Ciągi liczbowe

Definicja

Nieskończonym **ciągiem liczbowym** (a_n) nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ w zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Wartość tej funkcji dla liczby n nazywamy $n-$**tym wyrazem ciągu** i oznaczamy go przez a_n.

Definicja

Nieskończonym **ciągiem liczbowym** (a_n) nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ w zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Wartość tej funkcji dla liczby n nazywamy $n-$**tym wyrazem ciągu** i oznaczamy go przez a_n.

- oznaczenia

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots) \qquad (a_n)_{n=1}^{\infty} \qquad (a_n) \qquad \{a_n\}$$

Definicja

Nieskończonym **ciągiem liczbowym** (a_n) nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ w zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Wartość tej funkcji dla liczby n nazywamy $n-$**tym wyrazem ciągu** i oznaczamy go przez a_n.

- oznaczenia

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots) \qquad (a_n)_{n=1}^{\infty} \qquad (a_n) \qquad \{a_n\}$$

- ciąg można określić przy pomocy **jawnego wzoru** na $n-$ty wyraz ciągu

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a_n = f(n)$$

Definicja

Nieskończonym **ciągiem liczbowym** (a_n) nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ w zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Wartość tej funkcji dla liczby n nazywamy $n-$**tym wyrazem ciągu** i oznaczamy go przez a_n.

- oznaczenia

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots) \qquad (a_n)_{n=1}^{\infty} \qquad (a_n) \qquad \{a_n\}$$

- ciąg można określić przy pomocy **jawnego wzoru** na $n-$ty wyraz ciągu

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a_n = f(n)$$

lub **rekurencyjnie**, czyli podając pierwszy wyraz (lub kilka początkowych wyrazów) i wzór na a_{n+1} w zależności od poprzednich wyrazów

$$a_{n+1} = g(a_n, a_{n-1}, \ldots)$$

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

Możemy go zdefiniować na dwa sposoby

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

Możemy go zdefiniować na dwa sposoby

1. reguła: *każdy wyraz ciągu jest o 3 większy od porzedniego*

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

Możemy go zdefiniować na dwa sposoby

1. reguła: *każdy wyraz ciągu jest o 3 większy od porzedniego*

$$a_2 = a_1 + 3, \quad a_3 = a_2 + 3, \quad a_4 = a_3 + 3, \text{ itd.}$$

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

Możemy go zdefiniować na dwa sposoby

1. reguła: *każdy wyraz ciągu jest o 3 większy od porzedniego*

$$a_2 = a_1 + 3, \quad a_3 = a_2 + 3, \quad a_4 = a_3 + 3, \text{ itd.}$$

ogólnie: $a_1 = 1$,

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

Możemy go zdefiniować na dwa sposoby

1. reguła: *każdy wyraz ciągu jest o 3 większy od porzedniego*

$$a_2 = a_1 + 3, \quad a_3 = a_2 + 3, \quad a_4 = a_3 + 3, \text{ itd.}$$

$$\text{ogólnie: } a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

Możemy go zdefiniować na dwa sposoby

1. reguła: *każdy wyraz ciągu jest o 3 większy od porzedniego*

$$a_2 = a_1 + 3, \quad a_3 = a_2 + 3, \quad a_4 = a_3 + 3, \text{ itd.}$$

$$\text{ogólnie: } a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

To jest wzór **rekurencyjny**

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

Możemy go zdefiniować na dwa sposoby

1. reguła: *każdy wyraz ciągu jest o 3 większy od porzedniego*

$$a_2 = a_1 + 3, \quad a_3 = a_2 + 3, \quad a_4 = a_3 + 3, \text{ itd.}$$

$$\text{ogólnie: } {\color{red} a_1 = 1}, \; a_{n+1} = a_n + 3, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

