Laboratorium

Modelowanie i identyfikacja

Sprawozdanie

Generatory liczb
Laboratorium 0, 1, 2

Autor:
Adam Krzykała, 235411

Termin: czwartek 9:15

Prowadzący:
dr inż. Paweł Wachel, prof. ucz.

1 kwietnia 2020

Spis treści

1 Laboratorium nr 0 [2]

1.1 Zadanie 1 – Generator liczb pseudolosowych

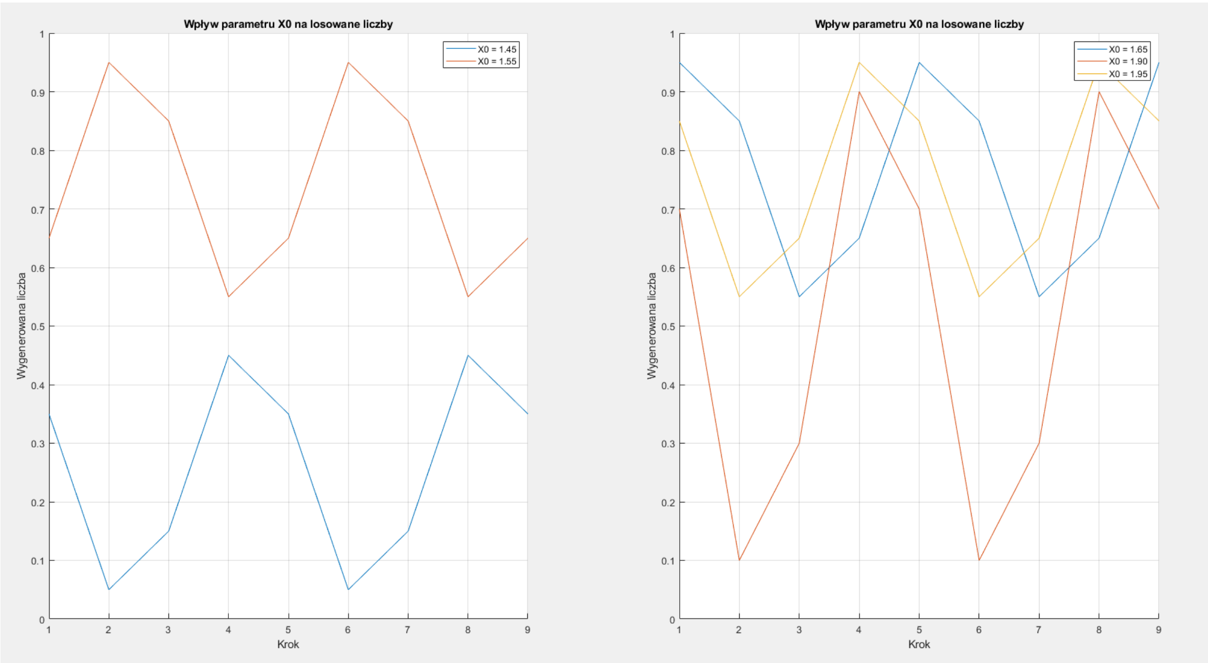
Celem zadania było zaimplementowanie generatora liczb pseudolosowych z rozkładu jednostajnego opartego o przekształcenie piłokształtne zadane wzorem

$$X_{n+1} = X_n z - \lfloor X_n z \rfloor. \tag{1}$$

Ciąg liczb X zawiera n wygenerowanych liczb w sposób deterministyczny. Generator opiera swoje działanie na dwóch zmiennych X_0 oraz z. Pierwszy parametr określa inicjującą wartość generatora, natomiast drugi ma wpływ na przekształcenie piłokształtne.

1.1.1 Wpływ liczby inicjującej X_0

Parametr z przyjęto jako 3. Badano wpływ liczby X_0 na generowane liczby.

