Rachunek całkowy

Odwracamy proces różniczkowania

Dana jest funkcja f, szukamy funkcji F, której pochodną jest f, tzn.

$$F' = f$$

Odwracamy proces różniczkowania

Dana jest funkcja f, szukamy funkcji F, której pochodną jest f, tzn.

$$F' = f$$

Definicja

Funkcja F jest **funkcją pierwotną** funkcji f na przedziale I, jeżeli

$$F'(x) = f(x), \quad \text{dla każdego} \quad x \in I$$

Myślmy wstecz

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) =$$

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x,$$

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x, \quad \text{bo } F'(x) = 1 = f(x)$$

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x, \quad \text{bo } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad F(x) =$$

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x, \quad \text{bo } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x^2,$$

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \implies F(x) = x, \quad \text{bo } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \implies F(x) = x^2, \quad \text{bo } F'(x) = 2x = f(x)$$

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x, \quad \text{bo } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x^2, \quad \text{bo } F'(x) = 2x = f(x)$$

$$f(x) = \cos x \quad \Longrightarrow \quad F(x) =$$

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x, \quad \text{bo } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x^2, \quad \text{bo } F'(x) = 2x = f(x)$$

$$f(x) = \cos x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \sin x,$$

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x, \quad \text{bo } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x^2, \quad \text{bo } F'(x) = 2x = f(x)$$

$$f(x) = \cos x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \sin x, \quad \text{bo } F'(x) = \cos x = f(x)$$

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x, \quad \text{bo } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x^2, \quad \text{bo } F'(x) = 2x = f(x)$$

$$f(x) = \cos x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \sin x, \quad \text{bo } F'(x) = \cos x = f(x)$$

Pytanie

Czy funkcja f ma więcej niż jedną funkcję pierwotną ?

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x, \quad \text{bo } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x^2, \quad \text{bo } F'(x) = 2x = f(x)$$

$$f(x) = \cos x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \sin x, \quad \text{bo } F'(x) = \cos x = f(x)$$

Pytanie

Czy funkcja f ma więcej niż jedną funkcję pierwotną ?

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x + 1,$$

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x, \quad \text{bo } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x^2, \quad \text{bo } F'(x) = 2x = f(x)$$

$$f(x) = \cos x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \sin x, \quad \text{bo } F'(x) = \cos x = f(x)$$

Pytanie

Czy funkcja f ma więcej niż jedną funkcję pierwotną ?

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x + 1, \quad \text{spr. } F'(x) = 1 = f(x)$$

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \implies F(x) = x, \quad \text{bo } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \implies F(x) = x^2, \quad \text{bo } F'(x) = 2x = f(x)$$

$$f(x) = \cos x \implies F(x) = \sin x, \quad \text{bo } F'(x) = \cos x = f(x)$$

Pytanie

Czy funkcja f ma więcej niż jedną funkcję pierwotną ?

$$f(x) = 1 \implies F(x) = x + 1, \quad \text{spr. } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \implies F(x) = x^2 - 11,$$

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x, \quad \text{bo } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x^2, \quad \text{bo } F'(x) = 2x = f(x)$$

$$f(x) = \cos x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \sin x, \quad \text{bo } F'(x) = \cos x = f(x)$$

Pytanie

Czy funkcja f ma więcej niż jedną funkcję pierwotną ?

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x + 1, \quad \text{spr. } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x^2 - 11, \quad \text{spr. } F'(x) = 2x = f(x)$$

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x, \quad \text{bo } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x^2, \quad \text{bo } F'(x) = 2x = f(x)$$

$$f(x) = \cos x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \sin x, \quad \text{bo } F'(x) = \cos x = f(x)$$

Pytanie

Czy funkcja f ma więcej niż jedną funkcję pierwotną ?

$$f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x + 1, \quad \text{spr. } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = x^2 - 11, \quad \text{spr. } F'(x) = 2x = f(x)$$

$$f(x) = \cos x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \sin x + 2023,$$

Myślmy wstecz

$$f(x) = 1 \implies F(x) = x, \quad \text{bo } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \implies F(x) = x^2, \quad \text{bo } F'(x) = 2x = f(x)$$

$$f(x) = \cos x \implies F(x) = \sin x, \quad \text{bo } F'(x) = \cos x = f(x)$$

Pytanie

Czy funkcja f ma więcej niż jedną funkcję pierwotną ?

$$f(x) = 1 \implies F(x) = x + 1, \quad \text{spr. } F'(x) = 1 = f(x)$$

$$f(x) = 2x \implies F(x) = x^2 - 11, \quad \text{spr. } F'(x) = 2x = f(x)$$

$$f(x) = \cos x \implies F(x) = \sin x + 2023, \quad \text{spr. } F'(x) = \cos x = f(x)$$

Rodzina funkcji piewotnych

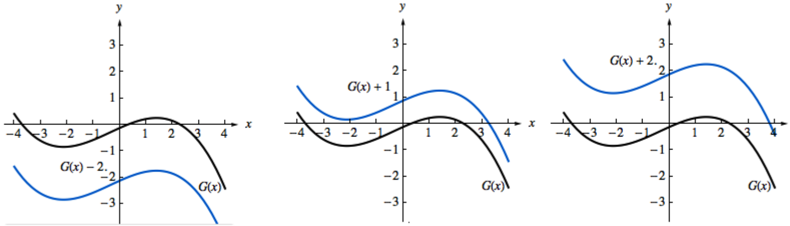
Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Wówczas

1. $G(x) = F(x) + C_0$ jest funkcją pierwotną funkcji f na I.

Rodzina funkcji piewotnych

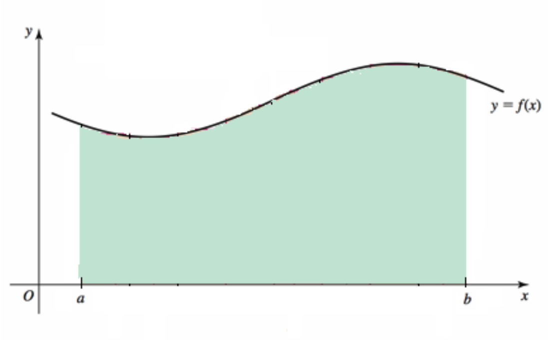
Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Wówczas

1. $G(x) = F(x) + C_0$ jest funkcją pierwotną funkcji f na I.
2. każdą funkcję pierwotną funkcji f na I można przedstawić w postaci $F(x) + C$

