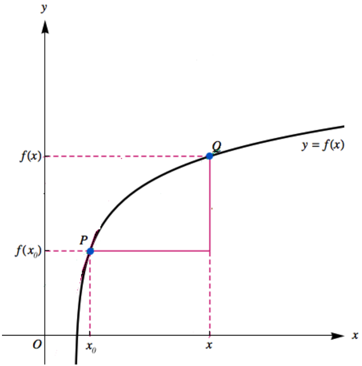
Rachunek różniczkowy

Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(x_0, f(x_0))$

Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(x_0, f(x_0))$

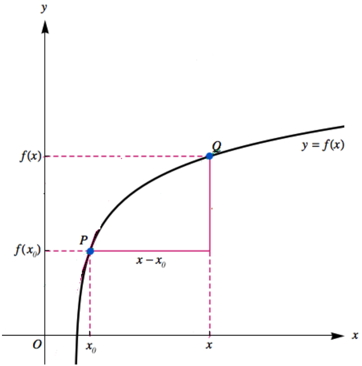
- dwa punkty: $P(x_0, f(x_0)), Q(x, f(x))$



Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(x_0, f(x_0))$

- dwa punkty: $P(x_0, f(x_0)), Q(x, f(x))$
- przyrost argumentu

$$\Delta x = x - x_0$$



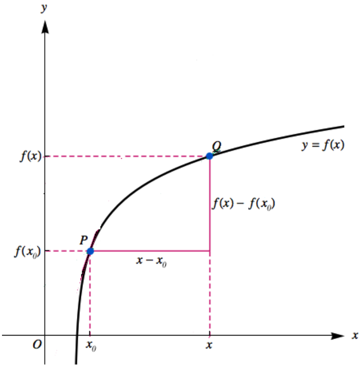
Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(x_0, f(x_0))$

- dwa punkty: $P(x_0, f(x_0)), Q(x, f(x))$
- przyrost argumentu

$$\Delta x = x - x_0$$

- przyrost wartości funkcji

$$\Delta f = f(x) - f(x_0)$$



Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(x_0, f(x_0))$

- dwa punkty: $P(x_0, f(x_0)), Q(x, f(x))$
- przyrost argumentu

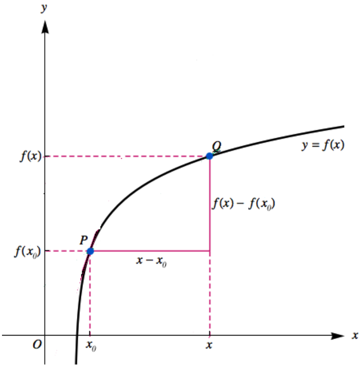
$$\Delta x = x - x_0$$

- przyrost wartości funkcji

$$\Delta f = f(x) - f(x_0)$$

- **średni przyrost wartości funkcji na przedziale** $[x_0, x]$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(x_0, f(x_0))$

- dwa punkty: $P(x_0, f(x_0)), Q(x, f(x))$
- przyrost argumentu

$$\Delta x = x - x_0$$

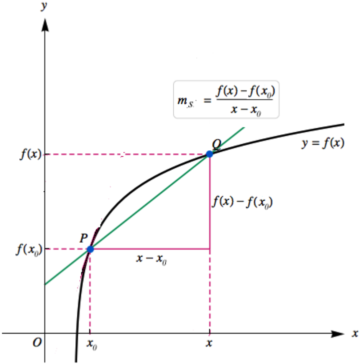
- przyrost wartości funkcji

$$\Delta f = f(x) - f(x_0)$$

- **średni przyrost wartości funkcji na przedziale** $[x_0, x]$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

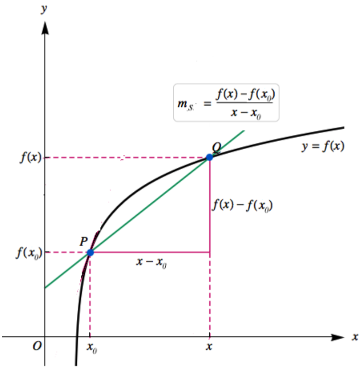
, czyli **współczynnik kierunkowy siecznej**



Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(x_0, f(x_0))$

- współczynnik kierunkowy siecznej

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

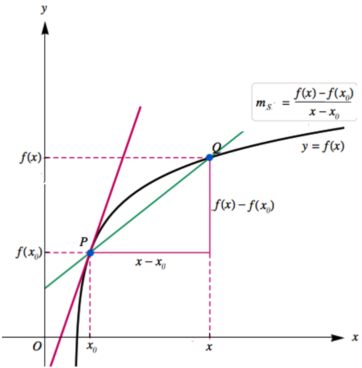


Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(x_0, f(x_0))$

- współczynnik kierunkowy siecznej

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- **współczynnik kierunkowy stycznej**

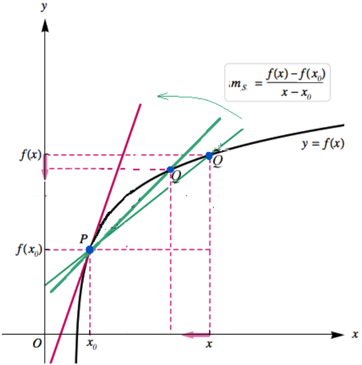


Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(x_0, f(x_0))$

- współczynnik kierunkowy siecznej

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- **współczynnik kierunkowy stycznej**

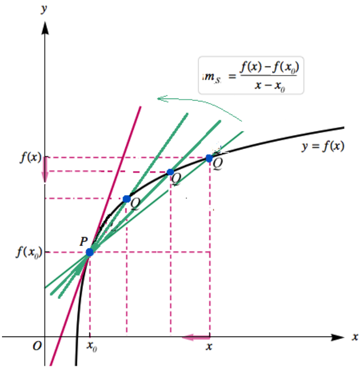


Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(x_0, f(x_0))$

- współczynnik kierunkowy siecznej

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- **współczynnik kierunkowy stycznej**

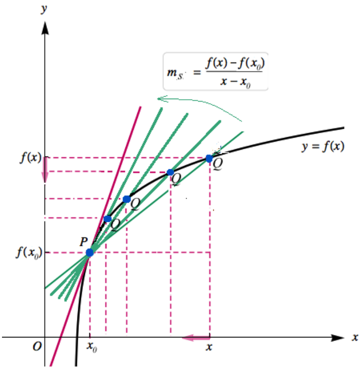


Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(x_0, f(x_0))$

- współczynnik kierunkowy siecznej

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- **współczynnik kierunkowy stycznej**



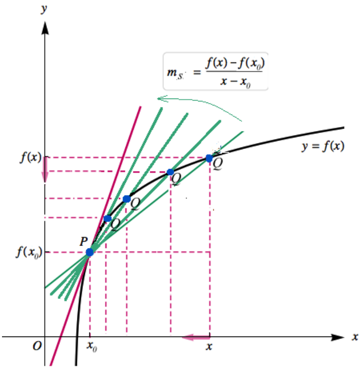
Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(x_0, f(x_0))$

- współczynnik kierunkowy siecznej

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- **współczynnik kierunkowy stycznej**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P(x_0, f(x_0))$

- współczynnik kierunkowy siecznej

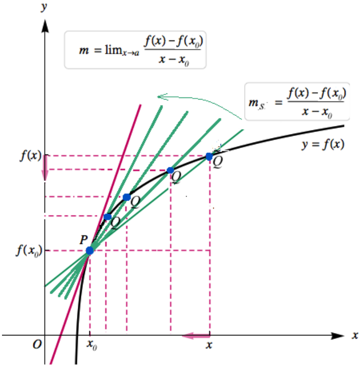
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- **współczynnik kierunkowy stycznej**

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- równanie stycznej w pkcie P

$$\boxed{y - f(x_0) = m \cdot (x - x_0)}$$



Fizyka

- $s(t)-$ położenie "ciała" w czasie t
- średnia prędkość w danym odcinku czasu $[t_0, t_1]$

$$v_{sr} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Fizyka

- $s(t)-$ położenie "ciała" w czasie t
- średnia prędkość w danym odcinku czasu $[t_0, t_1]$

$$v_{sr} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

- prędkość chwilowa w danym momencie t_0

$$v_{ch} = \lim_{t_1 \to t_0} v_{sr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Chemia

- $C(t)-$ stężenie substratu w czasie t
- średnia szybkość reakcji chemicznej w czasie $[t_0, t_1]$

$$r_{sr} = \frac{C(t_1) - C(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta C}{\Delta t}$$

