Modelowanie i identyfikacja – laboratorium 3.
Podstawy estymacji – twierdzenia graniczne, średnia i mediana z próby oraz ich własności

Paweł Wachel

Wymagania wstępne:

1. Wymagania wstępne z poprzednich zajęć[1].
2. Definicja korelacji i kowariancji zmiennych losowych.
3. Defincja i podstawowe własności mediany.
4. Zbieżność według prawdopodobieństwa i zbieżność z prawdopodobieństwem 1.
5. Centralne twierdzenie graniczne.

Zadania do wykonania:

1. Wygenerować ciąg zmiennych losowych $T = \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Zaimplementować estymatory

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n, \quad \hat{s}_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \hat{\mu}_N)^2, \quad \hat{S}_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(X_n - \hat{\mu}_N)^2. \tag{1}$$

2. Zaimplementować i wykreślić błąd empiryczny

$$Err\{\hat{\mu}_N; \mu\} = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\left[\hat{\mu}_N^{[l]} - \mu\right]^2,$$

   gdzie L to stała (np. 10, 20 itp.), a $\hat{\mu}_N^{[1]}, \hat{\mu}_N^{[2]}, \ldots, \hat{\mu}_N^{[L]}$ to kolejne *realizacje* estymatora $\hat{\mu}_N$, skonstruowane w oparciu o niezależne N-elementowe ciągi obserwacji $T_1, T_2, \ldots, T_L$.

   - Wykreślić i zinterpretować błąd $Err\{\hat{\mu}_N; \mu\}$ w funkcji N dla dwóch różnych wartości L.
   - Przeprowadzić analogiczne badania dla estymatorów $\hat{s}_n^2$ i $\hat{S}_n^2$, tj. zbadać zachowanie błędów $Err\{\hat{s}_n^2; \sigma^2\}$ i $Err\{\hat{S}_n^2; \sigma^2\}$ w funkcji N.

3. Powtórzyć eksperymenty z zadania 1. dla zmiennych losowych o rozkładzie Cauchy'ego. Przedyskutować uzyskane wyniki.

[1] Całkujemy wiedzę... przynajmniej do wakacji.

Zadania dodatkowe:

1. Zaimplementować estymatory kowariancji i korelacji zmiennych losowych X_1 i X_2, takich że $X_1 \sim U[0,1]$ oraz $X_2 = aX_1 + b$, gdzie a i b są dowolnie wybranymi stałymi. Wykreślić realizacje estymatora korelacji w funkcji liczebności próby N i zinterpretować uzyskane wyniki.

2. Niech zmienna losowa X_1 posiada gęstość prawdopodobieństwa taką, że $f(x) = f(-x)$, $\forall x$. Niech ponadto $X_2 = X_1^2$. Przeprowadzić analizę korelacyjną zmiennych losowych X_1 i X_2 i przedyskutować uzyskane wyniki w kontekście ich zależności/niezależności.

Literatura:

1. Jakubowski Jacek, Sztencel Rafał. Wstęp do teorii prawdopodobieństwa. Script, 2001.

2. Plucińska Agnieszka, Pluciński Edmund. Probabilistyka: rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna, procesy stochastyczne. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2000.

3. Gajek Lesław, Kałuszka Marek. Wnioskowanie statystyczne: modele i metody. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1993.

4. Notatki z wykładu.