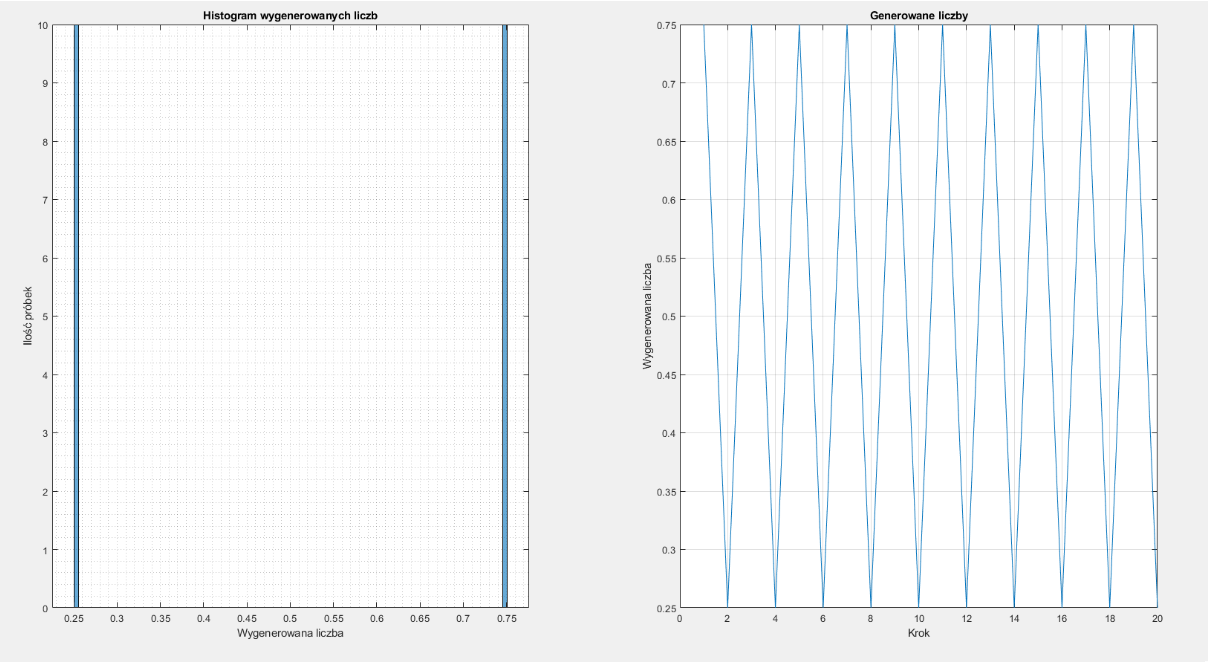


Rysunek 1: Wpływ parametru X_0 na losowane liczby

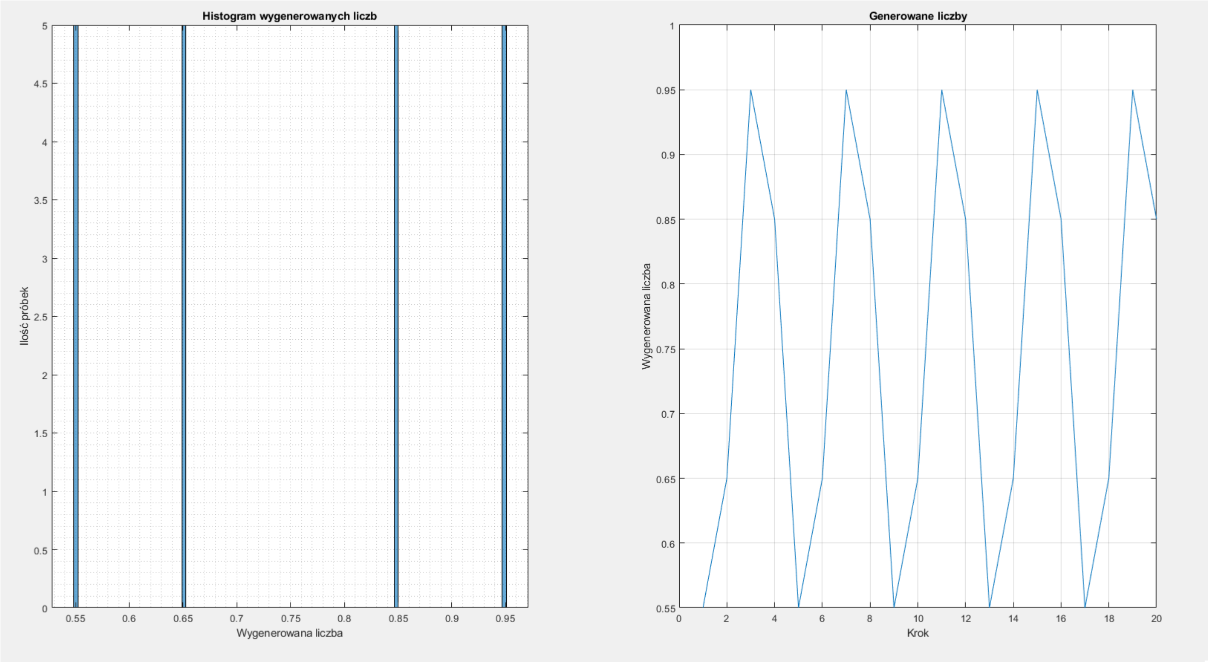
Komentarz Parametr X_0, czyli wartość początkowa ma wpływ na generowane deterministycznie liczby. Znaczenie ma jedynie część ułamkowa liczby. Dla przykładu ciąg wygenerowany za pomocą generatora z $X_0 = 1.38$ jest identyczny z ciągiem wygenerowanym za pomocą generatora z $X_0 = 100.38$. Zauważyć można, że parametry X_0 przeciwne do siebie względem punktu 1.5 generują ciągi liczb symetryczne względem $y = 1.5$. Taka sytuacja została zaobserwowana w pierwszej części rysunku 1. W drugiej części można zauważyć, że zwiększanie parametru X_0 o 0.1 przesuwa w fazie ciągi wygenerowanych liczb. Zmiana parametru z 1.65 do 1.90 spowodowała przesunięcie w fazie oraz zniekształcenie. Można zatem stwierdzić reguły poprzez jakie parametr inicjujący wpływa na wygenerowane liczby.

1.1.2 Wpływ parametru z

Parametr z będzie wpływał na przekształcenie piłokształtne, za pomocą którego generowane są kolejne liczby. Dla $X_0 = 0.25$, $z = 3$ generator losuje naprzemiennie dwie wartości: 0.25 i 0.75. Wygenerowano 21 próbek. Okres generatora w tym przypadku wynosi 2. Histogram oraz wygenerowane liczby w kolejnych krokach przedstawia rysunek 2.

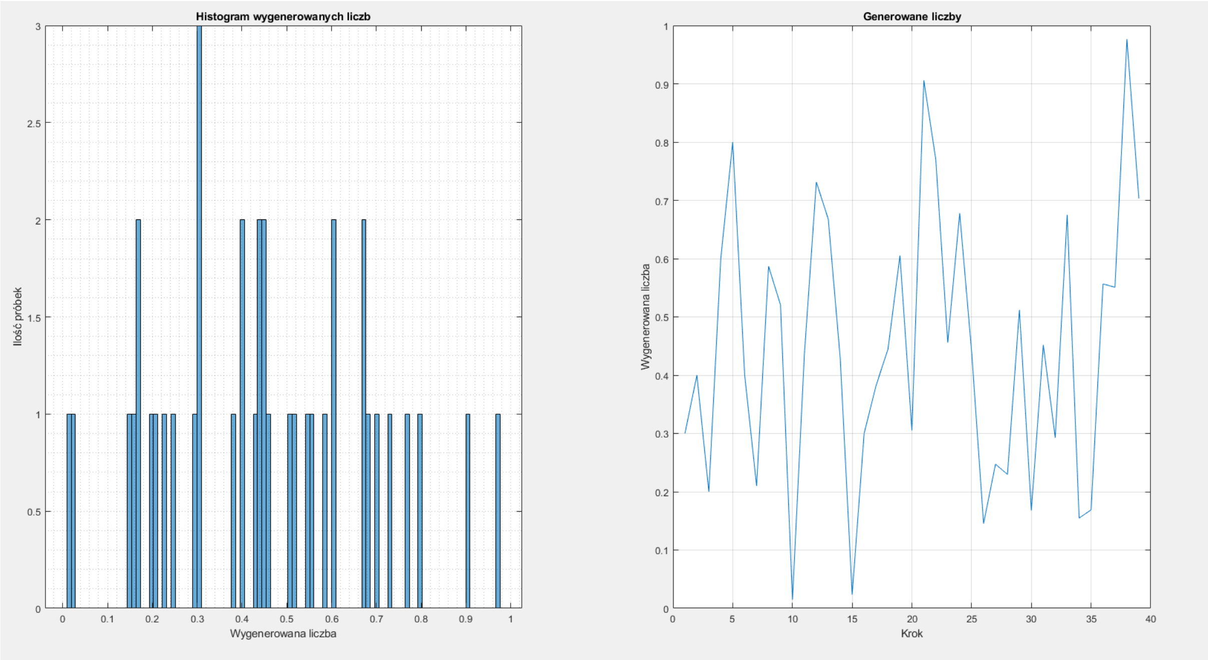


Rysunek 2: Generator naprzemienny dwóch liczb 0.25, 0.75



Rysunek 3: Generator okresowy generujący 4 liczby ($X_0 = 1.85, z = 3$)

Komentarz Rysunek 3 ukazuje działanie generatora okresowego o okresie 4. Generowane są cztery wartości liczbowe, co ukazuje histogram. Dalsze zwiększanie parametru w tym przypadku ($X_0 = 1.85$) spowoduje utratę okresowości i polepszenie pseudolosowości generatora deterministycznego (rys. 4). Histogram bardziej przypomina funkcję gęstości rozkładu jednostajnego.



Rysunek 4: Generator pseudolosowy $X_0 = 1.85, z = 98$

1.1.3 Okresowość generatora

Na podstawie dotychczasowych obserwacji dla trzech wartości parametru z podano okres generatora pseudolosowego opartego o przekształcenie piłokształtne ($X_0 = 1.85$):

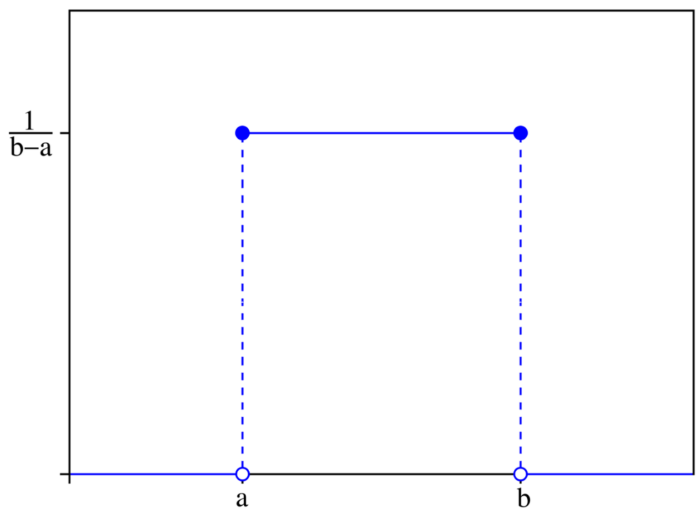
- z = 3 – okres: 4
- z = 4 – okres: 2
- z = 5 – okres: 0 (generowane te same wartości)
- z = 98 – okres: brak dla 21 próbek

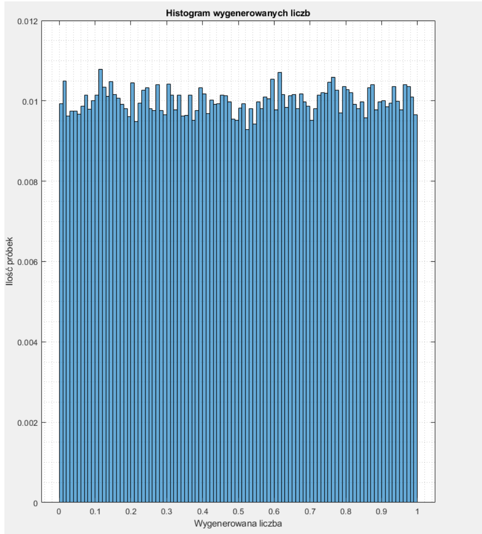
Uwaga Okresowość sprawdzono na podstawie 21 pierwszych wygenerowanych próbek.

