Równania różniczkowe zwyczajne

Klasyfikacja równań różniczkowych

- Równania różniczkowe **zwyczajne** – równania różniczkowe zawierające pochodne nieznanej funkcji **jednej zmiennej**

Klasyfikacja równań różniczkowych

- Równania różniczkowe **zwyczajne** – równania różniczkowe zawierające pochodne nieznanej funkcji **jednej zmiennej**

$$y' = y^2 - x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 7x$$

Klasyfikacja równań różniczkowych

- Równania różniczkowe **zwyczajne** – równania różniczkowe zawierające pochodne nieznanej funkcji **jednej zmiennej**

$$y' = y^2 - x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 7x$$

- Równania różniczkowe **cząstkowe** – równania różniczkowe zawierające pochodne cząstkowe nieznanej funkcji **wielu zmiennych**

Klasyfikacja równań różniczkowych

- Równania różniczkowe **zwyczajne** – równania różniczkowe zawierające pochodne nieznanej funkcji **jednej zmiennej**

$$y' = y^2 - x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 7x$$

- Równania różniczkowe **cząstkowe** – równania różniczkowe zawierające pochodne cząstkowe nieznanej funkcji **wielu zmiennych**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Definicja

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

w którym niewiadomą jest funkcja $y(x)$ zmiennej x i w którym występuje pochodna rzędu n funkcji niewiadomej i nie występuje pochodna rzędu wyższego niż n.

Definicja

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

w którym niewiadomą jest funkcja $y(x)$ zmiennej x i w którym występuje pochodna rzędu n funkcji niewiadomej i nie występuje pochodna rzędu wyższego niż n.

Przykłady

Definicja

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

w którym niewiadomą jest funkcja $y(x)$ zmiennej x i w którym występuje pochodna rzędu n funkcji niewiadomej i nie występuje pochodna rzędu wyższego niż n.

Przykłady

- $y' = y^2 - x$ – r.r. pierwszego rzędu

Definicja

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

w którym niewiadomą jest funkcja $y(x)$ zmiennej x i w którym występuje pochodna rzędu n funkcji niewiadomej i nie występuje pochodna rzędu wyższego niż n.

Przykłady

- $y' = y^2 - x$ – r.r. pierwszego rzędu
- $\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} = \sin 7x$ – r.r. trzeciego rzędu

Definicja

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

w którym niewiadomą jest funkcja $y(x)$ zmiennej x i w którym występuje pochodna rzędu n funkcji niewiadomej i nie występuje pochodna rzędu wyższego niż n.

Przykłady

- $y' = y^2 - x$ – r.r. pierwszego rzędu
- $\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} = \sin 7x$ – r.r. trzeciego rzędu
- $x^2y'' = y^{(5)}$ – r.r. piątego rzędu

Cała procedura na prostym przykładzie...

Cała procedura na prostym przykładzie...

- Szukamy funkcji $y(x)$ spełniającej równanie różniczkowe (w każdym pkcie przedziału I), np.

$$y'(x) = f(x)$$

Cała procedura na prostym przykładzie...

- Szukamy funkcji $y(x)$ spełniającej równanie różniczkowe (w każdym pkcie przedziału I), np.

$$y'(x) = f(x)$$

- Każda funkcja pierwotna $F(x)$ funkcji $f(x)$ w przedziale I spełnia to równanie

$$y(x) = F(x) + C \tag{1}$$

Cała procedura na prostym przykładzie...

- Szukamy funkcji $y(x)$ spełniającej równanie różniczkowe (w każdym pkcie przedziału I), np.
$$y'(x) = f(x)$$
- Każda funkcja pierwotna $F(x)$ funkcji $f(x)$ w przedziale I spełnia to równanie
$$y(x) = F(x) + C \tag{1}$$
- Zbiór funkcji (1) nazywamy *rozwiązaniem ogólnym* (*całką ogólną*)

Cała procedura na prostym przykładzie...

- Szukamy funkcji $y(x)$ spełniającej równanie różniczkowe (w każdym pkcie przedziału I), np.

$$y'(x) = f(x)$$

- Każda funkcja pierwotna $F(x)$ funkcji $f(x)$ w przedziale I spełnia to równanie

$$y(x) = F(x) + C \tag{1}$$

- Zbiór funkcji (1) nazywamy *rozwiązaniem ogólnym* (*całką ogólną*)
- Jeżeli dodatkowo narzucimy warunek $y(x_0) = y_0$, tzw. *warunek początkowy*, to

$$C = y_0 - F(x_0)$$

Cała procedura na prostym przykładzie...

- Szukamy funkcji $y(x)$ spełniającej równanie różniczkowe (w każdym pkcie przedziału I), np.

$$y'(x) = f(x)$$

- Każda funkcja pierwotna $F(x)$ funkcji $f(x)$ w przedziale I spełnia to równanie

$$y(x) = F(x) + C \tag{1}$$

- Zbiór funkcji (1) nazywamy *rozwiązaniem ogólnym* (*całką ogólną*)
- Jeżeli dodatkowo narzucimy warunek $y(x_0) = y_0$, tzw.*warunek początkowy*, to

$$C = y_0 - F(x_0)$$

wówczas funkcja spełniająca równanie (1) i warunek początkowy jest tylko jedna, jest to tzw. *rozwiązanie szczególne*

$$y(x) = F(x) + y_0 - F(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$$

Definicja

Rozwiązaniem (całką) równania różniczkowego na zbiorze X nazywamy funkcję spełniającą to równanie w każdym punkcie tego zbioru.

