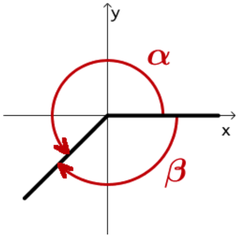
Funkcje trygonometryczne

Wprowadzenie

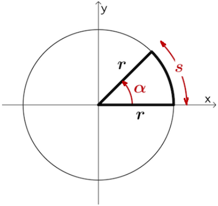
- **Trygonometria** = "miara trójkątów"
- Początkowo trygonometria badała związki miarowe między bokami i kątami trójkątów
- Z rozwojem analizy matematycznej zastosowania trygonometrii poszerzyły się
  - fale dzwiękowe i świetlne
  - orbity planetarne
  - wibrujące stryny
  - wahadła ...

Miara kąta



- kąt mierzymy od ramienia początkowego do końcowego w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara ($\alpha > 0$)
- kąt zgodny z ruchem wskazówek zegara jest ujemny ($\beta < 0$)

Miara kąta



Definicja

Miarą łukową kąta w kole o promieniu r nazywamy stosunek długości łuku s do promienia

$$\alpha = \frac{s}{r}$$

Jednostką miary łukowej jest **radian**.

pełny obrót $(360^\circ) \Rightarrow$

$$\text{pełny obrót } (360^\circ) \Rightarrow \alpha = \frac{s}{r} = \frac{\text{obwód koła}}{r} =$$

$$\text{pełny obrót } (360^\circ) \Rightarrow \alpha = \frac{s}{r} = \frac{\text{obwód koła}}{r} = \frac{2\pi r}{r} =$$

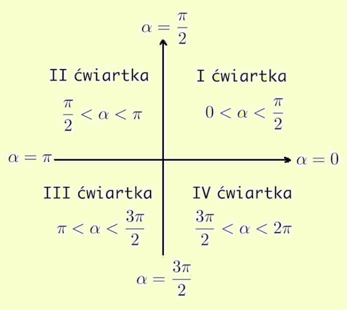
$$\text{pełny obrót } (360^\circ) \Rightarrow \alpha = \frac{s}{r} = \frac{\text{obwód koła}}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$

$$\text{pełny obrót } (360^\circ) \Rightarrow \alpha = \frac{s}{r} = \frac{\text{obwód koła}}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$

miara stopniowa	miara łukowa
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
270°	$\frac{3\pi}{2}$
360°	2π

$$\text{pełny obrót } (360^\circ) \Rightarrow \alpha = \frac{s}{r} = \frac{\text{obwód koła}}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}$$

miara stopniowa	miara łukowa
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
270°	$\frac{3\pi}{2}$
360°	2π



$$180^\circ = \pi$$

$$180^\circ = \pi$$

Uwaga

Umownie przyjęto, że jeżeli podany kąt jest oznaczony liczbą bez podania miary, to będzie to oznaczać liczbę radianów.

$$\text{np. } 50 = 50 \text{ rad} \qquad (50 \neq 50^\circ)$$

$$180^\circ = \pi \quad \Longrightarrow \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

$$180^\circ = \pi$$

Uwaga

Umownie przyjęto, że jeżeli podany kąt jest oznaczony liczbą bez podania miary, to będzie to oznaczać liczbę radianów.

$$\text{np. } 50 = 50 \text{ rad} \qquad (50 \neq 50^\circ)$$

$$180^\circ = \pi \quad \Longrightarrow \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

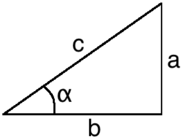
$$180^\circ = \pi \quad \Longrightarrow \quad 1 = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Uwaga

Umownie przyjęto, że jeżeli podany kąt jest oznaczony liczbą bez podania miary, to będzie to oznaczać liczbę radianów.