To jest wzór **rekurencyjny**

- określa pierwszy wyraz

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

Możemy go zdefiniować na dwa sposoby

1. reguła: *każdy wyraz ciągu jest o 3 większy od porzedniego*

$$a_2 = a_1 + 3, \quad a_3 = a_2 + 3, \quad a_4 = a_3 + 3, \text{ itd.}$$

$$\text{ogólnie: } a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

To jest wzór **rekurencyjny**

- określa pierwszy wyraz
- podaje wzór na a_{n+1} przy pomocy poprzedniego wyrazu

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

2. szukamy wzoru

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

2. szukamy wzoru

$$a_1 = 1 + 3 \cdot 0, \quad a_2 = 1 + 3 \cdot 1, \quad a_3 = 1 + 3 \cdot 2, \quad a_4 = 1 + 3 \cdot 3$$

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

2. szukamy wzoru

$$a_1 = 1 + 3 \cdot 0, \quad a_2 = 1 + 3 \cdot 1, \quad a_3 = 1 + 3 \cdot 2, \quad a_4 = 1 + 3 \cdot 3$$

$$a_n =$$

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

2. szukamy wzoru

$$a_1 = 1 + 3 \cdot 0, \quad a_2 = 1 + 3 \cdot 1, \quad a_3 = 1 + 3 \cdot 2, \quad a_4 = 1 + 3 \cdot 3$$

$$a_n = 1 + 3 \cdot (n - 1) =$$

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

2. szukamy wzoru

$$a_1 = 1 + 3 \cdot 0, \quad a_2 = 1 + 3 \cdot 1, \quad a_3 = 1 + 3 \cdot 2, \quad a_4 = 1 + 3 \cdot 3$$

$$a_n = 1 + 3 \cdot (n - 1) = 3n - 2 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

2. szukamy wzoru

$$a_1 = 1 + 3 \cdot 0, \quad a_2 = 1 + 3 \cdot 1, \quad a_3 = 1 + 3 \cdot 2, \quad a_4 = 1 + 3 \cdot 3$$

$$a_n = 1 + 3 \cdot (n - 1) = 3n - 2 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

To jest **wzór jawny**

Rozważmy ciąg

$$\{1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}$$

2. szukamy wzoru

$$a_1 = 1 + 3 \cdot 0, \quad a_2 = 1 + 3 \cdot 1, \quad a_3 = 1 + 3 \cdot 2, \quad a_4 = 1 + 3 \cdot 3$$

$$a_n = 1 + 3 \cdot (n-1) = 3n - 2 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

To jest **wzór jawny**

- $n-$ty wyraz ciągu może być obliczony przy pomocy tylko n.

Przykład

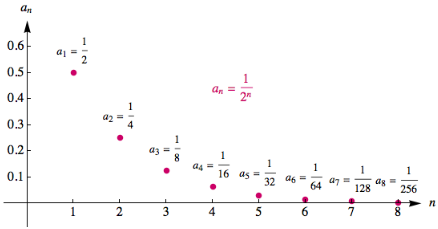
Skoro (a_n) jest funkcją, to można narysować jej wykres

- $a_n = \frac{1}{2^n}$
- $a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

Przykład

Skoro (a_n) jest funkcją, to można narysować jej wykres

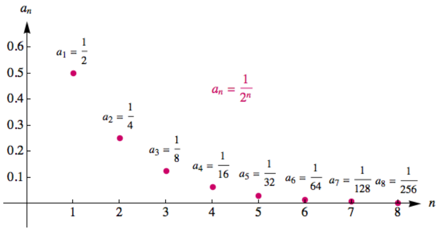
- $a_n = \frac{1}{2^n}$
- $a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

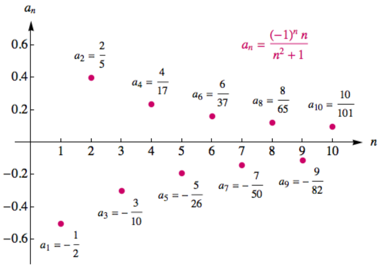


Przykład

Skoro (a_n) jest funkcją, to można narysować jej wykres

- $a_n = \frac{1}{2^n}$
- $a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$