Definicja

Rozwiązaniem (całką) równania różniczkowego <u>na zbiorze X</u> nazywamy funkcję spełniającą to równanie w każdym punkcie tego zbioru.

e.g. $y' = 2 - y$

Definicja

Rozwiązaniem (całką) równania różniczkowego na zbiorze X nazywamy funkcję spełniającą to równanie w każdym punkcie tego zbioru.

e.g. $y' = 2 - y$

- $y(x) = 2$

Definicja

Rozwiązaniem (całką) równania różniczkowego na zbiorze X nazywamy funkcję spełniającą to równanie w każdym punkcie tego zbioru.

e.g. $y' = 2 - y$

- $y(x) = 2$
- $y(x) = 2 + e^{-x}$

Definicja

Rozwiązaniem (całką) równania różniczkowego na zbiorze X nazywamy funkcję spełniającą to równanie w każdym punkcie tego zbioru.

e.g. $y' = 2 - y$

- $y(x) = 2$
- $y(x) = 2 + e^{-x}$
- $y(x) = 2 - 5e^{-x}$

Definicja

Rozwiązaniem (całką) równania różniczkowego na zbiorze X nazywamy funkcję spełniającą to równanie w każdym punkcie tego zbioru.

e.g. $y' = 2 - y$

- $y(x) = 2$
- $y(x) = 2 + e^{-x}$
- $y(x) = 2 - 5e^{-x}$
- $y(x) = 2 + \frac{7}{3}e^{-x}$

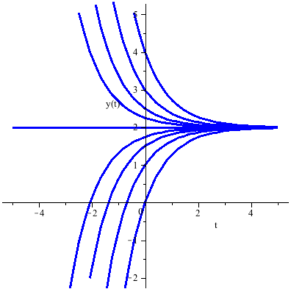
Definicja

Rozwiązaniem (całką) równania różniczkowego na zbiorze X nazywamy funkcję spełniającą to równanie w każdym punkcie tego zbioru.

Wykres każdego rozwiązania nazywamy **krzywą całkową**.

e.g. $y' = 2 - y$

- $y(x) = 2$
- $y(x) = 2 + e^{-x}$
- $y(x) = 2 - 5e^{-x}$
- $y(x) = 2 + \frac{7}{3}e^{-x}$



Definicja

Rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną) równania $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ w obszarze istnienia i jednoznaczności rozwiązań nazywamy rozwiązanie tego równania zależne od n dowolnych stałych $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takie, że podstawiając dowolne wartości za $C_1, \ldots, C_n$ otrzymamy wszystkie znajdujące się w tym obszarze krzywe całkowe i tylko te krzywe.

Definicja

Rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną) równania $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ w obszarze istnienia i jednoznaczności rozwiązań nazywamy rozwiązanie tego równania zależne od n dowolnych stałych $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takie, że podstawiając dowolne wartości za $C_1, \ldots, C_n$ otrzymamy wszystkie znajdujące się w tym obszarze krzywe całkowe i tylko te krzywe.

Definicja

Podstawiając za $C_1, \ldots, C_n$ konkretne wartości otrzymamy tzw. **rozwiązanie szczególne (całkę szczególną)** równania $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Przykład

- Równanie różniczkowe

$$y' = 2 - y$$

- Rozwiązanie ogólne

$$y(x) = 2 - Ce^{-x}$$

- Rozwiązania szczególne

$$y(x) = 2, \quad y(x) = 2 - 25e^{-x}, \quad y(x) = 2 + e^{-x}, \quad y(x) = 2 - \pi e^{-x}$$

- Nie każde równanie ma rozwiązanie, e.g. $e^{y'} = 0$

- Nie każde równanie ma rozwiązanie, e.g. $e^{y'} = 0$
- Nie każde równanie da się rozwiązać analitycznie, e.g. $y' = y^2 - x$

- Nie każde równanie ma rozwiązanie, e.g. $e^{y'} = 0$
- Nie każde równanie da się rozwiązać analitycznie, e.g. $y' = y^2 - x$
- Nie każde rozwiązanie równania można otrzymać z rozwiązania ogólnego

- Nie każde równanie ma rozwiązanie, e.g. $e^{y'} = 0$
- Nie każde równanie da się rozwiązać analitycznie, e.g. $y' = y^2 - x$
- Nie każde rozwiązanie równania można otrzymać z rozwiązania ogólnego

$$y' = x\sqrt{y}$$

- Nie każde równanie ma rozwiązanie, e.g. $e^{y'} = 0$
- Nie każde równanie da się rozwiązać analitycznie, e.g. $y' = y^2 - x$
- Nie każde rozwiązanie równania można otrzymać z rozwiązania ogólnego

$$y' = x\sqrt{y}$$

$$\text{Rozwiązanie ogólne: } \sqrt{y(x)} = \frac{x^2}{4} + C$$

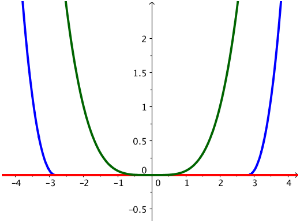
- Nie każde równanie ma rozwiązanie, e.g. $e^{y'} = 0$
- Nie każde równanie da się rozwiązać analitycznie, e.g. $y' = y^2 - x$
- Nie każde rozwiązanie równania można otrzymać z rozwiązania ogólnego

$$y' = x\sqrt{y}$$

$$\text{Rozwiązanie ogólne: } \sqrt{y(x)} = \frac{x^2}{4} + C$$

- $C = 0$
- $C = -2$
- $C = ?,\ y(x) \equiv 0$

(rozwiązanie osobliwe)



Definicja

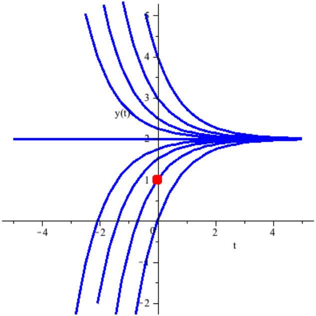
Zagadnieniem Cauchy'ego dla równania różniczkowego rzędu n nazywamy zagadnienie wyznaczenia rozwiązania szczególnego danego równania, które spełnia **warunki początkowe**

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

przy czym liczby $x_0, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, zwane **wartościami początkowymi**, są dane.

