Wielomiany

Definicja

Wielomianem stopnia n zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ oraz $a_n \neq 0$.

Definicja

Wielomianem stopnia n zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ oraz $a_n \neq 0$.

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ – **współczynniki wielomianu**
- n – **stopień wielomianu**
- a_0 – **wyraz wolny**
- a_n – **współczynnik wiodący**

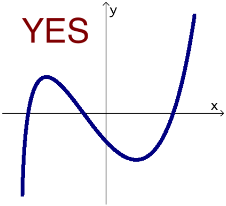
Wykresy wielomianów

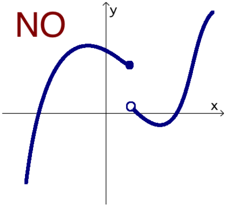
Wykresy wielomianów

- wykres wielomianu jest **ciągły**

Wykresy wielomianów

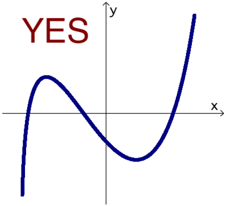
- wykres wielomianu jest **ciągły**

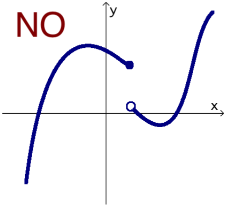




Wykresy wielomianów

- wykres wielomianu jest **ciągły**

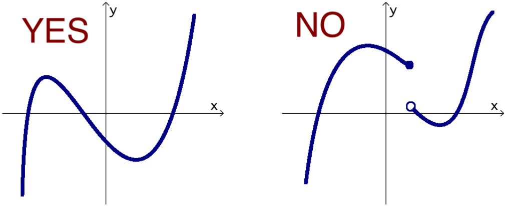




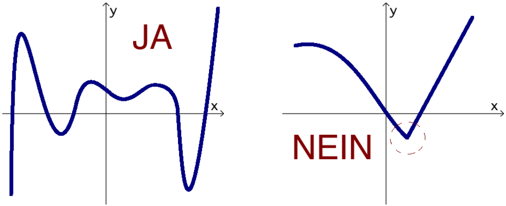
- wykres wielomianu ma tylko "gładkie, zaokrąglone zakręty"

Wykresy wielomianów

- wykres wielomianu jest **ciągły**



- wykres wielomianu ma tylko ”gładkie, zaokrąglone zakręty”



Wykresy wielomianów

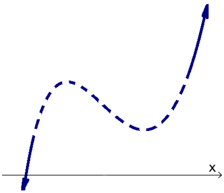
Wykresy wielomianów

- Dla dużych x, wykres jest nieograniczony z góry i/lub z dołu

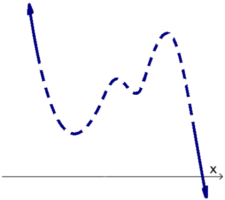
Wykresy wielomianów

- Dla dużych x, wykres jest nieograniczony z góry i/lub z dołu
- Dla n nieparzytego

$a_n > 0$

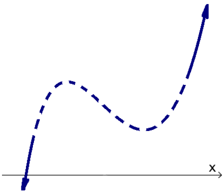


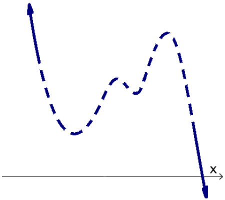
$a_n < 0$



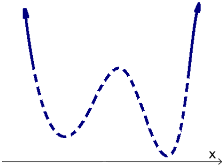
Wykresy wielomianów

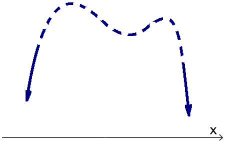
- Dla dużych x, wykres jest nieograniczony z góry i/lub z dołu
- Dla n nieparzytego

$a_n > 0$


$a_n < 0$


- Dla n parzystego

$a_n > 0$


$a_n < 0$


Dzielenie wielomianów

Dzielenie wielomianów

Twierdzenie

Jeżeli $W(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami takimi, że $Q(x) \not\equiv 0$ i stopień $W(x)$ jest większy lub równy stopniowi $Q(x)$, to istnieją takie dwa wielomiany $P(x)$ i $R(x)$, że

$$W(x) = Q(x)P(x) + R(x) \quad \text{lub} \quad \frac{W(x)}{Q(x)} = P(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

gdzie $R(x) \equiv 0$ lub stopień $R(x)$ jest mniejszy od stopnia $Q(x)$.