Ciąg arytmetyczny i geometryczny

Ciąg arytmetyczny i geometryczny

Ciąg	arytmetyczny	geometryczny
wzór rekurencyjny	$a_n = a_{n-1} + r$	$a_n = q \cdot a_{n-1}$

Ciąg arytmetyczny i geometryczny

Ciąg	arytmetyczny	geometryczny
wzór rekurencyjny	$a_n = a_{n-1} + r$	$a_n = q \cdot a_{n-1}$
wzór jawny	$a_n = a_1 + (n-1)r$	$a_n = q^{n-1} \cdot a_1$

Ciąg arytmetyczny i geometryczny

Ciąg	arytmetyczny	geometryczny
wzór rekurencyjny	$a_n = a_{n-1} + r$	$a_n = q \cdot a_{n-1}$
wzór jawny	$a_n = a_1 + (n-1)r$	$a_n = q^{n-1} \cdot a_1$
$S_n = a_1 + \cdots + a_n =$	$= \frac{n(a_1+a_n)}{2}$	$= \begin{cases} na_1 & , q = 1 \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & , q \neq 1 \end{cases}$

Ciąg arytmetyczny i geometryczny

Ciąg	arytmetyczny	geometryczny
wzór rekurencyjny	$a_n = a_{n-1} + r$	$a_n = q \cdot a_{n-1}$
wzór jawny	$a_n = a_1 + (n-1)r$	$a_n = q^{n-1} \cdot a_1$
$S_n = a_1 + \cdots + a_n =$	$= \frac{n(a_1+a_n)}{2}$	$= \begin{cases} na_1 & , q = 1 \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & , q \neq 1 \end{cases}$
suma nieskończonego ciągu		$S = a_1 + a_2 + \cdots = \frac{a_1}{1-q}$ $\lvert q \rvert < 1$

Zachowanie ciągu w nieskończoności

Zachowanie ciągu w nieskończoności

- Jeżeli rozważymy wyrazy ciągu dla coraz większych wartości n

$$a_{100}, \ldots, a_{100000}, \ldots, a_{10000000}, \ldots$$

jak one się zachowują ?

Zachowanie ciągu w nieskończoności

- Jeżeli rozważymy wyrazy ciągu dla coraz większych wartości n

$$a_{100}, \ldots, a_{100000}, \ldots, a_{10000000}, \ldots$$

jak one się zachowują ?

  - czy zbliżają sie do konkretnej wartości ?
  - jeżeli tak, to do jakiej ?
  - czy rosną (maleją) nieograniczenie ?
  - a może nie wychodzą powyżej (poniżej) jakiejś wartości ?
  - czy wędrują bez celu ?

Zachowanie ciągu w nieskończoności

- Jeżeli rozważymy wyrazy ciągu dla coraz większych wartości n

$$a_{100}, \dots, a_{100000}, \dots, a_{10000000}, \dots$$

  jak one się zachowują ?
  - czy zbliżają sie do konkretnej wartości ?
  - jeżeli tak, to do jakiej ?
  - czy rosną (maleją) nieograniczenie ?
  - a może nie wychodzą powyżej (poniżej) jakiejś wartości ?
  - czy wędrują bez celu ?
- Zachowanie ciągu w nieskończoności opisujemy przez jego **monotoniczność**, **ograniczoność** i **granicę**.

Example

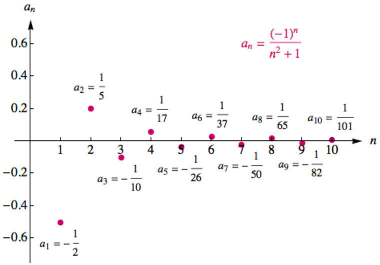
Jak zachowują się ciągi ? Rosną, maleją do jakiejś wartości, są ograniczone ?

