Pochodna funkcji

Zastosowania

Niektóre zastosowania pochodnych

1. Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości
2. Pochodna jako narzędzie do obliczania granic
3. Pochodna jako narzędzie optymalizacyjne
4. Pochodna jako narzędzie do badania funkcji

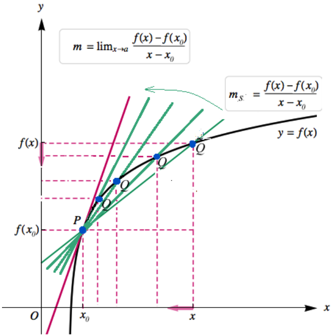
Pochodna właściwa funkcji $y = f(x)$ **w punkcie** x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pochodna właściwa funkcji $y = f(x)$ **w punkcie** x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

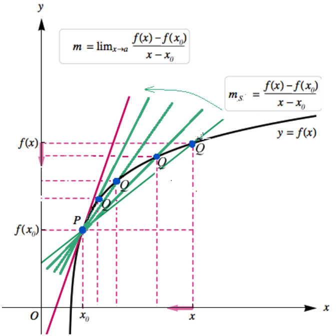
$f'(x_0)$ jest współczynnikiem kierunkowym **stycznej do krzywej** w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

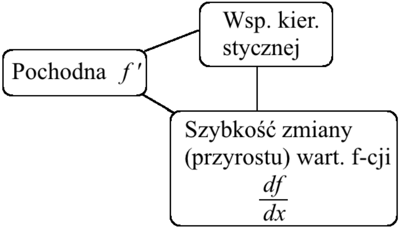


Pochodna właściwa funkcji $y = f(x)$ **w punkcie** x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'(x_0)$ jest współczynnikiem kierunkowym **stycznej do krzywej** w punkcie $(x_0, f(x_0))$.





Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

- Załóżmy, że f jest różniczkowalna w przedziale zawierającym x_0

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

- Załóżmy, że f jest różniczkowalna w przedziale zawierającym x_0
- Współczynnik kierunkowy stycznej do f w $(x_0, f(x_0))$ to $f'(x_0)$

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

- Załóżmy, że f jest różniczkowalna w przedziale zawierającym x_0
- Współczynnik kierunkowy stycznej do f w $(x_0, f(x_0))$ to $f'(x_0)$

Równanie stycznej $y = L(x)$ w punkcie $x = x_0$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

- Załóżmy, że f jest różniczkowalna w przedziale zawierającym x_0
- Współczynnik kierunkowy stycznej do f w $(x_0, f(x_0))$ to $f'(x_0)$

Równanie stycznej $y = L(x)$ w punkcie $x = x_0$

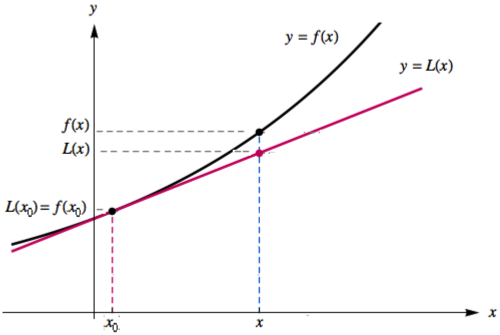
$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Wartość funkcji f w pobliżu x_0 przybliżamy używając L

