2\alpha + Z_{n-1}\epsilon_n\} = \mathbb{E}\{Z_{n-1}^2\alpha\} + \mathbb{E}\{Z_{n-1}\epsilon_n\}$$

$\mathbb{E}\{Z_{n-1}\epsilon_n\} = 0$, gdyż Z_{n-1} i ϵ_n są niezależne.

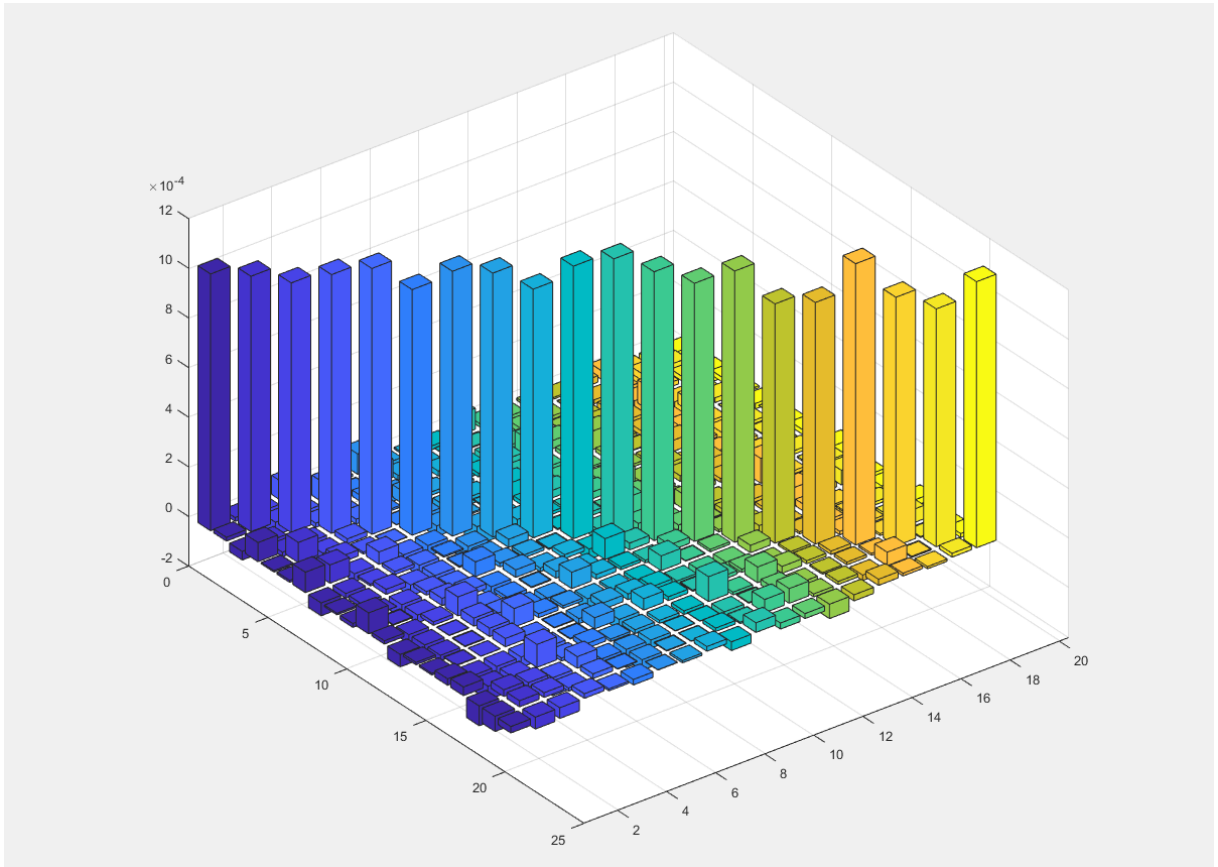
$$\mathbb{E}\{Z_{n-1}Z_n\} = \mathbb{E}\{Z_{n-1}^2\alpha\} = \alpha\mathbb{E}\{Z_{n-1}^2\} = \alpha(Var\{Z_{n-1}\} + \mathbb{E}Z_{n-1}) = \alpha Var\{Z_{n-1}\} = \alpha\sigma_e^2$$

W ten sposób możliwe jest wyliczenie analityczne macierzy R.

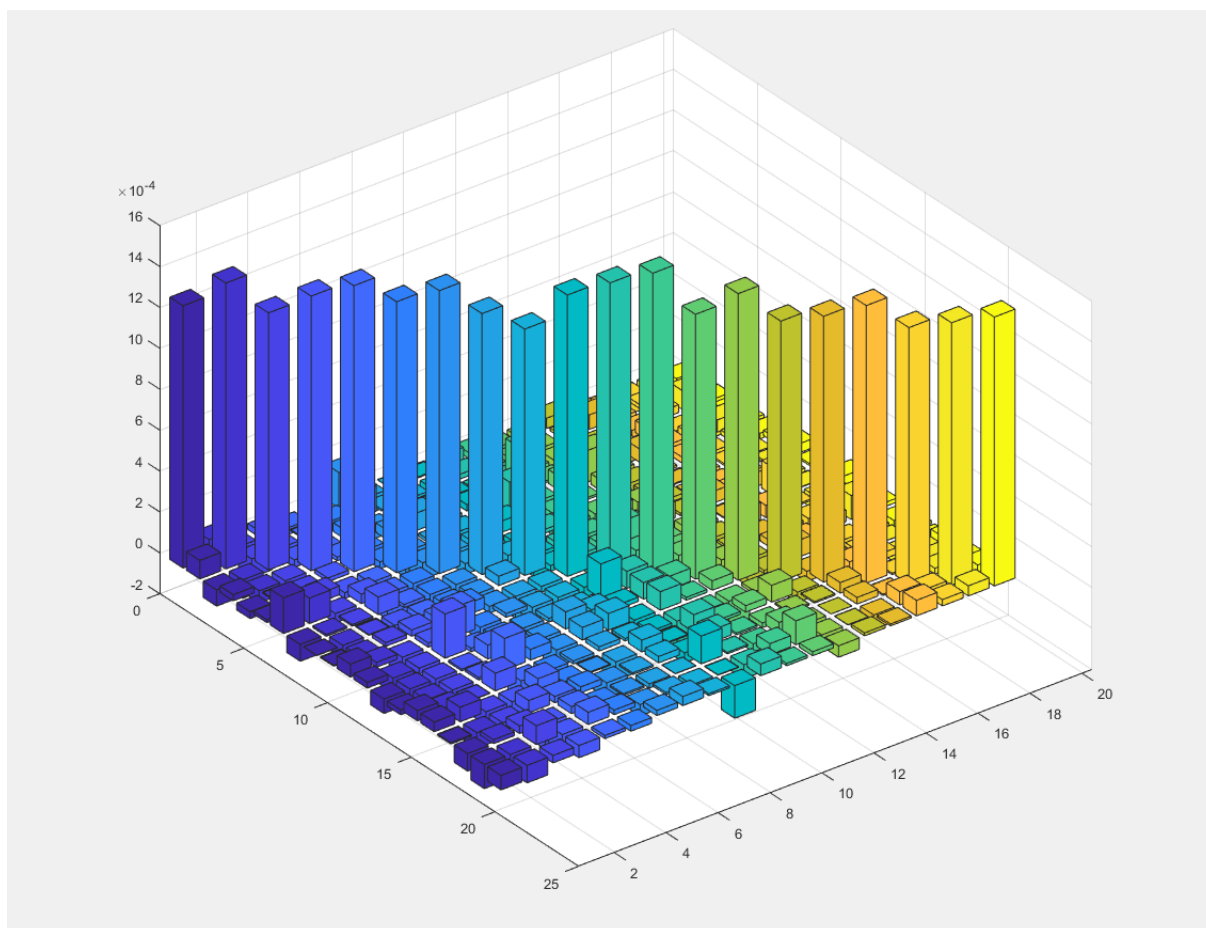
3.5 Zadanie 6 - Macierz kowariancji estymatora

