Funkcja wykładnicza

Definicja

Funkcja **wykładnicza** f **o podstawie** a
dana jest wzorem

$$f(x) = a^x$$

gdzie $a \in \mathbb{R}_+, a \neq 1$ i $x \in \mathbb{R}$.

Definicja

Funkcja **wykładnicza** f **o podstawie** a
dana jest wzorem

$$f(x) = a^x$$

gdzie $a \in \mathbb{R}_+, a \neq 1$ i $x \in \mathbb{R}$.

Uwagi:

- $a = 1$ dawałoby $f(x) = 1^x = 1$, czyli funkcję stałą, a nie wykładniczą.

Definicja

Funkcja **wykładnicza** f **o podstawie** a
dana jest wzorem

$$f(x) = a^x$$

gdzie $a \in \mathbb{R}_+, a \neq 1$ i $x \in \mathbb{R}$.

Uwagi:

- $a = 1$ dawałoby $f(x) = 1^x = 1$, czyli funkcję stałą, a nie wykładniczą.
- $a > 0$ gdyż np. dla $a = -1$ funkcja $f(x) = a^x$ nie istniałaby dla wszystkich x

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt[3]{-1} = -1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

Definicja

Funkcja **wykładnicza** f **o podstawie** a
dana jest wzorem

$$f(x) = a^x$$

gdzie $a \in \mathbb{R}_+, a \neq 1$ i $x \in \mathbb{R}$.

Uwagi:

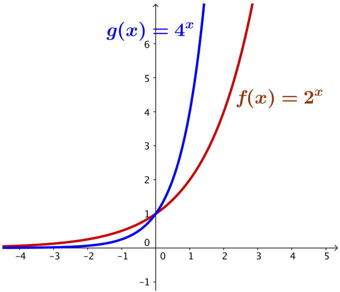
- $a = 1$ dawałoby $f(x) = 1^x = 1$, czyli funkcję stałą, a nie wykładniczą.
- $a > 0$ gdyż np. dla $a = -1$ funkcja $f(x) = a^x$ nie istniałaby dla wszystkich x

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt[3]{-1} = -1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