$$f(x) \approx L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

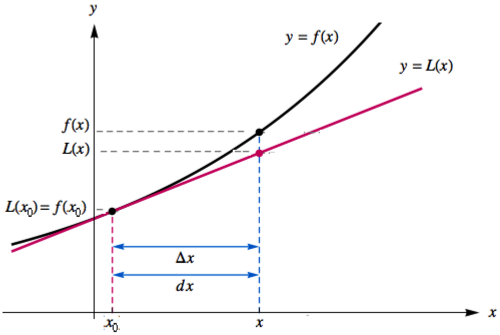


$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

- przyrost x

$$\Delta x = dx = x - x_0$$



$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

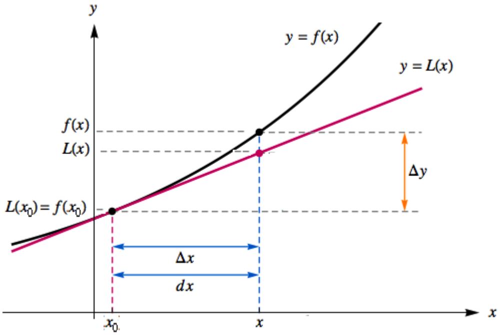
Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

- przyrost x

$$\Delta x = dx = x - x_0$$

- przyrost f

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$



$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

- przyrost x

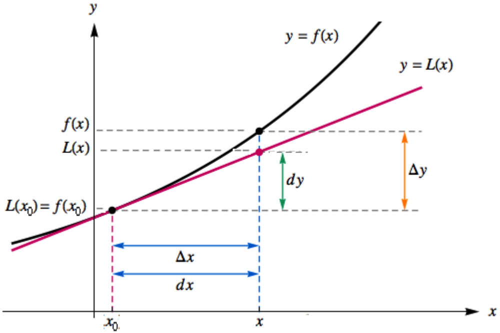
$$\Delta x = dx = x - x_0$$

- przyrost f

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

- przyrost L

$$dy = L(x) - L(x_0)$$



$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

- przyrost x

$$\Delta x = dx = x - x_0$$

- przyrost f

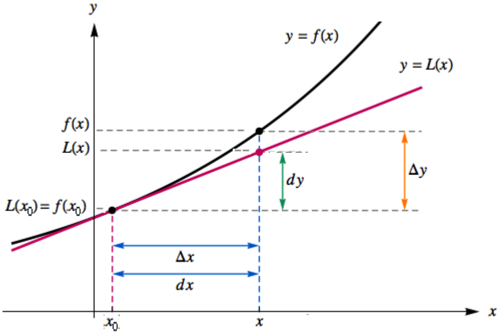
$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

- przyrost L

$$dy = L(x) - L(x_0)$$

- **różniczka funkcji**

$$dy = f'(x_0)dx$$



$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

Jak używamy różniczki funkcji ?

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

Jak używamy różniczki funkcji ?

Przybliżanie wartości przy pomocy różniczki

Przybliżona wartość funkcji f w punkcie x jest dana wzorem

$$f(x) \approx f(x_0) + dy, \quad \text{gdzie} \quad dy = f'(x_0)dx$$

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$$

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$$

- Czy możemy znaleźć lepsze przybliżenie $f(x)$?

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$$

- Czy możemy znaleźć lepsze przybliżenie $f(x)$?

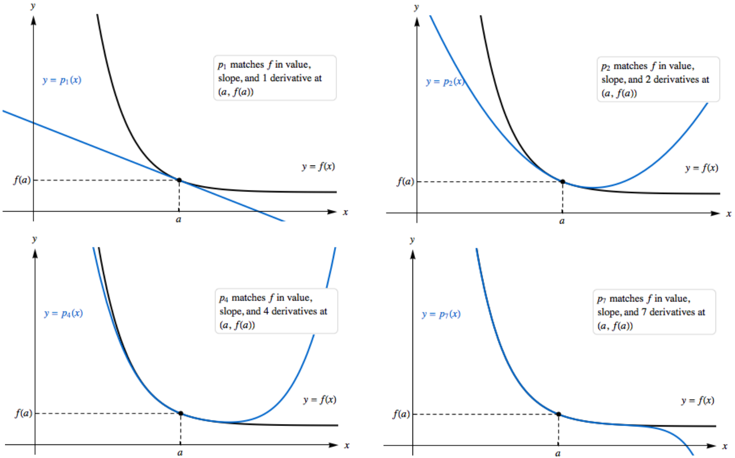
Wielomian Taylora

Niech funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną właściwą rzędu n. Wielomian

$$P_n(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

nazywamy **wielomianem Taylora rzędu n funkcji f w punkcie** x_0.

