Granice funkcji
Ciągłość funkcji

Pojęcia wstępne

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i $r \in \mathbb{R}_+$

- **sąsiedztwo** punktu x_0 o promieniu r

$$S(x_0, r) = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$$

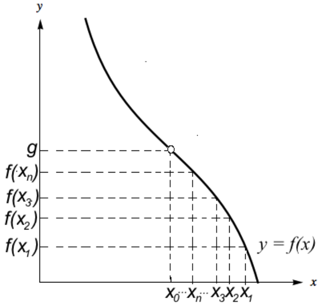
- **otoczenie** punktu x_0 o promieniu r

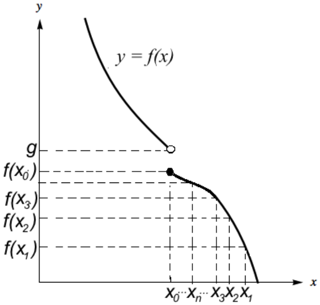
$$U(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$$

Granica właściwa funkcji w punkcie wg Heinego

Liczbę g nazywamy **granicą właściwą** funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in S(x_0, r)$ i zbieżnego do punktu x_0 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji $(f(x_n))$ jest zbieżny do liczby g.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g, \qquad f(x) \xrightarrow{x \to x_0} g$$

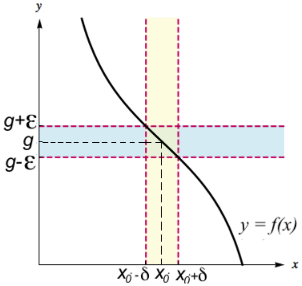


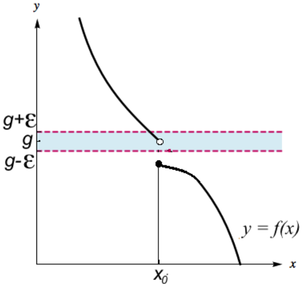


Granica właściwa funkcji w punkcie wg Cauchyego

Liczbę g nazywamy **granicą właściwą** funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla wszystkich $x \neq x_0$ spełniających nierówność $|x - x_0| < \delta$ zachodzi nierówność $|f(x) - g| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g, \qquad f(x) \xrightarrow{x \to x_0} g$$





Granica niewłaściwa funkcji w punkcie wg Heinego

Funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** ∞ (lub $-\infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in S((x_0, r)$, zbieżnego do x_0, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞ $(-\infty)$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \text{ (lub } -\infty), \qquad f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \infty \text{ (lub } -\infty)$$

Granica niewłaściwa funkcji w punkcie wg Heinego

Funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** ∞ (lub $-\infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyrazach $x_n \in S((x_0, r)$, zbieżnego do x_0, ciąg $(f(x_n))$ jest rozbieżny do ∞ $(-\infty)$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \text{ (lub } -\infty), \qquad f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \infty \text{ (lub } -\infty)$$

Granica niewłaściwa funkcji w punkcie wg Cauchyego

Funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** ∞ (lub $-\infty$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby $M > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla wszystkich $x \neq x_0$ spełniających nierówność $|x - x_0| < \delta$ zachodzi nierówność $f(x) > M$ (lub $f(x) < -M$).

Obliczanie granic

Działania arytmetyczne na granicach funkcji

Jeżeli $f(x)$ i $g(x)$ mają granice właściwe w punkcie x_0, to

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$

Obliczanie granic

Działania arytmetyczne na granicach funkcji

Jeżeli $f(x)$ i $g(x)$ mają granice właściwe w punkcie x_0, to

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right)$

Obliczanie granic

Działania arytmetyczne na granicach funkcji

Jeżeli $f(x)$ i $g(x)$ mają granice właściwe w punkcie x_0, to

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right)$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$, o ile $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

Obliczanie granic

Działania arytmetyczne na granicach funkcji

Jeżeli $f(x)$ i $g(x)$ mają granice właściwe w punkcie x_0, to

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, o ile $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

Obliczanie granic

Działania arytmetyczne na granicach funkcji

Jeżeli $f(x)$ i $g(x)$ mają granice właściwe w punkcie x_0, to

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}[c\cdot f(x)] = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, gdzie $c\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, o ile $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$
- Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ i $\lim\limits_{y\to y_0} h(y) = q$ to $\lim\limits_{x\to x_0} h(f(x)) = q$

Obliczanie granic - tak praktycznie

1. Skorzystaj z def. Heinego, czyli najpierw podstaw $x = x_0$ z nadzieją, że wyjdzie liczba (lub $\pm\infty$)

Obliczanie granic - tak praktycznie

1. Skorzystaj z def. Heinego, czyli najpierw podstaw $x = x_0$ z nadzieją, że wyjdzie liczba (lub $\pm\infty$)
2. A co jeżeli wyjdzie symbol nieoznaczony ?