- $\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$
- $\left(\cos\left(n\pi\right)\right)_{n=1}^{\infty}$
- $a_{n+1} = -2a_n, \quad a_1 = 1$
- $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

Example

Jak zachowują się ciągi ? Rosną, maleją do jakiejś wartości, są ograniczone ?

- $\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$
- $\left(\cos\left(n\pi\right)\right)_{n=1}^{\infty}$
- $a_{n+1} = -2a_n, \quad a_1 = 1$
- $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$



Example

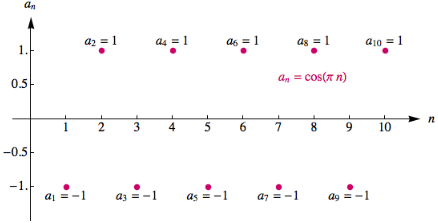
Jak zachowują się ciągi ? Rosną, maleją do jakiejś wartości, są ograniczone ?

- $\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$
- $(\cos(n\pi))_{n=1}^{\infty}$
- $a_{n+1} = -2a_n, \quad a_1 = 1$
- $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

Example

Jak zachowują się ciągi ? Rosną, maleją do jakiejś wartości, są ograniczone ?

- $\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$
- $(\cos(n\pi))_{n=1}^{\infty}$
- $a_{n+1} = -2a_n, \quad a_1 = 1$
- $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$



Example

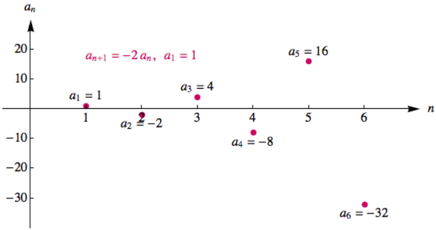
Jak zachowują się ciągi ? Rosną, maleją do jakiejś wartości, są ograniczone ?

- $\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$
- $\left(\cos\left(n\pi\right)\right)_{n=1}^{\infty}$
- $a_{n+1} = -2a_n, \quad a_1 = 1$
- $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

Example

Jak zachowują się ciągi ? Rosną, maleją do jakiejś wartości, są ograniczone ?

- $\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$
- $(\cos(n\pi))_{n=1}^{\infty}$
- $a_{n+1} = -2a_n, \quad a_1 = 1$
- $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$



Example

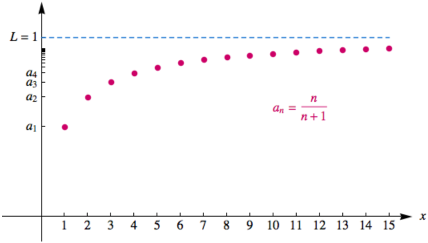
Jak zachowują się ciągi ? Rosną, maleją do jakiejś wartości, są ograniczone ?

- $\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$
- $(\cos(n\pi))_{n=1}^{\infty}$
- $a_{n+1} = -2a_n, \quad a_1 = 1$
- $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$

Example

Jak zachowują się ciągi ? Rosną, maleją do jakiejś wartości, są ograniczone ?

- $\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)_{n=1}^{\infty}$
- $\left(\cos(n\pi)\right)_{n=1}^{\infty}$
- $a_{n+1} = -2a_n, \quad a_1 = 1$
- $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$



Monotoniczność

Ciąg (a_n) nazywamy

- **rosnącym**, jeżeli $a_n < a_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$

$$\text{e.g. } \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$$

Monotoniczność

Ciąg (a_n) nazywamy

- **rosnącym**, jeżeli $a_n < a_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$

$$\text{e.g.} \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$$

- **malejącym**, jeżeli $a_n > a_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$

Monotoniczność

Ciąg (a_n) nazywamy

- **rosnącym**, jeżeli $a_n < a_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$

$$\text{e.g.} \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$$

- **malejącym**, jeżeli $a_n > a_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$
- **niemalejącym**, jeżeli $a_n \leq a_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$
- **nierosnącym**, jeżeli $a_n \geq a_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$

$$\text{e.g.} \quad \left(\frac{2^n}{n!}\right) = \left\{2, 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \dots\right\}$$