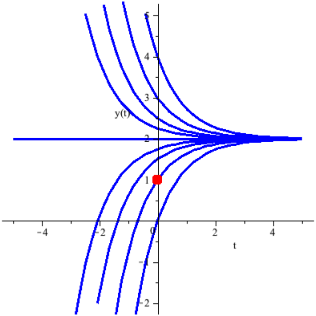
e.g. $$\begin{cases} y' = 2 - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e.g. $\begin{cases} y' = 2 - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$



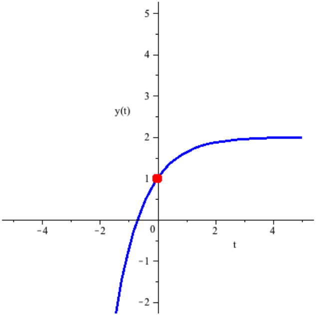
$$\Rightarrow \begin{cases} y_o(x) = 2 - Ce^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e.g. $\begin{cases} y' = 2 - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$



$\Rightarrow \begin{cases} y_o(x) = 2 - Ce^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

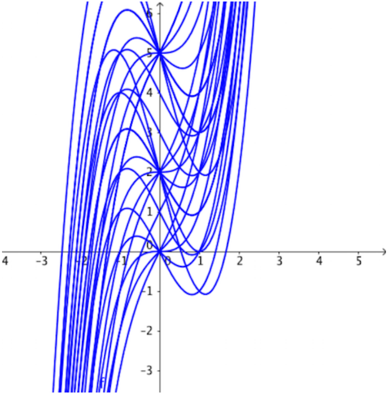
$\Rightarrow \boxed{y_s(x) = 2 - e^{-x}}$



e.g. $$\begin{cases} y'' = 6x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

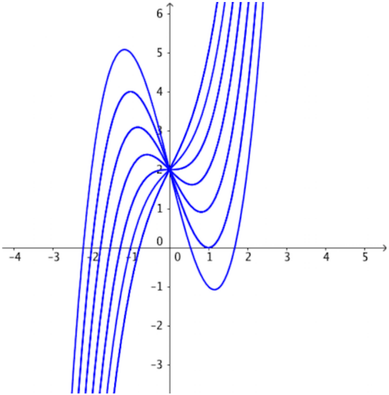
e.g. $\begin{cases} y'' = 6x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow y_o(t) = x^3 + C_1 x + C_2$



e.g. $\begin{cases} y'' = 6x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

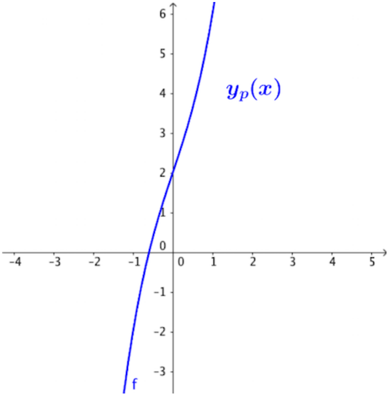
$\Rightarrow y_o(t) = x^3 + C_1 x + C_2$



e.g. $\begin{cases} y'' = 6x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow y_o(t) = x^3 + C_1 x + C_2$$

$$\Rightarrow \boxed{y_s(x) = x^3 + 3x + 2}$$

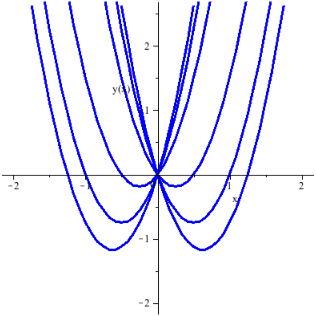


- Zagadnienie Cauchy'ego nie zawsze ma rozwiązanie

$$\begin{cases} x \cdot y' = y + 3x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

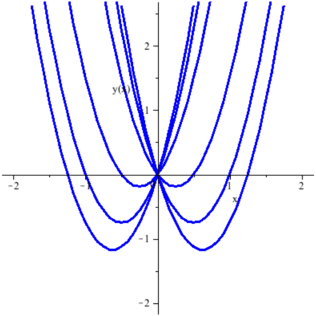
- Zagadnienie Cauchy'ego nie zawsze ma rozwiązanie

$$\begin{cases} x \cdot y' = y + 3x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_o(x) = x(3x + C)$$



- Zagadnienie Cauchy'ego nie zawsze ma rozwiązanie

$$\begin{cases} x \cdot y' = y + 3x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_o(x) = x(3x + C)$$



- Rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego nie zawsze jest jednoznaczne, np. $y(0) = 0$ w powyższym przykładzie

Równania różniczkowe pierwszego rzędu

Definicja

Równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (\text{lub} \quad y' = f(x, y) \;\; ; \textit{postać normalna}) \tag{2}$$

gdzie $y(x)$ jest funkcją niewiadomą zmiennej x.

Zagadnienie Cauchy'ego (zagadnienie początkowe)

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Definicje

1. **Rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną) równania** (2) na przedziale I nazywamy każdą funkcję zależną od stałej C

$$y = y(x, C) \qquad \text{(lub w postaci uwikłanej } h(x, y, C) = 0\text{)}$$

która spełnia równanie (2) dla każdego $x \in I$.