Chemia

- $C(t)-$ stężenie substratu w czasie t
- średnia szybkość reakcji chemicznej w czasie $[t_0, t_1]$

$$r_{sr} = \frac{C(t_1) - C(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta C}{\Delta t}$$

- rzeczywista szybkość reakcji chemicznej w czasie t_0

$$r_{rz} = \lim_{\Delta t \to 0} r_{sr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta t}$$

Ekonomia

- $K(w)-$ całkowity koszt produkcji w jednostek jakiegoś dobra
- średnia zmiana koszów produkcji względem przyrostu wielkości produkcji

$$K_{sr} = \frac{\Delta K}{\Delta w}$$

Ekonomia

- $K(w)$– całkowity koszt produkcji w jednostek jakiegoś dobra
- średnia zmiana koszów produkcji względem przyrostu wielkości produkcji

$$K_{sr} = \frac{\Delta K}{\Delta w}$$

- koszt krańcowy (marginalny)

$$KM = \lim_{\Delta t \to 0} K_{sr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta w}$$

Biologia

- $n(t)-$ liczba osobników w populacji w czasie t
- średni przyrost populacji w danym odcinku czasu

$$v_{sr} = \frac{\Delta n}{\Delta t}$$

- przyrost chwilowy w danym momencie

$$v_{ch} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{sr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t}$$

- **Informatyka:** Szybkość łącza internetowego

- **Informatyka:** Szybkość łącza internetowego
- **Geografia:** Zmiana gęstości zaludnienia przy zwiekszającej się odległości od centrum miasta

- **Informatyka:** Szybkość łącza internetowego
- **Geografia:** Zmiana gęstości zaludnienia przy zwiekszającej się odległości od centrum miasta
- **Meteorologia:** Zmiana ciśnienia atmosferycznego wraz ze wzrostem wysokości

- **Informatyka:** Szybkość łącza internetowego
- **Geografia:** Zmiana gęstości zaludnienia przy zwiekszającej się odległości od centrum miasta
- **Meteorologia:** Zmiana ciśnienia atmosferycznego wraz ze wzrostem wysokości
- **Psychologia:** Szybkość zmiany ilości zapamiętanych informacji wraz z upływem czasu

- **Informatyka:** Szybkość łącza internetowego
- **Geografia:** Zmiana gęstości zaludnienia przy zwiekszającej się odległości od centrum miasta
- **Meteorologia:** Zmiana ciśnienia atmosferycznego wraz ze wzrostem wysokości
- **Psychologia:** Szybkość zmiany ilości zapamiętanych informacji wraz z upływem czasu
- **Socjologia:** Szybkość rozchodzenia się plotki

- **Informatyka:** Szybkość łącza internetowego
- **Geografia:** Zmiana gęstości zaludnienia przy zwiekszającej się odległości od centrum miasta
- **Meteorologia:** Zmiana ciśnienia atmosferycznego wraz ze wzrostem wysokości
- **Psychologia:** Szybkość zmiany ilości zapamiętanych informacji wraz z upływem czasu
- **Socjologia:** Szybkość rozchodzenia się plotki
- ...

Matematyka

- średni przyrost wartości funkcji $f(x)$ względem przyrostu x

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Matematyka

- średni przyrost wartości funkcji $f(x)$ względem przyrostu x

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- chwilowy przyrost wartości funkcji względem x

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Matematyka

- średni przyrost wartości funkcji $f(x)$ względem przyrostu x

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- chwilowy przyrost wartości funkcji względem x

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

czyli, jak szybko rośnie (bądź maleje) funkcja f w danym punkcie (momencie).

Jeden obiekt, wiele interpretacji

W fizyce: prędkość, gęstość, natężenie prądu, moc; w chemii: szybkość reakcji, ściśliwość; w biologii: szybkość przyrostu populacji, prędkość przepływu krwi; w ekonomii: koszt marginalny, zysk marginalny; w geologii: prędkość przepływu ciepła; w psychologii: szybkość poprawy wyników uczenia; w socjologii: szybkość rozprzestrzeniania informacji ...