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości
Wielomian Taylora



Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

Twierdzenie Taylora

Jeżeli f ma ciągłą pochodną rzędu $n+1$ na przedziale otwartym zawierającym x_0, to dla każdego x z tego przedziału istnieje punkt $c \in (x_0, x)$ (lub $c \in (x, x_0)$) taki, że

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad \text{(czyli } f(x) \approx P_n(x)\text{)}$$

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

Twierdzenie Taylora

Jeżeli f ma ciągłą pochodną rzędu $n+1$ na przedziale otwartym zawierającym x_0, to dla każdego x z tego przedziału istnieje punkt $c \in (x_0, x)$ (lub $c \in (x, x_0)$) taki, że

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad \text{(czyli } f(x) \approx P_n(x)\text{)}$$

gdzie $P_n(x)$ jest wielomianem Taylora rzędu n funkcji f w punkcie x_0,

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

Twierdzenie Taylora

Jeżeli f ma ciągłą pochodną rzędu $n+1$ na przedziale otwartym zawierającym x_0, to dla każdego x z tego przedziału istnieje punkt $c \in (x_0, x)$ (lub $c \in (x, x_0)$) taki, że

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad \text{(czyli } f(x) \approx P_n(x)\text{)}$$

gdzie $P_n(x)$ jest wielomianem Taylora rzędu n funkcji f w punkcie x_0, a R_n jest n–**tą resztą**

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Pochodna jako narzędzie do przybliżania wartości

Twierdzenie Taylora

Jeżeli f ma ciągłą pochodną rzędu $n+1$ na przedziale otwartym zawierającym x_0, to dla każdego x z tego przedziału istnieje punkt $c \in (x_0, x)$ (lub $c \in (x, x_0)$) taki, że

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad \text{(czyli } f(x) \approx P_n(x))$$

gdzie $P_n(x)$ jest wielomianem Taylora rzędu n funkcji f w punkcie x_0, a R_n jest $n-$**tą resztą**

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Dla $x_0 = 0$ wielomian $P_n(x)$ nazywamy **wielomianem McLaurina**.

Pochodna jako narzędzie do obliczania granic

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right] \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Pochodna jako narzędzie do obliczania granic

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right] \quad , \quad \lim_{x\to \infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Reguła de l'Hopitala

Jeżeli dziedziny funkcji $\frac{f}{g}$ i $\frac{f'}{g'}$ zawierają sąsiedztwo $S(x_0)$ punktu x_0 oraz $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ lub $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$, to

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Pochodna jako narzędzie do obliczania granic

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right] \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Reguła de l'Hopitala

Jeżeli dziedziny funkcji $\frac{f}{g}$ i $\frac{f'}{g'}$ zawierają sąsiedztwo $S(x_0)$ punktu x_0 oraz $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ lub $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$, to

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

o ile granica (właściwa lub niewłaściwa) po prawej stronie równości istnieje.

Pochodna jako narzędzie do obliczania granic

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right] \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Reguła de l'Hopitala

Jeżeli dziedziny funkcji $\frac{f}{g}$ i $\frac{f'}{g'}$ zawierają sąsiedztwo $S(x_0)$ punktu x_0 oraz $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ lub $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$, to

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

o ile granica (właściwa lub niewłaściwa) po prawej stronie równości istnieje. Twierdzenie jest również prawdziwe dla $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$ i $x\to\pm\infty$.