Definicje

1. **Rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną) równania** (2) na przedziale I nazywamy każdą funkcję zależną od stałej C

$$y = y(x, C) \qquad \text{(lub w postaci uwikłanej } h(x, y, C) = 0\text{)}$$

   która spełnia równanie (2) dla każdego $x \in I$.

2. **Rozwiązaniem szczególnym (całką szczególną) równania** (2) na przedziale I nazywamy każdą funkcję $y = y(x)$ (lub $h(x, y) = 0$), która spełnia równanie (2) dla każdego $x \in I$

Definicje

1. **Rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną) równania** (2) na przedziale I nazywamy każdą funkcję zależną od stałej C

$$y = y(x, C) \qquad \text{(lub w postaci uwikłanej } h(x, y, C) = 0\text{)}$$

   która spełnia równanie (2) dla każdego $x \in I$.

2. **Rozwiązaniem szczególnym (całką szczególną) równania** (2) na przedziale I nazywamy każdą funkcję $y = y(x)$ (lub $h(x, y) = 0$), która spełnia równanie (2) dla każdego $x \in I$

3. Jeżeli zagadnienie Cauchy'ego ma jednoznaczne rozwiązanie w punkcie (x_0, y_0), to ten punkt nazywamy **punktem jednoznaczności**.

Definicje

1. **Rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną) równania** (2) na przedziale I nazywamy każdą funkcję zależną od stałej C

$$y = y(x, C) \qquad \text{(lub w postaci uwikłanej } h(x, y, C) = 0)$$

   która spełnia równanie (2) dla każdego $x \in I$.

2. **Rozwiązaniem szczególnym (całką szczególną) równania** (2) na przedziale I nazywamy każdą funkcję $y = y(x)$ (lub $h(x, y) = 0$), która spełnia równanie (2) dla każdego $x \in I$

3. Jeżeli zagadnienie Cauchy'ego ma jednoznaczne rozwiązanie w punkcie (x_0, y_0), to ten punkt nazywamy **punktem jednoznaczności**.

4. Rozwiązanie $y = y(x)$ na przedziale I, którego każdy punkt $(x, y(x))$ jest **punktem niejednoznaczności** nazywamy **rozwiązaniem osobliwym**.

Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania $y' = f(x,y)$

Jeżeli funkcja $f(x,y)$ oraz jej pochodna cząstkowa $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ są ciągłe na obszarze $D \subset R^2$ oraz $(x_0, y_0) \in D$, to zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie

Interpretacja geometryczna r. r. pierwszego rzędu

$$y' = f(x, y)$$

Interpretacja geometryczna r. r. pierwszego rzędu

$$y' = f(x, y)$$

- Pochodna funkcji $y(x)$ jest określona w każdym punkcie (x_0, y_0)

Interpretacja geometryczna r. r. pierwszego rzędu

$$y' = f(x, y)$$

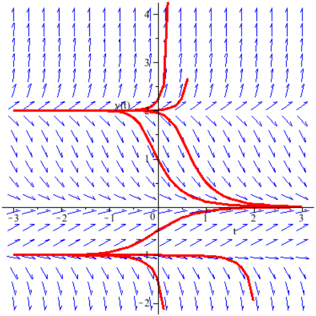
- Pochodna funkcji $y(x)$ jest określona w każdym punkcie (x_0, y_0)
- Czyli współczynniki kierunkowe stycznych do $y(x)$ w każdym punkcie są dane.

Interpretacja geometryczna r. r. pierwszego rzędu

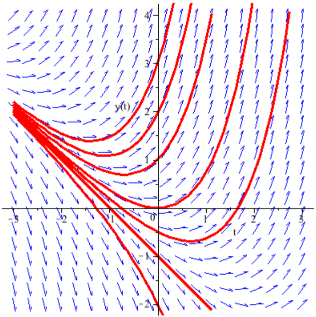
$$y' = f(x, y)$$

- Pochodna funkcji $y(x)$ jest określona w każdym punkcie (x_0, y_0)
- Czyli współczynniki kierunkowe stycznych do $y(x)$ w każdym punkcie są dane.
- W każdym punkcie możemy te styczne narysować jako odcinki o długości 1 i środku w każdym z tych punktów $\longrightarrow$ tzw. **pole kierunków**

Interpretacja geometryczna r. r. pierwszego rzędu



$$y' = y(y+1)(y-2)$$



$$y' = y + x$$

Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Definicja

Równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{3}$$

o funkcji niewiadomej $y(x)$ nazywamy **równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych**.

Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Definicja

Równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{3}$$

o funkcji niewiadomej $y(x)$ nazywamy **równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych**.

Przykłady

$$\frac{dy}{dx} = 2y(x+1),$$

Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Definicja

Równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{3}$$

o funkcji niewiadomej $y(x)$ nazywamy **równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych**.

Przykłady

$$\frac{dy}{dx} = 2y(x+1), \quad y' = \frac{y}{x},$$

Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Definicja

Równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{3}$$

o funkcji niewiadomej $y(x)$ nazywamy **równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych**.

