

1 Wartość bezwzględna. Funkcje i ich własności.

Zad. 1.1 Rozwiąż równania i nierówności:

(a) $|6x - 2| = 10$

(i) $|2x - 3| - |3x + 4| = 4$

(b) $|6x - 3| = 3 - 6x$

(j) $|x^2 - 4| > 7$

(c) $\sqrt{(x-2)^2} = 2 - x$

(k) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2} > 1$

(d) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} - 6x = 2$

(l) $|2x + 1| < 2|x|$

(e) $|x - 5| + |x - 5| = 12$

(m) $||2x - 1| + 1| > 5$

(f) $|x - 5| + |x - 5| = 4x$

(n) $|12 - |x|| < 2$

(g) $|2x| + 12 = x$

(o) $|2x - 6| + |3x + 4| \geq 12$

(h) $|2x - 3| + |3x + 4| = 7$

(p) $|x - 3| - |x + 2| > 4$

Zad. 1.2 Określ dziedziny funkcji:

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

(c) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}}$

(b) $f(x) = \sqrt{|x+1| - 2}$

(d) $f(x) = \sqrt{\frac{3+6x}{4-x}} + 5$

Zad. 1.3 Sporządź wykresy poniższych funkcji:

(a) $f(x) = |x| + 1$

(c) $f(x) = |x - 2| + 3$

(e) $f(x) = -|x| - 2$

(b) $f(x) = |x - 3|$

(d) $f(x) = |x + 3| - 1$

Zad. 1.4 Sporządź wykresy poniższych funkcji oraz określ czy funkcja jest różnowartościowa, rosnąca (malejąca), parzysta (nieparzysta), okresowa:

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{gdy } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{gdy } x < 2 \\ -x & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$

(c) $f(x) = 2|x|, x \in \mathbb{R}$

Zad. 1.5 Zbadaj parzystość (nieparzystość) funkcji:

(a) $f(x) = x^6 + x^2 + \frac{3x^2}{x^4+1}$

(c) $x^3 \cdot \sqrt{x^4 + 1}$

(b) $f(x) = |5x - 6| - |5x + 6|$

(d) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{gdy } x < 0 \\ 3 - x & \text{gdy } x \geq 0 \end{cases}$

Zad. 1.6 (a) Czy złożenie funkcji parzystej i nieparzystej o wspólnej dziedzinie jest funkcją parzystą czy nieparzystą? Odpowiedź uzasadnij.

(b) Czy iloczyn dwóch funkcji nieparzystych o wspólnej dziedzinie jest funkcją parzystą czy nieparzystą? Odpowiedź uzasadnij.

2 Wielomiany. Funkcje wymierne.

Zad. 2.1 Oblicz iloraz wielomianów:

(a) $(3x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x + 2)$

(b) $(3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x - 6) : (x^2 + 2x + 1),$

Zad. 2.2 Oblicz iloraz wielomianów, korzystając ze Schematu Hornera:

(a) $(6x^3 + 3x^2 + 10x + 9) : (x - 3)$

(b) $(x^3 + 4x^2 + 2x - 1) : (x + 1),$

Zad. 2.3 Nie wykonując dzielenia, znajdź resztę.:

(a) $(x^{10} - 5x^2 + 1) : (x - 2)$

(b) $(3x^3 - 2x^2 - 3x + 2) : (3x - 2),$

(c) $(x^4 - x - 1)^{2021} : (x^2 - 1)$

(d) $(x^{333} + x^{33} + x^3 + 1) : (x^2 - 1)$

(e) $(x^2 - x - 1)^{2021} : (x^2 - x)$

Zad. 2.4 Wyznacz wartość parametru m dla którego równanie $-3x^2 + 2x - m = 0$ będzie miało:

- dwa różne pierwiastki,
- dwa różne pierwiastki różnych znaków,
- dwa pierwiastki ujemne.

Zad. 2.5 Wyznacz wartości a i b , dla których liczba 1 jest co najmniej podwójnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + x^2 + ax + b$.