1.1.4 Histogram a gęstość rozkładu jednostajnego

Histogram przedstawia, ile tych samych próbek zostało wygenerowanych i szereguje te liczby wraz z rosnącą wartością próbki. Uzystkujemy tym samym graficzną wizualizację rozkładu empirycznego zmiennej losowej. Każdy prostokąt wskazuje na konkretną wylosowaną liczbę, natomiast jego wysokość na liczebność. Gdyby zwiększać liczbę losowanych próbek w nieskończoność oraz unormować uzyskany histogram, wówczas zarys histogramu idealnie pokryłby się z funckją gęstości.

Wygenerowano 100 000 próbek. Rozdzielczość histogramu to 100 słupków. Wartość funkcji gęstości wynosi $\frac{1}{b-a} = \frac{1}{1-0} = 1$, a wysokość ostatniego słupka histogramu $1/100$. Dla wygenerowanych liczb stworzono histogram, który został unormowany a wynik ukazano na rys. 5. Jeżeli generator losuje liczby o idelanym rozkładzie jednostajnym, wówczas kształt funkcji gęstości stanowi dokładny obrys unormowanego histogramu.





Rysunek 5: Porównanie funkcji gęstości i histogramu unormowanego dla rozkładu jednostajnego

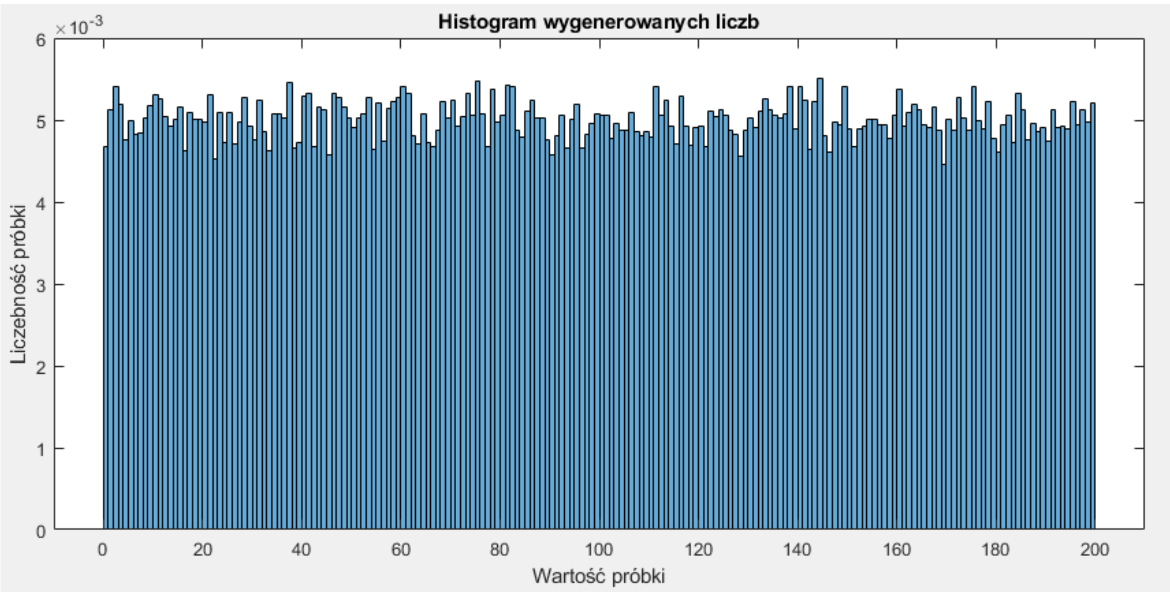
1.2 Zadanie 2 – Generator liczb pseudolosowych

Celem zadania było zaimplementowanie i zbadani własności generatora opartego na równaniu:

$$X_{n+1} = (a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + ... + a_k X_{n-k} + c)\ mod\ m. \tag{2}$$

Generator bazuje na $k+1$ przeszłych próbkach. Każda próbka z przeszłości ma przypisany współczynnik wagowy, przez co możliwe jest kształtowanie charakteru deterministycznego generatora. Wylosowane liczby zależą od stałej c oraz m.

Wartości losowane są w przedziale [0,m). Parametr c spełnia rolę stałej w wyrażeniu oraz wyznacza dokładność z jaką można losować liczby. Gdy c dążdy do zera, a liczba losowanych liczb dąży do nieskończoności, możliwe jest otrzymanie rozkładu jednostajnego. W badanym generatorze bardzo trudno jest znaleźć okresowość, choć jest to generator deterministyczny. Wartość oczekiwana wynosi $m/2$. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa w przedziale [0,m) to $1/m$. Parametry te są zgodne z obserwacjami opartymi na rys. 6.



Rysunek 6: Unormowany histogram wylosowanych liczb – m = 200, c = 0.0001, a = [1,1,1,1,1], k = 4

2 Laboratorium nr 1 [2]

Przedmowa Metoda odwrotnej dystrybuanty wykorzystywana jest do generowania liczb z rozkładu o zadanej funkcji gęstości prawdopodobieństwa bądź o zadanej dystrybuancie.

$$Y = F^{-1}(X) \tag{3}$$

Gdzie Y to zmienna losowa o pożądanym rozkładzie prawdopodobieństwa, F to dystrybuanta tego rozkładu, a X to zmienna losowa o rozkładzie równomiernym w przedziale (0,1).

2.1 Zadanie 1 – Generator – metoda odwrotnej dystrybuanty

Zadanie polegało na wyznaczeniu dystrybuanty oraz zaimplementowaniu generatora generującego liczby losowe z rozkładu o gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in [0,1] \\ 0 & \text{dla } x \in (-\infty, 0), (1, \infty) \end{cases} \tag{4}$$