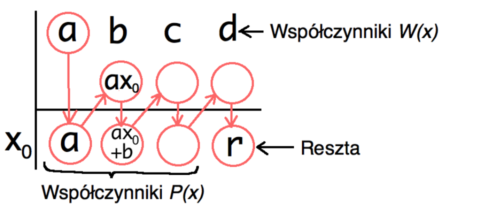
- $R(x)$ nazywamy **resztą z dzielenia**

Schemat Hornera, $W(x) = (x - x_0) \cdot P(x) + r$

Schemat Hornera, $W(x) = (x - x_0) \cdot P(x) + r$

przykład dla wielomianu trzeciego stopnia

Aby podzielić $ax^3 + bx^2 + cx + d$ przez $(x - x_0)$, używamy schematu:

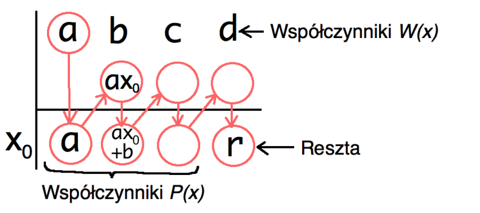


- *W pionie:* dodawaj
- *Po przekątnej:* mnóż przez x_0

Schemat Hornera, $W(x) = (x - x_0) \cdot P(x) + r$

przykład dla wielomianu trzeciego stopnia

Aby podzielić $ax^3 + bx^2 + cx + d$ przez $(x - x_0)$, używamy schematu:



- *W pionie:* dodawaj
- *Po przekątnej:* mnóż przez x_0

Twierdzenie

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x - x_0)$

$$r = W(x_0)$$

Pierwiastki wielomianu

Pierwiastki wielomianu

Definicja

Liczbę rzeczywistą x_0 nazywamy **pierwiastkiem wielomianu** $W(x)$, jeżeli $W(x_0) = 0$.

Pierwiastki wielomianu

Definicja

Liczbę rzeczywistą x_0 nazywamy **pierwiastkiem wielomianu** $W(x)$, jeżeli $W(x_0) = 0$.

Twierdzenie (Bezout)

Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - x_0)$. Istnieje wówczas wielomian $P(x)$, o jeden stopień niższy od $W(x)$ taki, że

$$W(x) = (x - x_0) \cdot P(x)$$

Pierwiastki wielomianu

Definicja

Liczbę rzeczywistą x_0 nazywamy **pierwiastkiem wielomianu** $W(x)$, jeżeli $W(x_0) = 0$.

Twierdzenie (Bezout)

Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - x_0)$. Istnieje wówczas wielomian $P(x)$, o jeden stopień niższy od $W(x)$ taki, że

$$W(x) = (x - x_0) \cdot P(x)$$

- Wniosek: Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków

Pierwiastek $k-$krotny

Liczbę x_0 nazywamy **pierwiastkiem $k-$krotnym wielomianu** $W(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy $W(x)$ jest podzielny przez $(x - x_0)^k$, ale nie jest podzielny przez $(x - x_0)^{k+1}$, tzn. gdy istnieje wielomian $P(x)$ taki, że

$$W(x) = (x - x_0)^k \cdot P(x) \quad \text{i} \quad P(x_0) \neq 0$$

Pierwiastek $k-$krotny

Liczbę x_0 nazywamy **pierwiastkiem $k-$krotnym wielomianu** $W(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy $W(x)$ jest podzielny przez $(x - x_0)^k$, ale nie jest podzielny przez $(x - x_0)^{k+1}$, tzn. gdy istnieje wielomian $P(x)$ taki, że

$$W(x) = (x - x_0)^k \cdot P(x) \quad \text{i} \quad P(x_0) \neq 0$$

- Jeżeli x_0 jest nieparzystokrotny, wykres $W(x)$ przecina oś OX w punkcie $x = x_0$