Jeden obiekt, wiele interpretacji

W fizyce: prędkość, gęstość, natężenie prądu, moc; w chemii: szybkość reakcji, ściśliwość; w biologii: szybkość przyrostu populacji, prędkość przepływu krwi; w ekonomii: koszt marginalny, zysk marginalny; w geologii: prędkość przepływu ciepła; w psychologii: szybkość poprawy wyników uczenia; w socjologii: szybkość rozprzestrzeniania informacji ...

czyli przyrost wartości $f(x)$ względem x,

Jeden obiekt, wiele interpretacji

W fizyce: prędkość, gęstość, natężenie prądu, moc; w chemii: szybkość reakcji, ściśliwość; w biologii: szybkość przyrostu populacji, prędkość przepływu krwi; w ekonomii: koszt marginalny, zysk marginalny; w geologii: prędkość przepływu ciepła; w psychologii: szybkość poprawy wyników uczenia; w socjologii: szybkość rozprzestrzeniania informacji ...

czyli przyrost wartości $f(x)$ względem x,

czyli miara tego jak szybko funkcja rośnie bądź maleje,

Jeden obiekt, wiele interpretacji

W fizyce: prędkość, gęstość, natężenie prądu, moc; w chemii: szybkość reakcji, ściśliwość; w biologii: szybkość przyrostu populacji, prędkość przepływu krwi; w ekonomii: koszt marginalny, zysk marginalny; w geologii: prędkość przepływu ciepła; w psychologii: szybkość poprawy wyników uczenia; w socjologii: szybkość rozprzestrzeniania informacji ...

czyli przyrost wartości $f(x)$ względem x,

czyli miara tego jak szybko funkcja rośnie bądź maleje,

POCHODNA FUNKCJI

Definicja

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$.

Pochodną właściwą funkcji $y = f(x)$ **w punkcie** x_0, oznaczaną symbolem $f'(x_0)$, nazywamy granicę właściwą

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

o ile ta granica istnieje.

Definicja

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$.

Pochodną właściwą funkcji $y = f(x)$ **w punkcie** x_0, oznaczaną symbolem $f'(x_0)$, nazywamy granicę właściwą

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

o ile ta granica istnieje. Mówimy wtedy, że funkcja f jest **różniczkowalna** w punkcie x_0.

Definicja

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$.

Pochodną właściwą funkcji $y = f(x)$ **w punkcie** x_0, oznaczaną symbolem $f'(x_0)$, nazywamy granicę właściwą

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

o ile ta granica istnieje. Mówimy wtedy, że funkcja f jest **różniczkowalna** w punkcie x_0. Jeżeli f jest różniczkowalna w każdym punkcie przedziału I, to mówimy, że jest różniczkowalna na przedziale I.

Definicja

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$.

Pochodną właściwą funkcji $y = f(x)$ **w punkcie** x_0, oznaczaną symbolem $f'(x_0)$, nazywamy granicę właściwą

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

o ile ta granica istnieje. Mówimy wtedy, że funkcja f jest **różniczkowalna** w punkcie x_0. Jeżeli f jest różniczkowalna w każdym punkcie przedziału I, to mówimy, że jest różniczkowalna na przedziale I.

Jeżeli funkcja jest określona tylko w jednostronnym otoczeniu x_0, $U_-(x_0)$ lub $U_+(x_0)$, to mówimy o pochodnej **lewo-** i **prawostronnej**, oznaczanej odpowiednio $f'_-(x_0)$ i $f'_+(x_0)$.

Przykłady - na podstawie których wyciągniemy wnioski

Oblicz pochodne

- $f(x) = \frac{1}{1+x}$ w $x = 2$

Przykłady - na podstawie których wyciągniemy wnioski

Oblicz pochodne

- $f(x) = \frac{1}{1+x}$ w $x = 2$
- $g(x) = |x|$ w $x = 0$

Przykłady - na podstawie których wyciągniemy wnioski

Oblicz pochodne

- $f(x) = \frac{1}{1+x}$ w $x = 2$
- $g(x) = |x|$ w $x = 0$
- $p(x) = \sqrt[3]{x}$ w $x = 0$

Przykłady - na podstawie których wyciągniemy wnioski

Oblicz pochodne

- $f(x) = \frac{1}{1+x}$ w $x = 2$
- $g(x) = |x|$ w $x = 0$
- $p(x) = \sqrt[3]{x}$ w $x = 0$
- $q(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & , x \leq 1 \\ x^2 + x - 3 & , x > 1 \end{cases}$ w $x = 1$