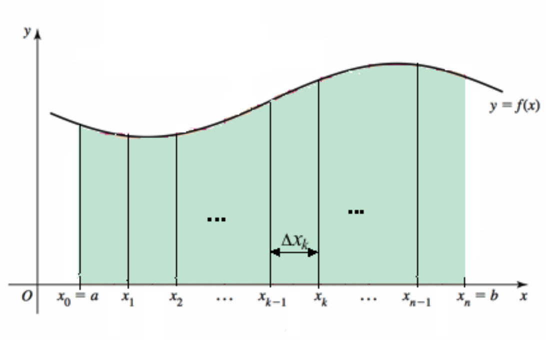


Jeżeli *G* jest dowolną funkcją pierwotną *g*, to wykres *y=G(x)+C* jest wykresem *y=G(x)* przesuniętym wzdłuż osi OY

Zadanie: Obliczyć pole powierzchni pod krzywą

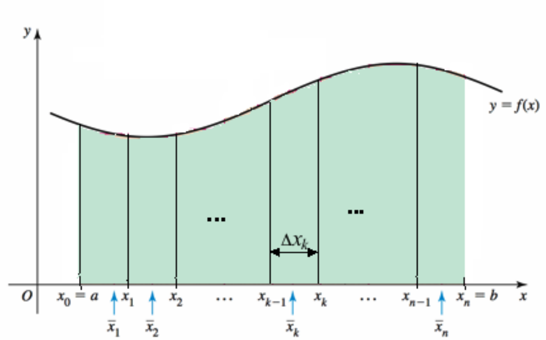


Zadanie: Obliczyć pole powierzchni pod krzywą



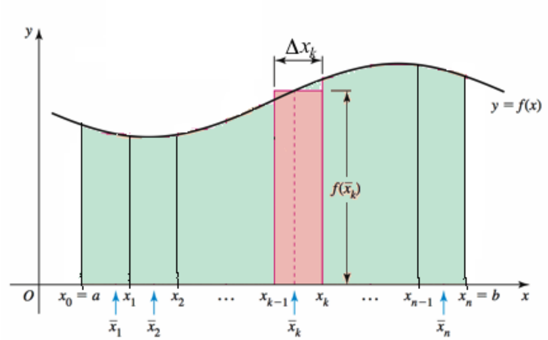
- Dzielimy $[a, b]$ na n podprzedziałów szerokości Δx_k,
  $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Zadanie: Obliczyć pole powierzchni pod krzywą



- Wybieramy punkty pośrednie $\overline{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$

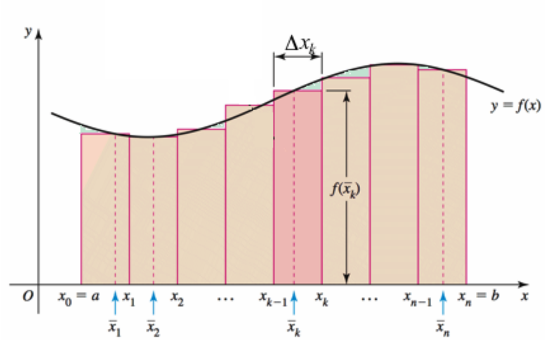
Zadanie: Obliczyć pole powierzchni pod krzywą



- W każdym podprzedziale tworzymy prostokąt o podstawie $[x_{k-1}, x_k]$ i wysokości $f(\overline{x}_k)$

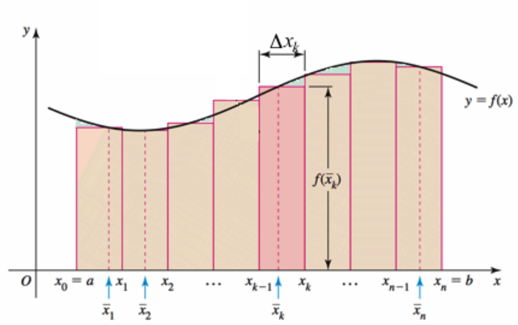
$$A_k = f(\overline{x}_k) \cdot \Delta x_k$$

Zadanie: Obliczyć pole powierzchni pod krzywą



- Sumujemy pola prostokątów, co daje przybliżone pole pod krzywą

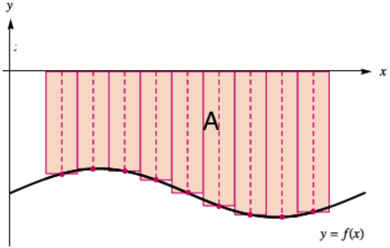
$$|A| \approx f(\overline{x}_1) \cdot \Delta x_1 + f(\overline{x}_2) \cdot \Delta x_2 + \cdots + f(\overline{x}_n) \cdot \Delta x_n$$



Definicja

Sumą całkową Riemanna funkcji f odpowiadającą podziałowi $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ przedziału $[a, b]$ oraz punktom pośrednim $\overline{x}_k$ tego podziału nazywamy liczbę

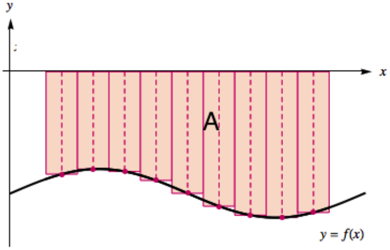
$$\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k) \cdot \Delta x_k = f(\overline{x}_1) \cdot \Delta x_1 + f(\overline{x}_2) \cdot \Delta x_2 + \cdots + f(\overline{x}_n) \cdot \Delta x_n$$

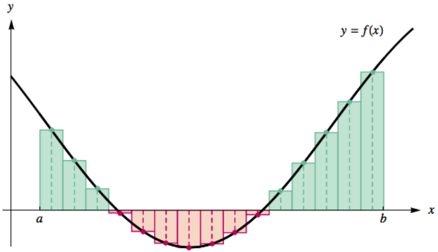


Uwagi

- Jeżeli $f(x) < 0$ na $[a, b]$, to suma całkowa Riemanna przybliża "zorientowane pole" między wykresem $f(x)$ i osią OX.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k) \cdot \Delta x_k \approx -|A|$$





Uwagi

- Jeżeli $f(x) < 0$ na $[a, b]$, to suma całkowa Riemanna przybliża "zorientowane pole" między wykresem $f(x)$ i osią OX.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k) \cdot \Delta x_k \approx -|A|$$

- Jeżeli $f(x)$ zmienia znak $[a, b]$, to suma całkowa przybliża pole obszarów zielonych $(f(x) > 0)$ pomniejszone o pole obszarów czerwonych $(f(x) < 0)$

Całka oznaczona

Definicja

Całkę oznaczoną Riemanna z funkcji f na przedziale $[a, b]$ oznaczamy i definiujemy następująco