Inne symbole nieoznaczone

$f(x)g(x) \to [0 \cdot \infty]$

Inne symbole nieoznaczone

$$f(x)g(x) \to [0 \cdot \infty] \qquad \text{stosujemy} \qquad \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \to \left[\frac{0}{0}\right]$$

Inne symbole nieoznaczone

$$f(x)g(x) \to [0 \cdot \infty] \qquad \text{stosujemy} \qquad \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \to \left[\frac{0}{0}\right] \quad \text{lub} \quad \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \to \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Inne symbole nieoznaczone

$$f(x)g(x) \to [0 \cdot \infty] \qquad \text{stosujemy} \qquad \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \to \left[\frac{0}{0}\right] \quad \text{lub} \quad \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \to \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$f(x) - g(x) \to [\infty - \infty]$$

Inne symbole nieoznaczone

$$f(x)g(x) \to [0 \cdot \infty] \qquad \text{stosujemy} \qquad \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \to \left[\frac{0}{0}\right] \quad \text{lub} \quad \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \to \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$f(x) - g(x) \to [\infty - \infty] \qquad \text{stosujemy} \qquad \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \to \left[\frac{0}{0}\right]$$

Inne symbole nieoznaczone

$$f(x)g(x) \to [0 \cdot \infty] \qquad \text{stosujemy} \qquad \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \to \left[\frac{0}{0}\right] \quad \text{lub} \quad \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \to \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$f(x) - g(x) \to [\infty - \infty] \qquad \text{stosujemy} \qquad \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \to \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$f(x)^{g(x)} \to \left[0^0, \infty^0, 1^\infty\right]$$

Inne symbole nieoznaczone

$$f(x)g(x) \to [0 \cdot \infty] \qquad \text{stosujemy} \qquad \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \to \left[\frac{0}{0}\right] \quad \text{lub} \quad \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \to \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$f(x) - g(x) \to [\infty - \infty] \qquad \text{stosujemy} \qquad \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \to \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$f(x)^{g(x)} \to \left[0^0, \infty^0, 1^\infty\right] \qquad \text{stosujemy} \qquad f^g = e^{g \ln f} \to \left[e^{0 \cdot \infty}\right]$$

Unikaj błędów w stosowaniu reguły de l'Hopitala

- Oblicz iloraz pochodnych nie pochodną ilorazu

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$$

Unikaj błędów w stosowaniu reguły de l'Hopitala

- Oblicz iloraz pochodnych nie pochodną ilorazu

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$$

- Najpierw upewnij się, że granica z lewej daje symbol nieoznaczony

Unikaj błędów w stosowaniu reguły de l'Hopitala

- Oblicz iloraz pochodnych nie pochodną ilorazu

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$$

- Najpierw upewnij się, że granica z lewej daje symbol nieoznaczony
- Upewnij się, że granica ilorazu pochodnych istnieje (właściwa lub niewłaściwa)

Unikaj błędów w stosowaniu reguły de l'Hopitala

- Oblicz iloraz pochodnych nie pochodną ilorazu

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$$

- Najpierw upewnij się, że granica z lewej daje symbol nieoznaczony
- Upewnij się, że granica ilorazu pochodnych istnieje (właściwa lub niewłaściwa)
- Wielokrotne używanie reguły czasem prowadzi do niekończącego się cyklu $\to$ użyj innych metod

Pochodna jako narzędzie optymalizacyjne

- Jak zmaksymalizować/zminimalizować:
  - zyski i koszty
  - ilość materiału użytego do produkcji ... czegokolwiek
  - prędkość promu kosmicznego ...

  $\Longrightarrow$ problemy optymalizacyjne

Pochodna jako narzędzie optymalizacyjne

- Jak zmaksymalizować/zminimalizować:
  - zyski i koszty
  - ilość materiału użytego do produkcji ... czegokolwiek
  - prędkość promu kosmicznego ...

