Modelowanie i identyfikacja – laboratorium 8.

Identyfikacja statycznych systemów liniowych typu MISO.

Metoda najmniejszych kwadratów w ujęciu podstawowym

Paweł Wachel

Wymagania wstępne:

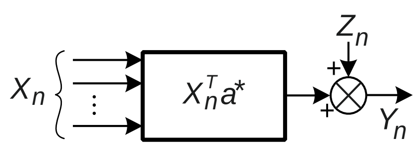
1. Wymagania wstępne z poprzednich zajęć[1].
2. Znajomość konstrukcji estymatora najmniejszych kwadratów w ujęciu podstawowym.

Zadania do wykonania:

Dany jest statyczny system liniowy typu MISO o D wejściach (np. $D = 10, 20$) opisany równaniem

$$Y_n = X_n^T a^* + Z_n, \tag{1}$$

gdzie $X_n = [X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nD}]^T$, $a^* = [a_1^*, a_2^*, \ldots, a_D^*]^T$ oraz $Y_n, Z_n \in \mathbb{R}^1$.



Zakładamy parametryczną wiedzę wstępną, tj. znajomość parametru D.

1. Ustalić arbitralnie składowe wektora a^*. Wygenerować N-elementową sekwencję obserwacji wejścia $\{X_n\}$ typu *i.i.d.* o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, gdzie macierz kowariancji $\Sigma = \mathbf{I}\sigma_X^2$, $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową o wym. $[D \times D]$, $\sigma_X^2 > 0$ jest stałą, a $\boldsymbol{\mu}$ jest D-elementowym wektorem. Wygenerować N-elementowy sygnał zakłócający $\{Z_n\}$, typu *i.i.d.* o rozkładzie[2] $\mathcal{N}(0, \sigma_Z^2)$.
2. Wykorzystując sygnały $\{X_n\}$ i $\{Z_n\}$ wyznaczyć sekwencję pomiarów wyjścia $\{Y_n\}$ zgodnie z równaniem (1). N-elementowy zbiór par (X_n, Y_n) oznaczymy symbolem T_N, tzn. $T_N = \{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_N, Y_N)\}$.
3. Niech

$$\mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ \vdots \\ X_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1D} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2D} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N1} & X_{N2} & \cdots & X_{ND} \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_N = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_N = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix}.$$

[1] Całkujemy wiedzę... przynajmniej do wakacji.

[2] Przyjąć dowolną wartość wariancji zakłóceń $\sigma_Z^2 > 0$. Jej wpływ na rezultaty identyfikacji będzie przedmiotem dalszych badań.

Wtedy $\mathbf{Y}_N = \mathbf{X}_N a^* + \mathbf{Z}_N$ (por. wz. (1)).
Skonstruować estymator MNK parametru a^* zgodnie ze wzorem

$$\hat{a}_N = (\mathbf{X}_N^T \mathbf{X}_N)^{-1} \mathbf{X}_N^T \mathbf{Y}_N.$$

4. W oparciu o funkcję `imagesc()` lub `bar3()` przedstawić graficznie macierz kowariancji[3] estymatora $\hat{a}_N$, tj. $\mathrm{cov}\,(\hat{a}_N) = \sigma_Z^2 (\mathbf{X}_N^T \mathbf{X}_N)^{-1}$ i dokonać interpretacji uzyskanego rezultatu.

5. Dla (ustalonego) sygnału wejściowego $\{X_n\}$ z punktu 1. wygenerować L (np. $L = 20, 30$) niezależnych sekwencji $\{Z_n\}$ i utworzyć odpowiadające im zbiory pomiarów $T_N^{[1]}, T_N^{[2]}, \ldots, T_N^{[L]}$. (por. pkt. 2.). Niech $\hat{a}_N^{[l]}$ oznacza realizację estymatora $\hat{a}_N$ uzyskaną na podstawie pomiarów ze zbioru $T_N^{[l]}$. Wykreślić błąd

$$Err\,\{\hat{a}_N\} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} \left\| \hat{a}_N^{[l]} - a^* \right\|^2 \tag{2}$$

w funkcji N i zinterpretować uzyskany rezultat[4]. Badania powtórzyć dla różnych wartości wariancji zakłóceń σ_Z^2.

Zadania dodatkowe:

1. Skonstruować eksperyment symulacyjny, w którym wymiar D wektora parametrów a^* jest związany z liczbą obserwacji wejścia/wyjscia systemu poprzez następujące zależności: a) $D = \lfloor N^{1/3} \rfloor$, b) $D = \lceil N^{1/2} \rceil$ oraz c) $D = N$. Dla każdego z powyższych przypadków wykreślić błąd empiryczny $Err\,\{\hat{a}_N\}$ w funkcji N (analogicznie do symulacji z pkt. 5.). Dokonać interpretacji uzyskanych wyników.

2. W kontekście zadania z pkt. 4. skonstruować estymator macierzy kowariancji estymatora $\hat{a}_N$ oraz (symulacyjnie) zbadać jego zbieżność do $\mathrm{cov}\,(\hat{a}_N)$.

Literatura:

1. Söderström, Torsten D., and Petre Gheorghe Stoica. Identyfikacja systemów. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1997.

2. Mańczak, Kazimierz, and Zbigniew Nahorski. Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1983.

3. Wasserman, Larry. All of statistics: a concise course in statistical inference. Springer Science & Business Media, 2013.

4. Gajek Lesław, Kałuszka Marek. Wnioskowanie statystyczne: modele i metody. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1993.

5. Notatki z wykładu.

[3] Przyjmujemy tu interpretację, zgodnie z którą wejście $\{X_n\}$ ma charakter *deterministyczny*, a zakłócenie jest sekwencją losową jak w pkt. 1 (biały szum).

[4] $\|\cdot\|$ jest tu normą euklidesową.