- Szczególny przypadek: $f(x) = e^x$, gdzie $e = 2.718281828\ldots$

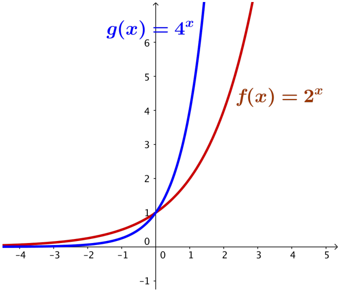
Wykresy $f(x) = a^x$

$a > 1$



Wykresy $f(x) = a^x$

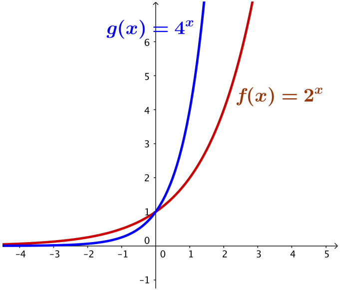
$a > 1$



rosnąca

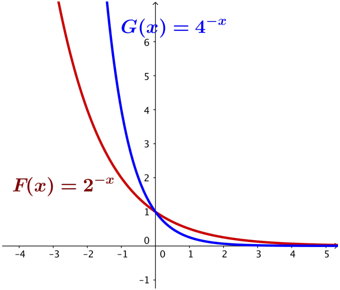
Wykresy $f(x) = a^x$

$a > 1$



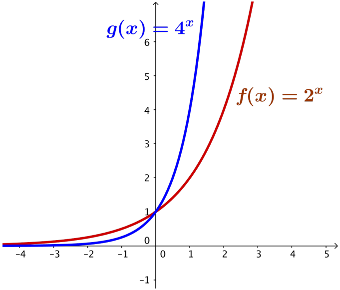
rosnąca

$0 < a < 1$



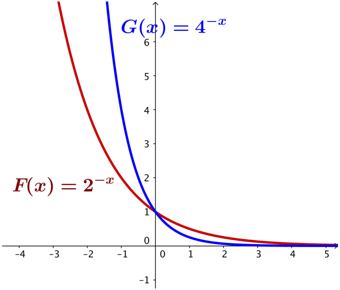
Wykresy $f(x) = a^x$

$a > 1$



rosnąca

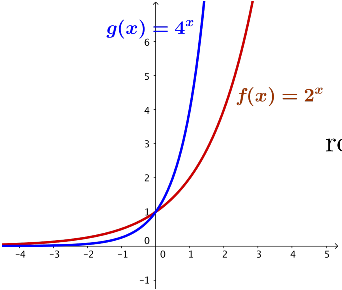
$0 < a < 1$



malejąca

Wykresy $f(x) = a^x$

$a > 1$



rosnąca

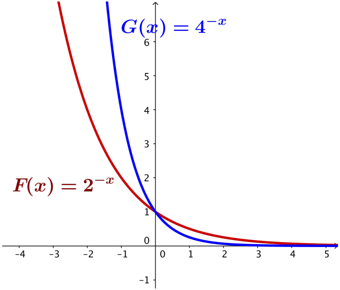
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$W_f = \mathbb{R}_+$$

różnowartościowa

$$f(0) = 1$$

$0 < a < 1$



malejąca

Równania i nierówności wykładnicze

Konsekwencja różnowartościowości

$$a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

Równania i nierówności wykładnicze

Konsekwencja różnowartościowości

$$a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

Konsekwencja monotoniczności

$$a^x \leq a^y \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y, \qquad \text{gdy } a > 1$$

Równania i nierówności wykładnicze

Konsekwencja różnowartościowości

$$a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

Konsekwencja monotoniczności

$$a^x \leq a^y \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y, \quad \text{gdy } a > 1$$

$$a^x \leq a^y \quad \Leftrightarrow \quad x \geq y, \quad \text{gdy } 0 < a < 1$$

- $f(x) = \sinh x$ (sinus hiperboliczny)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- $f(x) = \cosh x$ (cosinus hiperboliczny)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- $f(x) = \operatorname{tgh} x$ (tangens hiperboliczny)

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- $f(x) = \operatorname{ctgh} x$ (cotangens hiperboliczny)

$$\operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$



$$y = \frac{T}{\rho \cdot g} \cdot \cosh\left(\frac{\rho \cdot g \cdot x}{T}\right) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$


Newcastle St.Louis

Funkcja logarytmiczna

Logarytm

Definicja

Dla $x > 0, a > 0$ i $a \neq 1$ **logarytmem** x **przy podstawie** a nazywamy wykładnik potęgi y, do której należy podnieść liczbę a, żeby otrzymać x, tj.

$$y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y$$

Logarytm

Definicja

Dla $x > 0, a > 0$ i $a \neq 1$ **logarytmem** x **przy podstawie** a nazywamy wykładnik potęgi y, do której należy podnieść liczbę a, żeby otrzymać x, tj.

$$y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y$$

- $\log_{10} x = \log x$ –**logartym dziesiętny**

Logarytm

Definicja

Dla $x > 0, a > 0$ i $a \neq 1$ **logarytmem** x **przy podstawie** a nazywamy wykładnik potęgi y, do której należy podnieść liczbę a, żeby otrzymać x, tj.

$$y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y$$

- $\log_{10} x = \log x$ –**logartym dziesiętny**
- $\log_e x = \ln x$ – **logarytm naturalny**

Logarytm

$$\boxed{y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y}$$

Własności z definicji

Logarytm

$$\boxed{y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y}$$

Własności z definicji

Dla $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $x > 0$ i $y \in \mathbb{R}$