  $\Longrightarrow$ problemy optymalizacyjne
- W języku matematyki: *gdzie dana funkcja osiąga maksymalną/minimalną wartość ?*

Wartość największa i najmniejsza

Liczba $m \in \mathbb{R}$ jest **minimum absolutnym** funkcji f w zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli istnieje taki punkt $x_0 \in A$, że $f(x_0) = m$ oraz dla dowolnego $x \in A$

$$f(x) \geq m$$

Liczba $M \in \mathbb{R}$ jest **maksimum absolutnym** funkcji f w zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli istnieje taki punkt $x_0 \in A$, że $f(x_0) = M$ oraz dla dowolnego $x \in A$

$$f(x) \leq M$$

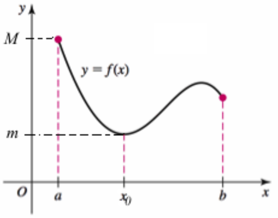
Wartość największa i najmniejsza

Liczba $m \in \mathbb{R}$ jest **minimum absolutnym** funkcji f w zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli istnieje taki punkt $x_0 \in A$, że $f(x_0) = m$ oraz dla dowolnego $x \in A$

$$f(x) \geq m$$

Liczba $M \in \mathbb{R}$ jest **maksimum absolutnym** funkcji f w zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli istnieje taki punkt $x_0 \in A$, że $f(x_0) = M$ oraz dla dowolnego $x \in A$

$$f(x) \leq M$$



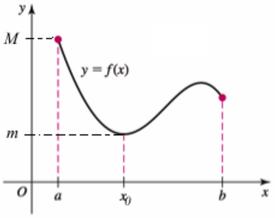
Wartość największa i najmniejsza

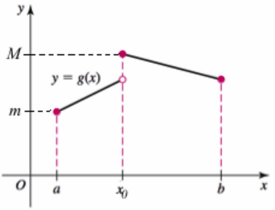
Liczba $m \in \mathbb{R}$ jest **minimum absolutnym** funkcji f w zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli istnieje taki punkt $x_0 \in A$, że $f(x_0) = m$ oraz dla dowolnego $x \in A$

$$f(x) \geq m$$

Liczba $M \in \mathbb{R}$ jest **maksimum absolutnym** funkcji f w zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli istnieje taki punkt $x_0 \in A$, że $f(x_0) = M$ oraz dla dowolnego $x \in A$

$$f(x) \leq M$$





- Czy funkcja zawsze posiada wartość największą i najmniejszą w dowolnym przedziale $A \subset D_f$?

- Czy funkcja zawsze posiada wartość największą i najmniejszą w dowolnym przedziale $A \subset D_f$?

$$f(x) = x^4, \;\; f(x) = \sin x, \;\; f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \;\; f(x) = \begin{cases} x^3, \; 0 \le x < 1 \\ -\frac{1}{2}x + 1, \; 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

- Czy funkcja zawsze posiada wartość największą i najmniejszą w dowolnym przedziale $A \subset D_f$?

$$f(x) = x^4, \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \quad f(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{2}x + 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Twierdzenie (Weierstrassa)

Jeżeli funkcja jest *ciągła na przedziale domkniętym* $[a, b]$ to osiąga na tym przedziale ekstrema absolutne.

Ekstrema lokalne

Funkcja f ma w punkcie x_0

- **maksimum lokalne**, jeżeli $\exists\ r > 0$ takie, że $\forall x \in S(x_0, r)$
$$f(x) \leq f(x_0)$$
- **minimum lokalne**, jeżeli $\exists\ r > 0$ takie, że $\forall x \in S(x_0, r)$
$$f(x) \geq f(x_0)$$

- Jak znaleźć ekstrema lokalne funkcji f ?

- Jak znaleźć ekstrema lokalne funkcji f ?

Warunek konieczny istnienia ekstremum

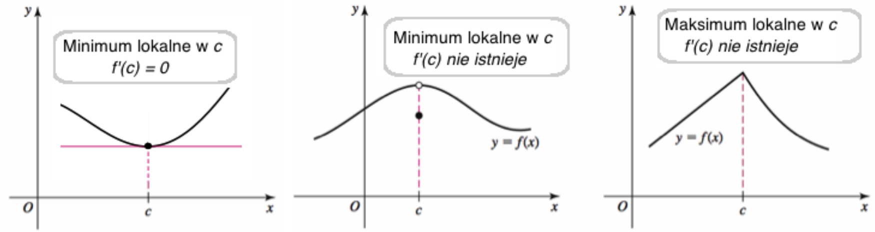
Jeżeli f osiąga ekstermum w punkcie x_0 to $f'(x_0) = 0$ albo $f'(x_0)$ nie istnieje.