Macierz kowariancji estymatora powstała zgodnie ze wzorem:

$$cov(\hat{a}_N) = (X_N^T X_N)^{-1} X_N^T R X_N (X_N^T X_N)^{-1} \quad (20)$$



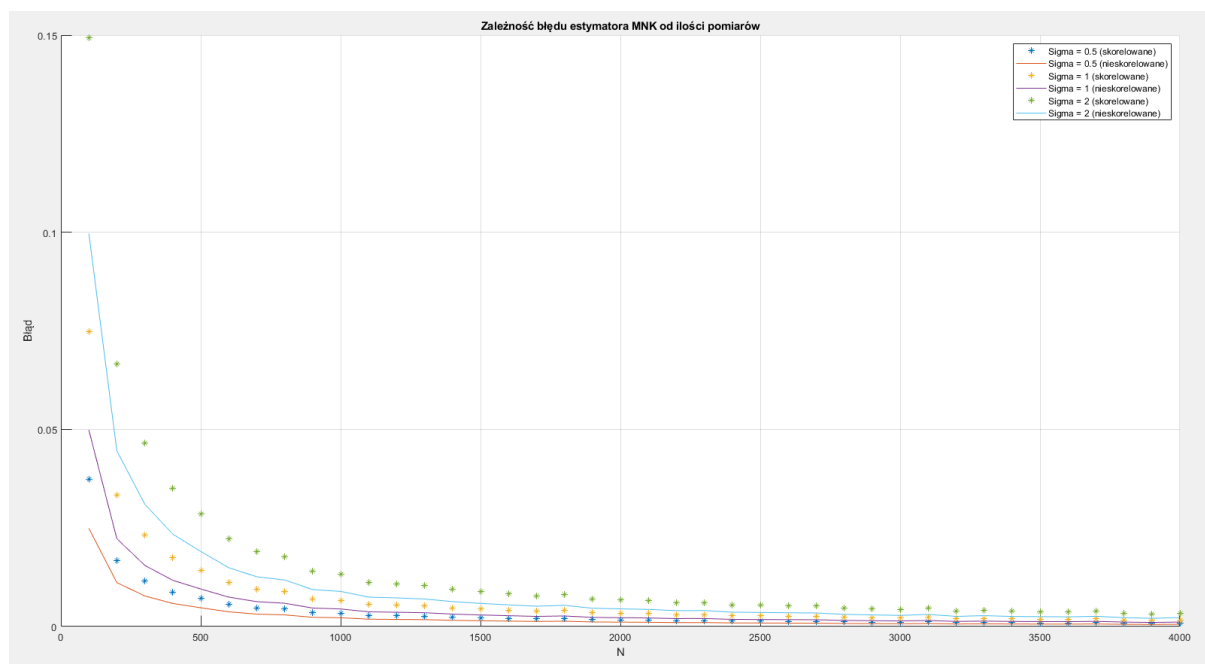
Rysunek 21: Przypadek dla braku korelacji



Rysunek 22: Przypadek z korelacją zakłóceń

Komentarz Pomimo zakłócenia z pamięcią, wartości w macierzy kowariancji pojawiły się tylko na diagonalu. Różnicę jaką zaobserwowano to wzrost wartości wariancji na diagonalu, co przekłada się na mniej dokładną estymację parametrów a^* systemu.

Zadanie 7 - Błędy estymacji Dla $L = 10$ wygenerowano 10 sekwencji zakłócenia i sprawdzano kolejne realizacje estymatora w zależności od rosnącego N dla trzech wartości σ zakłóceń: $[0.5, 1, 2]$.



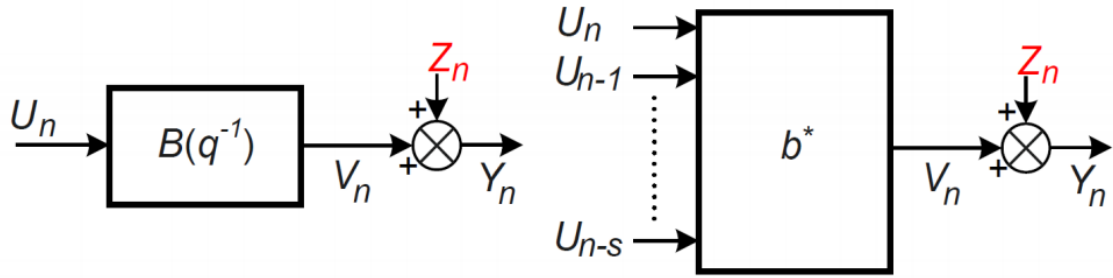
Rysunek 23: Błędy estymacji w zależności od N przy różnych wartościach wariancji zakłócenia

Komentarz Dla mniejszych wariancji obserwowano mniejsze błędy niż dla wariancji wyższych. Ponadto estymacja dawała lepsze rezultaty (niższe błędy) dla sytuacji bez skorelowanych zakłóceń (systemy bez pamięci). Dla wszystkich wariantów błąd w miarę narastania N maleje do zera.

4 Laboratorium 10 - Uogólniona metoda najmniejszych kwadratów

4.1 Zadanie 1 - Dynamiczny system SISO

Na potrzeby laboratorium zdefiniowano dynamiczny system o jednym wejściu i jednym wyjściu typu SISO. Pamięć systemu wynosi 5, co oznacza, że aktualne wejście systemu zależy od pięciu poprzednich wartości wejścia.



Rysunek 24: System typu SISO

Wyjście systemu zdefiniowano następująco:

$$Y_n = b_0^* U_n + b_1^* U_{n-1} + b_2^* U_{n-2} + \dots + b_s^* U_{n-s} + Z_n. \quad (21)$$

Założono, że wektor $b^* = [b_0^*, b_1^*, \dots, b_s^*]$, jest wektorem współczynników, a zarazem szukany wektorem przy konstrukcji estymatora. Wektor $\varphi_n = [U_n, U_{n-1}, U_{n-2}, \dots, U_{n-s}]^T$ jest wektorem wejścia systemu. Dlatego wektor wyjścia systemu można przedstawić następująco:

$$Y_n = \varphi_n^T b^* + Z_n. \quad (22)$$

4.2 Zadanie 2 - Estymator odpowiedzi impulsowej systemu

Dane Skonstruowano następujące macierze:

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_0 & \dots & U_{1-s} \\ U_2 & U_1 & \dots & U_{2-s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_N & U_{N-1} & \dots & U_{N-s} \end{bmatrix}, Y_N = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}, Z_N = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix}$$

N oznacza liczbę pomiarów wejścia, wyjścia. Wektor $U_N = [U_1, U_2, \dots, U_N]$ wygenerowano z rozkładu normalnego $N(0, 1)$

Zdefiniowano estymator odpowiedzi impulsowej:

$$\hat{b}_N = (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T Y_N \quad (23)$$

Przykładowy arbitralny wektor $b = [3, 5, 1, 9, 3, 7]$.