- $\log_a 1 = 0$

Logarytm

$$\boxed{y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y}$$

Własności z definicji

Dla $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $x > 0$ i $y \in \mathbb{R}$

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$

Logarytm

$$\boxed{y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y}$$

Własności z definicji

Dla $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $x > 0$ i $y \in \mathbb{R}$

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^y = y$

Logarytm

$$\boxed{y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y}$$

Własności z definicji

Dla $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $x > 0$ i $y \in \mathbb{R}$

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^y = y$
- $a^{\log_a x} = x$

Własności działań na logarytmach

$a, b > 0, a, b \neq 1, x > 0, y > 0, r \in \mathbb{R}.$

Własności działań na logarytmach

$a, b > 0, a, b \neq 1, x > 0, y > 0, r \in \mathbb{R}.$

1. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
   - dla $x, y < 0,$ $\quad \log_a (x \cdot y) = \log_a (-x) + \log_a (-y)$

Własności działań na logarytmach

$a, b > 0, a, b \neq 1, x > 0, y > 0, r \in \mathbb{R}$.

1. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
   - dla $x, y < 0$, $\quad \log_a (x \cdot y) = \log_a (-x) + \log_a (-y)$
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
   - dla $x, y < 0$, $\quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a (-x) - \log_a (-y)$

Własności działań na logarytmach

$a, b > 0, a, b \neq 1, x > 0, y > 0, r \in \mathbb{R}$.

1. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
   - dla $x, y < 0$, $\quad \log_a (x \cdot y) = \log_a (-x) + \log_a (-y)$
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
   - dla $x, y < 0$, $\quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a (-x) - \log_a (-y)$
3. $\log_a x^r = r \log_a x$
   - dla $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, r–parzysta, $\quad \log_a x^r = r \log_a |x|$

Własności działań na logarytmach

$a, b > 0, a, b \neq 1, x > 0, y > 0, r \in \mathbb{R}$.

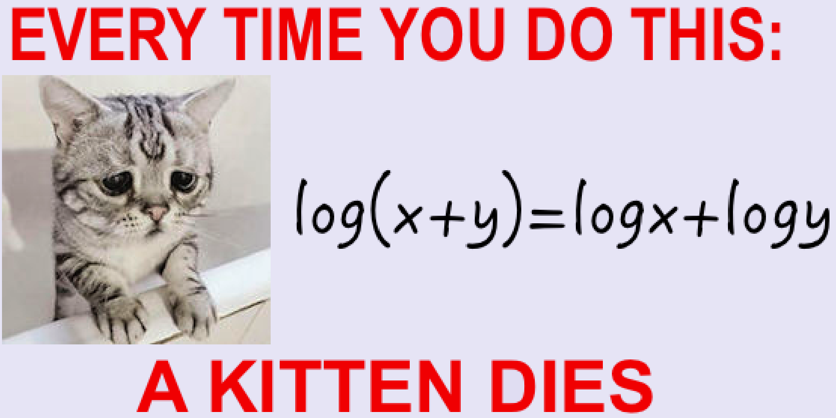
1. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
   - dla $x, y < 0$, $\quad \log_a (x \cdot y) = \log_a (-x) + \log_a (-y)$
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
   - dla $x, y < 0$, $\quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a (-x) - \log_a (-y)$
3. $\log_a x^r = r \log_a x$
   - dla $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, r–parzysta, $\quad \log_a x^r = r \log_a |x|$
4. $$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Własności działań na logarytmach

$a, b > 0, a, b \neq 1, x > 0, y > 0, r \in \mathbb{R}.$

1. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
   - dla $x, y < 0$, $\quad \log_a (x \cdot y) = \log_a (-x) + \log_a (-y)$
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
   - dla $x, y < 0$, $\quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a (-x) - \log_a (-y)$
3. $\log_a x^r = r \log_a x$
   - dla $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, r–parzysta, $\quad \log_a x^r = r \log_a |x|$
4. $$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$
5. $$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Własności działań na logarytmach