- Jak znaleźć ekstrema lokalne funkcji f ?

Warunek konieczny istnienia ekstremum

Jeżeli f osiąga ekstermum w punkcie x_0 to $f'(x_0) = 0$ albo $f'(x_0)$ nie istnieje.

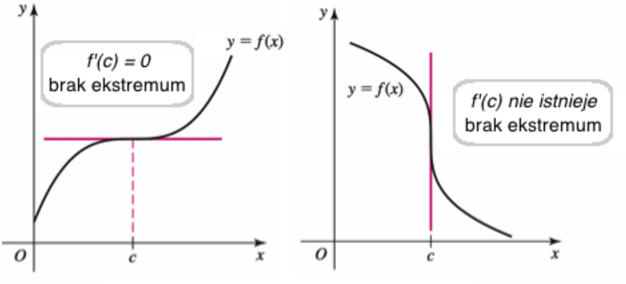
Jeżeli $f'(x_0) = 0$, to punkt x_0 nazywa się **punktem stacjonarnym** funkcji f.



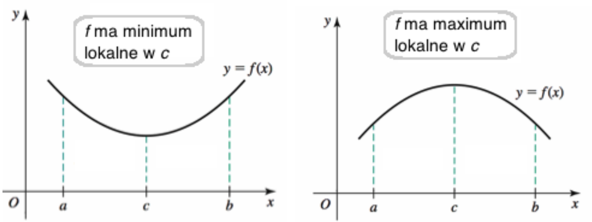
- *Twierdzenie odwrotne (jak to zwykle bywa) nie jest prawdziwe.* $f'(x_0) = 0$ *lub* $f'(x_0) \in \emptyset$ *nie gwarantuje ekstremum.*

- *Twierdzenie odwrotne (jak to zwykle bywa) nie jest prawdziwe.*

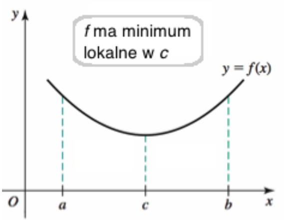
$f'(x_0) = 0$ *lub* $f'(x_0) \in \emptyset$ *nie gwarantuje ekstremum.*

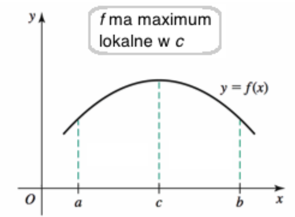


- Po zlokalizowaniu punktów które *mogą* być ekstremami, jak stwierdzić czy są to wartości lokalnie największe/najmniejsze ?



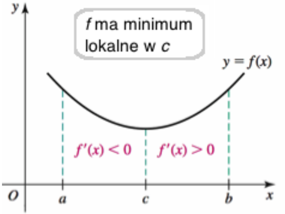
- Po zlokalizowaniu punktów które *mogą* być ekstremami, jak stwierdzić czy są to wartości lokalnie największe/najmniejsze ?
- Funkcja f musi zmieniać monotonicznośc w punkcie x_0.

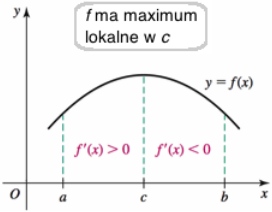




- Po zlokalizowaniu punktów które *mogą* być ekstremami, jak stwierdzić czy są to wartości lokalnie największe/najmniejsze ?
- Funkcja f musi zmieniać monotonicznośc w punkcie x_0.

- Jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in I$ to funkcja f jest **rosnąca** na I.
- Jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in I$ to funkcja f jest **malejąca** na I.
- Jeżeli $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in I$ to funkcja f jest **stała** na I.



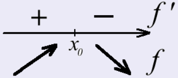


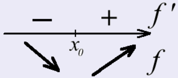
Warunek wystarczający istnienia ekstremum na podstawie f'

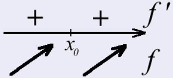
Jeżeli:

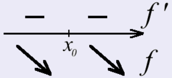
(a) f jest ciągła w otoczeniu i różniczkowalna w sąsiedztwie x_0.
(b) $f'(x_0) = 0$ lub $f'(x_0)$ nie istnieje.

oraz

- 

$\Longrightarrow f$ ma w punkcie x_0 maksimum lokalne.
- 

$\Longrightarrow f$ ma w punkcie x_0 minimum lokalne.
- 



$\Longrightarrow f$ nie ma ekstremum lok. w x_0.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum na podstawie f''

Jeżeli funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 drugą pochodną, która jest ciągła w punkcie x_0, a ponadto

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{oraz} \quad f''(x_0) \neq 0$$

to funkcja ma w punkcie x_0

- maksimum lokalne gdy $f''(x_0) < 0$
- minimum lokalne gdy $f''(x_0) > 0$

Notka

Powyższe twierdzenie w ogólnej postaci mówi o $n-$tej pochodnej i jej znaku.

Maksimum i minimum absolutne

Jak znaleźć maksimum i minimum absolutne

Niech f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$.

Maksimum i minimum absolutne

Jak znaleźć maksimum i minimum absolutne

Niech f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$.

1. Znajdź punkty $x_0 \in (a, b)$ w których $f'(x_0)$ nie istnieje lub $f'(x_0) = 0$. To są kandydaci na ekstrema absolutne.

Maksimum i minimum absolutne

Jak znaleźć maksimum i minimum absolutne

Niech f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$.

1. Znajdź punkty $x_0 \in (a, b)$ w których $f'(x_0)$ nie istnieje lub $f'(x_0) = 0$. To są kandydaci na ekstrema absolutne.
2. Oblicz wartości f w tych punktach i na krańcach przedziału $[a, b]$.

Maksimum i minimum absolutne

Jak znaleźć maksimum i minimum absolutne

Niech f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$.

1. Znajdź punkty $x_0 \in (a, b)$ w których $f'(x_0)$ nie istnieje lub $f'(x_0) = 0$. To są kandydaci na ekstrema absolutne.
2. Oblicz wartości f w tych punktach i na krańcach przedziału $[a, b]$.
3. Wybierz nawiększą i najmniejszą z wyliczonych wartości.

Dlaczego puszka 0,33l ma takie a nie inne wymiary ?

O czym mówi nam druga pochodna ?

Wklęsłość, wypukłość

O czym mówi nam druga pochodna ?

Wklęsłość, wypukłość

Niech f będzie różniczkowalna w przedziale(a, b). Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest

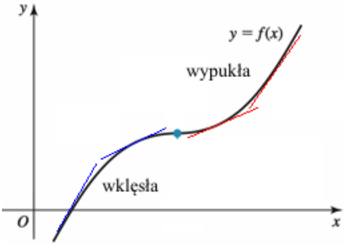
- **wypukła** (wypukła w dół) w przedziale $(a, b) \iff$ styczna w każdym punkcie $x_0 \in (a, b)$ jest położona pod krzywą $y = f(x)$
- **wklęsła** (wypukła w górę) w przedziale $(a, b) \iff$ styczna w każdym punkcie $x_0 \in (a, b)$ jest położona nad krzywą $y = f(x)$

O czym mówi nam druga pochodna ?

