Modelowanie i identyfikacja – laboratorium 11.

Identyfikacja systemów LTI z nieskończoną pamięcią.

Metoda zmiennych instrumentalnych

Paweł Wachel

Wymagania wstępne:

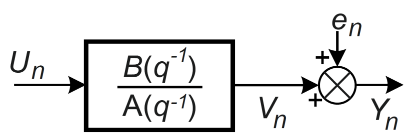
1. Wymagania wstępne z poprzednich zajęć[1].
2. Znajomość konstrukcji i podstawowych własności estymatora uogólnionej Metody Najmniejszych Kwadratów.

Zadania do wykonania:

Dany jest **dynamiczny** system liniowy typu SISO z **nieskończoną** pamięcią

$$V_n = b^* U_n + a^* V_{n-1} \tag{1}$$
$$Y_n = V_n + e_n \tag{2}$$

gdzie $\{U_n\}$, $\{Y_n\}$ to odpowiednio sygnały wejścia i wyjścia, $\{e_n\}$ jest addytywnym zakłóce-



niem, a a^*, b^* to szukane parametry systemu. Niech $\theta^* = [b^*, a^*]^T$ oraz $\varphi_n = [U_n, Y_{n-1}]^T$. Wtedy $Y_n = \varphi_n^T \theta^* + e_n$.

1. Ustalić arbitralnie składowe wektora θ^* – przyjąć a^* z zakresu $(-1, 1)$ i uzasadnić powód zastosowania powyższego ograniczenia.
2. Wykreślić odpowiedź impulsową systemu dla kilku wybranych wartości a^* i b^* (z pominięciem zakłócenia $\{e_n\}$).
3. Wygenerować N-elementową sekwencję obserwacji wejścia $\{U_n\}$ typu *i.i.d.* o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$.
4. Wygenerować zakłócenie $\{e_n\}$ typu biały szum z rozkładu jednostajnego na odcinku $[-c, c]$ (dla arbitralnie wybranej stałej c). Skonstruować macierze

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & Y_0 \\ U_2 & Y_1 \\ \vdots & \vdots \\ U_N & Y_{N-1} \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_N = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_N = \begin{bmatrix} e_1 - a^* e_0 \\ e_2 - a^* e_1 \\ \vdots \\ e_N - a^* e_{N-1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

[1] Całkujemy wiedzę... przynajmniej do wakacji.

(wtedy $\mathbf{Y}_N = \Phi_N \theta^* + \mathbf{Z}_N$)
Skonstruować estymator Metody Najmniejszych Kwadratów

$$\hat{\theta}_N = (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T \mathbf{Y}_N. \tag{4}$$

5. Dla (ustalonego) sygnału wejściowego $\{U_n\}$ z punktu 3. wygenerować L (np. $L = 100$) niezależnych sekwencji $\{e_n\}$ (zgodnie z p. 4.) i utworzyć odpowiadające im zbiory pomiarów wejścia-wyjścia $T_N^{[1]}, T_N^{[2]}, \ldots, T_N^{[L]}$. Niech $\hat{\theta}_N^{[l]}$ oznacza realizację estymatora $\hat{\theta}_N$ uzyskaną na podstawie pomiarów ze zbioru $T_N^{[l]}$. Wykreślić błąd

$$Err\{\hat{\theta}_N\} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} \left\| \hat{\theta}_N^{[l]} - \theta^* \right\|^2 \tag{5}$$

w funkcji N. Zinterpretować uzyskane wyniki.

6. Dla ustalonego N wyznaczyć $\hat{\theta}_N = [\hat{b}_N, \hat{a}_N]^T$ zgodnie ze wzorem (4). Wykorzystać wielkości $\hat{b}_N$ i $\hat{a}_N$ do oszacowania **niezaszumionego** wyjścia $\{V_n\}$ (por. (1)) zgodnie ze wzorem

$$\bar{V}_n = \hat{b}_N U_n + \hat{a}_N \bar{V}_{n-1}.$$

7. Skonstruować odpowiednik macierzyΦ_N (por. wzór (3)) o postaci

$$\Psi_N = \begin{bmatrix} U_1 & \bar{V}_0 \\ U_2 & \bar{V}_1 \\ \vdots & \vdots \\ U_N & \bar{V}_{N-1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

8. Skonstruować estymator Metody Zmiennych Instrumentalnych (*ang. Instrumental Variables*) zgodnie ze wzorem

$$\hat{\theta}_N^{IV} = (\Psi_N^T \Phi_N)^{-1} \Psi_N^T \mathbf{Y}_N. \tag{7}$$

9. Zbadać własności estymatora $\hat{\theta}_N^{IV}$ analogicznie do eksperymentu z p. 5. Przedyskutować uzyskane wyniki w kontekście rezultatów otrzymanych dla estymatora $\hat{\theta}_N$.

Literatura:

1. Söderström, Torsten D., and Petre Gheorghe Stoica. Identyfikacja systemów. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1997.

2. Mańczak, Kazimierz, and Zbigniew Nahorski. Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1983.

3. Wasserman, Larry. All of statistics: a concise course in statistical inference. Springer Science & Business Media, 2013.

4. Gajek Lesław, Kałuszka Marek. Wnioskowanie statystyczne: modele i metody. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1993.

5. Notatki z wykładu.