Monotoniczność

Ciąg (a_n) nazywamy

- **rosnącym**, jeżeli $a_n < a_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$

$$\text{e.g. } \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$$

- **malejącym**, jeżeli $a_n > a_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$
- **niemalejącym**, jeżeli $a_n \leq a_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$
- **nierosnącym**, jeżeli $a_n \geq a_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}$

$$\text{e.g. } \left(\frac{2^n}{n!}\right) = \left\{2, 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \dots\right\}$$

- **stałym**, jeżeli $a_n = a_{n+1} = const, \qquad n \in \mathbb{N}$

Ustalanie monotoniczności

- badamy znak różnicy

$$a_{n+1} - a_n$$

- porównujemy iloraz do 1

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

(tylko dla ciągów o wyrazach o stałym znaku)

Ograniczoność

Ciąg (a_n) jest

- **ograniczony z dołu**, jeżeli istnieje $m \in \mathbb{R}$ takie, że

$$m \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

- **ograniczony z góry**, jeżeli istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że

$$a_n \leq M, \quad n \in \mathbb{N}$$

- **ograniczony**, jeżeli istnieją $m, M \in \mathbb{R}$ takie, że

$$m \leq a_n \leq M, \quad n \in \mathbb{N}$$

Definicja

Ciąg (a_n) jest zbieżny do **granicy właściwej** $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n > n_0$ spełniona jest nierówność

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

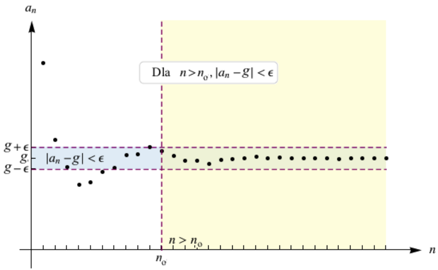
Definicja

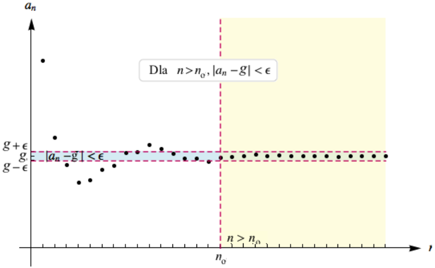
Ciąg (a_n) jest zbieżny do **granicy właściwej** $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g$$

wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n > n_0$ spełniona jest nierówność

$$|a_n - g| < \varepsilon$$





Definicja

Jeżeli (a_n) jest ciągiem liczbowym i (n_k) jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg (a_{n_k}) nazywamy **podciągiem ciągu** (a_n).

Definicja

Jeżeli (a_n) jest ciągiem liczbowym i (n_k) jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg (a_{n_k}) nazywamy **podciągiem ciągu** (a_n).

Twierdzenie

Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.

Definicja

Jeżeli (a_n) jest ciągiem liczbowym i (n_k) jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych, to ciąg (a_{n_k}) nazywamy **podciągiem ciągu** (a_n).

Twierdzenie

Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.

Konsekwencja twierdzenia

Jeżeli istnieją dwa podciągi ciągu (a_n) zbieżne do różnych granic, to ciąg (a_n) jest rozbieżny.

Twierdzenie

Jeżeli ciąg jest zbieżny do granicy właściwej, to jest ograniczony.

Twierdzenie

Jeżeli ciąg jest zbieżny do granicy właściwej, to jest ograniczony.

Uwaga

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe (ograniczoność nie gwarantuje zbieżności).

Twierdzenie

Jeżeli ciąg jest zbieżny do granicy właściwej, to jest ograniczony.

Uwaga

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe (ograniczoność nie gwarantuje zbieżności).