Przykłady - na podstawie których wyciągniemy wnioski

Oblicz pochodne

- $f(x) = \frac{1}{1+x}$ w $x = 2$
- $g(x) = |x|$ w $x = 0$
- $p(x) = \sqrt[3]{x}$ w $x = 0$
- $q(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & , x \leq 1 \\ x^2 + x - 3 & , x > 1 \end{cases}$ w $x = 1$
- $r(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & , x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 & , x > 1 \end{cases}$ w $x = 1$

Przykłady - na podstawie których wyciągniemy wnioski

Oblicz pochodne

- $f(x) = \frac{1}{1+x}$ w $x = 2$
- $g(x) = |x|$ w $x = 0$
- $p(x) = \sqrt[3]{x}$ w $x = 0$
- $q(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & , x \leq 1 \\ x^2 + x - 3 & , x > 1 \end{cases}$ w $x = 1$
- $r(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & , x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 & , x > 1 \end{cases}$ w $x = 1$
- $s(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & , x \leq 1 \\ x^2 - 3x & , x > 1 \end{cases}$ w $x = 1$

Pochodna nie zawsze istnieje

Pochodna nie zawsze istnieje

Twierdzenie (warunek konieczny istnienia pochodnej)

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w $x = x_0$ to jest ciągła w $x = x_0$.

Pochodna nie zawsze istnieje

Twierdzenie (warunek konieczny istnienia pochodnej)

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w $x = x_0$ to jest ciągła w $x = x_0$.

Uwaga !

Twierdzenie odwrotne: "Jeżeli f jest ciągła to jest różniczkowalna".
nie jest prawdziwe

Pochodna nie zawsze istnieje

Twierdzenie (warunek konieczny istnienia pochodnej)

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w $x = x_0$ to jest ciągła w $x = x_0$.

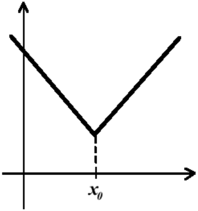
Uwaga !

Twierdzenie odwrotne: "Jeżeli f jest ciągła to jest różniczkowalna".
nie jest prawdziwe

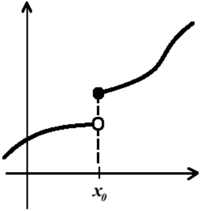
Twierdzenie przeciwstawne

Jeżeli funkcja NIE jest ciągła w $x = x_0$ to NIE jest różniczkowalna w $x = x_0$.

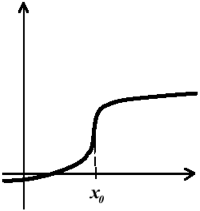
Pochodna nie zawsze istnieje



$f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$



nieciągłość



$f'(x_0) = \infty$

Pochodna funkcji

- $f'(x_0)$ można policzyć dla wszystkich punktów $x_0 \in X \subset D_f$

Pochodna funkcji

- $f'(x_0)$ można policzyć dla wszystkich punktów $x_0 \in X \subset D_f$
- czyli f' jest również funkcją x

Pochodna funkcji

- $f'(x_0)$ można policzyć dla wszystkich punktów $x_0 \in X \subset D_f$
- czyli f' jest również funkcją x

Definicja

Funkcją pochodną funkcji f nazywamy funkcję daną wzorem

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

określoną w zbiorze $X \subset D_f$

Najczęstsze oznaczenia pochodnej

$$f'(x) = y'(x) =$$

Najczęstsze oznaczenia pochodnej

$$f'(x) = y'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} =$$

Najczęstsze oznaczenia pochodnej

$$f'(x) = y'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x))$$

Najczęstsze oznaczenia pochodnej

$$f'(x) = y'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x))$$

$$f'(a) = y'(a) =$$

Najczęstsze oznaczenia pochodnej

$$f'(x) = y'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x))$$

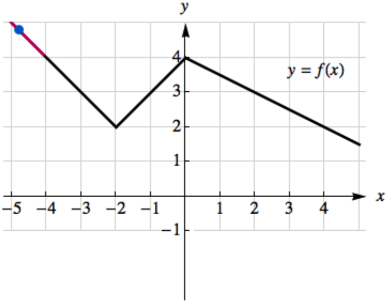
$$f'(a) = y'(a) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

Wykresy pochodnej

- pochodna jest funkcją $\Rightarrow$ można narysować jej wykres

Przykład

Na podstawie wykresu $f(x)$, naszkicuj wykres pochodnej.