Za pomocą estymatora dla 1000 pomiarów uzyskano wektor:

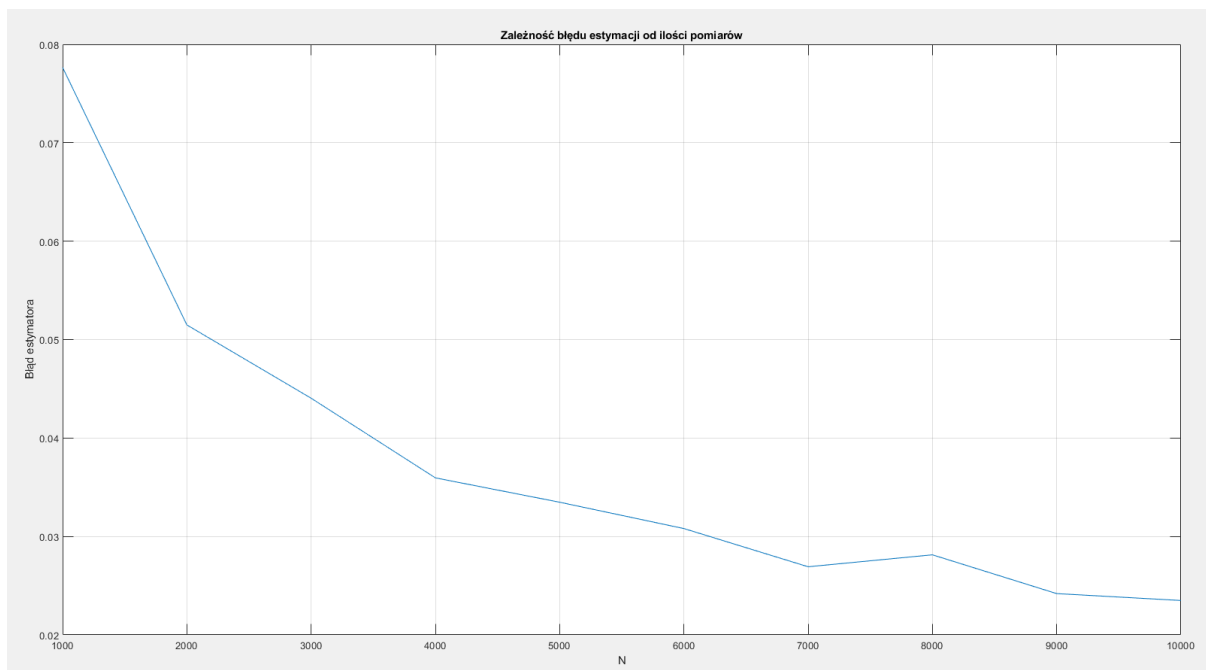
$$b^* = [2.9989, 5.0464, 1.0025, 9.0051, 2.9890, 7.0224]$$

Komentarz Estymowany wektor jest zgodny z wektorem rzeczywistym przy pewnym poziomie ufności.

4.3 Zadanie 3 - Błąd estymatora MNK

Sprawdzono zbieżność błędu estymatora metody najmniejszych kwadratów dla zdefiniowanego systemu SISO. Wygenerowano 100 wartości zakłócenia i estymowano wektor parametrów. Na tej podstawie wykreślono błąd zadany wzorem:

$$Err\{\hat{b}_N\} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{100} \|\hat{b}_N^{[l]} - b^*\|^2 \quad (24)$$



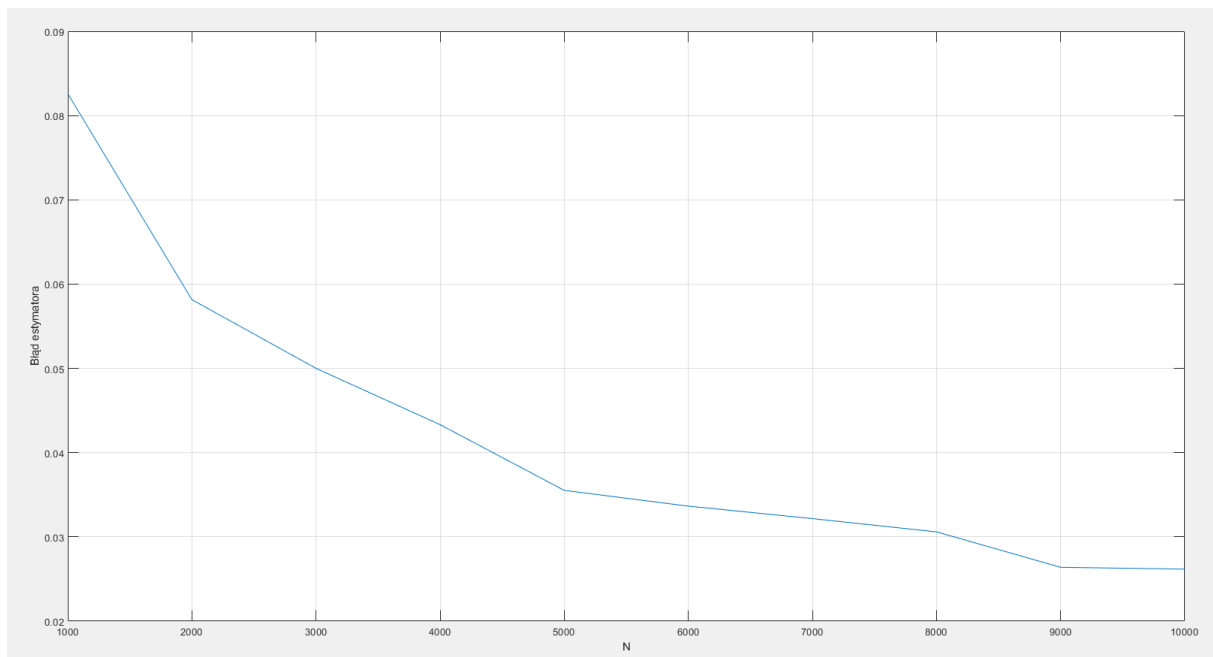
Rysunek 25: Błąd estymatora MNK w zależności od N w przypadku braku skorelowanego zakłócenia

Komentarz Błąd estymatora zgodnie z oczekiwaniami dla $N \rightarrow \infty$ maleje do zera wykładniczo.

4.4 Zadanie 4 - Błąd estymatora MNK - skorelowane zakłócenie

Ponownie zbadano wpływ liczby pomiarów na estymację wektora parametrów, tym razem jednak przy obecnym skorelowanym zakłóceniu. Zakłócenie skorelowane było w następujący sposób:

$$Z_n = e_n + \alpha e_{n-1}. \quad (25)$$



Rysunek 26: Błąd estymatora MNK w zależności od N w przypadku obecności skorelowanego zakłócenia

Komentarz Skorelowane zakłócenie wprowadziło nieznacznie większe błędy estymacji niż zakłócenie typu i.i.d. Jednak również w tej sytuacji błąd maleje do zera, gdy $N \rightarrow \infty$. Porównano wartości błędów dla konkretnych wielkości N na rys. nr 25 i 30. Przyjęto $\alpha = 0.5$.

4.5 Zadanie 5 - konstrukcja macierzy kowariancji toeplitz

Zdefiniowano macierz R

$$R = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & c_0 & c_1 & 0 & & 0 \\ 0 & c_1 & c_0 & c_1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}_{N \times N},$$

gdzie $c_0 = (1 + \alpha^2)\sigma_e^2$ oraz $c_1 = \alpha\sigma_e^2$, $\sigma_e^2 = 1$, $\alpha = 0.5$, zatem $c_0 = 1.25$, $c_1 = 0.5$.

Komentarz Macierz ta posłużyła do konstrukcji uogólnionego estymatora najmniejszych kwadratów GLS.