Wklęsłość, wypukłość

Niech f będzie różniczkowalna w przedziale(a, b). Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest

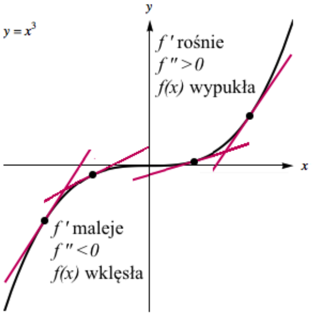
- **wypukła** (wypukła w dół) w przedziale $(a, b) \iff$ styczna w każdym punkcie $x_0 \in (a, b)$ jest położona pod krzywą $y = f(x)$
- **wklęsła** (wypukła w górę) w przedziale $(a, b) \iff$ styczna w każdym punkcie $x_0 \in (a, b)$ jest położona nad krzywą $y = f(x)$



Warunki wklęsłości/wypukłości

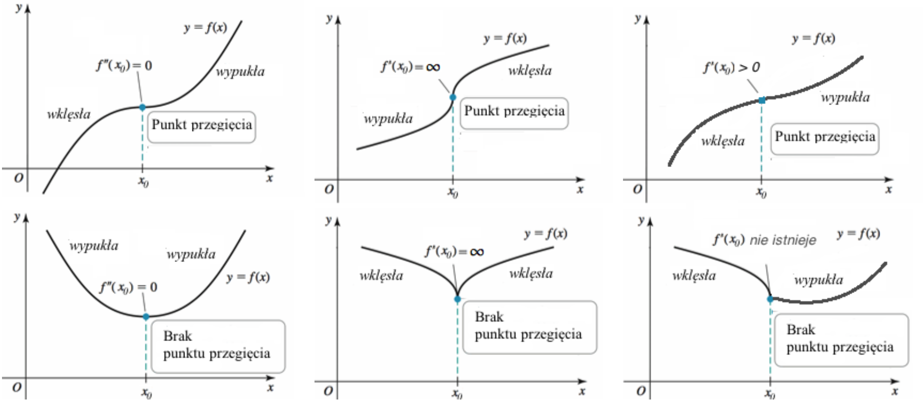
Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$ zachodzi

- $f''(x) < 0$, to krzywa $y = f(x)$ jest wklęsła na (a, b)
- $f''(x) > 0$, to krzywa $y = f(x)$ jest wypukła na (a, b)



Punkt przegięcia

Jeżeli w punkcie $(x_0, f(x_0))$ istnieje styczna do krzywej $y = f(x)$ i funkcja zmienia się z wklęsłej na wypukłą (lub odwrotnie) wokół tego punktu, to $(x_0, f(x_0))$ nazywamy **punktem przegięcia krzywej**.



A skoro mowa o wykresach funkcji ...

Asymptoty pionowe, $x = x_0$

- **asymptota lewostronna** wykresu funkcji $y = f(x)$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

- **asymptota prawostronna** wykresu funkcji $y = f(x)$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

- **aysmptota obustronna** = lewo- + prawostronna

Asymptoty ukośne, $y = ax + b$

- **asymptota lewostronna** wykresu funkcji $y = f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$$

- **asymptota prawostronna** wykresu funkcji $y = f(x)$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$$

- **aysmptota obustronna** = lewo- + prawostronna

$$a = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - ax]$$

Jeżeli $a = 0$ to mamy **asymptotę poziomą** $y = b$.

Badanie przebiegu zmienności funkcji

- Analiza funkcji:
  - dziedzina
  - punkty przecięcia wykresu z osiami układu
  - parzystość, nieparzystość, okresowość
  - granice w nieskończoności lub na krańcach przedziału
  - asymptoty pionowe i ukośne
- Analiza pierwszej pochodnej:
  - pochodna i jej dziedzina
  - znak pochodnej $\longrightarrow$ monotoniczność funkcji
  - ekstrema funkcji
- Analiza drugiej pochodnej:
  - pochodna i jej dziedzina
  - znak pochodnej $\longrightarrow$ wklęsłość/wypukłość funkcji
  - punkty przegięcia
- (Tabelka zmienności funkcji)
- Wykres funkcji