# Modelowanie i identyfikacja – laboratorium 7.

## Nieparametryczna identyfikacja statycznych systemów nieliniowych.

## Ortogonalny estymator funkcji regresji

Paweł Wachel

**Wymagania wstępne:**

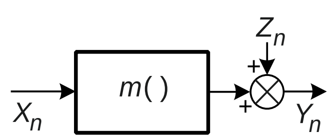
1. Wymagania wstępne z poprzednich zajęć[1].
2. Iloczyn skalarny i jego własności, pojęcie przestrzeni Hilberta, przestrzeń $L_2$.
3. Znajomość konstrukcji i podstawowych własności jądrowego estymatora funkcji regresji.

**Zadania do wykonania:**

1. Dany jest statyczny system nieliniowy z charakterystyką nieliniową

$$m(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{dla} \quad |x| \in [0,1) \\ 1 & \text{dla} \quad |x| \in [1,2) \\ 0 & \text{dla} \quad |x| \in [2,\infty) \end{cases}, \tag{1}$$

gdzie $a$ jest pewną stałą (w początkowych eksperymentach przyjąć dla uproszczenia $a = 1$). Wygenerować $N$-elementowy sygnał wejściowy $\{X_n\}$ typu *i.i.d.* o rozkładzie




Rysunek 1: Statyczny system nieliniowy z addytywnym zakłóceniem na wyjściu

$U[-\pi,\pi]$ oraz niezależny od niego sygnał zakłócający $\{Z_n\}$ o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,\sigma_Z^2)$, $\sigma_Z^2$ jest dowolnie wybraną stałą.

2. Dysponując sekwencjami $\{X_n\}$ i $\{Z_n\}$ wyznaczyć odpowiadający im sygnał $\{Y_n\}$. Ciąg par obserwacji $\{(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_N,Y_N)\}$ będziemy oznaczać symbolem $T_N$. Wykreślić nieliniową charakterystykę systemu wraz z 'chmurą' pomiarów ze zbioru $T_N$ (punkty na płaszczyźnie).

[1] Całkujemy wiedzę... przynajmniej do wakacji.

3. Przyjąć bazę kosinusową[2] postaci

$$\varphi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$
$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos(kx) \text{ dla } k = 1, 2, 3, \ldots$$

oraz zaimplementować estymator ortogonalny

$$\hat{m}_N(x) = \frac{\hat{g}_N(x)}{\hat{f}_N(x)}, \quad \text{oraz} \quad \hat{m}_N(x) = 0, \text{ gdy } \hat{f}_N(x) = 0$$

gdzie

$$\hat{g}_N(x) = \sum_{k=0}^{L} \hat{\alpha}_k \varphi_k(x), \qquad \hat{\alpha}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y_n \varphi_k(X_n) \tag{2}$$
$$\hat{f}_N(x) = \sum_{k=0}^{L} \hat{\beta}_k \varphi_k(x), \qquad \hat{\beta}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \varphi_k(X_n), \tag{3}$$

oraz $L$ jest pewną stałą, zależną od liczby obserwacji $N$.

4. Wykreślić estymator $\hat{m}_N(x)$ w funkcji $x$ (na tle prawdziwej charakterytyki $m(x)$) dla ustalonej wartości $N$ (np. $N = 500$) i kilku przykładowych wartości parametru $L$. Przedyskutować wpływ parametru $L$ na jakość uzyskiwanych wyników.

5. Wyznaczyć wartość $L$, która minimalizuje błąd

$$valid(L) = \frac{1}{2Q}\sum_{q=-Q}^{Q}\left[\hat{m}_N\left(\frac{2q}{Q}\right) - m\left(\frac{2q}{Q}\right)\right]^2.$$

Przyjąć $Q = 100$.

6. Dla tak wybranego $L$ wykreślić i zinterpretować wykresy z p. 4.

7. Przeprowadzone badania powtórzyć dla zakłócenia o rozkładzie Cauchy'ego $C(0, \gamma)$, gdzie $\gamma = 0.01$. Zmieniając parametr $\gamma$ zbadać wpływ rozważanego zakłócenia na uzyskiwane rezultaty estymacji.

**Zadania dodatkowe:**

1. Rozważyć charakterystykę systemu, która nie jest funkcją parzystą (np. nielinowość (1) przesuniętą o 1 w prawo, tj. $m(x-1)$). Przeprowadzić eksperymenty wykorzystując jedynie bazę kosinusową z p. 3, a następnie rozszerzyć ją o elementy sinusoidalne i powtórzyć eksperyment. Zinterpretować uzyskane wyniki.

2. Powtórzyć powyższy eksperyment w oparciu o zespoloną bazę Fouriera $\{e^{jk\omega_0 t}\}$ (por. wykład).

3. Rozważyć system z charakterystyką nieliniową $m(x) = -x\exp(-x^2)$ i przeprowadzić procedurę estymacji w oparciu o bazę ortonormalną funkcji Hermite'a (patrz wykład). Zinterpretować uzyskane wyniki.

[2] Nieliniowa charakterystyka w systemie jest funkcją parzystą.

**Literatura:**


1. Jakubowski Jacek, Sztencel Rafał. Wstęp do teorii prawdopodobieństwa. Script, 2001.
2. Wasserman, Larry. All of statistics: a concise course in statistical inference. Springer Science & Business Media, 2013.
3. Wasserman, Larry. All of nonparametric statistics. Springer Science & Business Media, 2006.
4. Plucińska Agnieszka, Pluciński Edmund. Probabilistyka: rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna, procesy stochastyczne. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2000.
5. Gajek Lesław, Kałuszka Marek. Wnioskowanie statystyczne: modele i metody. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1993.
6. Notatki z wykładu.