Całka oznaczona

Definicja

Całkę oznaczoną Riemanna z funkcji f na przedziale $[a, b]$ oznaczamy i definiujemy następująco

$$\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k) \cdot \Delta x_k$$

Całka oznaczona

Definicja

Całkę oznaczoną Riemanna z funkcji f na przedziale $[a, b]$ oznaczamy i definiujemy następująco

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k) \cdot \Delta x_k$$

gdzie $\Delta = \max \Delta x_k$,

Całka oznaczona

Definicja

Całkę oznaczoną Riemanna z funkcji f na przedziale $[a, b]$ oznaczamy i definiujemy następująco

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k) \cdot \Delta x_k$$

gdzie $\Delta = \max \Delta x_k$,

Całka oznaczona

Definicja

Całkę oznaczoną Riemanna z funkcji f na przedziale $[a, b]$ oznaczamy i definiujemy następująco

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\cdot \Delta x_k$$

gdzie $\Delta = \max \Delta x_k$, o ile granica ta istnieje oraz nie zależy od sposobu podziałów P_n ani od sposobów wyboru punktów pośrednich $\overline{x}_k$.

Całka oznaczona

Definicja

Całkę oznaczoną Riemanna z funkcji f na przedziale $[a,b]$ oznaczamy i definiujemy następująco

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\cdot \Delta x_k$$

gdzie $\Delta = \max \Delta x_k$, o ile granica ta istnieje oraz nie zależy od sposobu podziałów P_n ani od sposobów wyboru punktów pośrednich $\overline{x}_k$.

Interpretacja geometryczna

Powyższa całka to "zorientowane pole" obszaru między wykresem $f(x)$ a osią OX.

Całka oznaczona

Warunek konieczny całkowalności

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, to jest funkcją ograniczoną na tym przedziale.

Całka oznaczona

Warunek konieczny całkowalności

Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, to jest funkcją ograniczoną na tym przedziale.

Warunek dostateczny całkowalności

Jeżeli funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a, b]$ i ma na tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju, to jest na tym przedziale całkowalna.

Całka oznaczona

Własności

Całka oznaczona

Własności

- $\int_a^a f(x)dx = 0$

Całka oznaczona

Własności

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Całka oznaczona

Własności

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Całka oznaczona

Własności

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Całka oznaczona

Własności

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$

Definicja

Dla dowolnego $x \in [a, b]$ określamy funkcję

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

nazywaną **funkcją górnej granicy całkowania**

Definicja

Dla dowolnego $x \in [a, b]$ określamy funkcję

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

nazywaną **funkcją górnej granicy całkowania**

Twierdzenie główne rachunku całkowego, część I

Jeżeli f jest ciągła na $[a, b]$ to funkcja

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

jest różniczkowalna i ma pochodną

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Twierdzenie główne rachunku całkowego, część II

Twierdzenie główne rachunku całkowego, część II

Jeżeli f jest ciągła na $[a, b]$ i F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f na tym przedziale, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Wzór ten nazywamy wzorem Newtona-Leibniza.

Twierdzenie główne rachunku całkowego, część II

Jeżeli f jest ciągła na $[a, b]$ i F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f na tym przedziale, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Wzór ten nazywamy wzorem Newtona-Leibniza.

Notacja

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Symbol $\dfrac{d}{dx}(f)$ oznacza *znajdź pochodną funkcji* f.

Potrzebny jest nam analogiczny symbol, który będzie oznaczał *znajdź funkcje pierwotne funkcji* f.

Symbol $\frac{d}{dx}(f)$ oznacza *znajdź pochodną funkcji* f.

Potrzebny jest nam analogiczny symbol, który będzie oznaczał *znajdź funkcje pierwotne funkcji* f.

Definicja

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. **Całką nieoznaczoną**, nazywamy

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

Całkowanie i Różniczkowanie to procesy odwrotne

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

Całkowanie i Różniczkowanie to procesy odwrotne

$f(x)$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

Całkowanie i Różniczkowanie to procesy odwrotne

$$\int f(x) dx$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

Całkowanie i Różniczkowanie to procesy odwrotne

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x) dx\right]$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

Całkowanie i Różniczkowanie to procesy odwrotne

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \left[\int f(x)dx\right]'$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

Całkowanie i Różniczkowanie to procesy odwrotne

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \left[\int f(x)dx\right]' = [F(x)+C]'$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

Całkowanie i Różniczkowanie to procesy odwrotne

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \left[\int f(x)dx\right]' = [F(x)+C]' = F'(x) =$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

Całkowanie i Różniczkowanie to procesy odwrotne

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \left[\int f(x)dx\right]' = [F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

Całkowanie i Różniczkowanie to procesy odwrotne

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \left[\int f(x)dx\right]' = [F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$$

$F(x)$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

Całkowanie i Różniczkowanie to procesy odwrotne

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \left[\int f(x)dx\right]' = [F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}[F(x)]$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

Całkowanie i Różniczkowanie to procesy odwrotne

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \left[\int f(x)dx\right]' = [F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$$

$$\int \frac{d}{dx}[F(x)]dx$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

Całkowanie i Różniczkowanie to procesy odwrotne

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \left[\int f(x)dx\right]' = [F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$$

$$\int \frac{d}{dx}[F(x)]dx = \int F'(x)dx =$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

Całkowanie i Różniczkowanie to procesy odwrotne

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \left[\int f(x)dx\right]' = [F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$$

$$\int \frac{d}{dx}[F(x)]dx = \int F'(x)dx = \int f(x)dx =$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad F'(x) = f(x)$$

Całkowanie i Różniczkowanie to procesy odwrotne

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \left[\int f(x)dx\right]' = [F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$$

$$\int \frac{d}{dx}[F(x)]dx = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

Całki nieoznaczone funkcji elementarnych

- $\displaystyle\int 0\,dx = C$
- $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$
- $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$

Całki nieoznaczone funkcji elementarnych

- $\displaystyle\int 0 \, dx = C$
- $\displaystyle\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$
- $\displaystyle\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$
- $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$

Całki nieoznaczone funkcji elementarnych

- $\int 0\,dx = C$
- $\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$
- $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

Całki nieoznaczone funkcji elementarnych

- $\int 0 \, dx = C$
- $\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{ctg} x + C$

Całki nieoznaczone funkcji elementarnych

- $\displaystyle\int 0\,dx = C$
- $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$
- $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$
- $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

Liniowość całki

$$\int [f(x) \pm g(x)] \; dx = \int f(x) \; dx \pm \int g(x) \; dx$$

$$\int k \cdot f(x) \; dx = k \cdot \int f(x) \; dx$$

Jak scałkować iloczyn funkcji ?