Twierdzenie

Jeżeli ciąg jest ograniczony i monotoniczny, to jest zbieżny.

Twierdzenie

Jeżeli ciąg jest zbieżny do granicy właściwej, to jest ograniczony.

Uwaga

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe (ograniczoność nie gwarantuje zbieżności).

Twierdzenie

Jeżeli ciąg jest ograniczony i monotoniczny, to jest zbieżny.

Pytanie

Czy prawdziwa jest implikacja "zbieżny $\Longrightarrow$ monotoniczny" ?

Twierdzenie

Jeżeli ciąg jest zbieżny do granicy właściwej, to jest ograniczony.

Uwaga

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe (ograniczoność nie gwarantuje zbieżności).

Twierdzenie

Jeżeli ciąg jest ograniczony i monotoniczny, to jest zbieżny.

Pytanie

Czy prawdziwa jest implikacja "zbieżny $\Longrightarrow$ monotoniczny" ?

Twierdzenie

Iloczyn ciągu zbieżnego do zera i ciągu ograniczonego jest ciągiem zbieżnym do zera.

Obliczanie granic

Obliczanie granic

Rachunek granic właściwych

Jeżeli ciągi (a_n) and (b_n) są zbieżne do granic właściwych A i B, to

Obliczanie granic

Rachunek granic właściwych

Jeżeli ciągi (a_n) and (b_n) są zbieżne do granic właściwych A i B, to

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$

Obliczanie granic

Rachunek granic właściwych

Jeżeli ciągi (a_n) and (b_n) są zbieżne do granic właściwych A i B, to

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
- $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot A, \quad c \in \mathbb{R}$

Obliczanie granic

Rachunek granic właściwych

Jeżeli ciągi (a_n) and (b_n) są zbieżne do granic właściwych A i B, to

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
- $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot A, \quad c \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

Obliczanie granic

Rachunek granic właściwych

Jeżeli ciągi (a_n) and (b_n) są zbieżne do granic właściwych A i B, to

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
- $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot A, \quad c \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, o ile $B \neq 0$

Obliczanie granic

Rachunek granic właściwych

Jeżeli ciągi (a_n) and (b_n) są zbieżne do granic właściwych A i B, to

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
- $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot A, \quad c \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, o ile $B \neq 0$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = A^B$, o ile działania są wykonalne

Obliczanie granic

Rachunek granic właściwych

Jeżeli ciągi (a_n) and (b_n) są zbieżne do granic właściwych A i B, to

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
- $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot A, \quad c \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, o ile $B \neq 0$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = A^B$, o ile działania są wykonalne
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}, \quad k \in \mathbb{N}$

Definicje

- Ciąg (a_n) jest zbieżny do **granicy niewłaściwej** ∞, co zapisujemy
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$
wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $M > 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n > n_0$ spełniona jest nierówność
$$a_n > M$$
- Ciąg (a_n) jest zbieżny do **granicy niewłaściwej** $-\infty$, co zapisujemy
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$
wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $M < 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n > n_0$ spełniona jest nierówność
$$a_n < M$$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty],$$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty],$$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right],$$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^{\infty}],$$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^\infty = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^\infty = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^g = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^g = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^\infty], \quad [\infty^0],$$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^{\infty}], \quad [\infty^{0}], \quad [0^{0}]$$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^\infty = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^\infty = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^g = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^g = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^\infty], \quad [\infty^0], \quad [0^0]$$

Przykład

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^{\infty}], \quad [\infty^{0}], \quad [0^{0}]$$

Przykład

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} =$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^{\infty}], \quad [\infty^{0}], \quad [0^{0}]$$

Przykład

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^{\infty}], \quad [\infty^{0}], \quad [0^{0}]$$

Przykład

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} n =$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^{\infty}], \quad [\infty^{0}], \quad [0^{0}]$$

Przykład

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} n = \infty$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^{\infty}], \quad [\infty^{0}], \quad [0^{0}]$$

