Zad. 1. Korzystając z definicji oblicz pochodne podanych funkcji w podanych punktach.

(a) $f(x) = |x| \sin x, \quad x_0 = 0$

(b) $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ \sqrt{x} & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$

(c) $p(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ 2^x & x > 2 \end{cases}, \quad x_0 = 2$

(d) $u(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{\ln|x+1|} & x \neq -1 \\ 0 & x = -1 \end{cases}, \quad x_0 = -1$

Zad. 2. Oblicz pochodne korzystając z definicji.

(a) $f(x) = x^2 - 4x, \quad x \in \mathbb{R}$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$

(c) $p(x) = \dfrac{1}{x+2}, \quad x \neq -2$

(d) $u(x) = \sqrt{2-3x}, \quad x \leq \dfrac{2}{3}$

Zad. 3. Określ wartości parametrów a, b, c, dla których funkcja jest różniczkowalna dla $x \in \mathbb{R}$

(a) $g(x) = \begin{cases} ae^x + b & , x \leq 0 \\ 2 - x & , x > 0 \end{cases}$

(b) $v(x) = \begin{cases} x + 1 & , x \leq 0 \\ a \sin x + b \cos x & , x > 0 \end{cases}$

(c) $p(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , x < 0 \\ a \sin x + b \cos x + c & , 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin^2 x & , x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Zad. 4. Oblicz pochodne

- $\left[6x^8 + x^6 + 4x^3 - 2\ln x + 1\right]' =$
- $\left[7^x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{5}{x^5}\right]' =$
- $\left[5x^6 + \sin x - 9x + \cos x + \log_3 x\right]' =$
- $\left[\sin x + 2\cos x - 4 \operatorname{arc\,ctg} x\right]' =$
- $\left[\arcsin x + x^3 + \sqrt[4]{x^3}\right]' =$
- $\left[2\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^3}\right]' =$
- $\left[\dfrac{2}{3}\sqrt{x^5} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right]' =$
- $\left[\sqrt[9]{x^5} + \sqrt[5]{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right]' =$
- $\left[5x\sqrt{x} + 2x^2\sqrt[3]{x}\right]' =$
- $\left[\left(2x^2 + \dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}} + 1\right)\right]' =$
- $\left[(x^2 - 3x)\sin x\right]' =$
- $(e^x 2^x)' =$
- $\left[(\sqrt{x} - 2x) \operatorname{arc\,tg} x\right]' =$
- $\left[\dfrac{4\sqrt{x} + 3x - 4x^2}{\sqrt{x}}\right]' =$
- $\left[\dfrac{10}{5x^4 + 3x^2 - 7x}\right]' =$
- $\left[\dfrac{5x^6}{-3x^3 + x}\right]' =$
- $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' =$
- $\left[\dfrac{2x+1}{3x-2}\right]' =$
- $\left[\dfrac{x^4}{\sin x}\right]' =$
- $\left[\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}\right]' =$
- $\left[\dfrac{1}{\cos x}\right]' =$
- $\left[\cos(4x) + 2\operatorname{arc\,tg}(7x)\right]' =$
- $\left(e^{2x} + \ln 2x\right)' =$
- $\left[\sin(3x^3 + 3)\right]' =$
- $\left(e^{\cos^2 x}\right)' =$
- $\left[3\operatorname{arc\,tg}(x^3) + \operatorname{tg}(8x^3)\right]' =$
- $\left[\sqrt{\cos^2 x + \operatorname{arc\,tg}^2 x}\right]' =$
- $\left[\sin(\cos(x^3))\right]' =$
- $\left[\sin^3(4x^3)\right]' =$
- $\left[\left(\operatorname{arc\,tg}(7x^2 + \sqrt{x}) + 2\right)^4\right]' =$
- $\left[\cos(x^2)\operatorname{tg}(4x)\right]' =$
- $\left[\sin\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)\right]' =$

- $[\cos(x \cdot \operatorname{arc\,tg} x)]' =$
- $\left[\sqrt{\cos x + 3x - \frac{1}{x^2}}\right]' =$
- $\left(\ln^2 3x\right)' =$
- $\left(\sin(e^{3x^2+6x})\right)' =$
- $(\ln(\ln x))' =$
- $\left(7^{17x+12\ln x}\right)' =$
- $(\log_3(\sin x \cdot \operatorname{tg} x))' =$
- $\left(2^{\ln(\cos x)}\right)' =$
- $\left(x^{\sin x}\right)' =$
- $\left(\sqrt[x]{x}\right)' =$
- $\left((\sin x)^{3x^2}\right)' =$

Zad. 5. Korzystając z różniczki funkcji oblicz przybliżone wartości poniższych wyrażeń

(a) $\sqrt[3]{8.02}$

(b) $\ln(0.95)$

(c) $\operatorname{arc\,tg}(1.1)$

(d) $\frac{1}{\sqrt{3.99}}$

Zad. 6. Oblicz granice korzystając z reguły L'Hospitala

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\ln x}$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1+\ln x}{e^x - e}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$

(e) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$

(f) $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{arc\,ctg} x$

(g) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$

(h) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

(i) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

(j) (*) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Zad. 7. Zbadaj monotoniczność i znajdź ekstrema lokalne funkcji

(a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

(b) $g(x) = \operatorname{arc\,tg} x - \ln(1+x^2)$

(c) $h(x) = x^2 e^{-x} + 1$

(d) $q(x) = \frac{2+\ln x}{x}$

(e) $v(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$

(f) $r(x) = x\sqrt{4x - x^2}$

Zad. 8. Zbadaj wklęsłość/wypukłość funkcji i znajdź punkty przegięcia jej wykresu.

(a) $f(x) = \ln(1+x^2)$

(b) $g(x) = x^2 e^{-x}$

(c) $m(x) = x^2 \ln x$

(d) $s(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$

(e) $y(x) = 4\sqrt{(x-1)^5} + 20\sqrt{(x-1)^3}$

(f) $w(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$

Zad. 9. Znajdź wszystkie asymptoty wykresu funkcji.

(a) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - x}$

(b) $g(x) = 2x + \frac{2}{e^x - 1}$

(c) $h(x) = \ln(4 - x^2)$

(d) $p(x) = (x^2+2)e^{-x^2}$

(e) $u(x) = \frac{x}{\ln x}$

(f) $w(x) = (x+1)\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{x+1}$