Jak scałkować iloczyn funkcji ?

$$\int x \cdot e^x \, dx = ? \qquad \int x \cdot \sin\left(x^2\right) dx = ?$$

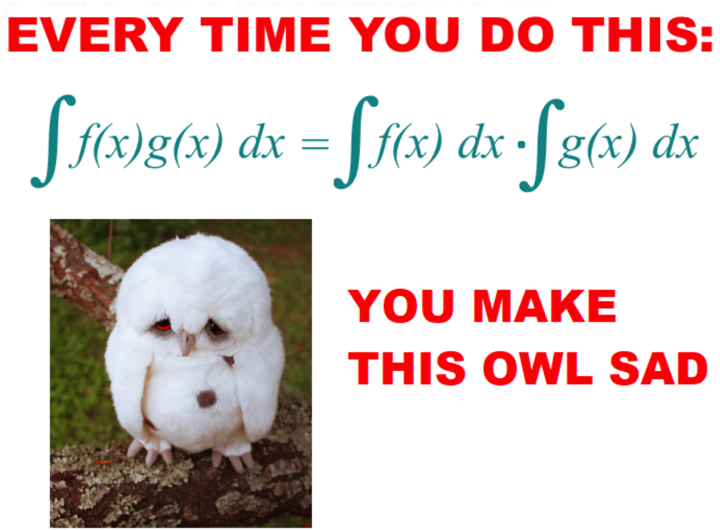
Jak scałkować iloczyn funkcji ?

$$\int x \cdot e^x \, dx = ? \qquad \int x \cdot \sin\left(x^2\right) dx = ?$$

Uwaga !!!

$$\int f(x) \cdot g(x) \, dx \neq \int f(x) \, dx \cdot \int g(x) \, dx$$

Jak scałkować iloczyn funkcji ?



Jak scałkować iloczyn funkcji ?

$$\int x \cdot e^x \, dx = ? \qquad \int x \cdot \sin\left(x^2\right) \, dx = ?$$

Uwaga !!!

$$\int f(x) \cdot g(x) \, dx \neq \int f(x) \, dx \cdot \int g(x) \, dx$$

Zła wiadomość

Nie ma wzoru na całkę iloczynu czy całkę ilorazu, który można zastosować we wszystkich przypadkach.

Jak scałkować iloczyn funkcji ?

$$\int x \cdot e^x \, dx = ? \qquad \int x \cdot \sin\left(x^2\right) dx = ?$$

Uwaga !!!

$$\int f(x) \cdot g(x) \, dx \neq \int f(x) \, dx \cdot \int g(x) \, dx$$

Zła wiadomość

Nie ma wzoru na całkę iloczynu czy całkę ilorazu, który można zastosować we wszystkich przypadkach.

Pocieszająca wiadomość

Jest kilka *metod całkowania* iloczynów i ilorazów funkcji.

Metody całkowania - całkowanie przez części

- Dla danych funkcji u i v, mamy wzór na pochodną iloczynu

$$\frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Metody całkowania - całkowanie przez części

- Dla danych funkcji u i v, mamy wzór na pochodną iloczynu

$$\frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

- Całkujemy obie strony

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x)\, dx + \int u(x) \cdot v'(x)\, dx$$

Całkowanie przez części

Jeżeli funkcje u i v mają na pewnym przedziale ciągłe pochodne u' i v', to

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

na tym przedziale.

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Metody całkowania - całkowanie przez podstawienie

- Pochodna funkcji złożonej $F(g(x))$, gdzie $F' = f$

Metody całkowania - całkowanie przez podstawienie

- Pochodna funkcji złożonej $F(g(x))$, gdzie $F' = f$

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] =$$

Metody całkowania - całkowanie przez podstawienie

- Pochodna funkcji złożonej $F(g(x))$, gdzie $F' = f$

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = \underbrace{F'(g(x))} \cdot$$

Metody całkowania - całkowanie przez podstawienie

- Pochodna funkcji złożonej $F(g(x))$, gdzie $F' = f$

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = \underbrace{F'(g(x))} \cdot g'(x) =$$

Metody całkowania - całkowanie przez podstawienie

- Pochodna funkcji złożonej $F(g(x))$, gdzie $F' = f$

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = \underbrace{F'(g(x))} \cdot g'(x) =$$

Metody całkowania - całkowanie przez podstawienie

- Pochodna funkcji złożonej $F(g(x))$, gdzie $F' = f$

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = \underbrace{F'(g(x))}_{f(g(x))} \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Metody całkowania - całkowanie przez podstawienie

- Pochodna funkcji złożonej $F(g(x))$, gdzie $F' = f$

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = \underbrace{F'(g(x))}_{f(g(x))} \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Całkujemy obie strony

Metody całkowania - całkowanie przez podstawienie

- Pochodna funkcji złożonej $F(g(x))$, gdzie $F' = f$

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = \underbrace{F'(g(x))}_{f(g(x))} \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Całkujemy obie strony

$$\int \frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right]\, dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

Metody całkowania - całkowanie przez podstawienie

- Pochodna funkcji złożonej $F(g(x))$, gdzie $F' = f$

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = \underbrace{F'(g(x))}_{f(g(x))} \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Całkujemy obie strony

$$\int \frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right]\, dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx =$$

Metody całkowania - całkowanie przez podstawienie

- Pochodna funkcji złożonej $F(g(x))$, gdzie $F' = f$

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = \underbrace{F'(g(x))}_{f(g(x))} \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Całkujemy obie strony

$$\int \frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right]\, dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

Całkowanie przez podstawienie (Zamiana zmiennych)

Niech $u = g(x)$, gdzie g' jest ciągła na przedziale I i niech f będzie ciągła na zbiorze wartości g. Wówczas,

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{f(u)} \cdot \underbrace{g'(x)\, dx}_{du} =$$

Całkowanie przez podstawienie (Zamiana zmiennych)

Niech $u = g(x)$, gdzie g' jest ciągła na przedziale I i niech f będzie ciągła na zbiorze wartości g. Wówczas,

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{f(u)} \cdot \underbrace{g'(x)\, dx}_{du} = \int f(u)\, du =$$

Całkowanie przez podstawienie (Zamiana zmiennych)

Niech $u = g(x)$, gdzie g' jest ciągła na przedziale I i niech f będzie ciągła na zbiorze wartości g. Wówczas,

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{f(u)} \cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du = F(u) + C =$$

Całkowanie przez podstawienie (Zamiana zmiennych)

Niech $u = g(x)$, gdzie g' jest ciągła na przedziale I i niech f będzie ciągła na zbiorze wartości g. Wówczas,

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{f(u)} \cdot \underbrace{g'(x)\, dx}_{du} = \int f(u)\, du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Całkowanie przez podstawienie (Zamiana zmiennych)