$$\text{np. } 50 = 50 \text{ rad} \qquad (50 \neq 50^\circ)$$

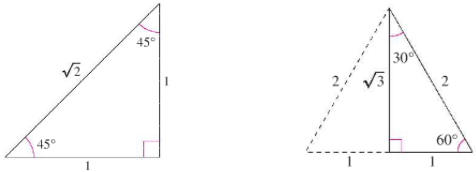
Funkcje trygonometryczne na trójkącie



Definicje

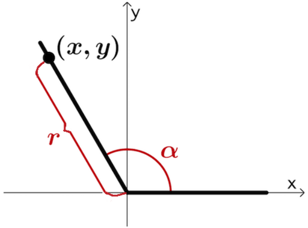
- **sinusem** kąta α nazywamy
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
- **cosinusem** kąta α nazywamy
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$
- **tangensem** kąta α nazywamy
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$
- **cotangensem** kąta α nazywamy
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Funkcje trygonometryczne na trójkącie



α	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$
$\sin\alpha$			
$\cos\alpha$			
$\operatorname{tg}\alpha$			
$\operatorname{ctg}\alpha$			

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta



Definicje

Jeżeli punkt $P(x, y)$ jest punktem (różnym od punktu $(0, 0)$) na końcowym ramieniu kąta α, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest promieniem wodzącym punktu P, to

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \ \ (x \neq 0) \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} \ \ (y \neq 0)$$

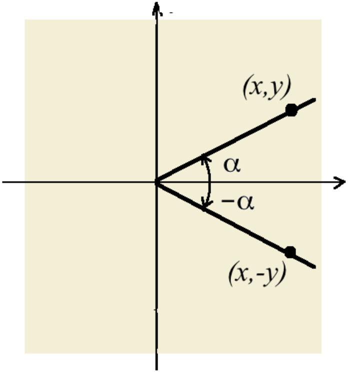
Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

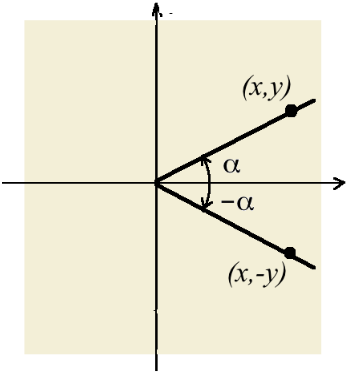


Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

- $\sin(-\alpha) = \frac{-y}{r} =$

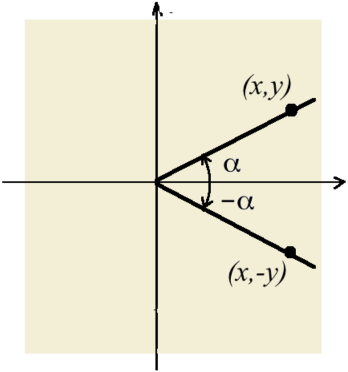


Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

- $\sin(-\alpha) = \frac{-y}{r} =$
- $\cos(-\alpha) = \frac{x}{r} =$

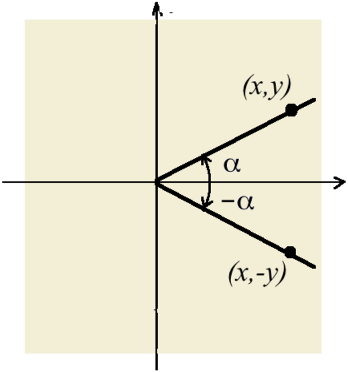


Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

- $\sin(-\alpha) = \frac{-y}{r} =$
- $\cos(-\alpha) = \frac{x}{r} =$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-y}{x} =$

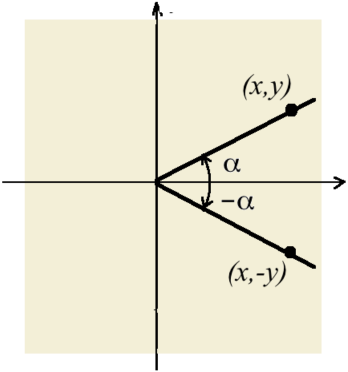


Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

- $\sin(-\alpha) = \frac{-y}{r} =$
- $\cos(-\alpha) = \frac{x}{r} =$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-y}{x} =$
- $\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{x}{-y} =$

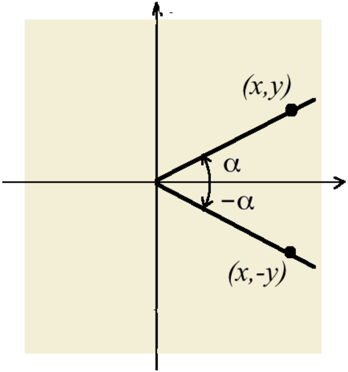


Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

- $\sin(-\alpha) = \frac{-y}{r} =$
- $\cos(-\alpha) = \frac{x}{r} =$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-y}{x} =$
- $\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{x}{-y} =$
- $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$