Zad. 2.6 Rozwiąż równania:

(a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

(b) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$

(c) $4x^5 - 2x^4 - 16x^3 + 8x^2 = 0$

(d) $x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = 0$

(e) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

(f) $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$

(g) $x^3 - 7x - 6 = 0$

(h) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

(i) $x^4 - x^3 - 20x^2 - 8x + 40 = 0$

(j) $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 36x - 9 = 0$

(k) $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) = 81$
(wsk. zastosuj podstawianie)

Zad. 2.7 Rozwiąż nierówności:

(a) $x^3(x-3)^5(x+7)^4 \geq 0$

(e) $x^5 - 2x^4 - x + 2 < 0$

(b) $(2-x)(x+1)^2(3-x)^3 \leq 0$

(f) $(x^2 - 4x + 1)(x^2 - 4x + 2) \leq 20$

(c) $(x^2 - 9)(x+1)(x^2 - 2x - 3)(x-1) \leq 0$

(g) $x^3 + 2x^2 - x + 6 < 0$

(d) $x^3 + 5x^2 - 2x - 10 \geq 0$

(h) $x^3 - 2x^2 + 2x - 4 \leq 0$

Zad. 2.8 Rozwiąż równania:

(a) $\frac{2x+4}{x-5} = 0$

(h) $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| = 0$

(b) $\frac{x+1}{2x-1} = \frac{2}{x}$

(i) $\left| \frac{x-1}{x+2} \right| = 2$

(c) $\frac{7}{x+1} = \frac{3}{x+5}$

(j) $\frac{1}{|3-x|} = \frac{2}{|2x-1|}$

(d) $\frac{x-49}{x^2-7x} = \frac{8}{x-7}$

(k) $\frac{|x-1|}{x} = 3$

(e) $\frac{6}{x} - 1 = \frac{2}{x-1}$

(l) $\left| x - \frac{x}{2} \right| = 1$

(f) $\frac{x+1}{x+3} - \frac{x-1}{x-3} = \frac{5x^2-9}{x^2-9}$

(m) $\left| \frac{x^4-4x^2+3}{x-1} \right| = 0$

(g) $\frac{x+1}{x^2+2x-3} - \frac{2x+1}{2x^2-2x} = \frac{2}{1-x^2}$

(n) $\left| \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \right| = \frac{(x-1)(2-x)}{(x+1)(x+2)}$

Zad. 2.9 Rozwiąż nierówności:

(a) $\frac{(x+8)^4(2-x)^3}{(x+5)(x-1)^2} \geq 0$

(h) $2x^2 + 2x + 1 - \frac{15}{x^2+x+1} \leq 0$

(b) $\frac{3-2x}{(3x+1)(x-4)} \leq 0$

(i) $\frac{2}{|x-4|} \geq 1$

(c) $\frac{1}{x} \leq 1$

(j) $\left| \frac{2x-3}{x-3} \right| \leq 1$

(d) $x \leq 3 - \frac{1}{x-1}$

(k) $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| \geq 1$

(e) $\frac{x^2-8x+7}{x^2+5x+4} \leq 0$

(l) $\frac{|x^2-3x-1|}{x^2+x+1} \leq 3$

(f) $\frac{x}{2-x} < \frac{1-x}{2x+3}$

(m) $\frac{x^2-4|x|}{x^2+2} < 0$

(g) $\frac{7}{(x-2)(x-3)} + \frac{9}{x-3} + 1 \leq 0$

(n) $\frac{1}{|x+3|} \geq \frac{1}{|x-6|}$

3 Funkcje potęgowe.

Zad. 3.1 Wyznacz dziedzinę poniższych funkcji:

(a) $f(x) = x^2 \cdot (x^2 - 5x)^{-\frac{5}{3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x-1}}$

(b) $f(x) = (x-2)^{\frac{3}{2}}(x-3)^{\frac{2}{3}} - (4-x)^{\frac{5}{4}}(5-x)^{\frac{4}{5}}$

(c) $\sqrt{x(x+6)^6} + (x^2+3)(4-x^2)^{\frac{5}{2}}$

Zad. 3.2 Naszczuj wykresy funkcji:

(a) $f(x) = x^{3/2}$

(c) $f(x) = x^{-5/4}$

(e) $f(x) = x^{\pi/3}$

(b) $f(x) = x^{2/3}$

(d) $f(x) = x^{-4/12}$

(f) $f(x) = x^{-e}$

Zad. 3.3 Rozwiąż równania:

(a) $\sqrt{x+3} = 3$

(h) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$

(b) $(x^2 - 4)\sqrt{1-x} = 0$

(i) $x = 15 + \sqrt{9 + 8x - x^2}$

(c) $x - \sqrt{x+1} = 5$

(j) $3 - \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-2}$

(d) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 3$

(k) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x-1$

(e) $x + \sqrt{10x+6} = 9$

(f) $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$

(l) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1$

(g) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$

Zad. 3.4 Rozwiąż nierówności:

(a) $\sqrt{5-x} < -2$

(g) $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} \leq 7$

(b) $\sqrt[3]{5-x} < -2$

(h) $\frac{\sqrt{x+20}}{x} < 1$

(c) $\sqrt{11-x} > x-9$

(i) $\sqrt{(x-6)(1-x)} \leq 2x+3$

(d) $\sqrt{x-2} + x \leq 4$

(j) $\sqrt{4x-x^2} > x-2$

(e) $\sqrt{8-x} < \frac{10-x}{7}$

(k) $\sqrt{10+x} + \sqrt{10-x} < 6$

(f) $\sqrt{x^2-4x} + 3 > x$

(l) $\sqrt{5x^2+10x+1} \geq 7-2x-x^2$

4 Funkcje wykładnicze i logarytmiczne.

Zad. 4.1 Rozwiąż równania:

$$(a) 4 \cdot 8^{2x-3} = \frac{1}{32}$$

$$(b) 2^{|x|} + 2^{|x|+3} = 72$$

$$(c) 3^{\frac{5}{4}-4x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2}$$

$$(d) 4^{\frac{1}{2}x-1} = 2^{3(x+1)}$$

$$(e) 3 \cdot 5^x - 2 \cdot 5^{x-1} = 5^{x+1} - \frac{12}{5}$$

$$(f) \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2} = \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x-3} - \frac{1}{2}$$

$$(g) 2 \cdot 4^{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{2} \cdot 8^{x-1}$$

$$(h) \sqrt[3]{3} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1-x}{3}} + 9^{\frac{1}{2}x} = 3 + \sqrt[3]{3}$$

$$(i) 2^{2x} + 2^x = 20$$

$$(j) \sqrt{(0.25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}-4}$$

$$(k) 2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 16\sqrt{2}$$

$$(l) 3^{2x+1} - 3^{x-1} = 3^{x+1} - \frac{10}{3} \cdot 3^x + 9$$

$$(m) \sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 6^x - 30$$

$$(n) 11 \cdot 5^{2x} - 4^x = 3 \cdot 2^{2x} + 25^x$$

$$(o) 2^{2x} \cdot 9^x - 2 \cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1} \cdot 3^{4x-2} = 0$$

$$(p) (3 - 2\sqrt{2})^x + (3 + 2\sqrt{2})^x = 6$$

$$(q) (3 - 2\sqrt{2})^x + (3 + 2\sqrt{2})^x = 6^x$$

$$(r) 8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x} + 101) = 0$$

Zad. 4.2 Rozwiąż nierówności:

$$(a) \left(\frac{7}{11}\right)^{7x-11} \geq \left(\frac{11}{7}\right)^{11x-7}$$

$$(b) \left(\frac{9}{11}\right)^{9x^2-11x} \geq \left(\frac{11}{9}\right)^{11x^2-9x}$$

$$(c) \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2} < \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x-3} - \frac{1}{2}$$

$$(d) \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+x-1} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{8}}$$

$$(e) \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-3|} \leq \frac{1}{9}$$

$$(f) 5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x \leq 7 \cdot 10^x$$

$$(g) 2^{2x+4} - 4^x > 15$$

$$(h) 4^{x+4} < 4^{1-x}$$

$$(i) \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 27 > 0$$

$$(j) 2^{x+1} - 2^{x-1} \leq 3^{2-x}$$

$$(k) 2^{x+3} - 5^x < 7 \cdot 2^{x-2} - 3 \cdot 5^{x-1}$$

$$(l) 5^x - 20 > 5^{3-x}$$

$$(m) 7^{-x} - 3 \cdot 7^{x+1} > 4$$

$$(n) 3^{2x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \cdot 3^{x+1} - 2^{2x+2} \leq 0$$

$$(o) \frac{1}{2^{2x-1}-1} + \frac{1}{4} < \frac{1}{2^{2x+1}-4}$$

$$(p) -2 + 2^{3x} + 2^{3x-1} + 2^{3x-2} + \dots \geq \sqrt{2^{3x} + 2}$$

$$(q) 2^{2x} \leq 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}} + 4 \cdot 2^{2\sqrt{x}}$$

