Modelowanie i identyfikacja – laboratorium 9.

Identyfikacja statycznych systemów liniowych typu MISO.

Metoda najmniejszych kwadratów – **skorelowane zakłócenie**

Paweł Wachel

Wymagania wstępne:

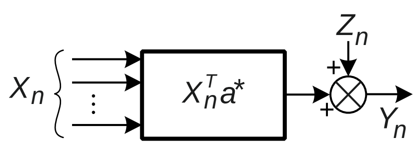
1. Wymagania wstępne z poprzednich zajęć[1].
2. Znajomość konstrukcji i podstawowych własności macierzy kowariancji wektora losowego.

Zadania do wykonania:

Dany jest statyczny system liniowy typu MISO o D wejściach (np. $D = 10, 20$) opisany równaniem

$$Y_n = X_n^T a^* + Z_n, \tag{1}$$

gdzie $X_n = [X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nD}]^T$, $a^* = [a_1^*, a_2^*, \ldots, a_D^*]^T$ oraz $Y_n, Z_n \in \mathbb{R}^1$.



Zakładamy parametryczną wiedzę wstępną, tj. znajomość parametru D.

1. Ustalić arbitralnie składowe wektora a^*. Wygenerować N-elementową sekwencję obserwacji wejścia $\{X_n\}$ typu *i.i.d.* o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, gdzie macierz kowariancji $\Sigma = \mathbf{I}\sigma_X^2$, $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową o wym. $[D \times D]$, $\sigma_X^2 > 0$ jest stałą, a $\boldsymbol{\mu}$ jest D-elementowym wektorem.

2. Wygenerować skalarny (pomocniczy) sygnał $\{\varepsilon_n\}$ typu *i.i.d.* o rozkładzie[2] $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Na jego podstawie utworzyć sygnał zakłócający $\{Z_n\}$ (por. równanie (1)), zgodnie z zależnością

$$Z_n = \varepsilon_n + b_1 \varepsilon_{n-1},$$

gdzie $b_1 = 0.5$. Na jego podstawie utworzyć N-elementową sekwencję zakłócającą $\{Z_n\}$.

3. Wykorzystując sygnały $\{X_n\}$ i $\{Z_n\}$ wyznaczyć sekwencję pomiarów wyjścia $\{Y_n\}$ zgodnie z równaniem (1). N-elementowy zbiór par (X_n, Y_n) oznaczymy symbolem T_N, tzn. $T_N = \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_N, Y_N)\}$.

[1] Całkujemy wiedzę... przynajmniej do wakacji.

[2] Przyjąć dowolną wartość wariancji $\sigma_\varepsilon^2 > 0$. Jej wpływ na rezultaty identyfikacji będzie przedmiotem dalszych badań.

4. Niech

$$\mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \vdots \\ X_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1D} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N1} & X_{N2} & \cdots & X_{ND} \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_N = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_N = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix}.$$

Wtedy $\mathbf{Y}_N = \mathbf{X}_N a^* + \mathbf{Z}_N$ (por. wz. (1)).
Skonstruować estymator MNK parametru a^* zgodnie ze wzorem

$$\hat{a}_N = (\mathbf{X}_N^T \mathbf{X}_N)^{-1} \mathbf{X}_N^T \mathbf{Y}_N.$$

5. Wyznaczyć (samodzielnie) macierz kowariancji $\mathbf{R}$ wektora $\mathbf{Z}_N$,

$$\mathbf{R} = cov\{\mathbf{Z}_N\} = E\{\mathbf{Z}_N \mathbf{Z}_N^T\} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{N1} & \cdots & & c_{NN} \end{bmatrix}.$$

gdzie $c_{kk} = Var\{\mathbf{Z}_N(k)\}$ oraz $c_{jk} = cov\{\mathbf{Z}_N(j), \mathbf{Z}_N(k)\}$, gdzie $\mathbf{Z}_N(j)$ oznacza j-ty element wektora $\mathbf{Z}_N$.

6. W oparciu o funkcję `imagesc()` lub `bar3()` przedstawić graficznie macierz kowariancji[3] estymatora $\hat{a}_N$, tj.

$$\text{cov}\{\hat{a}_N\} = (\mathbf{X}_N^T \mathbf{X}_N)^{-1} \mathbf{X}_N^T \mathbf{R} \mathbf{X}_N (\mathbf{X}_N^T \mathbf{X}_N)^{-1}. \tag{2}$$

Dokonać interpretacji uzyskanego wyniku w kontekście rezultatów uzyskanych w poprzednim ćwiczeniu (Lab8 – macierz kowariancji estymatora $\hat{a}_N$ przy zakłóceniu typu *i.i.d.*). Jaki jest wpływ parametru b_1 (patrz pkt. 2.) na macierz kowariancji estymatora $\hat{a}_N$?

7. Dla (ustalonego) sygnału wejściowego $\{X_n\}$ z punktu 1. wygenerować L (np. $L = 20, 30$) niezależnych sekwencji $\{Z_n\}$ i utworzyć odpowiadające im zbiory pomiarów $T_N^{[1]}, T_N^{[2]}, \ldots, T_N^{[L]}$. (por. pkt. 3.). Niech $\hat{a}_N^{[l]}$ oznacza realizację estymatora $\hat{a}_N$ uzyskaną na podstawie pomiarów ze zbioru $T_N^{[l]}$. Wykreślić błąd

$$Err\{\hat{a}_N\} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} \left\| \hat{a}_N^{[l]} - a^* \right\|^2 \tag{3}$$

w funkcji N. Porównać uzyskany rezultat z odpowiadającym mu wynikiem dla zakłócenia typu *i.i.d.*. Badania powtórzyć dla różnych wartości wariancji zakłóceń.

[3] Przyjmujemy tu interpretację, zgodnie z którą wejście $\{X_n\}$ ma charakter *deterministyczny*, a zakłócenie jest sekwencją losową jak w pkt. 1 (biały szum).

Zadania dodatkowe:

1. W kontekście zadania z pkt. 2. wyznaczyć macierz kowariancji wektora zakłóceń $\mathbf{Z}_N$, gdy
$$Z_n = \sum_{k=0}^{K} \lambda^k \varepsilon_{n-k}, \tag{4}$$
gdzie $0 < \lambda < 1$ jest pewną stałą (przyjąć wartość K, dla której $\lambda^K \leq \delta$ oraz $\delta = 0.001$). Przedstawić graficznie $\operatorname{cov}\{\mathbf{Z}_N\}$ dla kilku wybranych wartości λ (np. $\lambda \in \{0.001; 0.1; 0.5; 0.98\}$ i zinterpretować uzyskane wyniki.

2. Dla zakłócenia (4) i kilku wybranych wartości λ (patrz zadanie powyżej) przeprowadzić eksperyment symulacyjny analogiczny do badań z pkt. 7. oraz wyznaczyć i przedstawić graficznie macierz kowariancji $\operatorname{cov}\{\hat{a}_N\}$ (wzór (2)).

Literatura:

1. Söderström, Torsten D., and Petre Gheorghe Stoica. Identyfikacja systemów. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1997.

2. Mańczak, Kazimierz, and Zbigniew Nahorski. Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1983.

3. Wasserman, Larry. All of statistics: a concise course in statistical inference. Springer Science & Business Media, 2013.

4. Gajek Lesław, Kałuszka Marek. Wnioskowanie statystyczne: modele i metody. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1993.

5. Notatki z wykładu.