Niech $u = g(x)$, gdzie g' jest ciągła na przedziale I i niech f będzie ciągła na zbiorze wartości g. Wówczas,

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{f(u)} \cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u)\,du$$

$$\alpha = g(a), \quad \beta = g(b)$$

Metody całkowania

Funkcje wymierne $W(x) = \frac{L_m(x)}{M_n(x)}, \quad m < n$

Motywacja

Metody całkowania

Funkcje wymierne $W(x) = \frac{L_m(x)}{M_n(x)}, \quad m < n$

Motywacja

funkcja wymierna — *rozłożona na ułamki proste*

$$\frac{3x}{x^2+2x-8} \xrightarrow{\text{rozkład na ułamki proste}} \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+4}$$

Metody całkowania

Funkcje wymierne $W(x) = \frac{L_m(x)}{M_n(x)}, \quad m < n$

Motywacja

funkcja wymierna

$$\frac{3x}{x^2+2x-8} \xrightarrow{\text{rozkład na ułamki proste}} \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+4}$$

rozłożona na ułamki proste

Trudne do scałkowania:

$$\int \frac{3x}{x^2+2x-8}\,dx$$

Łatwe do scałkowania:

$$\int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+4}\,dx$$

Metody całkowania

Funkcje wymierne $W(x) = \frac{L_m(x)}{M_n(x)}, \quad m < n$

Definicja

Funkcję wymierną postaci

$$\frac{A}{(x-a)^n}$$

nazywamy **ułamkiem prostym pierwszego rodzaju**.
Funkcję wymierną postaci

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$$

nazywamy **ułamkiem prostym drugiego rodzaju** $(p^2 - 4q < 0)$.

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych.

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych.
Jeżeli mianownik po rozkładzie na czynniki przyjmuje postać

$$M_n(x) = a(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_m)^{k_m}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych.
Jeżeli mianownik po rozkładzie na czynniki przyjmuje postać

$$M_n(x) = a(x-a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_m)^{k_m} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

to funkcję wymierną przedstawiamy jako sumę $k_1 + k_2 + \cdots + k_m$ ułamków prostych pierwszego rodzaju oraz $l_1 + l_2 + \cdots + l_s$ ułamków prostych drugiego rodzaju, przy czym

Rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste

Każdą funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych.
Jeżeli mianownik po rozkładzie na czynniki przyjmuje postać

$$M_n(x) = a(x-a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x-a_m)^{k_m} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

to funkcję wymierną przedstawiamy jako sumę $k_1 + k_2 + \dots + k_m$ ułamków prostych pierwszego rodzaju oraz $l_1 + l_2 + \dots + l_s$ ułamków prostych drugiego rodzaju, przy czym

- czynnikowi $(x - a_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych pierwszego rodzaju postaci:

$$\frac{A_{i_1}}{x - a_i} + \frac{A_{i_2}}{(x - a_i)^2} + \dots + \frac{A_{i_{k_i}}}{(x - a_i)^{k_i}}$$

...

...

- czynnikowi $(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}$ odpowiada suma l_j ułamków prostych drugiego rodzaju postaci:

$$\frac{B_{j_1} x + C_{j_1}}{x^2 + p_j x + q_j} + \frac{B_{j_2} x + C_{j_2}}{(x^2 + p_j x + q_j)^2} + \cdots + \frac{B_{j_{l_j}} x + C_{j_{l_j}}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}}$$

Metody całkowania

Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju

$$\int \frac{A}{(x-a)^r}\,dx = \begin{cases} A \cdot \ln|x-a| + C, & r = 1 \\ \frac{A}{1-r}(x-a)^{1-r} + C, & r \geq 2 \end{cases}$$

Metody całkowania

Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju

$$\int \frac{A}{(x-a)^r}\,dx = \begin{cases} A \cdot \ln|x-a| + C, & r = 1 \\ \frac{A}{1-r}(x-a)^{1-r} + C, & r \geq 2 \end{cases}$$

Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^r}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^r}\,dx + \left(B - \frac{A \cdot p}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^r}\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}, n \geq 2}$$

Całki postaci $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$

Całki postaci $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$

$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$ Strategia

Całki postaci $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$

$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$	**Strategia**
m nieparzysta, $n \in \mathbb{R}$	"Odłącz" $\sin x$, pozostałą parzystą potęgę $\sin x$ zamień na $\cos x$ (z jedynki trygonomerycznej), użyj podstawienia $u = \cos x$.

Całki postaci $\displaystyle\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$

$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$	**Strategia**
m nieparzysta, $n \in \mathbb{R}$	"Odłącz" $\sin x$, pozostałą parzystą potęgę $\sin x$ zamień na $\cos x$ (z jedynki trygonomerycznej), użyj podstawienia $u = \cos x$.
n nieparzysta, $m \in \mathbb{R}$	"Odłącz" $\cos x$, pozostałą parzystą potęgę $\cos x$ zamień na $\sin x$, użyj podstawienia $u = \sin x$.

Całki postaci $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$

$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$	**Strategia**
m nieparzysta, $n \in \mathbb{R}$	"Odłącz" $\sin x$, pozostałą parzystą potęgę $\sin x$ zamień na $\cos x$ (z jedynki trygonomerycznej), użyj podstawienia $u = \cos x$.
n nieparzysta, $m \in \mathbb{R}$	"Odłącz" $\cos x$, pozostałą parzystą potęgę $\cos x$ zamień na $\sin x$, użyj podstawienia $u = \sin x$.
m i n są parzyste, nieujemne	Użyj wzorów na podwojone kąty $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$\int \boldsymbol{R}(\sin \boldsymbol{x}, \cos \boldsymbol{x})\ \boldsymbol{dx}$$

Własność R | **Strategia**

$$\int \boldsymbol{R}(\sin \boldsymbol{x}, \cos \boldsymbol{x})\ \boldsymbol{dx}$$

Własność R	**Strategia**
R nieparzysta względem $\sin x$	użyj podstawienia $u = \cos x$

$$\int \boldsymbol{R(\sin x, \cos x)\ dx}$$

Własność R	**Strategia**
R nieparzysta względem $\sin x$	użyj podstawienia $u = \cos x$
R nieparzysta względem $\cos x$	użyj podstawienia $u = \sin x$

$$\int \boldsymbol{R(\sin x, \cos x)\; dx}$$

Własność R	**Strategia**
R nieparzysta względem $\sin x$	użyj podstawienia $u = \cos x$
R nieparzysta względem $\cos x$	użyj podstawienia $u = \sin x$
R parzysta względem $\sin x$ i $\cos x$	użyj podstawienia $u = \operatorname{tg} x$, wówczas

$$\int \boldsymbol{R(\sin x, \cos x)\ dx}$$

Własność R	**Strategia**
R nieparzysta względem $\sin x$	użyj podstawienia $u = \cos x$
R nieparzysta względem $\cos x$	użyj podstawienia $u = \sin x$
R parzysta względem $\sin x$ i $\cos x$	użyj podstawienia $u = \operatorname{tg} x$, wówczas $x = \operatorname{arc\,tg} u\ ,\ dx = \frac{1}{1+u^2}du$ $\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$

$$\int \boldsymbol{R}(\sin \boldsymbol{x}, \cos \boldsymbol{x}) \; \boldsymbol{dx}$$

