Zad. 1. Korzystając z intrpretacji geometrycznej (nie ze wzoru Newtona-Lebniza), oblicz poniższe całki.

(a) $\int\limits_0^4 (8-2x)\,dx$

(b) $\int\limits_{-1}^2 (-|x|)\,dx$

(c) $\int\limits_{-2}^2 |x+1|-1\,dx$

(d) $\int\limits_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

(e) $\int\limits_{-6}^{-1} \sqrt{24-2x-x^2}\,dx$

(f) $\int\limits_{-1}^1 f(x)\;dx$, where

$$f(x)=\begin{cases}2+\sqrt{1-x^2} & ,-1\le x<1\\ -3 & ,1\le x<3\\ x-3 & 3\le x\le 5\end{cases}$$

Zad. 2. Wiedząc, że $\int_1^4 f(x)dx=8$ oraz $\int_1^6 f(x)dx=5$, oblicz poniższe całki.

(a) $\int\limits_1^4 (-3f(x))dx$

(b) $\int\limits_6^1 3f(x)\,dx$

(c) $\int\limits_6^4 12f(x)dx$

(d) $\int\limits_4^6 3f(x)dx$

Zad. 3. Oblicz wykorzystując wzory na całki z funkcji elementarnych

(a) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

(b) $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}\,dx$

(c) $\int\limits_0^\pi (1-\sin x)\,dx$

(d) $\int (2^x\cdot 3^x)\,dx$

(e) $\int\limits_1^4 \frac{5t^6-\sqrt{t}}{t^2}\,dt$

(f) $\int (3\sin x-4\cos 5x)\,dx$

(g) $\int \frac{\cos(2x)}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$

(h) $\int\limits_2^e \frac{1}{x-1}\,dx$,

(i) $\int\limits_1^2 \frac{s^2+6s+8}{s^4+2s^3}\,ds$

(j) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$

(k) $\int\limits_0^1 (2^x+e^x)\,dx$

(l) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

Zad. 4. Oblicz używając całkowania przez części

(a) $\int (x-7)\sin x\,dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} 3x\cos x\,dx$

(c) $\int (x^2-4x)\sin x\,dx$

(d) $\int_0^2 (2x+1)e^x\,dx$

(e) $\int (8x^2-12x+5)e^x\,dx$

(f) $\int x\operatorname{arc\,tg} x\,dx$

(g) $\int_1^e \ln^2 x\,dx$

(h) $\int x\ln x\,dx$

(i) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

(j) $\int (x^2+x+1)\ln x\,dx$

(k) $\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\,dx$

Zad. 5. Oblicz wykorzystując całkowanie przez podstawienie

(a) $\int_1^2 \frac{1}{1-4x}dx$

(b) $\int \frac{12x}{\sqrt{1-3x^2}}\,dx$

(c) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

(d) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

(e) $\int x^4\cdot\sqrt[4]{2x^5+10}\,dx$

(f) $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$

(g) $\int \frac{2\operatorname{tg}x}{\cos^2 x}\,dx$

(h) $\int_0^8 t\sqrt{t+1}dt$

(i) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$

(j) $\int \frac{1}{5+\sqrt{x}}\,dx$

(k) $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}\,dx$

(l) $\int \frac{x^3}{(x+1)^{10}}\,dx$

(m) $\int_1^{e^5} \frac{\sqrt{4+\ln x}}{x}\,dx$

(n) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

(o) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Zad. 6. Oblicz

(a) $\int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x+1)}\,dx$

(b) $\int \sqrt{x}\cdot\ln x\,dx$

(c) $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\,dx$

(d) $\int \frac{1}{(x^2+1)\operatorname{arc\,tg}x}dx$

(e) $\int_0^1 x^2e^{x^3}dx$

(f) $\int \frac{2\operatorname{ctg}x}{\sin^2 x}\,dx$

(g) $\int e^x\cos x dx$

(h) $\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx$

(i) $\int_0^1 e^{e^x+x}\,dx$

(j) $\int 2e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx$

(k) $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

(l) $\int \frac{1}{\sin x\cos x\ln^2(\operatorname{tg}x)}\,dx$

(m) $\int \ln^3 x\,dx$

(n) $\int e^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x\,dx$

(o) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-4e^{2x}}}\,dx$

(p) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

(q) $\int 3^x\sin x\,dx$

(r) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-4e^{2x}}}\,dx$

Zad. 7. Oblicz wykorzystując rozkład na ułamki proste.