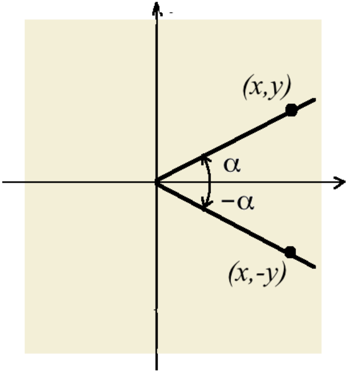


Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

- $\sin(-\alpha) = \frac{-y}{r} =$
- $\cos(-\alpha) = \frac{x}{r} =$
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-y}{x} =$
- $\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{x}{-y} =$
- $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$



Wzory redukcyjne

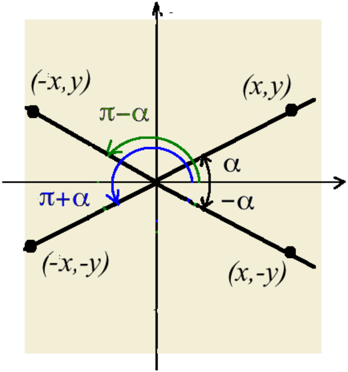
$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

- $\sin(\pi - \alpha) = \frac{y}{r} =$

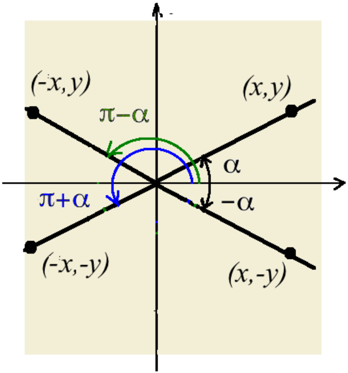


Wzory redukcyjne

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

- $\sin(\pi - \alpha) = \frac{y}{r} =$
- $\cos(\pi - \alpha) = \frac{-x}{r} =$

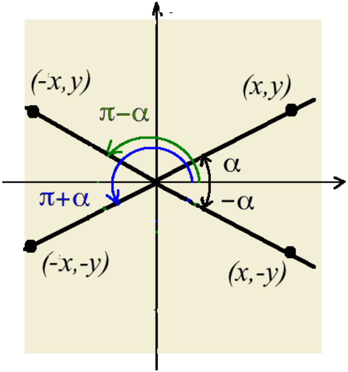


Wzory redukcyjne

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

- $\sin(\pi - \alpha) = \frac{y}{r} =$
- $\cos(\pi - \alpha) = \frac{-x}{r} =$
- $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{y}{-x} =$

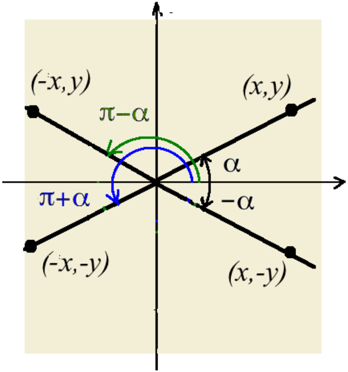


Wzory redukcyjne

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

- $\sin(\pi - \alpha) = \frac{y}{r} =$
- $\cos(\pi - \alpha) = \frac{-x}{r} =$
- $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{y}{-x} =$
- $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \frac{-x}{y} =$

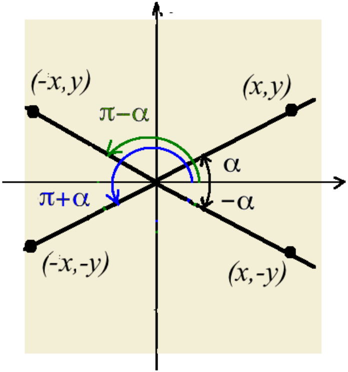


Wzory redukcyjne

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

- $\sin(\pi - \alpha) = \frac{y}{r} =$
- $\cos(\pi - \alpha) = \frac{-x}{r} =$
- $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{y}{-x} =$
- $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \frac{-x}{y} =$
- $\sin(\pi + \alpha) = \frac{-y}{r} =$