A gdy wszystko zawiedzie użyj *podstawienia uniwersalnego*

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$$

$$\int \boldsymbol{R}(\sin \boldsymbol{x}, \cos \boldsymbol{x}) \ \boldsymbol{dx}$$

A gdy wszystko zawiedzie użyj *podstawienia uniwersalnego*

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arc}\operatorname{tg} u \qquad dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Całkowanie niektórych funkcji niewymiernych

- $$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_k/q_k}\right) dx$$

  Podstawienie: $\dfrac{ax+b}{cx+d} = u^n, \quad n = NWW(q_1, \ldots, q_k)$

- $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$ Podstaw: $x = a\sin u$ lub $x = a\cos u$

- $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$ Podstaw: $x = a\cosh u$

- $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$ Podstaw: $x = a\,\mathrm{tg}\, u$ lub $x = a\sinh u$

Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

Jeżeli funkcja f jest nieograniczona w lewostronnym sąsiedztwie punktu b (lub a), ale jest całkowalna w każdym przedziale domkniętym zawartym w $[a, b)$ (lub $(a, b]$), wówczas

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

$$\left(\text{lub} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx\right)$$

Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

Jeżeli funkcja f jest określona na przedziale $[a, \infty)$ (lub $(-\infty, b]$) i całkowalna w każdym przedziale domkniętym $[a, t]$ (lub $[t, b]$) wówczas

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\, dx$$

$$\left(\text{lub} \quad \int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\, dx\right)$$

Zastosowania całek

Wartość średnia funkcji

Wartość średnia funkcji

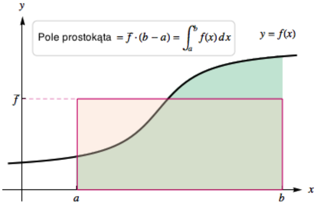
Wartością średnią całkowalnej funkcji f na przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Wartość średnia funkcji

Wartością średnią całkowalnej funkcji f na przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$



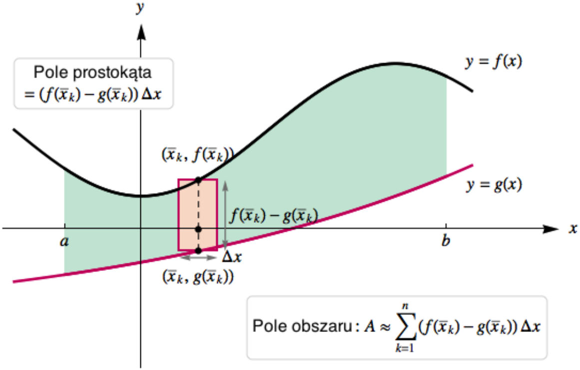
Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ to

$$\exists_{c \in [a,b]} \quad \overline{f} = f(c)$$

Pole pomiędzy krzywymi (Przypadek 1)

Pole figury ograniczonej prostymi $x = a, x = b$ oraz krzywymi $y = f(x), y = g(x)$, gdzie $f(x) \geq g(x)$ wyraża się wzorem

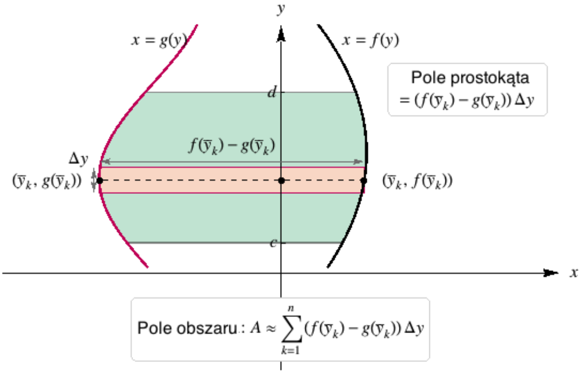
$$|A| = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$



Pole pomiędzy krzywymi (Przypadek 2)

Pole figury ograniczonej prostymi $y = c, y = d$ oraz krzywymi $x = f(y), x = g(y)$, gdzie $f(y) \geq g(y)$ wyraża się wzorem

$$|A| = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$



Objętość bryły

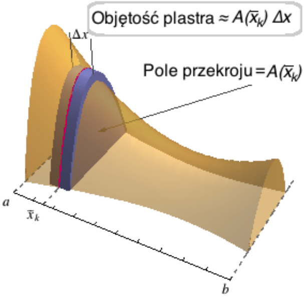
Niech $A(x)$ oznacza pole przekroju bryły V płaszczyzną prostopadłą do osi OX w punkcie $x \in [a, b]$ oraz niech A będzie całkowalna na przedziale $[a, b]$. Wtedy objętość bryły wyraża się wzorem

$$|V| =$$

Objętość bryły

Niech $A(x)$ oznacza pole przekroju bryły V płaszczyzną prostopadłą do osi OX w punkcie $x \in [a, b]$ oraz niech A będzie całkowalna na przedziale $[a, b]$. Wtedy objętość bryły wyraża się wzorem

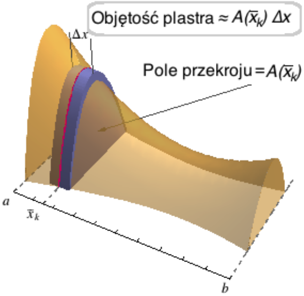
$$|V| = \qquad A(\overline{x}_k)\Delta x_k$$