Funkcja logarytmiczna

Definicja

Niech $x > 0, a > 0$ i $a \neq 1$. Funkcję daną wzorem

$$f(x) = \log_a x$$

nazywamy **funkcją logarytmiczną przy podstawie a.**

Funkcja logarytmiczna

Definicja

Niech $x > 0, a > 0$ i $a \neq 1$. Funkcję daną wzorem

$$f(x) = \log_a x$$

nazywamy **funkcją logarytmiczną przy podstawie** a**.**

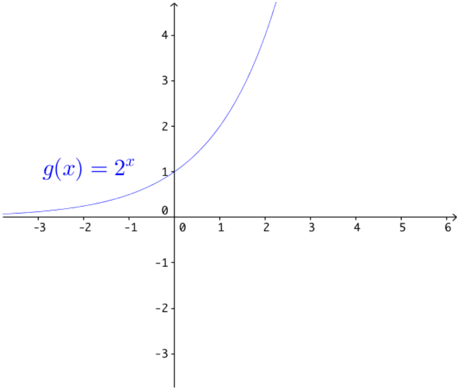
- $y = \log_{10} x = \log x$ –**logartym dziesiętny**
- $y = \log_e x = \ln x$ – **logarytm naturalny**

Wykres i własności

$f(x) = \log_a x$ **jest funkcją odwrotną do** $g(x) = a^x$

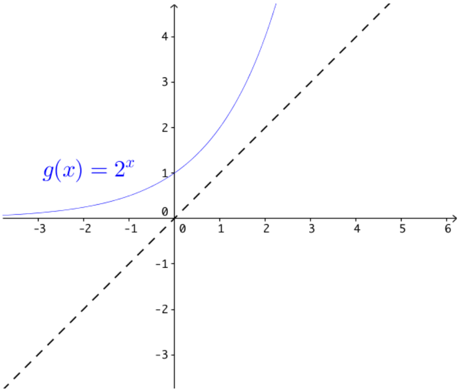
Wykres i własności

$f(x) = \log_a x$ **jest funkcją odwrotną do** $g(x) = a^x$



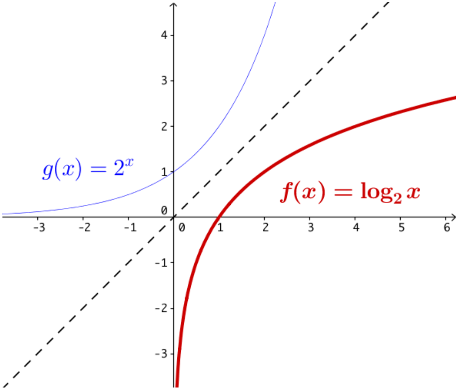
Wykres i własności

$$f(x) = \log_a x \textbf{ jest funkcją odwrotną do } g(x) = a^x$$



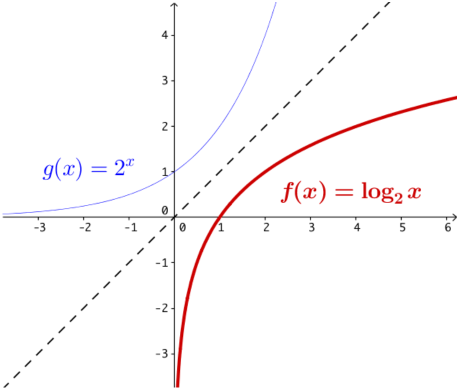
Wykres i własności

$$f(x) = \log_a x \textbf{ jest funkcją odwrotną do } g(x) = a^x$$



Wykres i własności

$f(x) = \log_a x$ **jest funkcją odwrotną do** $g(x) = a^x$



$\boxed{a > 1}$

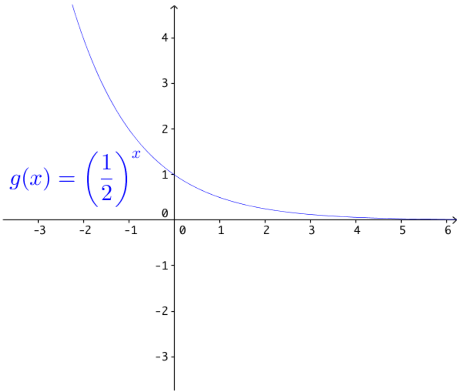
$D_f = \mathbb{R}_+$
$W_f = \mathbb{R}$
miejsce zerowe: $x = 1$
rosnąca
różnowartościowa