Przykłady

$$\frac{dy}{dx} = 2y(x+1), \quad y' = \frac{y}{x}, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Rozwiązywanie r.r. o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Rozwiązywanie r.r. o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

- zapisujemy w postaci różniczkowej (rozdzielamy zmienne)

$$h(y)dy = g(x)dx$$

Rozwiązywanie r.r. o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

- zapisujemy w postaci różniczkowej (rozdzielamy zmienne)

$$h(y)dy = g(x)dx$$

- całkujemy stronami

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

Rozwiązywanie r.r. o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

- zapisujemy w postaci różniczkowej (rozdzielamy zmienne)

$$h(y)dy = g(x)dx$$

- całkujemy stronami

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

- jeżeli H i G są odpowiednio funkcjami pierwotnymi h i g, to

$$H(y(x)) = G(x) + C$$

Równania różniczkowe liniowe pierwszego rzędu

Definicja

Równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x) \tag{4}$$

Równania różniczkowe liniowe pierwszego rzędu

Definicja

Równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x) \tag{4}$$

- Jeśli $q(x) \equiv 0$, to równanie (4) nazywamy **jednorodnym** (ozn. RJ)
- Jeśli $q(x) \neq 0$, to nazywamy je **niejednorodnym** (ozn. RN)

Równania różniczkowe liniowe pierwszego rzędu

Definicja

Równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x) \tag{4}$$

- Jeśli $q(x) \equiv 0$, to równanie (4) nazywamy **jednorodnym** (ozn. RJ)
- Jeśli $q(x) \neq 0$, to nazywamy je **niejednorodnym** (ozn. RN)

Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

Jeżeli funkcje $p(x)$ i $q(x)$ są ciągłe na przedziale (a, b), $x_0 \in (a, b)$ oraz $y_0 \in R$, to zagadnienie początkowe: $y' + p(x)y = q(x)$, $y(x_0) = y_0$, ma dokładnie jedno rozwiązanie określone na przedziale (a, b).

Rozwiązywanie r.r. liniowych pierwszego rzędu

Metoda czynnika całkującego

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

Rozwiązywanie r.r. liniowych pierwszego rzędu

Metoda czynnika całkującego

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

- szukamy funkcji $u(x)$ takiej, że lewa strona równania

$$u(y' + p \cdot y) = (uy)'$$

Rozwiązywanie r.r. liniowych pierwszego rzędu

Metoda czynnika całkującego

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

- szukamy funkcji $u(x)$ takiej, że lewa strona równania

$$u(y' + p \cdot y) = (uy)'$$

- taka funkcja u nazywa się **czynnikiem całkującym**

$$(uy)' = uq$$

Rozwiązywanie r.r. liniowych pierwszego rzędu

Metoda czynnika całkującego

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

- szukamy funkcji $u(x)$ takiej, że lewa strona równania

$$u(y' + p \cdot y) = (uy)'$$

- taka funkcja u nazywa się **czynnikiem całkującym**

$$(uy)' = uq$$

$$\int (uy)'\, dx = \int uq\, dx$$

Rozwiązywanie r.r. liniowych pierwszego rzędu

Metoda czynnika całkującego

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

- szukamy funkcji $u(x)$ takiej, że lewa strona równania

$$u(y' + p \cdot y) = (uy)'$$

- taka funkcja u nazywa się **czynnikiem całkującym**

$$(uy)' = uq$$
$$\int (uy)'\, dx = \int uq\, dx$$

$$u(x) \cdot y(x) = \int u(x)q(x)\, dx + C$$

Rozwiązywanie r.r. liniowych pierwszego rzędu

Metoda czynnika całkującego

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

- szukamy funkcji $u(x)$ takiej, że lewa strona równania

$$u(y' + p \cdot y) = (uy)'$$

- taka funkcja u nazywa się **czynnikiem całkującym**

$$(uy)' = uq$$

$$\int (uy)'\, dx = \int uq\, dx$$

$$u(x) \cdot y(x) = \int u(x)q(x)\, dx + C$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{u(x)} \left(\int u(x)q(x)\, dx + C \right)}$$

Metoda czynnika całkującego

- Jak znaleźć czynnik całkujący $u(x)$?

Metoda czynnika całkującego

- Jak znaleźć czynnik całkujący $u(x)$?

$$u(y' + p \cdot y) = (u \cdot y)'$$

Metoda czynnika całkującego

- Jak znaleźć czynnik całkujący $u(x)$?

$$u(y' + p \cdot y) = (u \cdot y)'$$

$$uy' + u \cdot p \cdot y = u \cdot' y + u \cdot y'$$

Metoda czynnika całkującego

- Jak znaleźć czynnik całkujący $u(x)$?

$$u(y' + p \cdot y) = (u \cdot y)'$$

$$uy' + u \cdot p \cdot y = u \cdot' y + u \cdot y'$$

$$u' = p \cdot u$$

Metoda czynnika całkującego

- Jak znaleźć czynnik całkujący $u(x)$?

$$u(y' + p \cdot y) = (u \cdot y)'$$

$$uy' + u \cdot p \cdot y = u \cdot' y + u \cdot y'$$

$$u' = p \cdot u$$

$$\boxed{u(x) = e^{\int p(x) dx}}$$

Metody oparte na poniższym twierdzeniu

Twierdzenie

Całka ogólna równania różniczkowego liniowego niejednorodnego (4) (w skrócie CORN) jest sumą całki ogólnej równania jednorodnego (CORJ) i całki szczególnej równania niejednorodnego (CSRN), tj.

$$\mathrm{CORN} = \mathrm{CORJ} + \mathrm{CSRN}$$

Metody oparte na poniższym twierdzeniu

Twierdzenie

Całka ogólna równania różniczkowego liniowego niejednorodnego (4) (w skrócie CORN) jest sumą całki ogólnej równania jednorodnego (CORJ) i całki szczególnej równania niejednorodnego (CSRN), tj.

$$\text{CORN} = \text{CORJ} + \text{CSRN}$$

Jak znaleźć CORJ ?

$$y' + p(x) \cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\boxed{y_o = Ce^{-\int p(x)dx}}$$

Jak znaleźć CSRN ?

1. Metoda uzmienniania stałej

Jak znaleźć CSRN ?

1. Metoda uzmienniania stałej
   - we wzorze na y_o zastępujemy stałą C nieznaną funkcją zmiennej x

$$y_s(x) = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Jak znaleźć CSRN ?