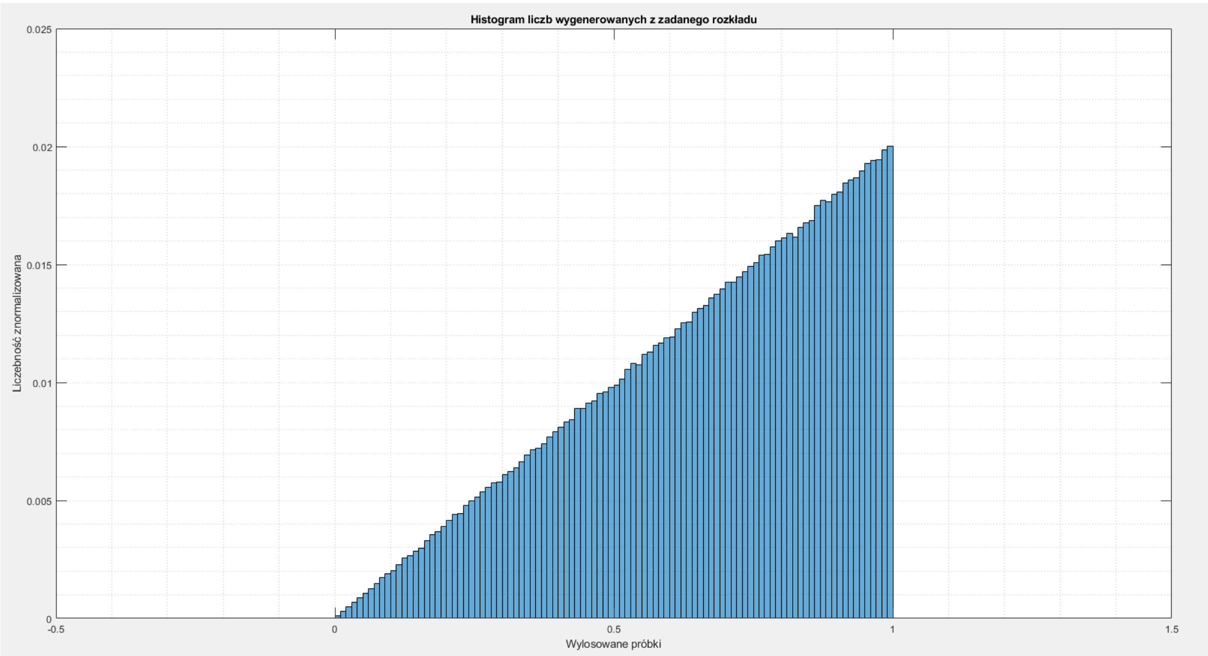
Wyznaczono dystrybuantę, której równanie przedstawia się następująco:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0 \, d\xi \\ \int_{-\infty}^{0} 0 \, d\xi + \int_{0}^{x} 2\xi \, d\xi \\ \int_{-\infty}^{0} 0 \, d\xi + \int_{0}^{1} 2\xi \, d\xi + \int_{1}^{x} 0 \, d\xi \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ x^2 & \text{dla } x \in [0,1] \\ 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases} \tag{5}$$

Generator liczb z rozkładu opisanego funkcją gęstości (4) zaimplementowany został w następujący sposób:

$$F(x) = u = x^2 \Rightarrow x = F^{-1}(u) \Rightarrow x = \sqrt{u} \quad \text{dla } u \in [0,1].$$

Użyto uprzednio zaimplementowany generator liczb z rozkładu jednostajnego, opisywanego przez równanie (2). Histogram znormalizowano.



Rysunek 7: Unormowany histogram wylosowanych liczb

Komentarz Za pomocą generatora liczb z rozkładu jednostajnego oraz metody odwrotnej dystrybuanty udało się zaimplementować generator liczb z rozkładu opisanego funkcją gęstości (4). Histogram (rys. 7) wykazuje podobieństwo do funkcji gęstości (4).

2.2 Zadanie 2 – Generator – metoda odwrotnej dystrybuanty

Zadanie polegało na wyznaczyeniu dystrybuanty oraz zaimplementowaniu generatora generującego liczby losowe z rozkładu o gęstości prawdopodobieńnstwa:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \in (-1,0) \\ -x+1 & \text{dla } x \in [0,1) \\ 0 & \text{dla } x \in (-\infty,-1),(1,\infty) \end{cases} \tag{6}$$

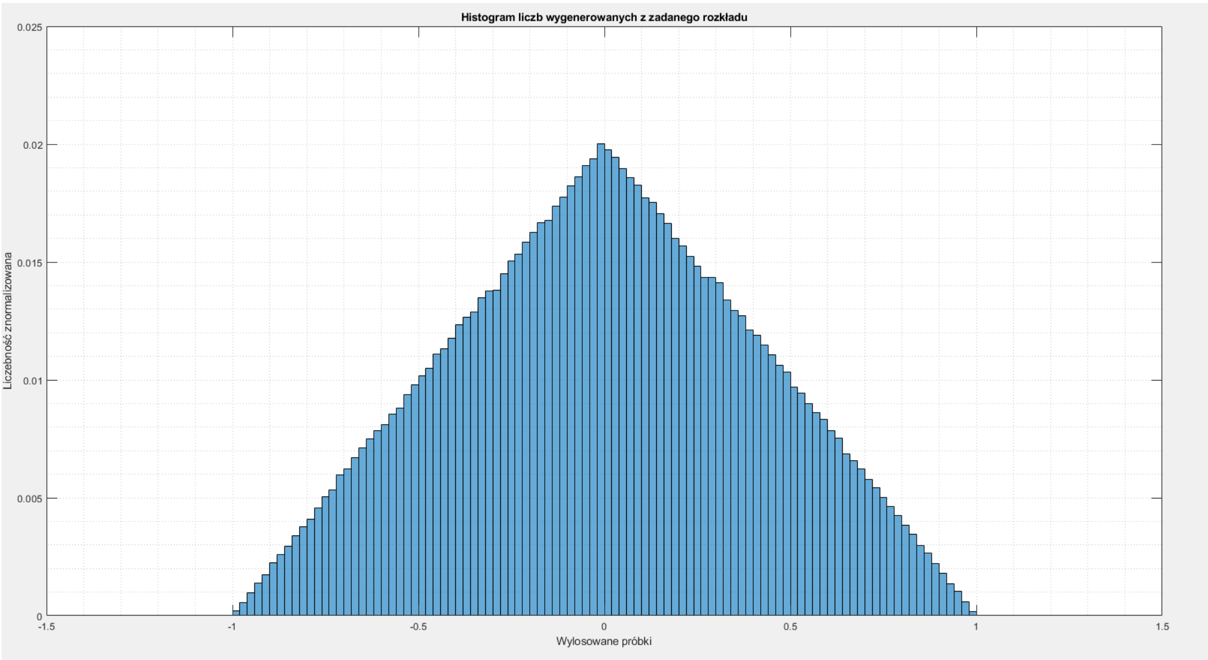
Wyznaczono dystrybuantę, której równanie przedstawia się następująco:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{-1} 0\ d\xi + \int_{-1}^{x} \xi+1\ d\xi \\ \int_{-\infty}^{-1} 0\ d\xi + \int_{-1}^{0} \xi+1\ d\xi + \int_{0}^{x} -\xi+1\ d\xi \\ \int_{-\infty}^{-1} 0\ d\xi \\ \int_{-\infty}^{-1} 0\ d\xi + \int_{-1}^{0} \xi+1\ d\xi + \int_{0}^{1} -\xi+1\ d\xi + \int_{1}^{x} 0\ d\xi \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2} & \text{dla } x \in (-1,0) \\ -\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2} & \text{dla } x \in [0,1) \\ 0 & \text{dla } x < -1 \\ 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases} \tag{7}$$

Generator liczb z rozkładu opisanego funkcją gęstości (6) zaimplementowany został w następujący sposób:

$$\begin{array}{ll} F(x) = u = \frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2} \Rightarrow x = F^{-1}(u) \Rightarrow x = \sqrt{2u}-1 & \text{dla } u \in (0,\frac{1}{2}) \\ F(x) = u = -\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2} \Rightarrow x = F^{-1}(u) \Rightarrow x = 1-\sqrt{2-2u} & \text{dla } u \in [\frac{1}{2},1) \end{array}$$

Użyto uprzednio zaimplementowany generator liczb z rozkładu jednostajnego, opisywanego przez równanie (2). Histogram znormalizowano.



Rysunek 8: Unormowany histogram wylosowanych liczb

Komentarz Za pomocą generatora liczb z rozkładu jednostajnego oraz metody odwrotnej dystrybuanty udało się zaimplementować generator liczb z rozkładu opisanego funkcją gęstości (6). Histogram (rys. 8) wykazuje podobieństwo do funkcji gęstości (6).