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^{\infty}], \quad [\infty^{0}], \quad [0^{0}]$$

Obliczanie granic - tak praktycznie

1. Skorzystaj z def. Heinego, czyli najpierw podstaw $x = x_0$ z nadzieją, że wyjdzie liczba (lub $\pm\infty$)
2. A co jeżeli wyjdzie symbol nieoznaczony ?

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^\infty], \quad [\infty^0], \quad [0^0]$$

- uprość wyrażenie

Obliczanie granic - tak praktycznie

1. Skorzystaj z def. Heinego, czyli najpierw podstaw $x = x_0$ z nadzieją, że wyjdzie liczba (lub $\pm\infty$)
2. A co jeżeli wyjdzie symbol nieoznaczony ?

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^{\infty}], \quad [\infty^0], \quad [0^0]$$

- uprość wyrażenie
- wykorzystaj jedną ze znanych granic

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Obliczanie granic - tak praktycznie

1. Skorzystaj z def. Heinego, czyli najpierw podstaw $x = x_0$ z nadzieją, że wyjdzie liczba (lub $\pm\infty$)
2. A co jeżeli wyjdzie symbol nieoznaczony ?

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^\infty], \quad [\infty^0], \quad [0^0]$$

- uprość wyrażenie
- wykorzystaj jedną ze znanych granic

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

- użyj twierdzenia o trzech funkcjach

Twierdzenie o dwóch policjantach i pijaku

Jeżeli funkcje f, g i h są takie, że $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dla $x \in S(x_0, r)$ oraz

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = g$$

to

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g$$

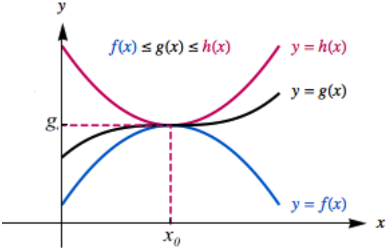
Twierdzenie o dwóch policjantach i pijaku

Jeżeli funkcje f, g i h są takie, że $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dla $x \in S(x_0, r)$ oraz

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = g$$

to

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g$$

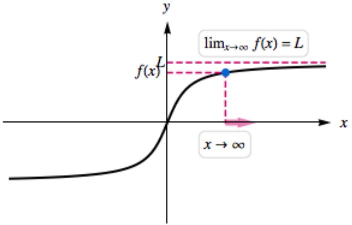


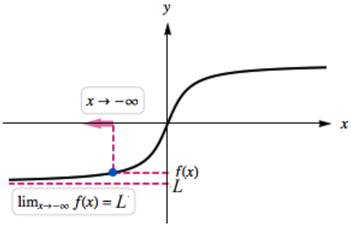
Granice w nieskończoności

Definicje w skrócie *(reszta słów jest w książkach)*

- **granica właściwa** – dla każdego ciągu $x_n \to \infty$ $(x_n \to -\infty)$, $f(x_n) \to L$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = L\right)$$



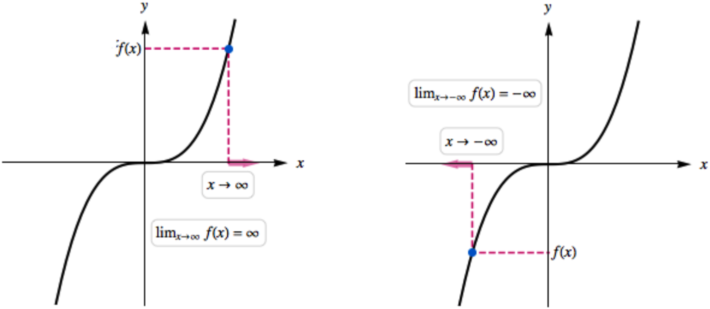


Granice w nieskończoności

Definicje w skrócie *(reszta słów jest w książkach)*

- **granica niewłaściwa** – dla każdego ciągu $x_n \to \infty$ ($x_n \to -\infty$), $f(x_n) \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \quad \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty\right)$$



Obliczanie granic w nieskończoności

- Postępujemy tak jak przy obliczaniu granic ciągów
- Uwaga na granice w $-\infty$
- Korzystamy z tw. o trzech i dwóch ciągach
- $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$
- Twierdzenie: *Iloczyn ciągu zbieżnego do zera i ciągu ograniczonego jest ciągiem zbieżnym do zera.*

Granice jednostronne funkcji

Granice jednostronne

Granice jednostronne

Definicje wg Heinego w skrócie

- **granica lewostronna** w pkcie x_0 – dla każdego ciągu $x_n \to x_0^-$ ciąg $f(x_n) \to g$ (lub ∞)