Toeplitz Stworzono macierz Toeplitza, w której wektor tworzący $r = [1.25, 0.5, 0, 0, 0, \dots]$ i jest rozmiaru N . Dla $N = 10$ przykładowa macierz wygląda następująco:

R =

1.2500	0.5000	0	0	0	0	0	0	0	0
0.5000	1.2500	0.5000	0	0	0	0	0	0	0
0	0.5000	1.2500	0.5000	0	0	0	0	0	0
0	0	0.5000	1.2500	0.5000	0	0	0	0	0
0	0	0	0.5000	1.2500	0.5000	0	0	0	0
0	0	0	0	0.5000	1.2500	0.5000	0	0	0
0	0	0	0	0	0.5000	1.2500	0.5000	0	0
0	0	0	0	0	0	0.5000	1.2500	0.5000	0
0	0	0	0	0	0	0	0.5000	1.2500	0.5000
0	0	0	0	0	0	0	0	0.5000	1.2500

Rysunek 27: Przykładowa macierz Toeplitza

Osobliwość Sprawdzono wyznacznik macierzy R , który wyniósł 1.3333, co oznacza, że macierz R nie jest macierzą osobliwą.

4.6 Zadanie 6 - Konstrukcja estymatora GLS

Estymator GLS Skonstruowano estymator uogólnionej metody najmniejszych kwadratów. Jego postać to [3]:

$$\hat{b}_N^{GLS} = [\Phi_N^T R^{-1} \Phi_N]^{-1} \Phi_N^T R^{-1} Y_N \quad (26)$$

Przykładowy arbitralny wektor $b = [3, 5, 1, 9, 3, 7]$.

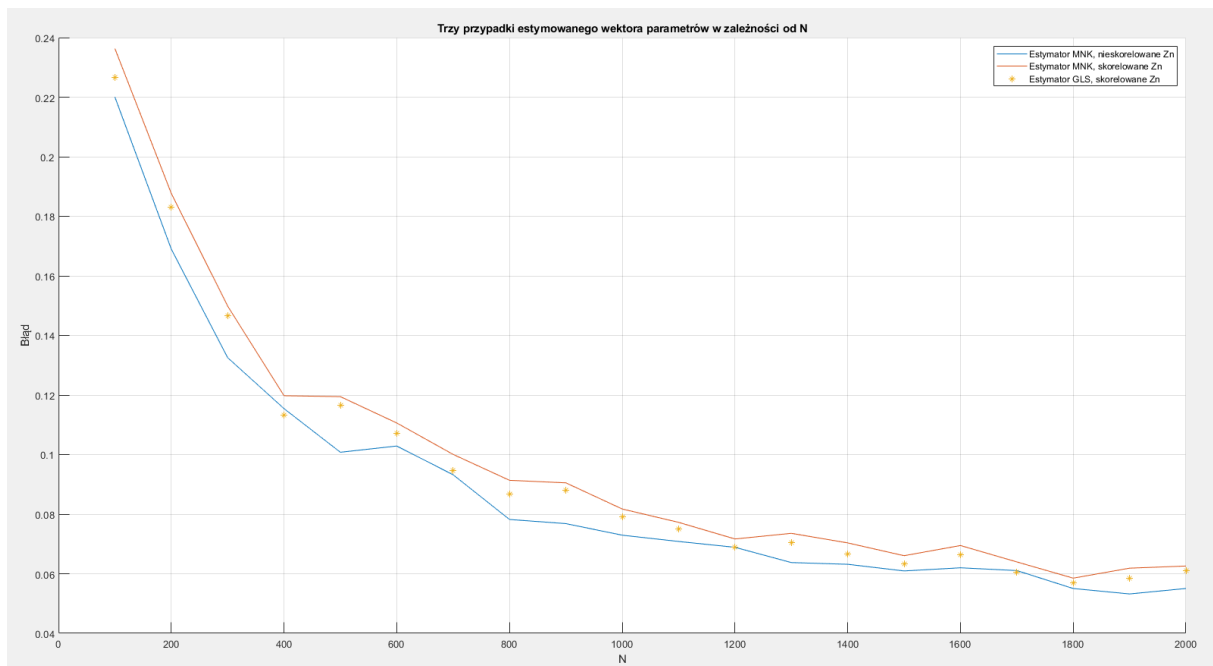
Za pomocą estymatora dla 1000 pomiarów uzyskano wektor (zakłócenie nieskorelowane):

$$b^* = [2.9515, 5.0083, 0.9841, 9.0318, 2.9913, 7.0234]$$

4.7 Zadanie 7 - Porównanie estymatorów

Porównano błąd estymacji dla $N \rightarrow \infty$ dla trzech różnych przypadków:

- MNK i nieskorelowane zakłócenie
- MNK i skorelowane zakłócenie
- Uogólniona MNK i skorelowane zakłócenie



Rysunek 28: Przykładowa macierz Toeplitza

Komentarz Znając macierz kowariancji zakłóceń można skonstruować estymator \hat{b}_N^{GLS} , który jest nieobciążonym estymatorem parametru b^* . Macierz kowariancji takiego estymatora jest minimalna. Jest to estymator typu BLUE (Best Linear Unbiased Estimator). W badanym przypadku dla przykładu ze skorelowanymi zakłóceniami dał on zawsze lepszy rezultat (mniejszy błąd) niż estymator podstawowy MNK. Nastąpiło wybielenie skorelowanego zakłócenia.

5 Laboratorium 11 - Identyfikacja systemów LTI z nieskończoną pamięcią. Metoda zmiennych instrumentalnych.

5.1 Zadanie 1 - Konstrukcja systemu SISO z nieskończoną pamięcią

Dany jest dynamiczny system SISO z nieskończoną pamięcią

$$V_n = b^*U_n + a^*V_{n-1} \quad (27)$$

$$Y_n = V_n + e_n. \quad (28)$$

U_n oraz Y_n to reprezentacje wejścia i wyjścia. e_n to addytywne zakłócenie w danej chwili. a^* i b^* to szukane parametry systemu. Można przyjąć, że $\theta^* = [b^*, a^*]^T$. V_n jest niedostępnym pomiarowo wyjściem.

Jeżeli przyjąć, że $\varphi_n = [U_n, Y_{n-1}]^T$, wówczas wyjście systemu można zdefiniować jako

$$Y_n = \varphi_n^T \theta^* + e_n. \quad (29)$$

Estymatory MNK dla modeli ARMA nie są zgodne. Parametry części autoregresyjnej muszą znajdować się w przedziale $(-1, 1)$. Wynika to z faktu, że proces autoregresyjny musi pozostać stacjonarny. Stacjonarność oznacza brak zmiany wartości oczekiwanej i wariancji, gdy $t \rightarrow \infty$. Jeżeli współczynnik jest równy 1, wówczas wariancja Y_n zależy od czasu, a co za tym idzie rozbiega ona do nieskończoności w miarę upływu czasu.

W badaniu przyjęto model ARMA(2,1), który przedstawia się równaniem:

$$Y_n = b_0^*U_n + b_1^*U_{n-1} + a_1^*Y_{n-1} + a_2^*Y_{n-2} + e_n - a_1^*e_{n-1} - a_2^*e_{n-2} \quad (30)$$

Arbitralny wektor to $[1, 2, 0.3, 0.2]$.