2.3 Zadanie 3 – Generator – metoda odwrotnej dystrybuanty – rozkład wykładniczy

Zadanie polegało na wyznaczyeniu dystrybuanty oraz zaimplementowaniu generatora generującego liczby losowe z rozkładu wykładniczego o gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{dla } x \in [0, \infty) \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases} \tag{8}$$

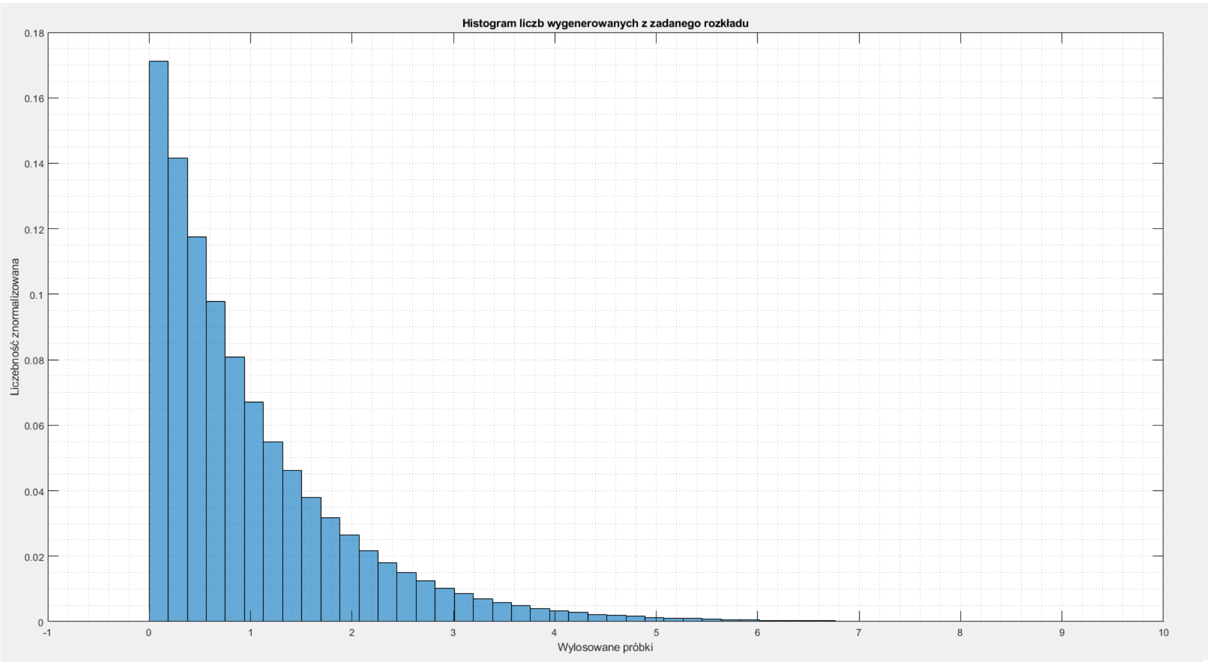
Wyznaczono dystrybuantę, której równanie przedstawia się następująco:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} e^{-\xi}\, d\xi \\ \int_{-\infty}^{0} 0\, d\xi \end{cases} = \begin{cases} -e^{-x} + 1 & \text{dla } x \in [0, \infty) \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases} \tag{9}$$

Generator liczb z rozkładu opisanego funkcją gęstości (8) zaimplementowany został w następujący sposób:

$$F(x) = u = -e^{-x} + 1 \Rightarrow x = F^{-1}(u) \Rightarrow x = -ln(1 - u) \quad \text{dla } u \in [0, 1]$$

Użyto uprzednio zaimplementowany generator liczb z rozkładu jednostajnego, opisywanego przez równanie (2). Histogram znormalizowano.



Rysunek 9: Unormowany histogram wylosowanych liczb

Komentarz Za pomocą generatora liczb z rozkładu jednostajnego oraz metody odwrotnej dystrybuanty udało się zaimplementować generator liczb z rozkładu opisanego funkcją gęstości (8). Histogram (rys. 9) wykazuje podobieństwo do funkcji gęstości (8).

2.4 Zadanie 4 – Generator – metoda odwrotnej dystrybuanty – rozkład Laplace'a

Zadanie polegało na wyznaczyeniu dystrybuanty oraz zaimplementowaniu generatora generującego liczby losowe z rozkładu Laplace'a o gęstości prawdopodobieńnstwa:

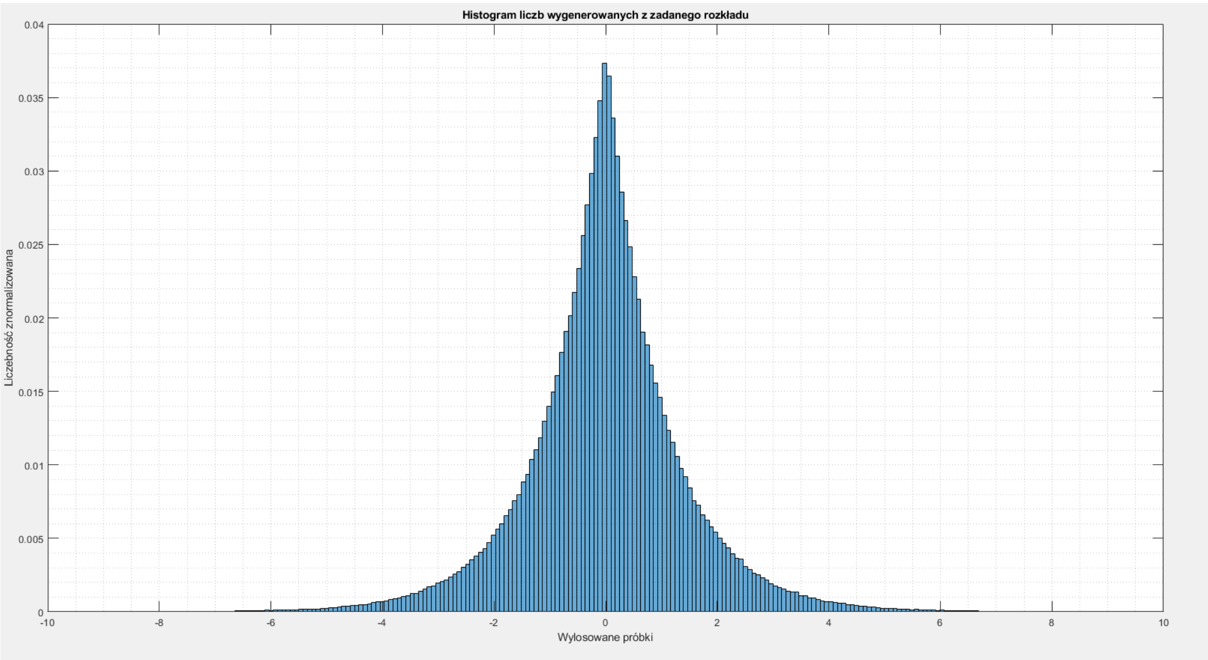
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x} & \text{dla } x \in [0, \infty) \\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{dla } x < 0 \end{cases} \tag{10}$$

Wyznaczono dystrybuantę, której równanie przedstawia się następująco:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{\xi}\, d\xi \\ \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{\xi}\, d\xi \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & \text{dla } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{dla } x \in [0, \infty) \end{cases} \tag{11}$$

Generator liczb z rozkładu Laplace'a opisanego funkcją gęstości (10) zaimplementowany został w następujący sposób:

$$\begin{array}{ll} F(x) = u = \frac{1}{2}e^{x} \Rightarrow x = F^{-1}(u) \Rightarrow x = -ln(2u) & \text{dla } u \in (-\infty, \frac{1}{2}) \\ F(x) = u = 1 - \frac{1}{2}e^{-x} \Rightarrow x = F^{-1}(u) \Rightarrow x = ln(2-2u) & \text{dla } u \in [\frac{1}{2}, \infty) \end{array}$$



Rysunek 10: Unormowany histogram wylosowanych liczb

Komentarz Za pomocą generatora liczb z rozkładu jednostajnego oraz metody odwrotnej dystrybuanty udało się zaimplementować generator liczb z rozkładu Laplace'a opisanego funkcją gęstości (10). Histogram (rys. 10) wykazuje podobieństwo do funkcji gęstości (10).