$$(r) \frac{25}{5^x} - (5^{\sqrt{x}})^{\sqrt{8x-1}} < 0$$

Zad. 4.3 Oblicz wartość podanych wyrażeń:

$$(a) \log_4 1$$

$$(f) \log_{0.5} 32$$

$$(j) \log_{\sqrt[3]{6}} \frac{\sqrt[3]{6}}{216}$$

$$(o) \log_9 5 \cdot \log_{25} 27$$

$$(b) \log 1000$$

$$(g) \log_{33} 33$$

$$(k) 16^{\log_2 3}$$

$$(p) 10 \cdot 100^{\frac{1}{2} \log_9 - \log_2}$$

$$(c) \log_{\sqrt{2}} 16$$

$$(h) \log_2 0.001$$

$$(l) 10^{2+2\log 7}$$

$$(q) 3^{\log_6 4 + 2\log_6 3}$$

$$(d) \log_2 \frac{1}{8}$$

$$(i) \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{\sqrt[3]{9}}$$

$$(m) 8^{1-\log_2 3}$$

$$(r) \left(\frac{1}{x}\right)^{\log_x 8}$$

$$(e) \ln \sqrt{e^3}$$

$$(i) \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{\sqrt[3]{9}}$$

$$(n) (\sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2\log_3 2}}$$

Zad. 4.4 Określ znak wyrażenia bez używania kalkulatora:

(a) $\ln(e - 2)$

(c) $\log 5$

(e) $\log 0.2$

(b) $\log_{\frac{1}{e}}(e - 1)$

(d) $-1 + \log 5$

(f) $\log_3(\sqrt{2} - 1)$

Zad. 4.5 Wyznacz dziedzinę funkcji:

(a) $f(x) = \log_7[\log_{0.5}(x^2 - 7x + 12) + 1]$

(c) $f(x) = \log_3[\log_{0.5}(x + 2) + 2]$

(b) $f(x) = \sqrt{\log_{0.5}(x^2 - 5x + 6) + 1}$

(d) $f(x) = \sqrt{\log_{0.5}(x + 1) + 3} + \sqrt{x^2 - 2x}$

Zad. 4.6 Określ dziedzinę, zbiór wartości i znajdź funkcję odwrotną poniższych funkcji:

(a) $f(x) = 2 + 3^{2x+1}$

(d) $f(x) = \log_5(2x + 1) - 3$

(b) $f(x) = 2 \cdot \log_4(5x - 1)$

(e) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^{x+1} - 3$

(c) $f(x) = 2^{2x+2}$

(f) $f(x) = \log_{0.5}(2 + x) - 0.5$

Zad. 4.7 Rozwiąż równania:

(a) $e^x = 5$

(k) $\log_{\frac{1}{3}}(x + 10) + \log_{\frac{1}{3}}(7 - 2x) = -4$

(b) $\ln(5x - e) = 1$

(l) $\frac{\log 2x}{\log(4x-15)} = 2$

(c) $\log_3(4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$

(m) $\frac{1}{2}\log(2x + 7) + \log\sqrt{7x + 5} = 1 + \log\frac{9}{2}$

(d) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 3\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}$

(n) $\log_3 x + \log_5 x = \frac{\log 15}{\log 3}$

(e) $\log_x 3\sqrt{3} = \frac{1}{2}$

(o) $\log_x 2 + \log_2 x = 2.5$

(f) $\log_{\frac{3}{4}}(1 - \frac{x-2}{2x-5}) = -1$

(p) $x^{\log x} = 10$

(g) $\ln(\log_2 x) = 0$

(q) $10^{\log^2 x} + x^{\log x} = 20$

(h) $\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)] = 0$

(r) $(\log_3 x)^2 = \frac{1}{2}\log_3 x$

(i) $\log_3(x + \sqrt{3}) = -\log_3(x - \sqrt{3})$

(s) $\log^2 x + 2\log(10x) = 17$

(j) $\log_4 x + \log_4(12 - 2x) = 2$

(t) $\log_x(5x^2) \cdot (\log_5 x)^2 = 1$

(u) $\log_{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}^2 x + \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}^3 x + \dots + \frac{1}{2^n}\log_{\frac{1}{2}}^{n+1} x + \dots = 2$