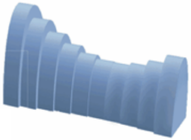


Objętość bryły

Niech $A(x)$ oznacza pole przekroju bryły V płaszczyzną prostopadłą do osi OX w punkcie $x \in [a, b]$ oraz niech A będzie całkowalna na przedziale $[a, b]$. Wtedy objętość bryły wyraża się wzorem

$$|V| = \qquad \sum_{k=1}^{n} A(\overline{x}_k)\Delta x_k$$

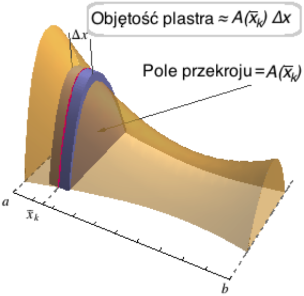


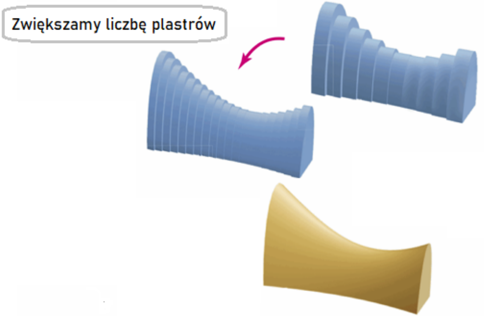


Objętość bryły

Niech $A(x)$ oznacza pole przekroju bryły V płaszczyzną prostopadłą do osi OX w punkcie $x \in [a, b]$ oraz niech A będzie całkowalna na przedziale $[a, b]$. Wtedy objętość bryły wyraża się wzorem

$$|V| = \sum_{k=1}^{n} A(\overline{x}_k)\Delta x_k$$

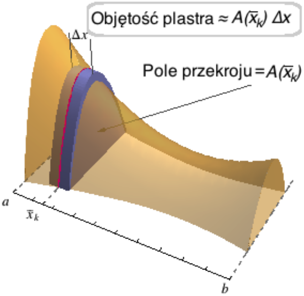


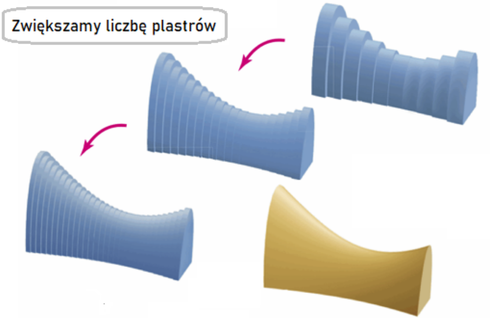


Objętość bryły

Niech $A(x)$ oznacza pole przekroju bryły V płaszczyzną prostopadłą do osi OX w punkcie $x \in [a, b]$ oraz niech A będzie całkowalna na przedziale $[a, b]$. Wtedy objętość bryły wyraża się wzorem

$$|V| = \sum_{k=1}^{n} A(\overline{x}_k)\Delta x_k$$

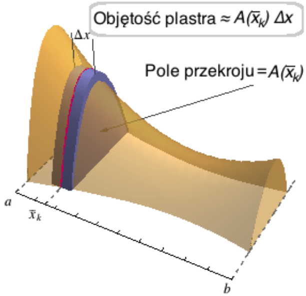


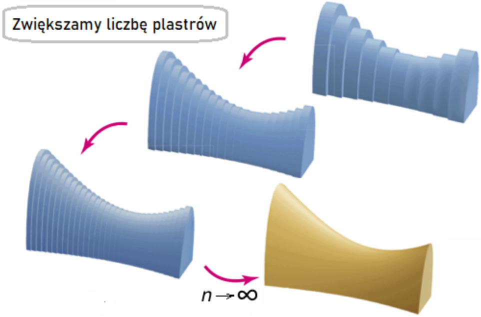


Objętość bryły

Niech $A(x)$ oznacza pole przekroju bryły V płaszczyzną prostopadłą do osi OX w punkcie $x \in [a, b]$ oraz niech A będzie całkowalna na przedziale $[a, b]$. Wtedy objętość bryły wyraża się wzorem

$$|V| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(\overline{x}_k)\Delta x_k$$

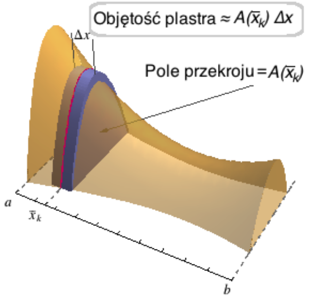


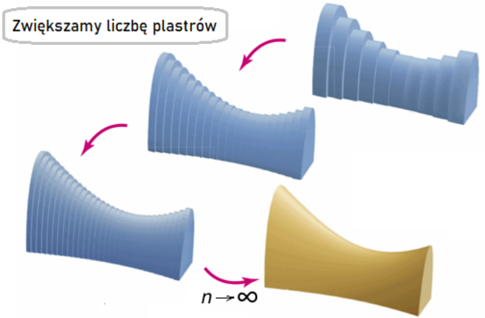


Objętość bryły

Niech $A(x)$ oznacza pole przekroju bryły V płaszczyzną prostopadłą do osi OX w punkcie $x \in [a,b]$ oraz niech A będzie całkowalna na przedziale $[a,b]$. Wtedy objętość bryły wyraża się wzorem

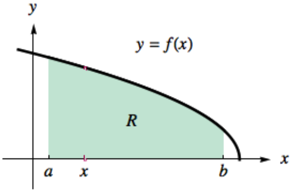
$$|V| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(\overline{x}_k)\Delta x_k = \int_a^b A(x)\,dx$$





Objętość bryły obrotowej (Metoda 1)

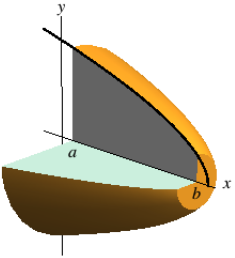
Niech $f(x) \geq 0$ będzie ciągła na $[a, b]$. Niech R oznacza obszar ograniczony wykresem funkcji f, osią OX oraz prostymi $x = a$ i $x = b$.

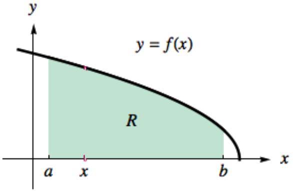


Objętość bryły obrotowej (Metoda 1)

Niech $f(x) \geq 0$ będzie ciągła na $[a, b]$. Niech R oznacza obszar ograniczony wykresem funkcji f, osią OX oraz prostymi $x = a$ i $x = b$. **Objętość bryły** V powstałej z obrotu R wokół osi OX wyraża się wzorem

$$|V| = \int_a^b A(x)\, dx =$$

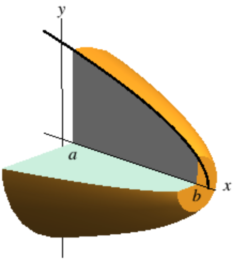


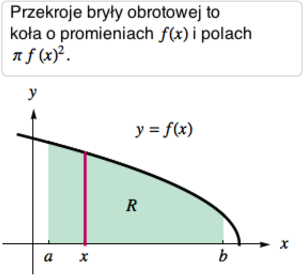


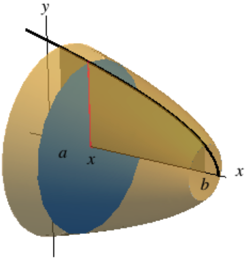
Objętość bryły obrotowej (Metoda 1)