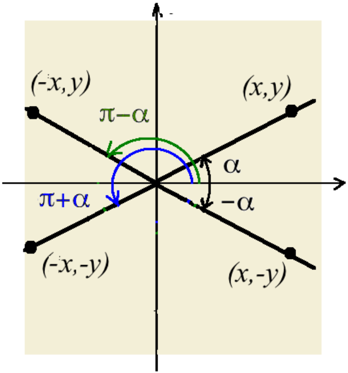


Wzory redukcyjne

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

- $\sin(\pi - \alpha) = \frac{y}{r} =$
- $\cos(\pi - \alpha) = \frac{-x}{r} =$
- $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{y}{-x} =$
- $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \frac{-x}{y} =$
- $\sin(\pi + \alpha) = \frac{-y}{r} =$
- $\cos(\pi + \alpha) = \frac{-x}{r} =$

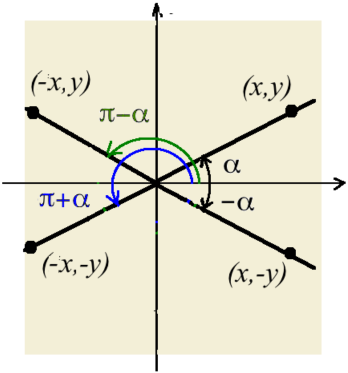


Wzory redukcyjne

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

- $\sin(\pi - \alpha) = \frac{y}{r} =$
- $\cos(\pi - \alpha) = \frac{-x}{r} =$
- $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{y}{-x} =$
- $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \frac{-x}{y} =$
- $\sin(\pi + \alpha) = \frac{-y}{r} =$
- $\cos(\pi + \alpha) = \frac{-x}{r} =$
- $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \frac{-y}{-x} =$

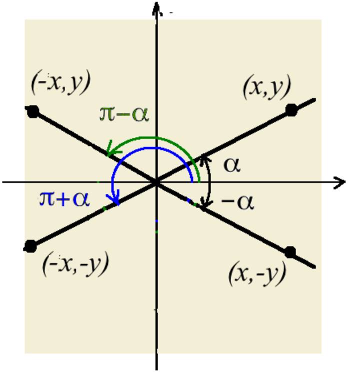


Wzory redukcyjne

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

- $\sin(\pi - \alpha) = \frac{y}{r} =$
- $\cos(\pi - \alpha) = \frac{-x}{r} =$
- $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{y}{-x} =$
- $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \frac{-x}{y} =$
- $\sin(\pi + \alpha) = \frac{-y}{r} =$
- $\cos(\pi + \alpha) = \frac{-x}{r} =$
- $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \frac{-y}{-x} =$
- $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \frac{-x}{-y} =$

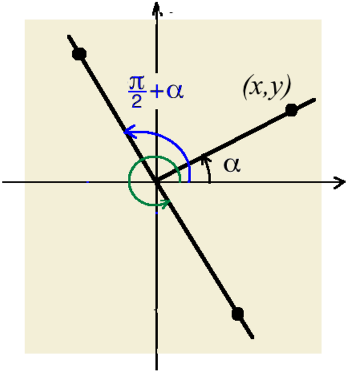


Wzory redukcyjne

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

Wzory redukcyjne

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$
- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$
- $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$
- $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$
- $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$
- $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) =$



Wzory redukcyjne

Reguła jest prosta

$$f, g \ : \ \sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$$

$$g(\alpha \pm x) = \pm f(x)$$

Wzory redukcyjne

Reguła jest prosta

$$f, g \;:\; \sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$$

$$g(\alpha \pm x) = \pm f(x)$$

- dla $\begin{array}{lcl} \alpha = \pi, 2\pi & : & f = g \quad , \textit{czyli funkcja bez zmian} \\ \alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} & : & \sin \longleftrightarrow \cos, \quad \mathrm{tg} \longleftrightarrow \mathrm{ctg} \end{array}$