(v) $2\log_3(2x) - \frac{4\log_3\sqrt{2x}}{x} + \frac{4\log_3\sqrt{2x}}{x^2} - \frac{4\log_3\sqrt{2x}}{x^3} + \dots + \frac{4\log_3\sqrt{2x}}{x^n} + \dots = \frac{1}{8}(\log_{\sqrt{2}} 3)^{-1}$

Zad. 4.8 Rozwiąż nierówności:

(a) $\log_{\frac{1}{3}} x > -1$

(b) $\log_2(x+1) > 3$

(c) $\log_x 4 < 2$

(d) $\log_{0.5} \frac{2x+1}{3x+2} > 3$

(e) $\log(x-3) - \log(27-x) \leq -\log 5 - 1$

(f) $\log_{\frac{1}{3}}(|x| - 1) > -2$

(g) $3^{\log_{\frac{1}{5}}(x^2-4x-4)} < 1$

(h) $8^{\log_2 x} - 2x^2 \geq x - 2$

(i) $x^{2\log_5 6} - 13 \cdot 6^{\log_5 x} + 42 \leq 0$

(j) $\log_3[\log_4(x^2 - 5)] > 0$

(k) $\sqrt{7 - \log_2 x} < \log_2 x - 5$

(l) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$

(m) $\log_x[\log_2(4^x - 6)] \leq 1$

(n) $\log_{x^2}(x+6) \geq 1$

(o) $\log_{16} x + \log_x x + \log_2 x < 7$

(p) $|\log_{\frac{2}{3}} \frac{x-1}{x+1}| < 3$

(q) $(\log_2(2-x))^2 - 8\log_{\frac{1}{4}}(2-x) \geq 0$

(r) $|\log|x-1| + 1| \geq 2$

5 Funkcje trygonometryczne i cyklometryczne.

Zad. 5.1 Oblicz:

(a) $\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$	(e) $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$	(i) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$	(m) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$	(q) $\sin\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$
(b) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$	(f) $\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)$	(j) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	(n) $\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$	(r) $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$
(c) $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$	(g) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$	(k) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	(o) $\operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{3}\right)$	(s) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$
(d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$	(h) $\operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{4}\right)$	(l) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$	(p) $\operatorname{ctg}\left(\frac{10\pi}{3}\right)$	(t) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

Zad. 5.2 Rozwiąż równania:

(a) $\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	(g) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x$
(b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2x$	(h) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right) = 1$
(c) $2 \sin x = 3 \operatorname{ctg} x$	(i) $\sin x + \cos x = 0$
(d) $\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1 = 0$	(j) $ \sin x + \sin x = 0$
(e) $\operatorname{tg} x = \sin x$	(k) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(\pi - x)$
(f) $\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$	(l) $2^{1+2\log_2 \cos x} - \frac{3}{4} = 9^{0.5+\log_3 \sin x}$

Zad. 5.3 Rozwiąż nierówności:

(a) $\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	(g) $\frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x} \geq 0$
(b) $\cos(\pi - x) \leq \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	(h) $\cos x + 2 \operatorname{tg} x \leq 2 + \sin x$
(c) $3 \sin x > 2 \cos^2 x$	(i) $\log_{\frac{1}{2}}(\cos 2x + 2 \sin x + 1) < 1$
(d) $\sin^2 x \leq \frac{1}{2}$	(j) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} x - 1} > 1 \wedge x \in (0, 2\pi)$
(e) $\sqrt{1 - \sin^2 x} \leq 1$	(k) $ \sin x > \cos x $
(f) $\left \cos x - \frac{1}{2}\right < \frac{1}{2}$	

Zad. 5.4 Wyznacz dziedziny poniższych funkcji:

(a) $f(x) = \sqrt{\cos x} + \sqrt{6x - x^2}$
(b) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} 2x} - \sqrt{3}$
(c) $f(x) = \log \frac{\sin x }{\cos x}$
(d) $f(x) = \log(\cos(\log x))$

Zad. 5.5 Wyznacz dziedziny poniższych funkcji:

(a) $f(x) = \arcsin(1 - x^2)$

(d) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x + 1}$

(b) $f(x) = \arccos\left(\frac{3-x}{2}\right)$

(e) $f(x) = \arccos\sqrt{-3x}$

(c) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x - 1}$

(f) $f(x) = \arcsin(2\cos x)$

Zad. 5.6 Oblicz:

(a) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg}(-1)$

(e) $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{5}\right)$

(b) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(f) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}\right)$

(c) $\operatorname{arctg}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \arcsin\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)$

(g) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}\right)$

(d) $\arccos(\cos(3\pi))$

(h) $\arccos\left(\sin\frac{15\pi}{7}\right)$

Zad. 5.7 Rozwiąż równania i nierówności:

(a) $\arcsin(3 - x) = \frac{\pi}{2}$

(e) $2(\arcsin x)^2 - \pi \arcsin x + \frac{\pi^2}{8} = 0$

(b) $\arcsin(4 - x^2) = 0$

(f) $\arcsin(x - 1) < \frac{\pi}{4}$

(c) $\arccos\left(\frac{2-x}{3}\right) = \pi$

(g) $\log_{0.5}\arcsin x > 1$

(d) $|3\operatorname{arctg} x| = \pi$

(h) $\operatorname{arcctg}(2 - x) \leq \operatorname{arcctg} x^2$

6 Ciągi liczbowe.

Zad. 6.1 Zbadaj monotoniczność ciągów:

$$(a) a_n = \frac{(n+1)!+n!}{(n+1)!-n!}$$

$$(b) a_n = \frac{4^n}{(n+4)!}$$

$$(c) a_n = n^2 - n - 1$$

$$(d) a_n = \frac{n^2-1}{n}$$

$$(e) a_n = \sqrt[4]{n^4 + 4}$$

$$(f) a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$(g) a_n = \frac{n^n}{n!}$$

$$(h) a_n = \frac{1}{4+1} + \frac{1}{4^2+2} + \frac{1}{4^3+3} + \dots + \frac{1}{4^n+n}$$

Zad. 6.2 Zbadaj ograniczoność ciągów:

$$(a) a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$(b) a_n = n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$(c) a_n = 1000n - n^2$$

$$(d) a_n = \frac{1+n^2}{1+n^3}$$

$$(e) a_n = (-1)^n + \frac{1}{n^2}$$

$$(f) a_n = \sqrt[n]{5} - 1$$

$$(g) a_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$(h) a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

Zad. 6.3 Wykaż zbieżność ciągu $a_n = \frac{1}{e+1} + \frac{1}{e^2+2} + \frac{1}{e^3+3} + \dots + \frac{1}{e^n+n}$, wykorzystując jego monotoniczność i ograniczoność.

Zad. 6.4 Oblicz granice:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3+4n^2-1}{4n^3+5n}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2-3n}{6n^3-2n^2+3}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-7n^3-2n}{3n^2+4}$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n^6+n^5-4n^2+8}{6n^5-7n^2+n-9}$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^4-6n^2+1}{-5n^4+6n-5} \right)^{1001}$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3+5n-1)^{2007}}{(n+1)^{7002}}$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}-5^{n+2}}{5^n-4^n}$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n}{1+2^n+3^n}$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt[3]{n-1}+9}$$

$$(j) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{n}-1)^6}{(\sqrt{n}+1)^5}$$

Zad. 6.5 Oblicz granice:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n+1})$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2^n+1} - \sqrt{2^n-1})$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n+1})$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+6\sqrt{n}+1} - \sqrt{n})$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{n+1}}}{e^{\sqrt{n}}}$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{16n^2+5n+4} - 4n)$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^3+5n+1} - \sqrt{n^3+5n})$$

$$(j) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9^n+3^n} - \sqrt{9^n+1})$$

Zad. 6.6 Oblicz granice:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n}\right)^{3n}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n}{n^2-3n-4}\right)^{n-10}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+4}\right)^{5n+2007}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{9n+7}$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n}\right)^{3n+1}$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{2-3n}$

(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n+1}$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln\left(\frac{n+8}{n}\right)$

(j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n(\ln(n+1) - \ln n)}$

(k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{1000-2n}$

Zad. 6.7 Oblicz granice:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^n + \pi^n + 8^n}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^n + 3^n + \pi^n}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7 + \cos(\pi n)}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + \sin n}{n^2 + (-1)^n}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 4^n + 3 \cdot \sin(n!)}{2^{2n+7}}$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4 - \arctg n)^n$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+1}{4n^2+\cos(n^2)}$

(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n+1}{2^n+\cos(n!)}$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$