1. Metoda uzmienniania stałej
   - we wzorze na y_o zastępujemy stałą C nieznaną funkcją zmiennej x

$$y_s(x) = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

   - staramy się tak dobrać $C(x)$ aby powyższa funkcja była rozwiązaniem RN, czyli wstawiamy powyższą funkcję do RN i po redukcji otrzymujemy

$$C'(x) = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

Jak znaleźć CSRN ?

1. Metoda uzmienniania stałej
   - we wzorze na y_o zastępujemy stałą C nieznaną funkcją zmiennej x

$$y_s(x) = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

   - staramy się tak dobrać $C(x)$ aby powyższa funkcja była rozwiązaniem RN, czyli wstawiamy powyższą funkcję do RN i po redukcji otrzymujemy

$$C'(x) = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

   - stąd mamy

$$C(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C_1$$

Jak znaleźć CSRN ?

1. Metoda uzmienniania stałej
   - we wzorze na y_o zastępujemy stałą C nieznaną funkcją zmiennej x
   $$y_s(x) = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$
   - staramy się tak dobrać $C(x)$ aby powyższa funkcja była rozwiązaniem RN, czyli wstawiamy powyższą funkcję do RN i po redukcji otrzymujemy
   $$C'(x) = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$
   - stąd mamy
   $$C(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C_1$$
   - C_1 jest dowolne, zatem CSRN przyjmuje postać
   $$\boxed{y_s(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx}$$

Jak znaleźć CSRN ?

2. Metoda przewidywań; stosujemy tylko gdy

Jak znaleźć CSRN ?

2. Metoda przewidywań; stosujemy tylko gdy
   - funkcja $p(x)$ jest stała, tzn. $p(x) \equiv p$, $p \in \mathbb{R} - \{0\}$

Jak znaleźć CSRN ?

2. Metoda przewidywań; stosujemy tylko gdy
   - funkcja $p(x)$ jest stała, tzn. $p(x) \equiv p$, $p \in \mathbb{R} - \{0\}$
   - $q(x) = \begin{cases} \text{wielomian stopnia } n \\ e^{ax} \\ a \sin \alpha x + b \cos \alpha x \\ \text{suma lub iloczyn powyższych funkcji} \end{cases}$

Jak znaleźć CSRN ?

2. Metoda przewidywań; stosujemy tylko gdy
   - funkcja $p(x)$ jest stała, tzn. $p(x) \equiv p$, $p \in \mathbb{R} - \{0\}$
   - $q(x) = \begin{cases} \text{wielomian stopnia } n \\ e^{ax} \\ a \sin \alpha x + b \cos \alpha x \\ \text{suma lub iloczyn powyższych funkcji} \end{cases}$

     ★ $q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y_s(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$

Jak znaleźć CSRN ?

2. Metoda przewidywań; stosujemy tylko gdy
   - funkcja $p(x)$ jest stała, tzn. $p(x) \equiv p$, $p \in \mathbb{R} - \{0\}$
   - $q(x) = \begin{cases} \text{wielomian stopnia } n \\ e^{ax} \\ a \sin \alpha x + b \cos \alpha x \\ \text{suma lub iloczyn powyższych funkcji} \end{cases}$

     - ★ $q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y_s(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$
     - ★ $q(x) = e^{ax} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y_s(x) = A\, e^{ax} \text{ gdy } a \neq -p \\ y_s(x) = Ax\, e^{ax} \text{ gdy } a = -p \end{array}$

Jak znaleźć CSRN ?

2. Metoda przewidywań; stosujemy tylko gdy
   - funkcja $p(x)$ jest stała, tzn. $p(x) \equiv p$, $p \in \mathbb{R} - \{0\}$
   - $q(x) = \begin{cases} \text{wielomian stopnia } n \\ e^{ax} \\ a \sin \alpha x + b \cos \alpha x \\ \text{suma lub iloczyn powyższych funkcji} \end{cases}$

     - ★ $q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y_s(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$
     - ★ $q(x) = e^{ax} \quad \Rightarrow \quad y_s(x) = A\, e^{ax}$ gdy $a \neq -p$
       $y_s(x) = Ax\, e^{ax}$ gdy $a = -p$
     - ★ $q(x) = a \cos(\alpha x) + b \sin(\alpha x) \quad \Rightarrow \quad y_s(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$

Jak znaleźć CSRN ?

2. Metoda przewidywań; stosujemy tylko gdy
   - funkcja $p(x)$ jest stała, tzn. $p(x) \equiv p$, $p \in \mathbb{R} - \{0\}$
   - $q(x) = \begin{cases} \text{wielomian stopnia } n \\ e^{ax} \\ a \sin \alpha x + b \cos \alpha x \\ \text{suma lub iloczyn powyższych funkcji} \end{cases}$

     ★ $q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y_s(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n$

     ★ $q(x) = e^{ax} \quad \Rightarrow \quad y_s(x) = A\, e^{ax}$ gdy $a \neq -p$
     $y_s(x) = Ax\, e^{ax}$ gdy $a = -p$

     ★ $q(x) = a \cos(\alpha x) + b \sin(\alpha x) \quad \Rightarrow \quad y_s(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$

     ★ Jeżeli $q(x)$ jest iloczynem bądź sumą powyższych funkcji, to za $y_s(x)$ wybieramy odpowiednią sumę lub iloczyn powyższych całek szczególnych

Równania różniczkowe liniowe drugiego rzędu

Definicja

Równanie różniczkowe drugiego rzędu, które można zapisać w postaci

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

nazywamy **równaniem liniowym**. Funkcje $p(x), q(x)$, nazywamy *współczynnikami*, a funkcję $f(x)$ *wyrazem wolnym* tego równania.