2.5 Zadanie 5 - Podsumowanie

Wady i zalety Główną zaletą metody odwrotnej dystrybuanty jest konieczność wygenerowania tylko jednej zmiennej losowej pomocniczej. Ponadto odwracanie analityczne funkcji bywa często trywialne, przez co zaletą jest prostota algorytmu. Wadą natomiast jest konieczność użycia dobrego generatora zmiennych losowych z rozkładu równomiernego. Jego niedoskonałość bezpośrednio przekłada się na dokładność generatora liczb z zadanego rozkładu. Implementacja generatora za pomocą metody odwrotnej dystrybuanty nie może być zastosowana jeśli dla danej funkcji nie istnieje funkcja odwrotna. Taka operacja jest także utrudniona, jeśli dystrybuanta rozkładu jest nieznana lub jest przybliżona. Zaletą jest także dokładność metody odwracania dystrybuanty, dlatego w przypadku pełnej znajomości funkcji odwrotnej takie podejście jest wyjątkowo korzystne. Możliwe jest stosowanie metod numerycznych odwracania funkcji przy bardziej skomplikowanych dystrybucjach, jednak takie podejście indukuje niedokładności.

3 Laboratorium nr 2 [2]

Przedmowa Wariant podstawowy metody eliminacji zakłada generowanie zmiennych losowych z rozkładu opisanego gęstością prawdopodobieństwa $f()$, która jest dodatnia i określona na przedziale (a, b).

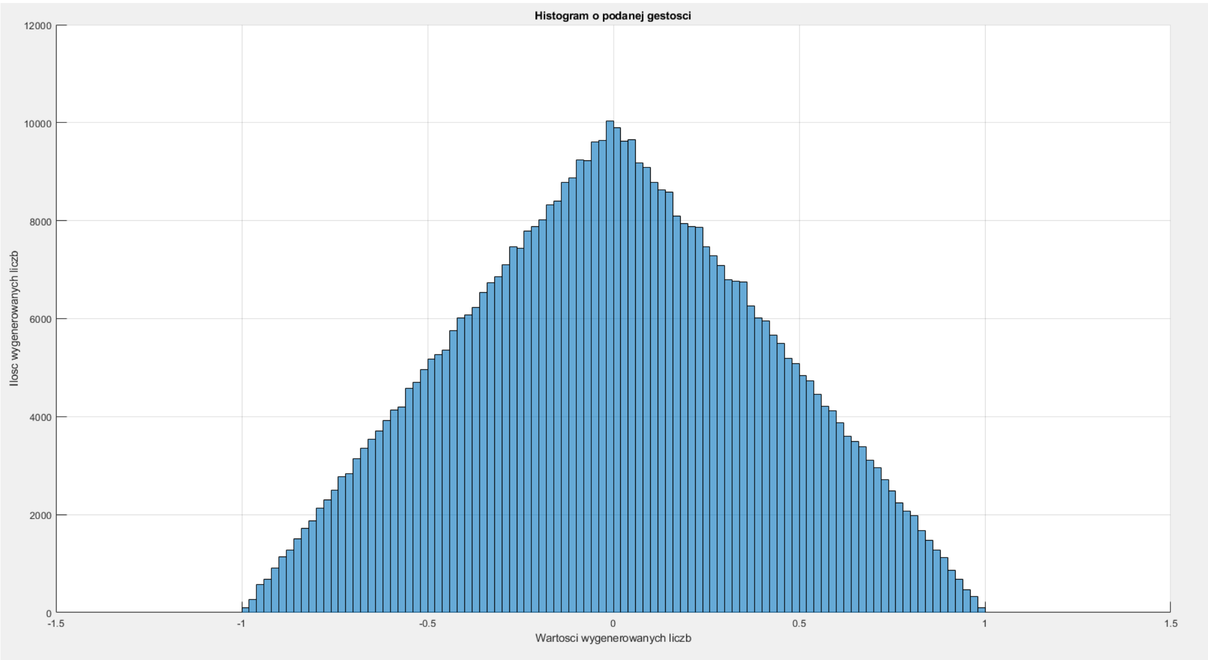
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \ x \in (a, b), \ a, b < \infty$$

Funkcja ograniczona jest pewną stałą d, taką że $d < \infty$, taką że $f(x) \leq d$. Następuje losowanie liczby U_1 z rozkładu jednostajnego na przedziale (a, b) oraz drugiej liczby U_2 na przedziale $(0, d)$. Jeżeli spełniony jest warunek akceptacji $U_2 \leq f(U_1)$, wtedy za wylosowaną liczbę przyjuje się U_1.

3.1 Zadanie 1 – Generator – metoda eliminacji (wariant podstawowy)

Zadanie polegało na zaimplementowaniu generatora generującego liczby losowe z rozkładu o gęstości prawdopodobieńnstwa z użyciem metody eliminacji w wariancie podstawowym:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \in (-1, 0) \\ -x+1 & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -1), (1, \infty) \end{cases} \tag{12}$$



Rysunek 11: Histogram wylosowanych liczb - metoda eliminacji

Komentarz Za pomocą stworzonej funkcji w pakiecie MATLAB udało się zaimplementować generator zmiennych losowych z rozkładu opisanego funkcją gęstości (12). Zastosowano metodę eliminacji, która została przedstawiona w przedmowie do Laboratorium 2. Wynik na rys. 11 porównano z histogramem uzyskanym w wyniku zastosowania metody odwróconej dystrybuanty. Stiwerdzono, że rezultat jest poprawny.

3.2 Zadanie 2 – Generator – metoda eliminacji (wariant podstawowy)

Zadanie polegało na zaimplementowaniu generatora generującego liczby losowe z rozkładu o gęstości prawdopodobieńnstwa odcinkowo stałej z użyciem metody eliminacji w wariancie podstawowym:

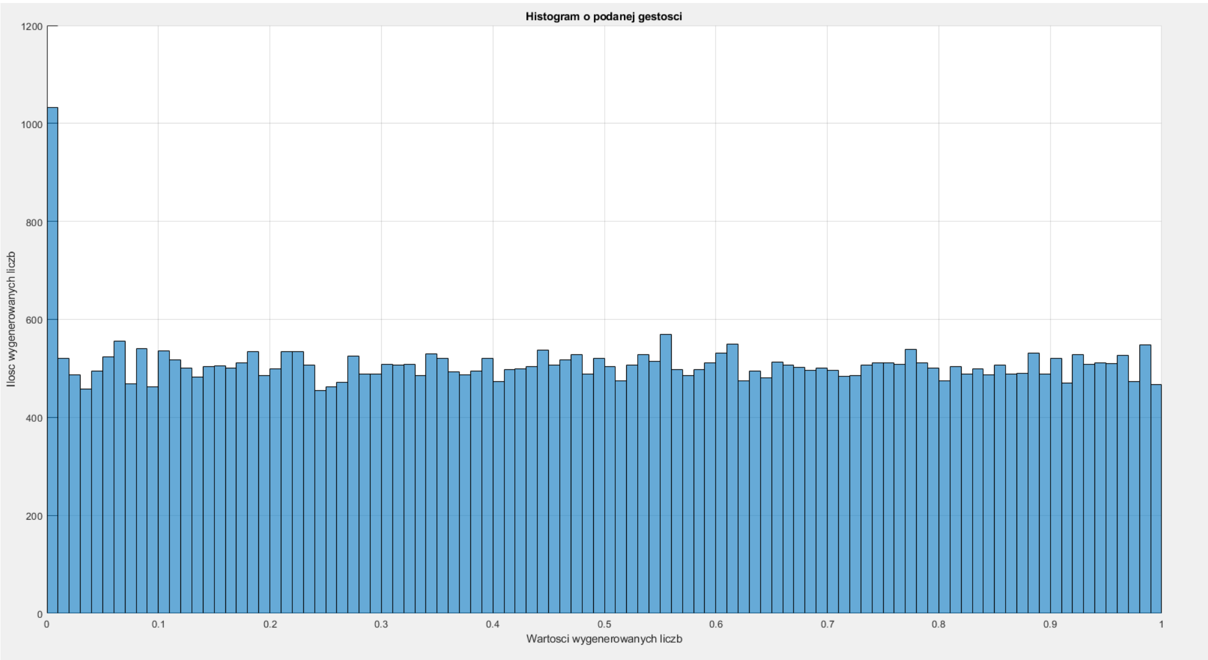
$$f(x) = \begin{cases} 50 & \text{dla } x \in (0, \frac{1}{100}] \\ c & \text{dla } x \in (\frac{1}{100}, 1] \end{cases} \tag{13}$$