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g \text{ (lub } \infty)$$

- **granica prawostronna** w pkcie x_0 – dla każdego ciągu $x_n \to x_0^+$ ciąg $f(x_n) \to g$ (lub ∞)

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g \text{ (lub } \infty)$$

Związek pomiędzy granicami

Warunek konieczny i wystarczający istnienia granicy

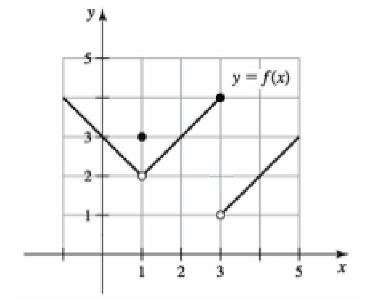
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \quad \iff \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = g \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = g$$

Związek pomiędzy granicami

Warunek konieczny i wystarczający istnienia granicy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = g \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = g$$

Przykład



$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to 3} f(x) = \frown$$

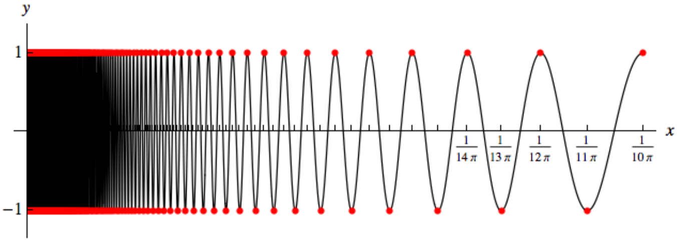
$$f(1) = 3 \qquad f(3) = 4$$

Czy granica jednostronna zawsze istnieje ?

$$\lim_{x \to 0^+} \cos \frac{1}{x} = ?$$

Czy granica jednostronna zawsze istnieje ?

$$\lim_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{x} =?$$

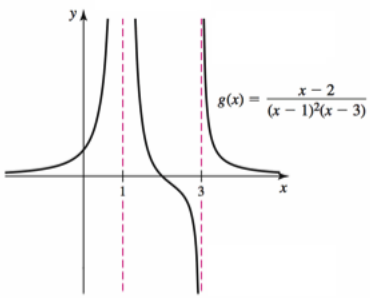


Jeżeli granica jednostronna jest niewłaściwa ...

Asymptota pionowa

Mówimy, że prosta $x = x_0$ jest **asymptotą pionową** funkcji jeżeli

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$



Ciągłość funkcji

Ciągłość funkcji w punkcie

Definicja

Niech funkcja f będzie określona w otoczeniu $U(x_0, r)$.
Funkcja jest **ciągła w punkcie** x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Inaczej mówimy, że funkcja jest **nieciągła** w punkcie x_0.

Ciągłość funkcji w punkcie

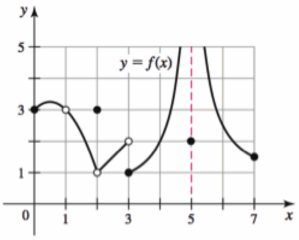
Definicja

Niech funkcja f będzie określona w otoczeniu $U(x_0, r)$.
Funkcja jest **ciągła w punkcie** x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

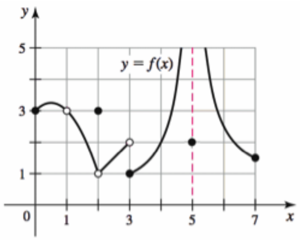
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Inaczej mówimy, że funkcja jest **nieciągła** w punkcie x_0.

Jeżeli funkcja jest określona tylko w lewostronnym (lub prawostronnym) otoczeniu $U_-(x_0, r)$ (lub $U_+(x_0, r)$), wówczas mówimy o **ciągłości lewo– i prawostronnej**.

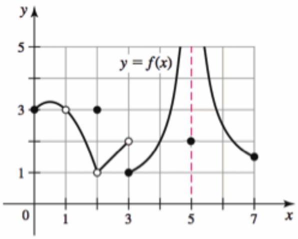


Punkty nieciągłości



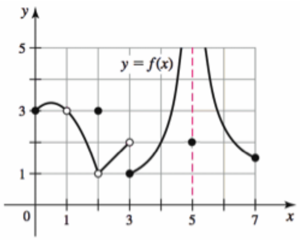
Punkty nieciągłości

- $x = 2$:



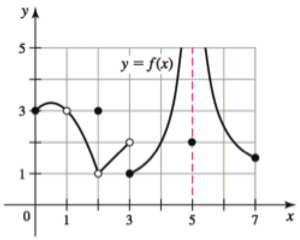
Punkty nieciągłości

- $x = 2: \quad f(2) = 3 \neq \lim_{x \to 2} f(x) = 1$



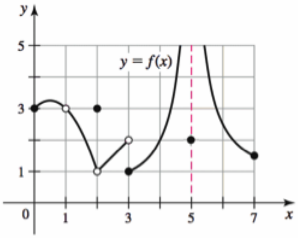
Punkty nieciągłości

- $x = 2: \quad f(2) = 3 \neq \lim_{x \to 2} f(x) = 1$
- $x = 3:$



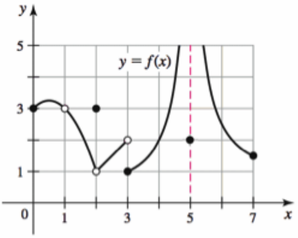
Punkty nieciągłości

- $x = 2: \quad f(2) = 3 \neq \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$
- $x = 3: \quad \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2 \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$



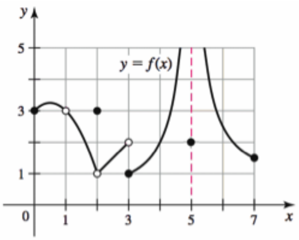
Punkty nieciągłości

- $x = 2: \quad f(2) = 3 \neq \lim_{x\to 2} f(x) = 1$
- $x = 3: \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$
- $x = 5:$



Punkty nieciągłości

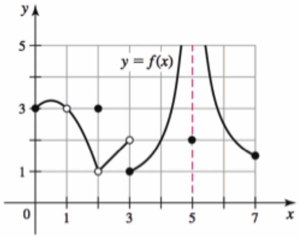
- $x = 2: \quad f(2) = 3 \neq \lim_{x \to 2} f(x) = 1$
- $x = 3: \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$
- $x = 5: \quad \lim_{x \to 5} f(x) = \infty$



Punkty nieciągłości

- $x = 2: \quad f(2) = 3 \neq \lim_{x \to 2} f(x) = 1$
- $x = 3: \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$
- $x = 5: \quad \lim_{x \to 5} f(x) = \infty$

Rodzaje punktów nieciągłości

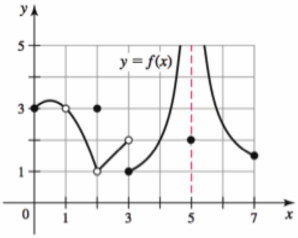


Punkty nieciągłości

- $x = 2:\quad f(2) = 3 \neq \lim_{x\to 2} f(x) = 1$
- $x = 3:\quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$
- $x = 5:\quad \lim_{x\to 5} f(x) = \infty$

Rodzaje punktów nieciągłości

$x = 2, x = 3$: pierwszego rodzaju,



Punkty nieciągłości

- $x = 2: \quad f(2) = 3 \neq \lim_{x \to 2} f(x) = 1$
- $x = 3: \quad \lim_{x \to 3^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$
- $x = 5: \quad \lim_{x \to 5} f(x) = \infty$

Rodzaje punktów nieciągłości

$x = 2, x = 3$: pierwszego rodzaju, $\quad x = 5$: drugiego rodzaju

Jeżeli f i g są ciągłe w punkcie x_0, to następujące funkcje są ciągłe w x_0.

- $f \pm g$
- $c \cdot f$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$, o ile $g(x_0) \neq 0$
- $f^{n/m}$, $f(x_0) \geq 0$ dla m – parzyst.

Jeżeli f i g są ciągłe w punkcie x_0, to następujące funkcje są ciągłe w x_0.

- $f \pm g$
- $c \cdot f$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$, o ile $g(x_0) \neq 0$
- $f^{n/m}$, $f(x_0) \geq 0$ dla $m -$ parzyst.

- Jeżeli g is jest ciągła w x_0 i f jest ciągła w $g(x_0)$, to funkcja złożona $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ jest ciągła w x_0.

Definicja

Funkcja jest **ciągła w przedziale** jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Definicja

Funkcja jest **ciągła w przedziale** jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.
Funkcja jest **ciągła w dziedzinie** jeżeli jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

Definicja

Funkcja jest **ciągła w przedziale** jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.
Funkcja jest **ciągła w dziedzinie** jeżeli jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

Funkcje ciągłe w swoich dziedzinach

wielomiany, funkcje wymierne, potęgowe, pierwiastkowe, trygonometryczne, cyklometryczne, wykładnicze, logarytmiczne

Definicja

Funkcja jest **ciągła w przedziale** jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.
Funkcja jest **ciągła w dziedzinie** jeżeli jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

Funkcje ciągłe w swoich dziedzinach

wielomiany, funkcje wymierne, potęgowe, pierwiastkowe, trygonometryczne, cyklometryczne, wykładnicze, logarytmiczne

Ciągłość funkcji odwrotnej

Jeżeli f jest ciągła i rosnąca (lub malejąca) w przedziale $A \subset \mathbb{R}$ to funkcja odwrotna $f^{-1}(A)$ jest ciągła i rosnąca (lub malejąca) w przedziale $f(A)$.