Definicja

Równanie różniczkowe drugiego rzędu, które można zapisać w postaci

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

nazywamy **równaniem liniowym**. Funkcje $p(x), q(x)$, nazywamy *współczynnikami*, a funkcję $f(x)$ *wyrazem wolnym* tego równania.

- Jeżeli wyraz wolny jest tożsamościowo równy zero ($f(x) \equiv 0$), to równanie nazywamy **równaniem jednorodnym**
- W przeciwnym przypadku nazywamy je **równaniem niejednorodnym**

Definicja

Równanie różniczkowe drugiego rzędu, które można zapisać w postaci

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

nazywamy **równaniem liniowym**. Funkcje $p(x), q(x)$, nazywamy *współczynnikami*, a funkcję $f(x)$ *wyrazem wolnym* tego równania.

- Jeżeli wyraz wolny jest tożsamościowo równy zero ($f(x) \equiv 0$), to równanie nazywamy **równaniem jednorodnym**
- W przeciwnym przypadku nazywamy je **równaniem niejednorodnym**

Przykłady

$y'' - xy = 0$ – liniowe jednorodne, $y'' = x^2$ – liniowe niejednorodne, $y'' - (y')^3 = 0$ – nieliniowe

Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

Twierdzenie

Jeżeli funkcje $p(x), q(x)$ i $f(x)$ są ciągłe na przedziale (a, b) oraz, jeżeli $x_0 \in (a, b), y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, to zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie określone na przedziale (a, b).

Rozwiązania równania jednorodnego, $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Fakt

Jeżeli funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są na pewnym przedziale rozwiązaniami równania liniowego jednorodnego, to ich dowolna kombinacja liniowa

$$y(x) = \alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)$$

jest również rozwiązaniem równania.

Rozwiązania równania jednorodnego, $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Definicja

Parę rozwiązań $y_1(x), y_2(x)$ równania liniowego jednorodnego, określonych na przedziale (a, b), nazywamy **układem fundamentalnym** równania na tym przedziale, jeżeli *Wronskian* funkcji $y_1(x)$ i $y_2(x)$ jest różny od zera

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \neq 0$$

Rozwiązania równania jednorodnego, $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Fakt

Jeżeli funkcje $y_1(x), y_2(x)$ tworzą układ fundamentalny równania liniowego jednorodnego, wtedy dla każdego rozwiązania $y(x)$ tego równania istnieją jednoznacznie określone stałe rzeczywiste C_1, C_2 takie, że

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Rozwiązania równania jednorodnego, $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Fakt

Jeżeli funkcje $y_1(x), y_2(x)$ tworzą układ fundamentalny równania liniowego jednorodnego, wtedy dla każdego rozwiązania $y(x)$ tego równania istnieją jednoznacznie określone stałe rzeczywiste C_1, C_2 takie, że

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Definicja

Liniową kombinację funkcji układu fundamentalnego, podaną powyżej, nazywamy **rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną) równania jednorodnego**.

Równanie jednorodne o stałych współczynnikach

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Równanie jednorodne o stałych współczynnikach

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Definicja

Równanie postaci

$$ar^2 + br + c = 0$$

nazywamy **równaniem charakterystycznym** równania różniczkowego, wielomian

$$w(r) = ar^2 + br + c$$

nazywamy **wielomianem charakterystycznym** tego równania, a jego pierwiastki nazywamy **pierwiastkami charakterystycznymi**

Równanie jednorodne o stałych współczynnikach

- r_1, r_2 – pierwiastki wielomianu charakterystycznego
- układ fundamentalny rozwiązań y_1, y_2:
  - $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ oraz $r_1 \neq r_2$ to

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, \quad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

Równanie jednorodne o stałych współczynnikach

- r_1, r_2 – pierwiastki wielomianu charakterystycznego
- układ fundamentalny rozwiązań y_1, y_2:
  - $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ oraz $r_1 \neq r_2$ to

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, \quad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

  - $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$

$$y_1(x) = e^{rx}, \quad y_2(x) = x\, e^{rx}$$

Równanie jednorodne o stałych współczynnikach

- r_1, r_2 – pierwiastki wielomianu charakterystycznego
- układ fundamentalny rozwiązań y_1, y_2:
  - $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ oraz $r_1 \neq r_2$ to

    $$y_1(x) = e^{r_1 x}, \quad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

  - $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$

    $$y_1(x) = e^{rx}, \quad y_2(x) = x\, e^{rx}$$

  - pierwiastki zespolone, $r_{1,2} = \lambda \pm i\mu$

    $$y_1(x) = e^{\lambda x} \cos(\mu x), \quad y_2(x) = e^{\lambda x} \sin(\mu x)$$

Równanie niejednorodne, $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

Fakt

Rozwiązaniem ogólnym równania niejednorodnego nazywamy sumę

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \varphi(x)$$

$$(CORN = CORJ + CSRN)$$

gdzie $y_1(x), y_2(x)$ tworzą układ fundamentalny równania jednorodnego, a $\varphi(x)$ jest dowolnym rozwiązaniem równania niejednorodnego.