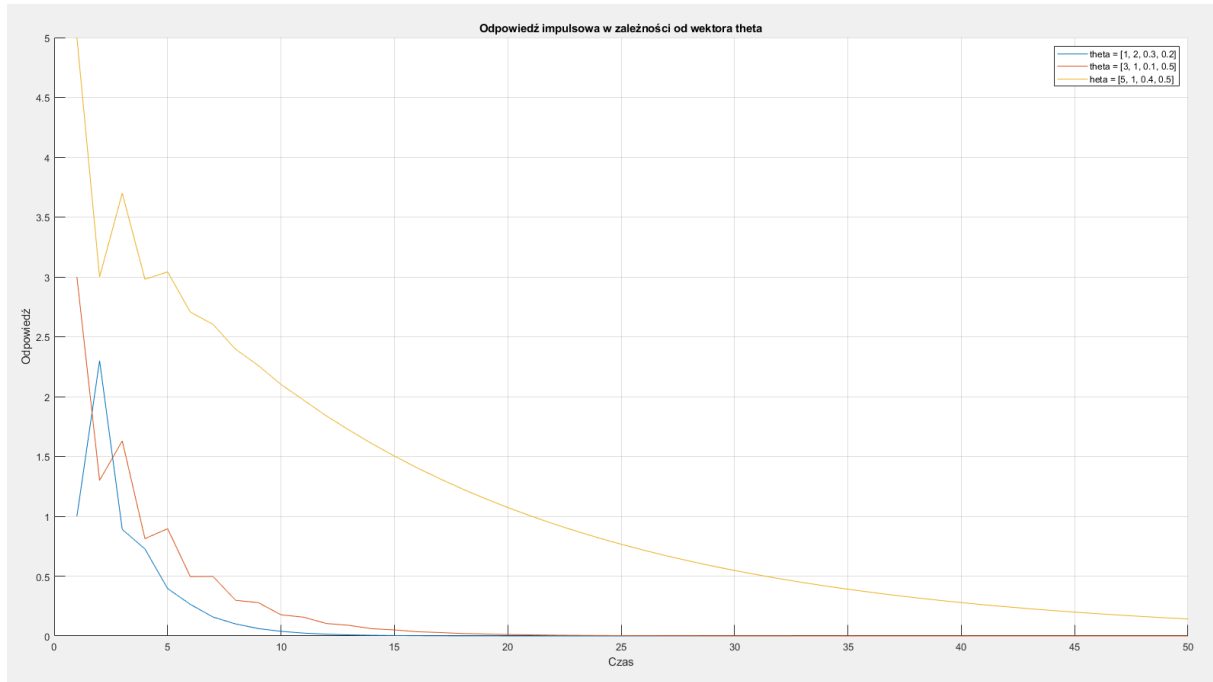
5.2 Zadanie 2 - Odpowiedź impulsowa

Dla trzech pierwszych wyjść wyznaczono odpowiedź impulsową modelu ARMA(2,1). Impuls to $U_n = [1, 0, 0, 0, 0, \dots]$.

$$Y_0 = b_0 \quad (31)$$

$$Y_1 = b_1 + a_1b_0 \quad (32)$$

$$Y_2 = a_1(b_1 + a_1b_0) + a_2b_0. \quad (33)$$



Rysunek 29: Zależność odpowiedzi impulsowej od systemu ARMA(2,1)

5.3 Zadanie 3,4 - Generowanie pomiarów na potrzeby badania estymacji

ARMA(1,1) Arbitralnie przyjęty wektor parametrów to $[2, 0.5]$. Zakłócenie generowano na podstawie wzoru: $Z_n = e_n + a^* e_{n-1}$, gdzie e_n jest zmienną losową typu i.i.d. z rozkładu jednostajnego na przedziale $(-1, 1)$.

Skonstruowano następujące macierze:

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & Y_0 \\ U_2 & Y_1 \\ \vdots & \vdots \\ U_N & Y_{N-1} \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_N = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_N = \begin{bmatrix} e_1 - a^* e_0 \\ e_2 - a^* e_1 \\ \vdots \\ e_N - a^* e_{N-1} \end{bmatrix}$$

MNK Do estymacji wektora parametrów użyto podstawowej metody najmniejszych kwadratów:

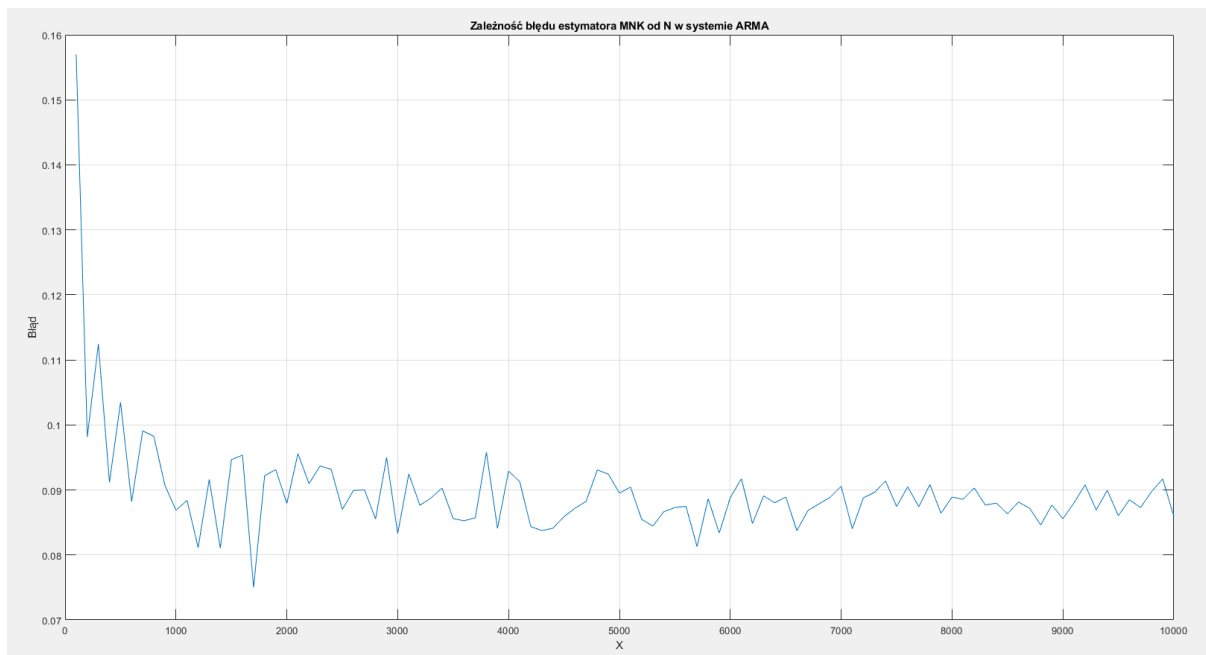
$$\hat{\theta}_N = (X_N^T X_N)^{-1} X_N^T Y_N. \quad (34)$$

Estymowany wektor dla 10 000 pomiarów to: $[2.2588, 0.4116]$. Metoda najmniejszych kwadratów nie jest zatem dobrym narzędziem do estymacji parametrów systemu ARMA.

5.4 Zadanie 5 - Błąd estymacji MNK w systemach ARMA

Wyznaczono błąd dla różnych N na podstawie wzoru:

$$Err(\hat{\theta}_N) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \|\hat{\theta}_N^{[l]} - \theta^*\|^2, \quad (35)$$



Rysunek 30: Zależność błędu estymatora MNK od N

Komentarz Powyżej pewnej wartości N błąd estymatora nie maleje do zera. Oznacza to, że estymator MNK nie jest zgodny i przydatny w estymacji parametrów systemu ARMA.

5.5 Zadanie 6 - Oszacowanie niezaszumionego wyjścia V_n

Dla $N = 10000$ oszacowano parametry $\hat{\theta}_N = [b^*, a^*]$. Wyniosły one odpowiednio 2.2641 oraz 0.4105.