Pierwiastek $k-$krotny

Liczbę x_0 nazywamy **pierwiastkiem $k-$krotnym wielomianu** $W(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy $W(x)$ jest podzielny przez $(x - x_0)^k$, ale nie jest podzielny przez $(x - x_0)^{k+1}$, tzn. gdy istnieje wielomian $P(x)$ taki, że

$$W(x) = (x - x_0)^k \cdot P(x) \quad \text{i} \quad P(x_0) \neq 0$$

- Jeżeli x_0 jest nieparzystokrotny, wykres $W(x)$ przecina oś OX w punkcie $x = x_0$
- Jeżeli x_0 jest parzystokrotny, wykres $W(x)$ jest styczny do osi OX w punkcie $x = x_0$

Prawda czy Fałsz

Prawda czy Fałsz

1. Istnieje wielomian stopnia 6, który ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty.

Prawda czy Fałsz

1. Istnieje wielomian stopnia 6, który ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty.
2. Istnieje wielomian stopnia 5, który nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Pierwiastki wymierne wielomianu

Jeżeli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, jest pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

o współczynnikach całkowitych, przy czym $a_0 \cdot a_n \neq 0$, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, a q jest dzielnikiem wpółczynnika wiodącego a_n.

Funkcje wymierne

Funkcja wymierna

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad P(x), Q(x) - \text{wielomiany}, \; Q(x) \not\equiv 0$$

Funkcja wymierna

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad P(x), Q(x) - \text{wielomiany}, \ Q(x) \not\equiv 0$$

- Dziedzina

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$$

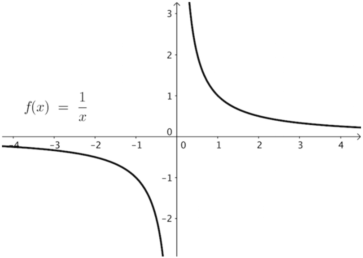
Funkcja wymierna

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad P(x), Q(x) - \text{wielomiany}, \ Q(x) \not\equiv 0$$

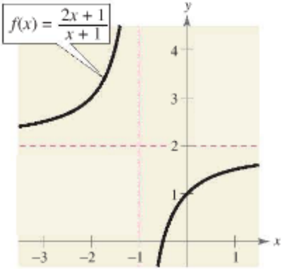
- Dziedzina

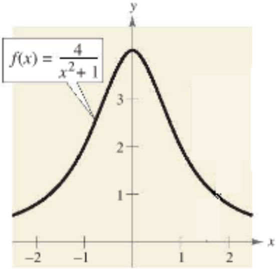
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$$

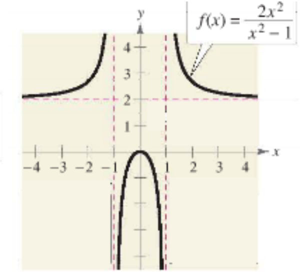
- Typowy przykład:



Przykłady funkcji wymiernych







Równania z wyrażeniami wymiernymi

Równania z wyrażeniami wymiernymi

Sposób rozwiązania

1. Określ dziedzinę
2. Pomnóż obie strony równania przez wspólny mianownik

Nierówności z wyrażeniami wymiernymi

Nierówności z wyrażeniami wymiernymi

Sposób rozwiązania

1. Doprowadź nierówność do postaci

$$\frac{W(x)}{Q(x)} > 0 \quad (\geq 0,\, < 0,\, \leq 0)$$

2. Skorzystaj z równoważności

$$\frac{W(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(x) \cdot Q(x) \geq 0 \wedge Q(x) \neq 0$$

(takie same rownoważności zachodzą dla nierówności $> 0, < 0, \leq 0$)

Funkcje potęgowe

Funkcje potęgowe

$$f(x) = x^{\alpha} \quad , \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R}$$

Funkcje potęgowe

$$f(x) = x^{\alpha} \quad , \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R}$$