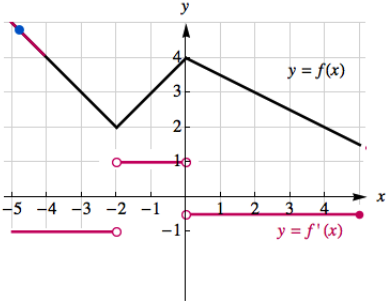


Wykresy pochodnej

- pochodna jest funkcją $\Rightarrow$ można narysować jej wykres

Przykład

Na podstawie wykresu $f(x)$, naszkicuj wykres pochodnej.

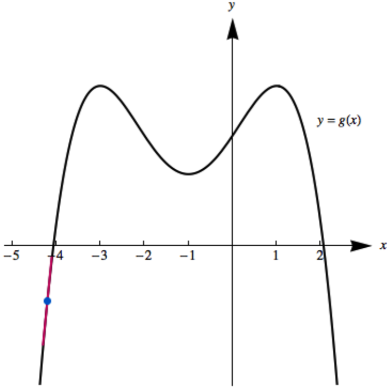


Wykresy pochodnej

- pochodna jest funkcją $\Rightarrow$ można narysować jej wykres

Przykład

Na podstawie wykresu $f(x)$, naszkicuj wykres pochodnej.

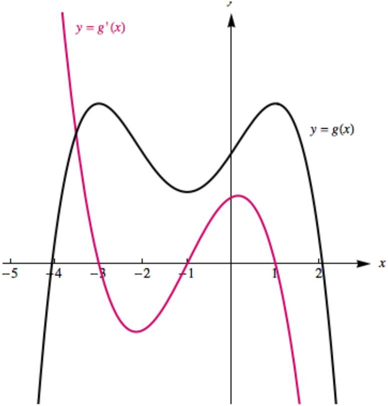


Wykresy pochodnej

- pochodna jest funkcją $\Rightarrow$ można narysować jej wykres

Przykład

Na podstawie wykresu $f(x)$, naszkicuj wykres pochodnej.



Podstawowe wzory

Podstawowe wzory

- $\frac{d}{dx}(c) =$

Podstawowe wzory

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Podstawowe wzory

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$
- $\frac{d}{dx}(x^a) =$

Podstawowe wzory

- $\frac{d}{dx}\left(c\right) = 0$
- $\frac{d}{dx}\left(x^a\right) = a\,x^{a-1}$

Podstawowe wzory

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$
- $\frac{d}{dx}(x^a) = a\,x^{a-1}$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\,\ln a$

Podstawowe wzory

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$
- $\frac{d}{dx}(x^a) = a\,x^{a-1}$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \, \ln a$
- $\frac{d}{dx}(\ln|x|) =$

Podstawowe wzory

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$
- $\frac{d}{dx}(x^a) = a\,x^{a-1}$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\ \ln a$
- $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}(\log_a|x|) = \frac{1}{x\ \ln a}$

Podstawowe wzory

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$
- $\frac{d}{dx}(x^a) = a\,x^{a-1}$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\ \ln a$
- $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}(\log_a|x|) = \frac{1}{x\ \ln a}$
- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

Podstawowe wzory

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$
- $\frac{d}{dx}(x^a) = a\,x^{a-1}$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\ \ln a$
- $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}(\log_a|x|) = \frac{1}{x\ \ln a}$
- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Podstawowe wzory

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$
- $\frac{d}{dx}(x^a) = a\,x^{a-1}$
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\ \ln a$
- $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}(\log_a|x|) = \frac{1}{x\ \ln a}$
- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}(\text{arccot}\, x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Pochodna sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu

Jeżeli f i g są różniczkowalne w punkcie x_0, to

Pochodna sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu

Jeżeli f i g są różniczkowalne w punkcie x_0, to

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

Pochodna sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu

Jeżeli f i g są różniczkowalne w punkcie x_0, to

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$

Pochodna sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu

Jeżeli f i g są różniczkowalne w punkcie x_0, to

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) =$

Uwaga !

$$(f \cdot g)'(x_0) \neq f'(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Pochodna sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu

Jeżeli f i g są różniczkowalne w punkcie x_0, to

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

Uwaga !

$$(f \cdot g)'(x_0) \neq f'(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Pochodna sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu

Jeżeli f i g są różniczkowalne w punkcie x_0, to

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) =$

Uwaga !

$$(f \cdot g)'(x_0) \neq f'(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) \neq \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Pochodna sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu

Jeżeli f i g są różniczkowalne w punkcie x_0, to

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Uwaga !

$$(f \cdot g)'(x_0) \neq f'(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) \neq \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$


EVERY TIME YOU DO THIS:
$\left[\frac{x^2}{\sin(x)}\right]' = \frac{2x}{\cos(x)}$
DON'T KILL ME
Sean Bean dies on-screen

Pochodna funkcji złożonej

Niech $f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(u)$. Wówczas

$$\frac{df}{dx} = \frac{dh}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

lub

$$(h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Pochodna funkcji złożonej

Niech $f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(u)$. Wówczas

$$\frac{df}{dx} = \frac{dh}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

lub

$$(h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Pochodna funkcji odwrotnej

Jeżeli $f'(x_0) \neq 0$ i f^{-1} istnieje w pewnym otoczeniu $U(x_0)$, to pochodna f^{-1} w punkcie $y_0 = f(x_0)$ istnieje i wyraża się wzorem

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Pochodne wyższych rzędów

- Jeżeli f' ma pochodną w x_0, to nazywamy ją **pochodną drugiego rzędu** (albo drugą pochodną) i oznaczamy symbolem $f''(x_0)$

Pochodne wyższych rzędów

- Jeżeli f' ma pochodną w x_0, to nazywamy ją **pochodną drugiego rzędu** (albo drugą pochodną) i oznaczamy symbolem $f''(x_0)$
- pochodną drugiej pochodnej nazywamy **pochodną trzeciego rzędu**, $f'''(x_0)$

Pochodne wyższych rzędów

- Jeżeli f' ma pochodną w x_0, to nazywamy ją **pochodną drugiego rzędu** (albo drugą pochodną) i oznaczamy symbolem $f''(x_0)$
- pochodną drugiej pochodnej nazywamy **pochodną trzeciego rzędu**, $f'''(x_0)$
- pochodną trzeciej pochodnej nazywamy **pochodną czwartego rzędu**, $f^{(4)}(x_0)$

Pochodne wyższych rzędów

- Jeżeli f' ma pochodną w x_0, to nazywamy ją **pochodną drugiego rzędu** (albo drugą pochodną) i oznaczamy symbolem $f''(x_0)$
- pochodną drugiej pochodnej nazywamy **pochodną trzeciego rzędu**, $f'''(x_0)$
- pochodną trzeciej pochodnej nazywamy **pochodną czwartego rzędu**, $f^{(4)}(x_0)$
- ...

Pochodne wyższych rzędów

- Jeżeli f' ma pochodną w x_0, to nazywamy ją **pochodną drugiego rzędu** (albo drugą pochodną) i oznaczamy symbolem $f''(x_0)$
- pochodną drugiej pochodnej nazywamy **pochodną trzeciego rzędu**, $f'''(x_0)$
- pochodną trzeciej pochodnej nazywamy **pochodną czwartego rzędu**, $f^{(4)}(x_0)$
- ...

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \quad f^{(4)}(x), \ldots f^{(n)}(x)$$

Pochodne wyższych rzędów

- Jeżeli f' ma pochodną w x_0, to nazywamy ją **pochodną drugiego rzędu** (albo drugą pochodną) i oznaczamy symbolem $f''(x_0)$
- pochodną drugiej pochodnej nazywamy **pochodną trzeciego rzędu**, $f'''(x_0)$
- pochodną trzeciej pochodnej nazywamy **pochodną czwartego rzędu**, $f^{(4)}(x_0)$
- ...

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \quad f^{(4)}(x), \ldots f^{(n)}(x)$$

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^3 f}{dx^3}, \quad \frac{d^4 f}{dx^4}, \ldots \frac{d^n f}{dx^n}$$

Oznaczenia

- **Leibniz**

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^3 f}{dx^3}$$

- **Lagrange**

$$f'(x), \quad f''(x), f^{(2)}(x), \quad f'''(x), f^{(3)}(x)$$

- **Newton**

$$\dot{y}, \quad \ddot{y}$$

- **Euler**

$$Df(x), \quad D^2 f(x), \quad D^3 f(x)$$