Wykres i własności

$f(x) = \log_a x$ **jest funkcją odwrotną do** $g(x) = a^x$

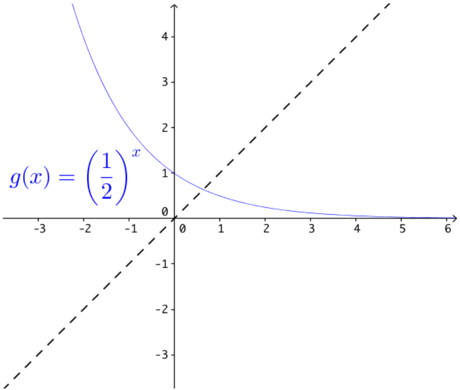
Wykres i własności

$f(x) = \log_a x$ **jest funkcją odwrotną do** $g(x) = a^x$



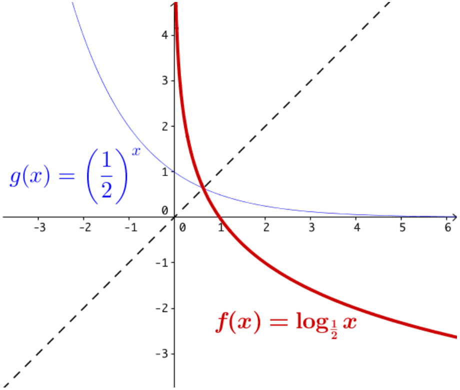
Wykres i własności

$$f(x) = \log_a x \text{ **jest funkcją odwrotną do** } g(x) = a^x$$



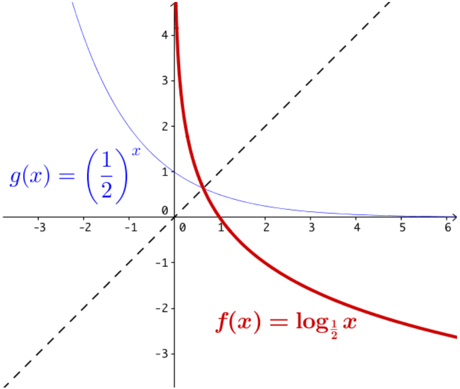
Wykres i własności

$$f(x) = \log_a x \textbf{ jest funkcją odwrotną do } g(x) = a^x$$



Wykres i własności

$f(x) = \log_a x$ **jest funkcją odwrotną do** $g(x) = a^x$



$\boxed{0 < a < 1}$

$D_f = \mathbb{R}_+$
$W_f = \mathbb{R}$
miejsce zerowe: $x = 1$
malejąca
różnowartościowa

Równania logarytmiczne

Własności do wykorzystania

- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$

Równania logarytmiczne

Własności do wykorzystania

- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- Funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa, więc

$$\log_a x = \log_a y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$$

Nierówności logarytmiczne

Własności do wykorzystania

- Jeżeli $a > 1$ funkcja jest rosnąca, więc

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < f(x) \leq g(x)$$

Nierówności logarytmiczne

Własności do wykorzystania

- Jeżeli $a > 1$ funkcja jest rosnąca, więc

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \quad \iff \quad 0 < f(x) \leq g(x)$$

- Jeżeli $0 < a < 1$ funkcja jest malejąca, więc

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \quad \iff \quad f(x) \geq g(x) > 0$$