Szeregi liczbowe

Nieskończony szereg liczbowy

Definicja

Niech $a_1, a_2, a_3, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem liczbowym. Jego sumę

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

nazywamy **szeregiem liczbowym**.

- $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – **wyrazy szeregu**
- a_n – **ogólny wyraz** szeregu (n–ty wyraz szeregu)

Czy ta suma jest skończona i jak ją znaleźć ?

- Tworzymy **ciąg sum częściowych** $\{S_n\}$ ...

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1\\
&S_2 = a_1 + a_2\\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3\\
&\ldots\\
&S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k
\end{aligned}$$

- ...i badamy granicę tego ciągu

Definicja (c.d.)

Jeżeli ciąg sum częściowych jest zbieżny do granicy właściwej S,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$$

wówczas szereg nazywamy **zbieżnym** i piszemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

Jeżeli granica S jest niewłaściwa lub nie istnieje, szereg nazywamy **rozbieżnym**.

Uwaga

Pominięcie pewnej liczby początkowych wyrazów szeregu nie zmienia jego zbieżności (lub rozbieżności).

Szeregi "specjalne"

Szereg geometryczny

$$\sum_{k=1}^{\infty} a\,q^{k-1} = a + aq + aq^2 + \dots$$

$$S_n = a \cdot \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$$

– Jeżeli $|q| < 1$, szereg geometryczny jest zbieżny i

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$$

– Jeżeli $|q| \geq 1$, szereg jest rozbieżny.

Szeregi "specjalne"

Szereg harmoniczny

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

– nie ma wzoru na S_n

n	S_n
1	1
2	$\frac{3}{2}$
3	$\frac{11}{6}$

n	S_n
10^3	≈ 7.49
10^4	≈ 9.79
10^6	≈ 14.39

n	S_n
10^{10}	≈ 23.60
10^{30}	≈ 69.65
10^{40}	≈ 92.68

– **szereg harmoniczny jest rozbieżny**

Szeregi "specjalne"

Szereg Dirichleta (uogólniony szereg harmoniczny)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

– zbieżny dla $p > 1$
– rozbieżny dla $p \leq 1$.

Zbieżność kombinacji liniowej szeregu

Jeżeli szeregi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ są zbieżne, wtedy

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

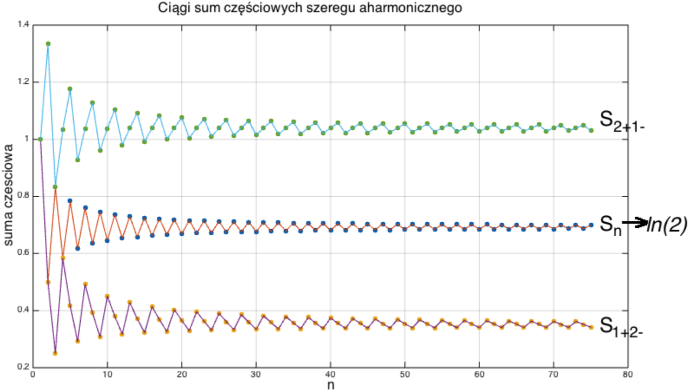
gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Nieskończone szeregi są po prostu dziwne!

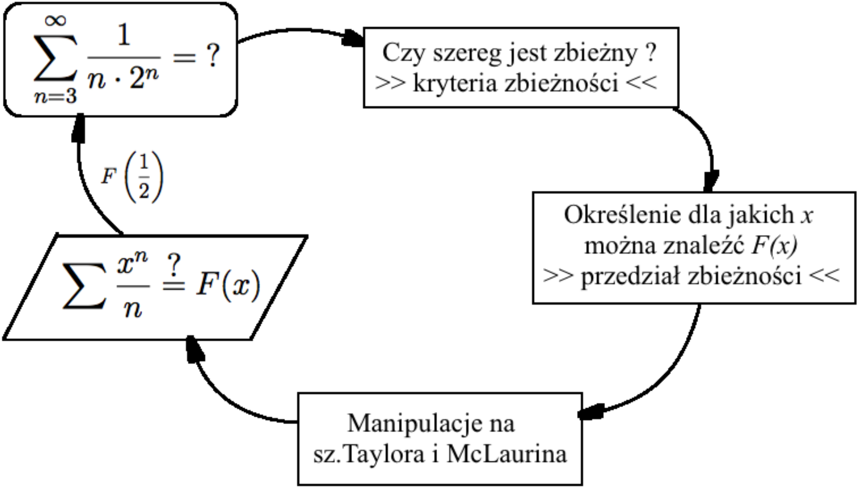
- Wyrazy szeregu zbieżnego można grupować w dowolny sposób.
- NIE WOLNO grupować wyrazów szeregu rozbieżnego
- NIE WOLNO zmieniać kolejności sumowania nieskończenie wielu wyrazów szeregu nawet dla szeregów zbieżnych.

- NIE WOLNO zmieniać kolejności sumowania nieskończenie wielu wyrazów szeregu nawet dla szeregów zbieżnych.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$



Plan pracy



$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = ?$
Czy szereg jest zbieżny ?
>> kryteria zbieżności <<
Określenie dla jakich x
można znaleźć $F(x)$
>> przedział zbieżności <<
Manipulacje na
sz.Taylora i McLaurina
$\sum \frac{x^n}{n} \stackrel{?}{=} F(x)$
$F\left(\frac{1}{2}\right)$

Pytanie dnia

Czy szereg jest zbieżny ?

