Modelowanie i identyfikacja – laboratorium 2.
Generacja liczb losowych – metoda odrzucania

Paweł Wachel

Wymagania wstępne:

1. Wymagania wstępne z poprzednich zajęć[1].
2. Definicja funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz jej podstawowe własności (w tym warunki istnienia oraz związek z dystrybuantą).
3. Definicja i podstawowe własności wartości oczekiwanej i wariancji zmiennej losowej.
4. Ogólna koncepcja generacji liczb losowych metodą odrzucania – podstawowe własności metody.

Zadania do wykonania:

1. Zaimplementować omawiany algorytm na potrzeby generacji liczb z rozkładu o gęstości

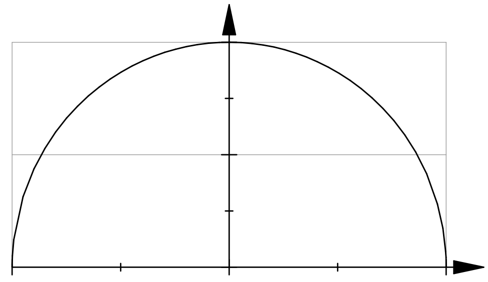
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x \in (-1, 0] \\ -x+1 & \text{dla} \quad x \in (0, 1] \\ 0 & \text{dla} \quad x \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty) \end{cases} .$$

2. Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 50 & \text{dla} \quad x \in \left(0, \frac{1}{100}\right] \\ c & \text{dla} \quad x \in \left(\frac{1}{100}, 1\right] \end{cases}$$

jest gęstością prawdopowobieństwa, wyznaczyć stałą c, zaimplementować generator oparty na metodzie odrzucania oraz przedyskutować uzyskane wyniki w kontekście wad i zalet omawianego podejścia.

3. Zaimplementować omawiany algorytm na potrzeby generacji liczb z rozkładu o gęstości w kształcie półokręgu i zerowej wartości oczekiwanej.



[1] Całkujemy wiedzę... przynajmniej do wakacji.

4. Wykorzystując opracowany na poprzednich zajęciach generator zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym (lub Laplace'a) zaimplementować metodę odrzucania na potrzeby generacji zmiennych losowych o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,1)$.

5. Na podstawie uzyskanych wyników symulacji określić podstawowe własności metody odrzucania.

Zadania dodatkowe:

1. Fakt (Box-Muller): Niech U_1 i U_2 będą dwoma niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $U\left[0,1\right]$. Wtedy zmienne losowe $Z_1 = \sqrt{-2\ln U_1}\cos\left(2\pi U_2\right)$ oraz $Z_2 = \sqrt{-2\ln U_1}\sin\left(2\pi U_2\right)$ są *niezależnymi* zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}\left(0,1\right)$. W oparciu o powyższe spostrzeżenie skonstruować generator liczb losowych o rozkładzie $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma\right)$ (gdzie μ i σ są zadanymi parametrami).

2. Przeprowadzić dyskusję własności statystycznych omawianej metody w oparciu o testy chi-kwadrat i Kołmogorowa.

3. Skonstruować funkcję w środowisku MATLAB umożliwiającą generację liczb losowych dla dowolnych gęstości prawdopodobieństwa o ograniczonym nośniku (gęstość prawdopodobieńtwa ma być argumentem funkcji).

Literatura:

1. Jakubowski, Jacek, Rafał Sztencel. Wstęp do teorii prawdopodobieństwa. Script, 2001.

2. Plucińska, Agnieszka, Edmund Pluciński. Probabilistyka: rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna, procesy stochastyczne. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2000.

3. Gajek, Lesław, Marek Kałuszka. Wnioskowanie statystyczne: modele i metody. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1993.

4. Wieczorkowski, Robert, Ryszard Zieliński. Komputerowe generatory liczb losowych. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1997.

5. Notatki z wykładu.