(j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin \frac{1}{n}}$

(k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}$

(l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

(m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Zad. 6.8 Oblicz granice:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n-1}{n}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^3} + \dots + \frac{n-1}{n^3}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{2n^2+1}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n-1}{(n+1)(n+2)+\dots+2n}$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+6+36+\dots+6^{n-1}}{1-36^n}$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}}$

(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2}$

7 Granice i ciągłość funkcji.

Zad. 7.1 Oblicz granice:

$$\begin{array}{llll}
 (a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{x^2-9} & (c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(2x-1)^2-9} & (e) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) & (g) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+13}}{x^2-9} \\
 (b) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+2x-3}{x+3} & (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-4x^2+5x}{(|x|+1)x} & (f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-\sqrt{2-x}} & (h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-\sqrt{1-2x-x^2}}{2x}
 \end{array}$$

Zad. 7.2 Oblicz granice:

$$\begin{array}{ll}
 (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} & (e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \\
 (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x} & (f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{1-x^2} \\
 (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 8x} & (g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} \\
 (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x+\sin 2x}{\sin 3x-5x} & (h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}
 \end{array}$$

Zad. 7.3 Oblicz granice:

$$\begin{array}{ll}
 (a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x+4}{2x^2-3x+1} & (m) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{\frac{x}{2}} \\
 (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2+6x-1}{5-2x} & (n) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-2}{x^2+1} \right)^{\frac{x}{3}} \\
 (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - \frac{x^3}{x^2+1} \right) & (o) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\ln \frac{x+1}{x} + \ln \frac{2x+3}{2x} \right) \\
 (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+4}}{2x-3} & (p) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3} \ln \frac{2x}{2x+1} \\
 (e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x+4}}{2x-3} & (q) \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(\operatorname{arccctg} x) \\
 (f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{-x} & (r) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\operatorname{arctg} x) \\
 (g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{-x} & (s) \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left| \frac{x+1}{x^2+2} \right| \\
 (h) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x) & (t) \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x} \\
 (i) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-3x+1}) & (u) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)\operatorname{arctg} x}{x} \\
 (j) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})} & (v) \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccctg} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{2x+1}{x-1} \right) \\
 (k) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1} & (w) \lim_{x \rightarrow -\infty} \arccos \left(\frac{2+x}{2-x} \right) \\
 (l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x &
 \end{array}$$

Zad. 7.4 Oblicz granice jednostronne:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-9}{2-x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-3x-x^2}{(x-2)^2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3^{-\frac{1}{x+1}-1}}{3^{-\frac{1}{x+1}+1}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2-2}{x^2-2x-3}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-\pi^{\frac{1}{x}}}$

(j) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-2x}{5+2^{\frac{1}{x-1}}}$

Zad. 7.5 Oblicz wszystkie asymptoty funkcji:

(a) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$

(b) $f(x) = \frac{x^2-9x+14}{x^2-5x+6}$

(c) $f(x) = \frac{x+1}{x^3-4x^2+4x}$

(d) $f(x) = \frac{x^3-10x^2+16x}{x^2-8x}$

Zad. 7.6 Zbadaj ciągłość funkcji:

(a) $f(x) = \begin{cases} 6-x^2 & \text{gdy } x < 2 \\ x & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{gdy } -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & \text{gdy } 0 < x \leq 1 \\ \log x & \text{gdy } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x} & \text{gdy } x < 0 \\ |x-1| & \text{gdy } 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2+4x-3 & \text{gdy } x > 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x+2}} & \text{gdy } x < -2 \\ 0 & \text{gdy } -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2-2x}{x-2} & \text{gdy } x > 2 \end{cases}$

Zad. 7.7 Wyznacz wartości parametrów a i b tak, aby funkcje były ciągłe:

(a) $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & \text{gdy } x < 1 \\ 2^x-1 & \text{gdy } x \geq 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 4-(x+1)^2 & \text{gdy } x < 2 \\ x+a & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2x+\cos(a) & \text{gdy } x < 1 \\ b^2 & \text{gdy } x = 1 \\ 3\ln x + 3\sqrt[3]{x} & \text{gdy } x > 1 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{gdy } x \neq 3 \\ 2a-4 & \text{gdy } x = 3 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{a^2 \operatorname{arctg} 2x}{6x} & \text{gdy } x \neq 0 \\ 3 & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$