Wyznaczenie stałej c polegało na skorzystaniu z własności funkcji gęstości.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \frac{50}{100} + c\frac{99}{100} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{50}{99}$$

Zatem rozkład ma funkcję gęstości prawdopodobieństwa opisaną równaniem:

$$f(x) = \begin{cases} 50 & \text{dla } x \in (0, \frac{1}{100}] \\ \frac{50}{99} & \text{dla } x \in (\frac{1}{100}, 1] \end{cases} \tag{14}$$



Rysunek 12: Histogram wylosowanych liczb - metoda eliminacji

Komentarz Za pomocą stworzonej funkcji w pakiecie MATLAB udało się zaimplementować generator zmiennych losowych z rozkładu opisanego funkcją gęstości (13). Zastosowano metodę eliminacji, która została przedstawiona w przedmowie do Laboratorium 2. Zaletą metody eliminacji jest brak konieczności analitycznego bądź numerycznego wyliczania dystrybuanty odwrotnej (prostota algorytmu). Przy użyciu dystrybuanty odwrotnej trywialne byłoby generowanie liczb z rozkładu o gęstości (13). Metoda odrzucania natomiast nie nadaje się w tym przypadku (rys. 12) do generowania zmiennych losowych, gdyż

$$P(X < 0.01) \neq \frac{1}{2},$$

co jest sprzeczne z zadaną funkcją gęstości.

3.3 Zadanie 3 – Generator – metoda eliminacji (wariant podstawowy)

Zadanie polegało na zaimplementowaniu generatora generującego liczby losowe z rozkładu o gęstości prawdopodobieńnstwa z użyciem metody eliminacji w wariancie podstawowym:

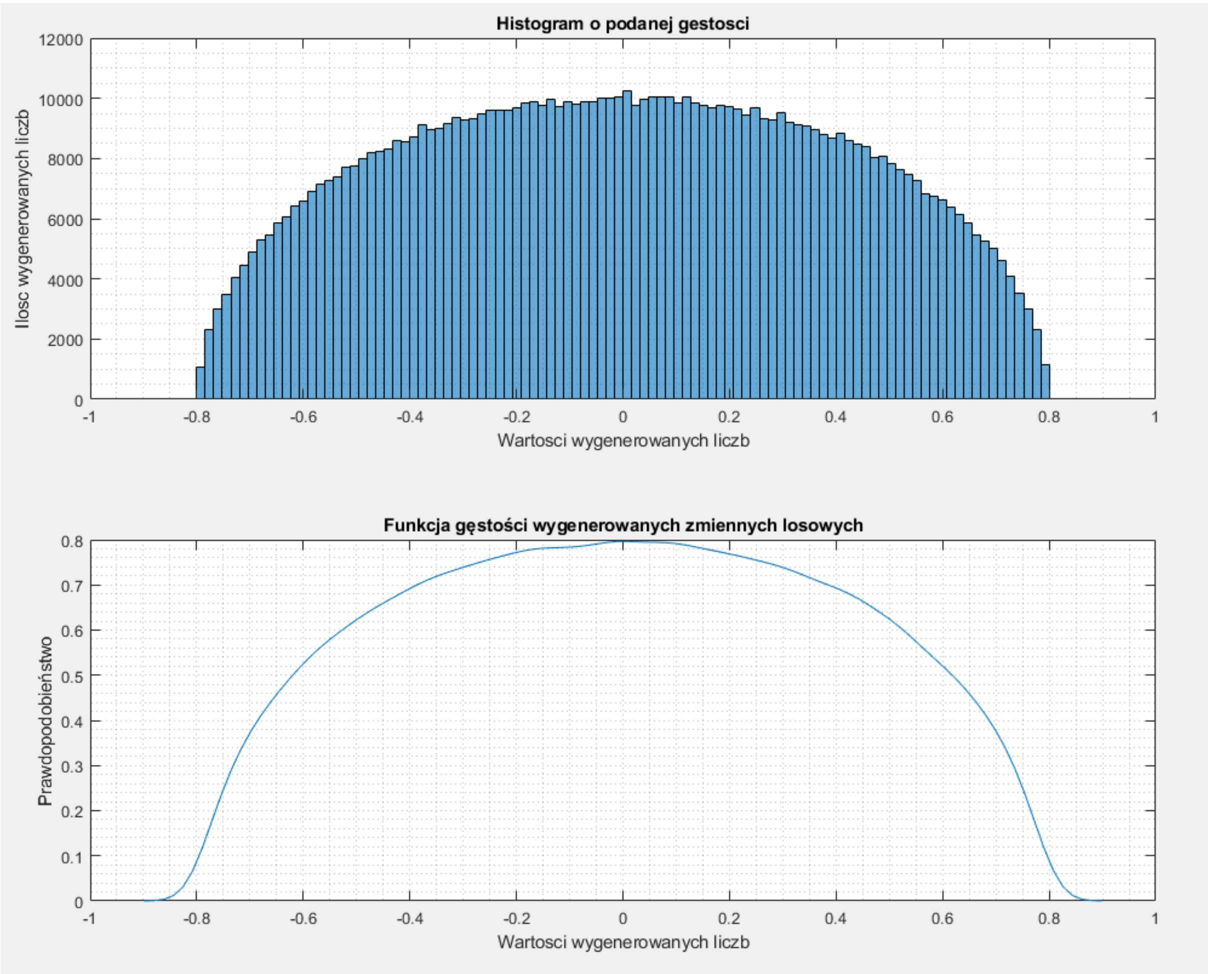
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2} & \text{dla } x \in (-r, r) \\ 0 & \text{dla } x \notin (-r, r) \end{cases} \tag{15}$$

Promień okręgu wyznaczony został z własności funkcji gęstości prawdopodobieństwa (15).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dt = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 = 1 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Zmienne generowane są z następujących rozkładów jednostajnych:

- $U_1 \sim \mathbb{U}[-r, r]$
- $U_2 \sim \mathbb{U}[0, r]$



Rysunek 13: Histogram i funkcja gęstości - metoda eliminacji

Komentarz Za pomocą generatora liczb z rozkładu jednostajnego oraz metody eliminacji udało się zaimplementować generator liczb z rozkładu przypominającego półokrąg (15). Na rys. 13 widać histogram wygenerowanych próbek oraz funkcję gęstości wyreśloną na ich podstawie. W pełni efekt zgadza się z założeniem.