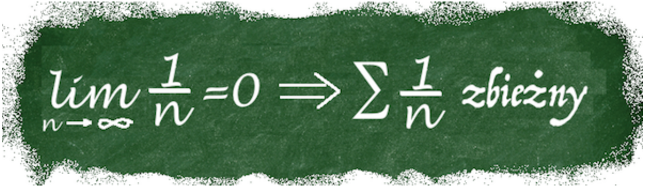
Warunek konieczny zbieżności

1. Jeżeli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
2. Jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.

Uwaga !

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ **NIE IMPLIKUJE** zbieżności $\sum a_n$!!!

Za każdym razem gdy piszesz ...



Pytanie dnia

Czy szereg jest zbieżny ?

Kryterium d'Alemberta (ilorazowe)

$\sum a_n$– szereg z $a_n > 0$. Niech

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

1. jeżeli $0 \leq r < 1$, to szereg jest zbieżny
2. jeżeli $r > 1$ (włącznie z $r = \infty$), to szereg jest rozbieżny
3. jeżeli $r = 1$, to kryterium nie rozstrzyga zbieżności

Pytanie: Kiedy używać Kryterium d'Alemberta ?
Odpowiedź: Gdy szereg zawiera wyrazy typu $n!, n^n$, lub b^n.

Pytanie dnia

Czy szereg jest zbieżny ?

Kryterium Cauchy'ego (pierwiastkowe)

$\sum a_n$– szereg z $a_n > 0$. Niech

$$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

1. jeżeli $0 \leq g < 1$, to szereg jest zbieżny
2. jeżeli $g > 1$ (włącznie z $g = \infty$), to szereg jest rozbieżny
3. jeżeli $g = 1$, to kryterium nie rozstrzyga zbieżności

Pytanie: Kiedy używać Kryterium Cauchy'ego ?
Odpowiedź: Gdy szereg zawiera wyrazy z n–tą potęgą

Pytanie dnia

Czy szereg jest zbieżny ?

Kryterium porównawcze I

$\sum a_n, \sum b_n$– nieskończone szeregi z $a_n, b_n \geq 0$. Jeżeli istnieje $N \in \mathbb{N}$ taka, że dla każdego $n > N$ spełniona jest nierówność

$$0 < b_n \leq a_n$$

1. oraz $\sum a_n$ jest zbieżny, to $\sum b_n$ jest również zbieżny
2. oraz $\sum b_n$ jest rozbieżny, to $\sum a_n$ jest również rozbieżny.

Pytanie dnia

Czy szereg jest zbieżny ?

Kryterium porównawcze II

$\sum a_n, \sum b_n$– nieskończone szeregi z $a_n, b_n > 0$. Niech

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

1. jeżeli $0 < L < \infty$ to oba szeregi są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne
2. jeżeli $L = 0$ i $\sum b_n$ jest zbieżny, to $\sum a_n$ jest również zbieżny
3. jeżeli $L = \infty$ i $\sum b_n$ jest rozbieżny, to $\sum a_n$ jest również rozbieżny

Kryterium całkowe

Jeżeli funkcja f jest nieujemna i nierosnąca dla $x \geq m$ oraz $a_k = f(k)$ dla $k = 1, 2, 3, \dots,$ wówczas

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k \quad \text{i} \quad \int_m^{\infty} f(x)\,dx$$

są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne

Uwaga !

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k \neq \int_m^{\infty} f(x)\,dx$$

Kryterium całkowe można wykorzystać do oszacowania sumy szeregu

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad R_n = S - S_n$$

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \le R_n \le \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \le S \le S_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

Szereg naprzemienny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \quad b_n > 0$$

Kryterium Leibniza

Jeżeli

1. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ oraz
2. $0 < b_{n+1} \leq b_n$

to szereg naprzemienny jest zbieżny.

Uwaga !

Kryterium Leibniza nie rozstrzyga rozbieżności.

Zbieżność bezwzględna i warunkowa

Niech szereg $\sum a_n$ będzie zbieżny.

- Jeżeli $\sum |a_n|$ jest zbieżny, to $\sum a_n$ nazywamy **bezwzględnie zbieżnym**.
- Jeżeli $\sum |a_n|$ jest rozbieżny, to $\sum a_n$ nazywamy **warunkowo zbieżnym**.

Uwaga

1. Jeżeli $\sum |a_n|$ jest zbieżny $\Longrightarrow \sum a_n$ jest zbieżny
2. Jeżeli $\sum a_n$ jest rozbieżny $\Longrightarrow \sum |a_n|$ jest rozbieżny

Wskazówki do testowania zbieżności szeregów

1. Zacznij od warunku koniecznego. Jeżeli $\lim a_n \neq 0$, szereg jest rozbieżny i robota skończona.
2. Czy to jest jeden ze "specjalnych" szeregów ?
   - geometryczny,
   - Dirichleta,
   - teleskopowy
3. Jeżeli n–ty wyraz zawiera $n!, n^n, b^n$, użyj kryterium d'Alemberta. Szereg z n w wykładniku to kandydat na kryterium Cauchy'ego.
4. Jeżeli n–ty wyraz jest funkcją wymierną z niewiadomą n (lub pierwiastkiem funkcji wymiernej), użyj jednego z kryteriów porównawczych, korzystając z szeregów wymienionych pkcie 2.
5. Jeżeli n–ty wyraz wygląda jak funkcja, którą da się scałkować, użyj kryterium całkowego.