Oszacowanie niezaszumionego wyjścia następuje zgodnie ze wzorem:

$$\bar{V}_n = \hat{b}_N U_n + \hat{a}_N \bar{V}_{n-1}. \quad (36)$$

5.6 Zadanie 7 - Konstrukcja macierzy Ψ metody zmiennych instrumentalnych

Za pomocą oszacowania niezaszumionego wyjścia (36) skonstruowano odpowiednik macierzy Φ_N :

$$\Psi_N = \begin{bmatrix} U_1 & \bar{V}_0 \\ U_2 & \bar{V}_1 \\ \vdots & \vdots \\ U_N & \bar{V}_{N-1} \end{bmatrix}$$

Wyznaczenie powyższej macierzy umożliwia zastosowanie metody zmiennych instrumentalnych.

5.7 Zadanie 8 - Konstrukcja estymatora zmiennych instrumentalnych

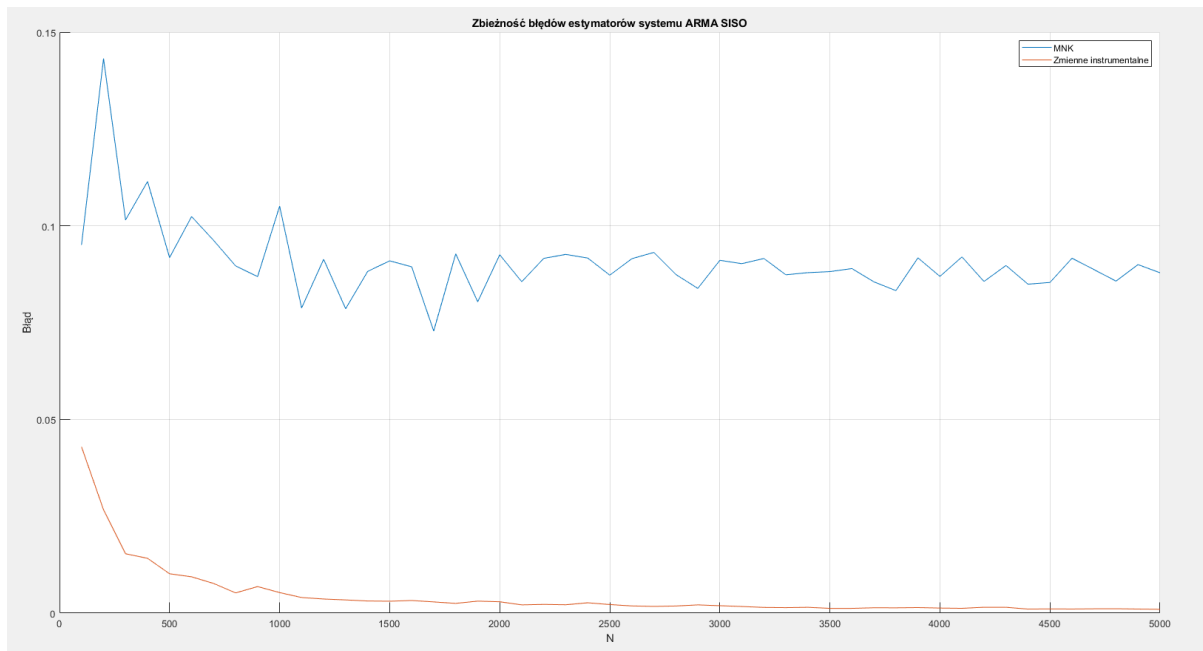
W oparciu o powyższe założenia skonstruowano estymator wykorzystujący metodę zmiennych instrumentalnych:

$$\hat{\theta}_N^{IV} = (\Psi_N^T \Phi_N)^{-1} \Psi_N^T Y_N. \quad (37)$$

Komentarz Efekt zastosowania powyższego estymatora zbadano w następnym kroku

5.8 Zadanie 9 - Błędy estymacji w systemach ARMA dla MNK i metody zmiennych instrumentalnych

Porównano działanie estymatora najmniejszych kwadratów oraz estymatora opartego na metodzie zmiennych instrumentalnych. Dla każdego z nich wykreślono błąd estymacji w funkcji N zgodnie ze wzorem nr 35.



Rysunek 31: Błędy estymatora w funkcji N

Komentarz Zgodnie z wykresem nr 32 estymator MNK nie jest zgodny w systemach z nieskończoną pamięcią ARMA. Konieczna była jego konwersja do metody zmiennych instrumentalnych. Błąd uzyskany za pomocą tej metody zbiegał do 0, gdy $N \rightarrow \infty$. Estymator MNK w tym przypadku jest estymatorem obciążonym.

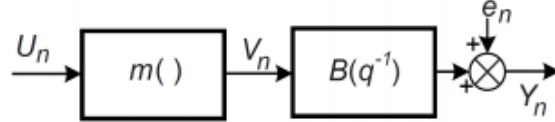
6 Laboratorium 12 - System Hammersteina

6.1 Zadanie 1 - Dynamiczny system nieliniowy typu Hammersteina

Zadano dynamiczny system nieliniowy typu Hammersteina o strukturze:

$$V_n = m(U_n) \quad (38)$$

$$\sum_{l=0}^L \lambda_l V_{n-l} + e_n. \quad (39)$$



Rysunek 32: System typu Hammersteina

U_n jest pomiarem wejścia, Y_n jest pomiarem wyjścia, V_n to niemierzalny stan pośredni systemu, e_n jest addytywnym zakłóceniem wyjścia z rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$. $m(\cdot)$ jest nieliniową charakterystyką podsystemu statycznego, a $B(q^{-1})$ jest podsystemem dynamicznym. Wektor współczynników λ_l jest odpowiedzią impulsową podsystemu dynamicznego.

Arbitralnie wybrane współczynniki systemu przy $L = 4$: $\lambda = [-0.5, 0.6, 0.1, -0.9, 0.7]$. Charakterystyka statyczna ma postać $V_n = c_2 \tan(U_n)$, gdzie $c_2 = 4$.

6.2 Zadanie 2 - Generowanie obserwacji

System pobudzony został ciągiem zmiennych losowych z rozkładu jednostajnego $\mathcal{U}(-1, 1)$. Zakłócenie e_n ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Wygenerowano tym samym sekwencję pomiarów wejścia i wyjścia na potrzeby testowania estymatora.

6.3 Zadanie 3 - Estymator jądrowy

Dla systemu Hammersteina skonstruowano estymator jądrowy z jądrem prostokątnym w następującym kształcie [1]:

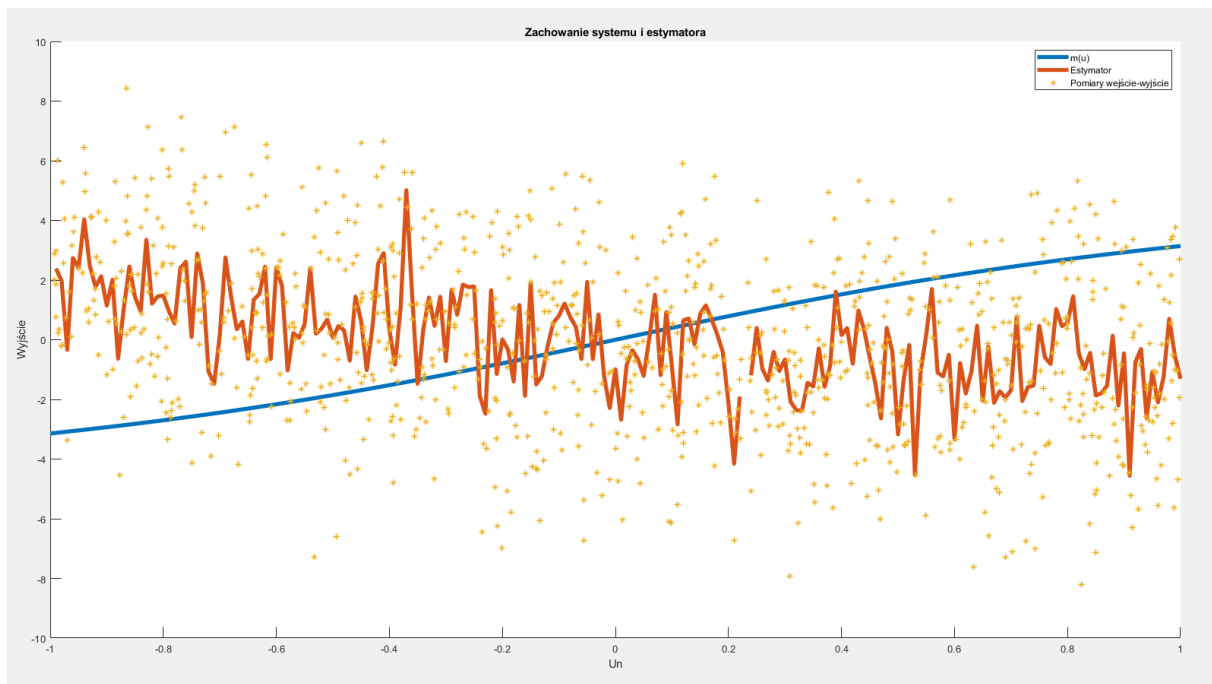
$$\hat{\mu}_N(u) = \frac{\sum_{n=1}^N Y_n K\left(\frac{U_n - u}{h_N}\right)}{\sum_{n=1}^N K\left(\frac{U_n - u}{h_N}\right)}, \quad (40)$$

gdzie $K(x) = 1$, gdy $|x| \leq \frac{1}{2}$ jest jądrem prostokątnym. h_N jest parametrem wygładzania.

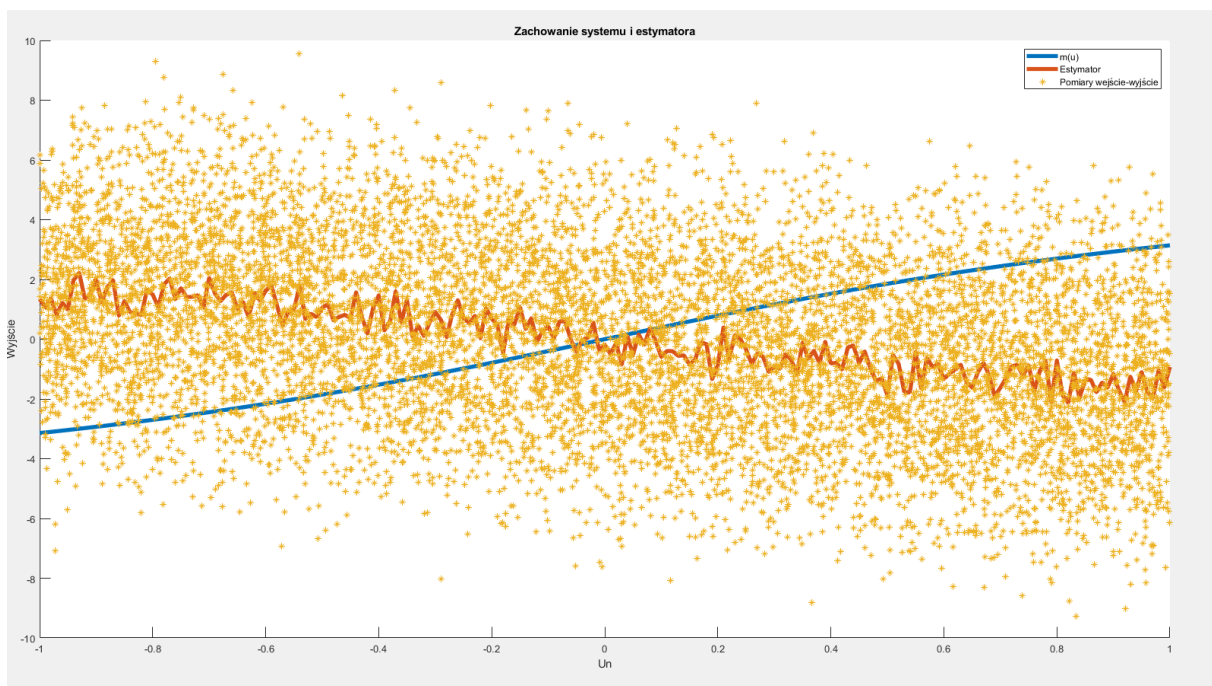
Na jednym wykresie przedstawiono charakterystykę statyczną nieliniową systemu $m(\cdot)$, punkty pomiarowe (U_n, Y_n) oraz estymator $\hat{\mu}_N(\cdot)$.

Zbadano następujące wartości N :

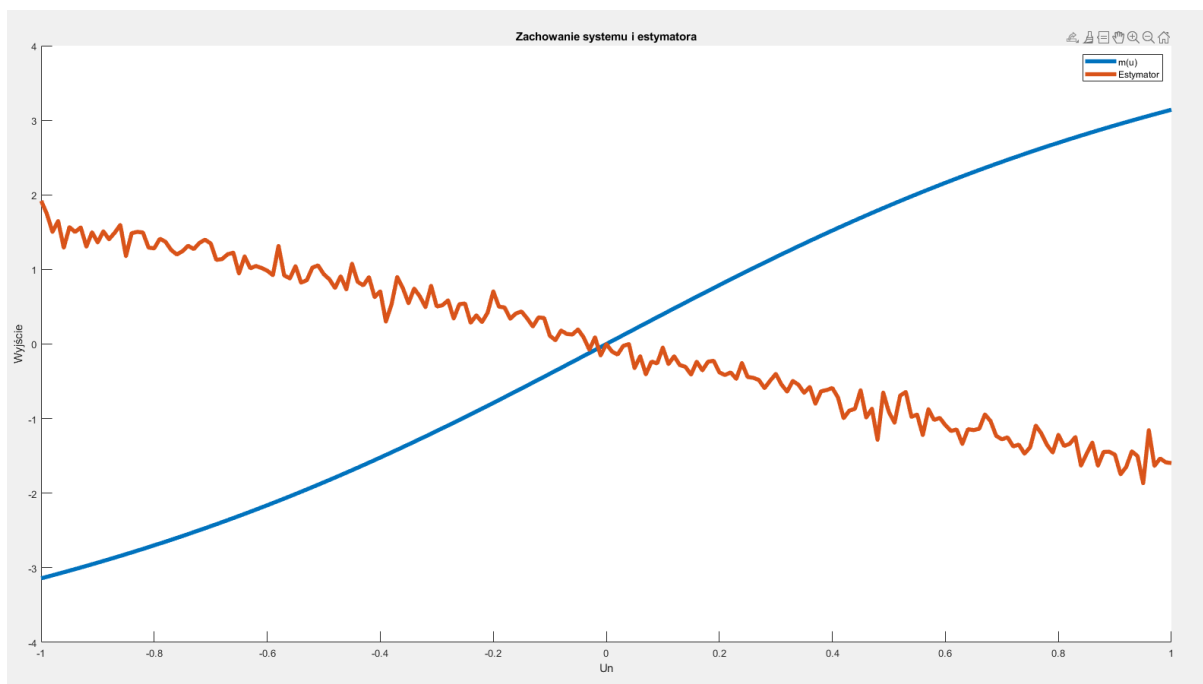
- $N = 1000$
- $N = 10000$
- $N = 100000$ (bez pomiarów)
- $N = 1000000$ (bez pomiarów).