Jak znaleźć $\varphi(x)$? $\qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

1. Metoda uzmienniania stałych

Jak znaleźć $\varphi(x)$? $\quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

1. Metoda uzmienniania stałych
   - $y_1(x), y_2(x)$ – układ fundamentalny
     CORJ: $y_o(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

Jak znaleźć $\varphi(x)$? $\quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

1. Metoda uzmienniania stałych
   - $y_1(x), y_2(x)$ – układ fundamentalny
     CORJ: $y_o(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$
   - wtedy CSRN:

$$\boxed{\varphi(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)}$$

Jak znaleźć $\varphi(x)$? $\quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

1. Metoda uzmienniania stałych
    - $y_1(x), y_2(x)$ – układ fundamentalny
      CORJ: $y_o(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$
    - Jeżeli $c_1(x), c_2(x)$ spełniają układ równań

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

    - wtedy CSRN:

$$\boxed{\varphi(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)}$$

2. Metoda przewidywań (analogiczna jak dla równań 1-ego rzędu)

2. Metoda przewidywań (analogiczna jak dla równań 1-ego rzędu)
   - Wyraz wolny r-nia różniczkowego ma postać ($\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $\beta > 0$)

$$f(x) = \left[(a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0) \cos \beta x + (b_l x^l + \cdots + b_1 x + b_0) \sin \beta x \right] e^{\alpha x}$$

2. <u>Metoda przewidywań</u> (analogiczna jak dla równań 1-ego rzędu)

- Wyraz wolny r-nia różniczkowego ma postać ($\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $\beta > 0$)

$$f(x) = \left[(a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0)\cos\beta x + (b_l x^l + \cdots + b_1 x + b_0)\sin\beta x\right] e^{\alpha x}$$

$\varphi(x)$ ma taką samą postać jak $f(x)$,

$$\boxed{\varphi(x) = \left[(A_m x^m + \cdots + A_0)\cos\beta x + (B_m x^m + \cdots + B_0)\sin\beta x\right] e^{\alpha x}}$$

2. Metoda przewidywań (analogiczna jak dla równań 1-ego rzędu)

- Wyraz wolny r-nia różniczkowego ma postać ($\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $\beta > 0$)

$$f(x) = \left[(a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0)\cos\beta x + (b_l x^l + \dots + b_1 x + b_0)\sin\beta x\right] e^{\alpha x}$$

$\varphi(x)$ ma taką samą postać jak $f(x)$,

$$\boxed{\varphi(x) = \left[(A_m x^m + \dots + A_0)\cos\beta x + (B_m x^m + \dots + B_0)\sin\beta x\right] e^{\alpha x}}$$

$$\boxed{\varphi(x) = x^s\left[(A_m x^m + \dots + A_0)\cos\beta x + (B_m x^m + \dots + B_0)\sin\beta x\right] e^{\alpha x}}$$

gdzie $m = \max\{k, l\}$, a $A_0, \dots, A_m, B_0, \dots, B_m \in \mathbb{R}$.

2. Metoda przewidywań (analogiczna jak dla równań 1-ego rzędu)

- Wyraz wolny r-nia różniczkowego ma postać ($\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $\beta > 0$)

$$f(x) = \left[(a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0)\cos\beta x + (b_l x^l + \cdots + b_1 x + b_0)\sin\beta x\right] e^{\alpha x}$$

- **stała kontrolna** funkcji $f(x)$ to liczba zespolona $\sigma = \alpha + i\beta$

$\varphi(x)$ ma taką samą postać jak $f(x)$,

$$\boxed{\varphi(x) = \left[(A_m x^m + \cdots + A_0)\cos\beta x + (B_m x^m + \cdots + B_0)\sin\beta x\right] e^{\alpha x}}$$

$$\boxed{\varphi(x) = x^s \left[(A_m x^m + \cdots + A_0)\cos\beta x + (B_m x^m + \cdots + B_0)\sin\beta x\right] e^{\alpha x}}$$

gdzie $m = \max\{k, l\}$, a $A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_m \in \mathbb{R}$.

2. Metoda przewidywań (analogiczna jak dla równań 1-ego rzędu)

- Wyraz wolny r-nia różniczkowego ma postać ($\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $\beta > 0$)

$$f(x) = \Big[(a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0)\cos\beta x + (b_l x^l + \cdots + b_1 x + b_0)\sin\beta x\Big]\, e^{\alpha x}$$

- **stała kontrolna** funkcji $f(x)$ to liczba zespolona $\sigma = \alpha + i\beta$
- **Jeżeli** σ **nie jest pierwiastkiem** wielomianu charakterystycznego $w(r)$, to $\varphi(x)$ ma taką samą postać jak $f(x)$,

$$\boxed{\varphi(x) = [(A_m x^m + \cdots + A_0)\cos\beta x + (B_m x^m + \cdots + B_0)\sin\beta x]\, e^{\alpha x}}$$

$$\boxed{\varphi(x) = x^s\, [(A_m x^m + \cdots + A_0)\cos\beta x + (B_m x^m + \cdots + B_0)\sin\beta x]\, e^{\alpha x}}$$

gdzie $m = \max\{k, l\}$, a $A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_m \in \mathbb{R}$.

2. Metoda przewidywań (analogiczna jak dla równań 1-ego rzędu)

- Wyraz wolny r-nia różniczkowego ma postać ($\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $\beta > 0$)

$$f(x) = \left[(a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0)\cos\beta x + (b_l x^l + \cdots + b_1 x + b_0)\sin\beta x\right] e^{\alpha x}$$

- **stała kontrolna** funkcji $f(x)$ to liczba zespolona $\sigma = \alpha + i\beta$
- **Jeżeli** σ **nie jest pierwiastkiem** wielomianu charakterystycznego $w(r)$, to $\varphi(x)$ ma taką samą postać jak $f(x)$,

$$\boxed{\varphi(x) = [(A_m x^m + \cdots + A_0)\cos\beta x + (B_m x^m + \cdots + B_0)\sin\beta x]\, e^{\alpha x}}$$

- **Jeżeli** σ **jest** $s-$**krotnym pierwiastkiem** $w(r)$, to

$$\boxed{\varphi(x) = x^s\, [(A_m x^m + \cdots + A_0)\cos\beta x + (B_m x^m + \cdots + B_0)\sin\beta x]\, e^{\alpha x}}$$

gdzie $m = \max\{k, l\}$, a $A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_m \in \mathbb{R}$.