(a) $\int \frac{3}{2x+1}\,dx$

(b) $\int \frac{1}{(1-3x)^4}\,dx$

(c) $\int \frac{2}{x^2-2x+40}\,dx$

(d) $\int \frac{x}{x^2-6x+10}\,dx$

(e) $\int \frac{2-3x}{3x^2+2x+1}\,dx$

(f) $\int \frac{5}{x^2+3x}\,dx$

(g) $\int \frac{2x+1}{x^2-4}\,dx$

(h) $\int \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$

(i) $\int \frac{3x}{(x-1)(x^2+2)}\,dx$

(j) $\int \frac{13x}{(x-2)(x^2+2x+5)}\,dx$

(k) $\int \frac{6x^5+4x^2+7}{x^3+x}\,dx$

(l) $\int \frac{x^3-x^2+3x+2}{x^3-x^2+2x}\,dx$

Zad. 8. Oblicz wykorzystując podstawienia trygonometryczne

(a) $\int \sin^7 x\,dx$

(b) $\int \cos^5 x\cdot\sin^4 x\,dx$

(c) $\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx$

(d) $\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx$

(e) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,dx$

(f) $\int \frac{1}{\sin^2 x+4\cos^2 x}\,dx$

(g) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x+\cos x+1}\,dx$

(h) $\int \frac{1}{5+4\cos x}\,dx$

(i) $\int \frac{1-\cos x}{4+5\sin x}\,dx$

Zad. 9. Oblicz pole obszaru ograniczonego przez podane krzywe

(a) $y = x^3, \quad y = 4x$

(b) $y = 1 - x^2, \quad y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2},$

(c) $xy = 2, \quad y = 2x, \quad y = \frac{x}{2}$, w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych

(d) $x = y^2 - 4, \quad y = x - 2$

(e) $xy = 6, \quad 3x - 2y = 0, \quad x - 6y = 0$

(f) $y = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad y = \dfrac{x^2}{2},$

(g) $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = \dfrac{\pi}{4}, \quad x = \dfrac{5\pi}{4},$

(h) $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 2,$

(i) $y = \ln x, \quad y = 1, \quad y = \ln(2e^2 - x)$

(j) $y = \operatorname{arc\,tg} x, \quad y = \pi, \quad 0 \le x \le 1$

(k) $y = \ln(x+6), \quad y = 3\ln x, \quad y = 0, \quad x = 0$

Zad. 10. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót obszaru R dookoła osi OX i OY.

(a) $R: \ y = e^x, x = 0, y = 0, x = e$

(b) $R: \ y = \ln x, y = 0, x = \frac{1}{e}, x = e$

(c) $R: \ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \langle -1, 0\rangle \\ e^x & \text{for } x \in \langle 0, 1\rangle \\ e & \text{for } x \in \langle 1, 4\rangle \end{cases}, \quad y \ge 0, \ -1 \le x \le 4$

(d) $R: y = x^2, y = \sqrt{x}$

(e) $R: \ 0 \le x \le \pi, \ y = 0, \quad y = \cos x$

(f) $R: \ 0 \le x \le \sqrt{5}, \ 0 \le y \le \dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}}$

(g) $R: \ 1 \le x \le 4, \ \dfrac{4}{x} \le y \le 5 - x$

Zad. 11. Oblicz długość wykresu funkcji

(a) $y = \ln(1 - x^2), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

(b) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad x \in [0, 1]$

(c) $y = \sqrt{(2x+1)^3}, \quad x \in [0, 3]$