Dziedzina, zbiór wartości, wykres zależą od wykładnika α:

$n, p \in \mathbb{N}$	D_f

Funkcje potęgowe

$$f(x) = x^\alpha \quad , \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R}$$

Dziedzina, zbiór wartości, wykres zależą od wykładnika α:

$n, p \in \mathbb{N}$	D_f
$y = x^n$	$\mathbb{R}$

Funkcje potęgowe

$$f(x) = x^\alpha \quad , \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R}$$

Dziedzina, zbiór wartości, wykres zależą od wykładnika α:

$n, p \in \mathbb{N}$	D_f
$y = x^n$	$\mathbb{R}$
$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} - \{0\}$

Funkcje potęgowe

$$f(x) = x^\alpha \quad \text{, gdzie } \alpha \in \mathbb{R}$$

Dziedzina, zbiór wartości, wykres zależą od wykładnika α:

$n, p \in \mathbb{N}$	D_f
$y = x^n$	$\mathbb{R}$
$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$y = x^{\frac{p}{n}}$	$\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ dla $n-$parz.
	$\mathbb{R}$ dla $n-$nieparz.

Funkcje potęgowe

$$f(x) = x^{\alpha} \quad , \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R}$$

Dziedzina, zbiór wartości, wykres zależą od wykładnika α:

$n, p \in \mathbb{N}$	D_f
$y = x^n$	$\mathbb{R}$
$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$y = x^{\frac{p}{n}}$	$\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ dla $n-$parz.
	$\mathbb{R}$ dla $n-$nieparz.
$y = x^{-\frac{p}{n}}$	$\mathbb{R}_+$ dla $n-$parz.
	$\mathbb{R} - \{0\}$ dla $n-$nieparz.

Funkcje potęgowe

$$f(x) = x^{\alpha} \quad \text{, gdzie } \alpha \in \mathbb{R}$$

Dziedzina, zbiór wartości, wykres zależą od wykładnika α:

$n, p \in \mathbb{N}$	D_f
$y = x^n$	$\mathbb{R}$
$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$y = x^{\frac{p}{n}}$	$\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ dla $n-$parz.
	$\mathbb{R}$ dla $n-$nieparz.
$y = x^{-\frac{p}{n}}$	$\mathbb{R}_+$ dla $n-$parz.
	$\mathbb{R} - \{0\}$ dla $n-$nieparz.
$y = x^0$	$\mathbb{R} - \{0\}$

Funkcje potęgowe

$$f(x) = x^{\alpha} \quad , \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R}$$

Dziedzina, zbiór wartości, wykres zależą od wykładnika α:

$n, p \in \mathbb{N}$	D_f
$y = x^n$	$\mathbb{R}$
$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$y = x^{\frac{p}{n}}$	$\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ dla $n-$parz.
	$\mathbb{R}$ dla $n-$nieparz.
$y = x^{-\frac{p}{n}}$	$\mathbb{R}_+$ dla $n-$parz.
	$\mathbb{R} - \{0\}$ dla $n-$nieparz.
$y = x^0$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$y = x^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{IQ}$	$\mathbb{R}_+$ dla $\alpha < 0$
	$\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ dla $\alpha > 0$

$$\text{Jeżeli } x > 0, \text{ to } x^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{x^p}$$

Równania i nierówności pierwiastkowe

Równania i nierówności pierwiastkowe

- Ogólna zasada:
  jeżeli pojawia się wyraz $\sqrt[n]{\ldots}$, *podnieś obie strony równania lub nierówności do* n*-tej potęgi.*

Równania i nierówności pierwiastkowe

- Ogólna zasada:
  jeżeli pojawia się wyraz $\sqrt[n]{\ldots}$, *podnieś obie strony równania lub nierówności do* n*-tej potęgi.*

Twierdzenie

$$a = b \iff a^n = b^n$$

$$a < b \iff a^n < b^n$$

$$a \leq b \iff a^n \leq b^n$$

- jeżeli $n-$parzysta, $a, b \geq 0$
- jeżeli $n-$nieparzysta, $a, b \in \mathbb{R}$