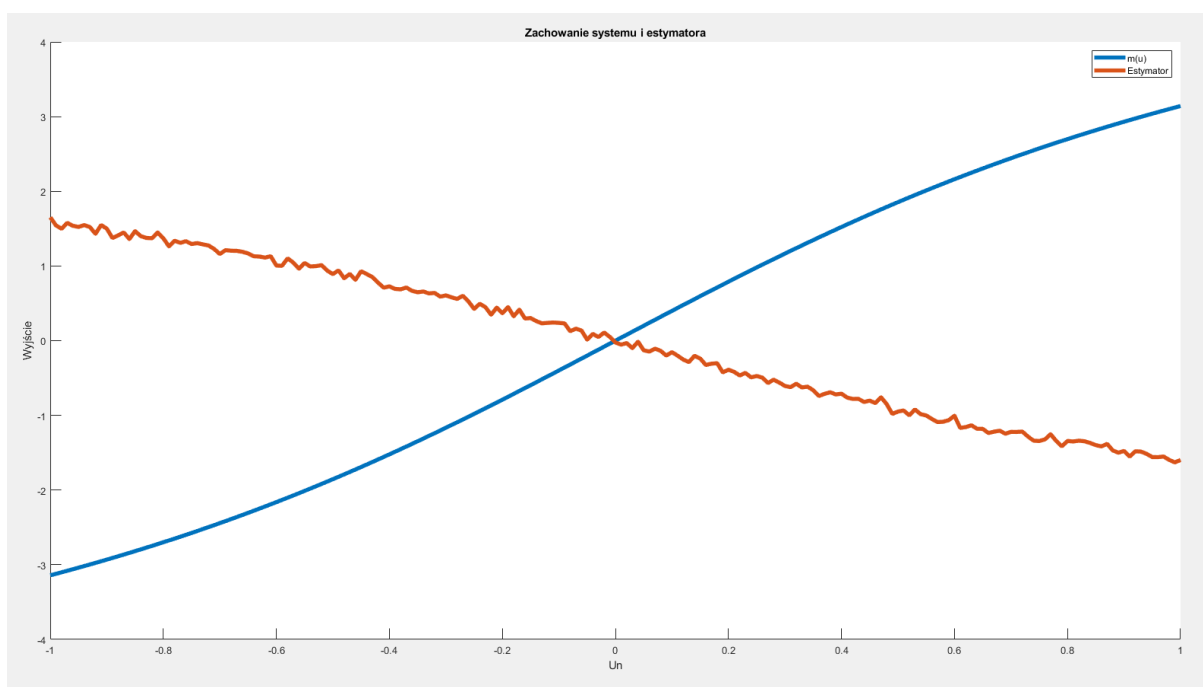
Rysunek 33: Zachowanie systemu i estymatora dla $N = 1000$



Rysunek 34: Zachowanie systemu i estymatora dla $N = 10000$



Rysunek 35: Zachowanie systemu i estymatora dla $N = 100000$



Rysunek 36: Zachowanie systemu i estymatora dla $N = 1000000$

Komentarz Na podstawie wykresów na rys. nr 33, 34, 35, 37 stwierdzo, że estymator co raz dokładniej estymuje system. Estymowane wyjście nie pokrywa się z charakterystyką części nieliniowej statycznej ze względu na wpływ części dynamicznej systemu.

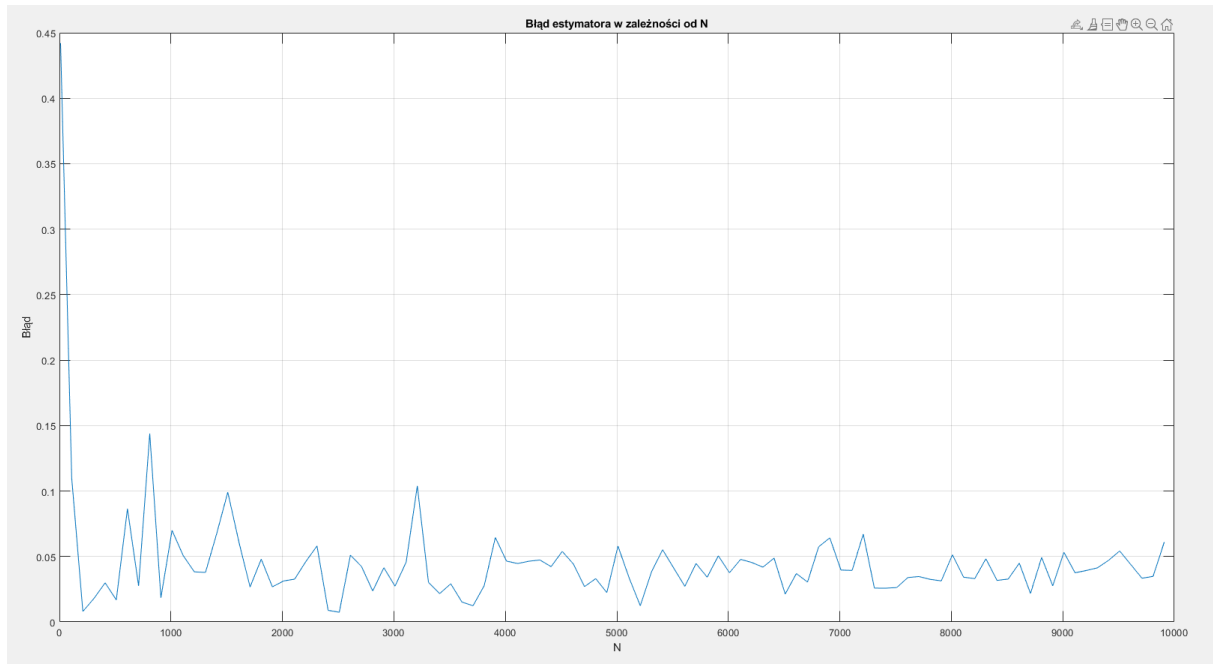
6.4 Zadanie 5 - Estymator parametrów systemu λ_l

Skonstruowano estymator parametrów systemu zdefiniowany wzorem [4]

$$\hat{\lambda}_{l,N} = \frac{1}{N-l} \sum_{k=l+1}^L U_{k-l} Y_k \quad (41)$$

6.5 Zadanie 6 - Realizacja estymatora parametrów

Wykreślono błąd estymacji wektora, wykorzystując normę euklidesową, w funkcji N.



Rysunek 37: Błąd estymatora w funkcji N

Komentarz Błąd estymatora wskazuje, że estymator jest obciążony (błąd nie maleje do zera wraz ze zwiększaniem N). Ponadto należy zaznaczyć, że błąd, do którego dąży estymator gdy $N \rightarrow \infty$ jest osiągalny już po niewielkiej ilości pomiarów (powyżej 100).

Literatura

- [1] Kałuszka Marek Gajek Lesław. *Wnioskowanie statystyczne: modele i metody*. Wydawnictwo Naukowo - Techniczne, 1993.
- [2] Sztencel Rafał Jakubowski Jacek. *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*. Script, 2001.
- [3] Zbigniew Nahorski Mańczak Kazimierz. *Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych*. PWN, 1983.
- [4] Petre Gheorghe Stoica Soderstrom, Torsten. *Identyfikacja systemów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1997.