3.4 Zadanie 4 – Generator zmiennych losowych z rozkładu Gaussa

W celu losowania zmiennych pomocniczych dla generatora liczb z rozkładu normalnego zastosowano rozkład Laplace'a zadany gęstością prawdopodobieństwa.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x} & \text{dla } x \in [0, \infty) \\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{dla } x < 0 \end{cases} \tag{16}$$

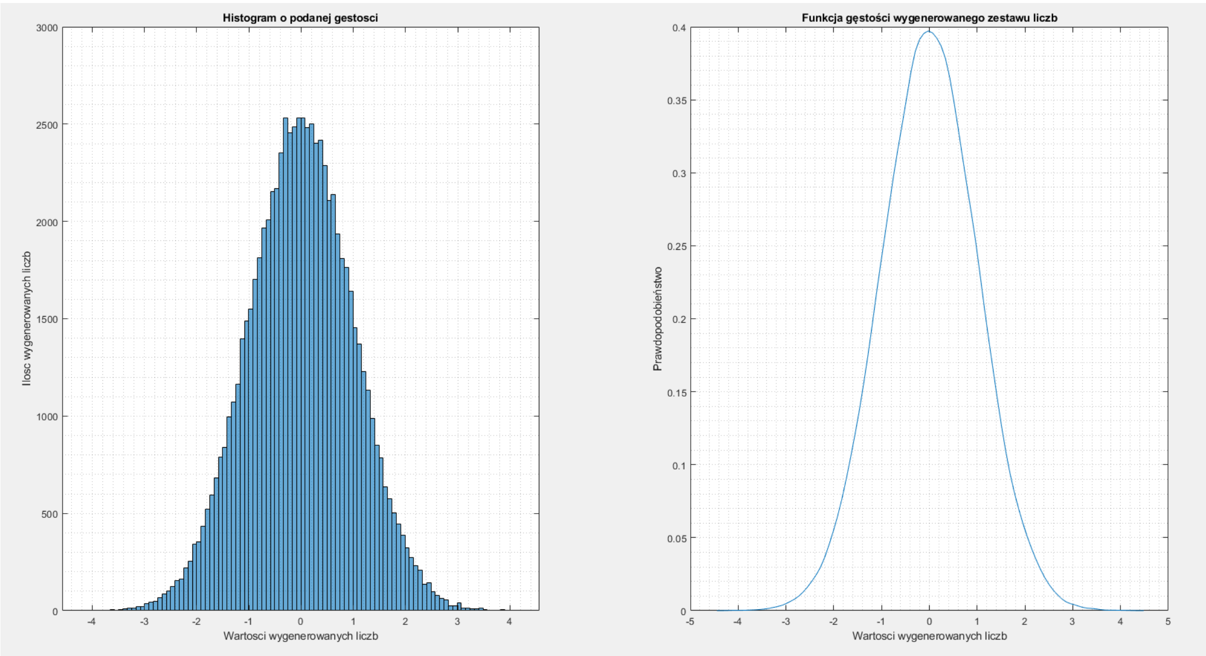
Warunkiem poprawności działania generatora jest spełnienie warunku

$$f(x) \leq c \cdot g(x), c = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}$$

gdzie c jest stałą dostosowującą rozkład pomocniczy. W celu wylosowania zmiennych o rozkładzie normalnym należy wygenerować zmienną z rozkładu Laplace'a V oraz zmienną z rozkładu jednostajnego U z przedziału [0,1].

Generator korzysta z następującego warunku akceptacji:

$$|V| \leq \sqrt{-2lnU} + 1$$

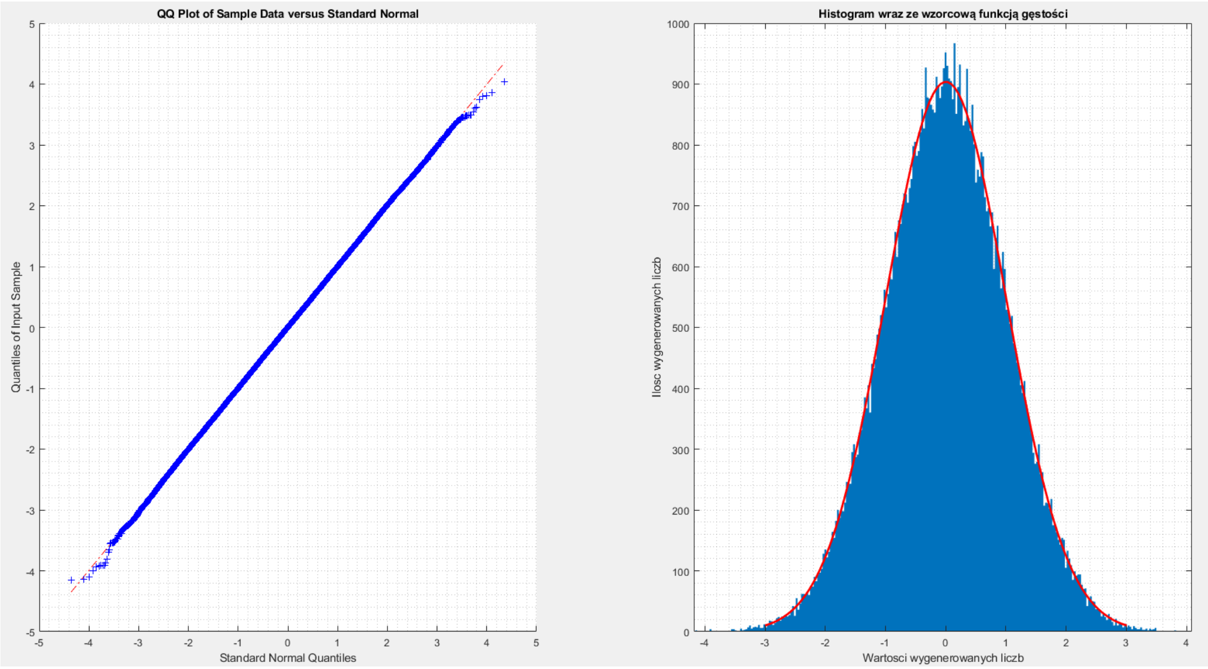


Rysunek 14: Histogram i funkcja gęstości - rozkład Gaussa

Komentarz Za pomocą generatora liczb z rozkładu jednostajnego oraz Laplace'a z wykorzystaniem metody opartej na eliminacji udało się stworzyć generator generujący zmienne losowe z rozkładu normalnego. Funkcja gęstości danych (rys. 14) jest bliska funkcji gęstości rozkładu Gaussa $\mathbb{N}(0,1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{17}$$

W celu sprawdzenia poprawności generowanego zestawu i jego zgodności z rozkładem normalnym przeprowadzono porównanie histogramu ze wzorcową funckją gęstości, a także wyrysowano wykres kwantyl–kwantyl (rys. 15). Stwierdzono, że rozkład z pewnym poziomem istotności jest rozkładem normalnym. Graficznie zatem udowodniono normalność rozkładu. Możliwe jest także analityczne przeprowadzenie testu np. z wykorzystaniem testowania hipotez w teście normalności Shapiro-Wilka [1].



Rysunek 15: Histogram i funkcja gęstości - rozkład Gaussa

3.5 Zadanie 5 - Podsumowanie

Własności metody odrzucania:

- do generowania liczb nie jest konieczne wyznaczanie dystrybuanty
- nie jest konieczne wyznaczanie funkcji odwrotnej, co niekiedy jest niemożliwe
- istnieje możliwość generowania liczb z dowolnego rozkładu
- słabe działanie metody w przypadku rozkładów skupionych – jak w zadaniu 2
- wymaga się znajomości funkcji gęstości w analiycznej postaci, dzięki czemu możliwe jest stworzenie warunku akceptacji bądź odrzucania
- konieczne jest użycie generatorów pomocniczych liczb np. o rozkładzie jednostajnym i Laplace'a – jak w zadaniu 4.
- metoda eliminacji w przeciwieństwie do dokładnej metody odwracania dystrybuanty jest metodą stratną.

Literatura

[1] Edmund Pluciński Plucińska, Agnieszka. *Probabilistyka: rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna, procesy stochastyczne.* Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 2000.

[2] Ryszard Zieliński Wieczorkowski, Robert. *Komputerowe generatory liczb losowy, statystyka matematyczna, procesy stochastyczne.* . Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1997.