Niech $f(x) \geq 0$ będzie ciągła na $[a, b]$. Niech R oznacza obszar ograniczony wykresem funkcji f, osią OX oraz prostymi $x = a$ i $x = b$. **Objętość bryły** V powstałej z obrotu R wokół osi OX wyraża się wzorem

$$|V| = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$

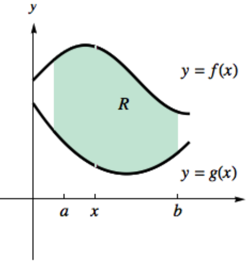






Objętość bardziej egzotycznej bryły obrotowej (Metoda 1)

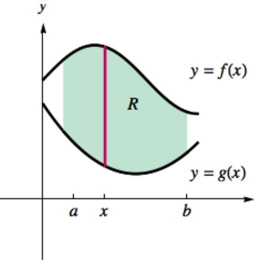
Niech f i g będą ciągłe na $[a, b]$ i $f(x) \geq g(x) \geq 0$. Niech R oznacza obszar ograniczony przez krzywe $y = f(x)$, $y = g(x)$ oraz proste $x = a$ i $x = b$.

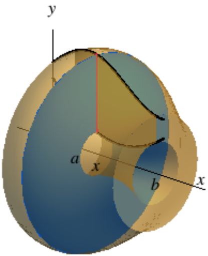


Objętość bardziej egzotycznej bryły obrotowej (Metoda 1)

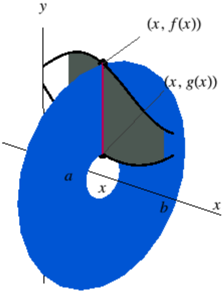
Niech f i g będą ciągłe na $[a,b]$ i $f(x) \geq g(x) \geq 0$. Niech R oznacza obszar ograniczony przez krzywe $y = f(x)$, $y = g(x)$ oraz proste $x = a$ i $x = b$. **Objętość bryły** V powstałej z obrotu R wokół osi OX:

$$|V| = \int_a^b \pi \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)\, dx$$



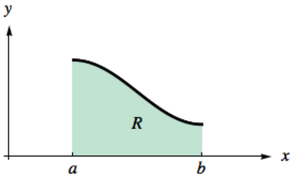


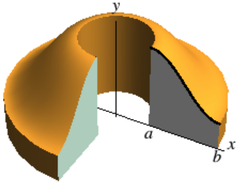
Pole przekroju $= \pi f(x)^2 - \pi g(x)^2 = \pi\left[f(x)^2 - g(x)^2\right]$



Objętość bryły obrotowej (Metoda 2)

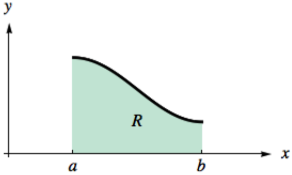
- Obszar R między wykresem f, osią OX oraz $x = a$ i $x = b$ obracamy wokół osi OY – powstaje bryła

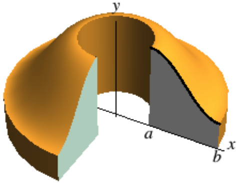




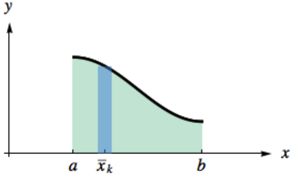
Objętość bryły obrotowej (Metoda 2)

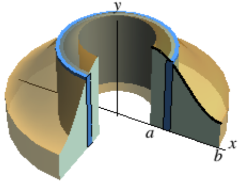
- Obszar R między wykresem f, osią OX oraz $x = a$ i $x = b$ obracamy wokół osi OY – powstaje bryła





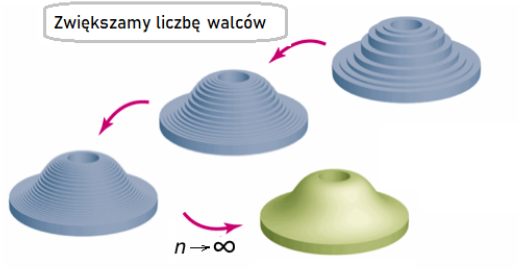
- Obszar R tniemy na prostokąty i każdy prostokąt obracamy wokół osi OY – z każdego prostokąta powstaje walec





Objętość bryły obrotowej (Metoda 2)

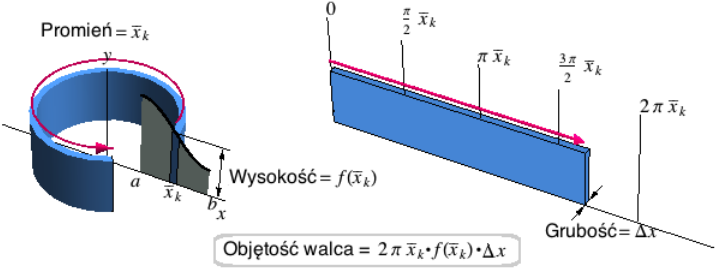
- Suma walców daje przybliżoną objętość bryły; im więcej walców (prostokątów) tym lepsze przybliżenie



Objętość bryły obrotowej (Metoda 2)

Niech $f(x) \geq 0$ będzie ciągła na $[a,b]$, gdzie $a \geq 0$. Niech R oznacza obszar ograniczony wykresem funkcji f, osią OX oraz prostymi $x = a$ i $x = b$. **Objętość bryły** V powstałej z obrotu R wokół osi OY wyraża się wzorem

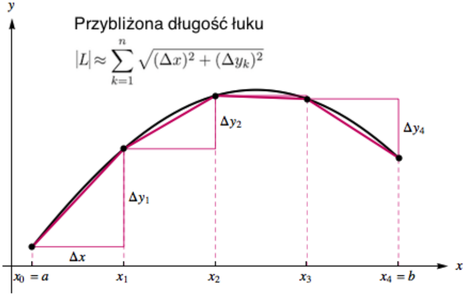
$$|V| = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$$



Długość łuku

Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$ to **długość łuku** $y = f(x)$ dla $x \in [a, b]$ wyraża się wzorem

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$



Pole powierzchni obrotowej

Niech nieujemna funkcja f ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$. Wtedy pole powierzchni S powstałej z obrotu wykresu funkcji f wokół

- osi OX wyraża się wzorem

$$|S| = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

- osi OY wyraża się wzorem

$$|S| = \int_a^b 2\pi\, x \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$