Przykład

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} =$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^{\infty}], \quad [\infty^{0}], \quad [0^{0}]$$

Przykład

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^\infty = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^\infty = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^g = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^g = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^\infty], \quad [\infty^0], \quad [0^0]$$

Przykład

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} =$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^{\infty}], \quad [\infty^{0}], \quad [0^{0}]$$

Przykład

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^{\infty}], \quad [\infty^{0}], \quad [0^{0}]$$

Przykład

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{n} =$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^{\infty}], \quad [\infty^{0}], \quad [0^{0}]$$

Przykład

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^{\infty}], \quad [\infty^{0}], \quad [0^{0}]$$

Przykład

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} 4 =$

Obliczanie granic

Rachunek granic niewłaściwych

- $g + \infty = \infty$
- $g \cdot \infty = \infty$
- $\frac{g}{\infty} = 0$
- $\frac{g}{0} = \infty$, dla $g > 0$
- $g^{\infty} = 0$, dla $0 < g < 1$
- $g^{\infty} = \infty$, dla $g > 1$
- $\infty^{g} = 0$, dla $g < 0$
- $\infty^{g} = \infty$, dla $g > 0$

Wyrażenia nieoznaczone

$$[\infty - \infty], \quad [0 \cdot \infty], \quad \left[\frac{0}{0}\right], \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \quad [1^{\infty}], \quad [\infty^{0}], \quad [0^{0}]$$

Przykład

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{4n}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} 4 = 4$

Wracając do liczby Eulera, $e = 2.7182818...$

Wracając do liczby Eulera, $e = 2.7182818...$

Definicja

Podstawa e funkcji wykładniczej $f(x) = e^x$ jest zdefiniowana jako

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Wracając do liczby Eulera, $e = 2.7182818...$

Definicja

Podstawa e funkcji wykładniczej $f(x) = e^x$ jest zdefiniowana jako

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Twierdzenie

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, to

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + b_n)^{\frac{1}{b_n}}$$

Twierdzenie o trzech ciągach

Twierdzenie o trzech ciągach (Twierdzenie o dwóch policjantach i pijaku)

Twierdzenie o trzech ciągach
(Twierdzenie o dwóch policjantach i pijaku)
(Twierdzenie o kanapce)

Twierdzenie o trzech ciągach (Twierdzenie o dwóch policjantach i pijaku) (Twierdzenie o kanapce)

Jeżeli ciągi $(a_n), (b_n)$ i (c_n) spełniają warunki

- $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla każdego $n \geq n_0$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$

to

Twierdzenie o trzech ciągach (Twierdzenie o dwóch policjantach i pijaku) (Twierdzenie o kanapce)

Jeżeli ciągi $(a_n), (b_n)$ i (c_n) spełniają warunki

- $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla każdego $n \geq n_0$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$

to

$$\lim_{n\to\infty} b_n = g$$

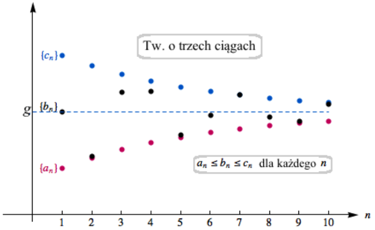
Twierdzenie o trzech ciągach (Twierdzenie o dwóch policjantach i pijaku) (Twierdzenie o kanapce)

Jeżeli ciągi $(a_n), (b_n)$ i (c_n) spełniają warunki

- $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla każdego $n \geq n_0$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$

to

$$\lim_{n\to\infty} b_n = g$$



Przydatne granice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\text{jeżeli } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ to } \lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$$

Twierdzenie o dwóch ciągach

Twierdzenie o dwóch ciągach

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) spełniają warunki

- $a_n \leq b_n$ dla każdego $n \geq n_0$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

to

Twierdzenie o dwóch ciągach

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) spełniają warunki

- $a_n \leq b_n$ dla każdego $n \geq n_0$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

to

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$