Wzory redukcyjne

Reguła jest prosta

$$f, g \ : \ \sin, \cos, \mathrm{tg}, \mathrm{ctg}$$

$$g(\alpha \pm x) = \pm f(x)$$

- dla $\begin{array}{lcl} \alpha = \pi, 2\pi & : & f = g \quad , \textit{czyli funkcja bez zmian} \\ \alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} & : & \sin \longleftrightarrow \cos, \quad \mathrm{tg} \longleftrightarrow \mathrm{ctg} \end{array}$
- Znak $\pm$ przed $f(x)$ zależy od kąta $\alpha \pm x$ i funkcji g

W pierwszej wszystkie dodatnie
W drugiej tylko sinus
W trzeciej tangens i contangens
A w czwartej cosinus

Tożsamości trygonometryczne

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Sinus i Cosinus sumy i różnicy

- Ze wzorów na *sinus* i *cosinus* sumy można wyprowadzić wiele innych wzorów

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

Sinus i Cosinus sumy i różnicy

- Ze wzorów na *sinus* i *cosinus* sumy można wyprowadzić wiele innych wzorów

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$$

Sinus i Cosinus sumy i różnicy

- Ze wzorów na *sinus* i *cosinus* sumy można wyprowadzić wiele innych wzorów

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(u+v) &= \sin u\cos v + \cos u\sin v \\ \cos(u+v) &= \cos u\cos v - \sin u\sin v \\ \sin(u-v) &= \sin u\cos v - \cos u\sin v \\ \cos(u-v) &= \cos u\cos v + \sin u\sin v \end{aligned}}$$

Zamiana iloczynu na sumę i sumy na iloczyn

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin u \sin v &= \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(u-v\right) - \cos\left(u+v\right)\right] \\
\cos u \cos v &= \tfrac{1}{2}\left[\cos\left(u-v\right) + \cos\left(u+v\right)\right] \\
\sin u \cos v &= \tfrac{1}{2}\left[\sin\left(u+v\right) + \sin\left(u-v\right)\right] \\
\cos u \sin v &= \tfrac{1}{2}\left[\sin\left(u+v\right) - \sin\left(u-v\right)\right]
\end{aligned}}$$

Zamiana iloczynu na sumę i sumy na iloczyn

$$\sin u \sin v = \tfrac{1}{2}\left[\cos(u-v) - \cos(u+v)\right]$$
$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}\left[\cos(u-v) + \cos(u+v)\right]$$
$$\sin u \cos v = \tfrac{1}{2}\left[\sin(u+v) + \sin(u-v)\right]$$
$$\cos u \sin v = \tfrac{1}{2}\left[\sin(u+v) - \sin(u-v)\right]$$

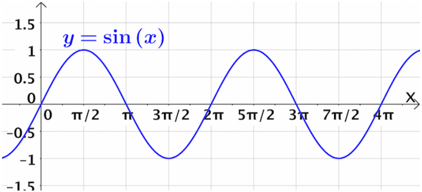
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Funkcje trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne

Definicje

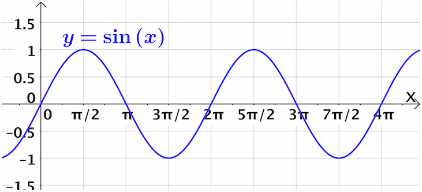
Funkcja sinus, $f(x) = \sin x$, gdzie x jest miarą łukową kąta.

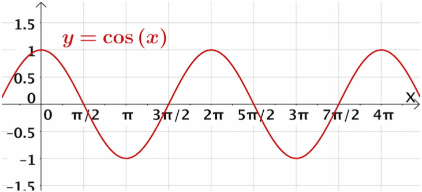


Funkcje trygonometryczne

Definicje

Funkcja sinus, $f(x) = \sin x$, gdzie x jest miarą łukową kąta.
Funkcja cosinus, $f(x) = \cos x$, gdzie x jest miarą łukową kąta.
Dziedziną obu funkcji jest $D_f = \mathbb{R}$, zbiorem wartości $W_f = \langle -1, 1 \rangle$.

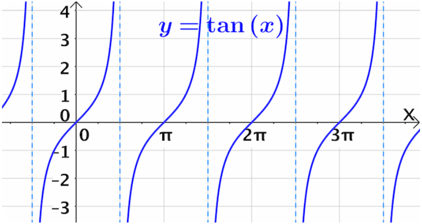




Funkcje trygonometryczne

Definicja

Funkcja tangens, $f(x) = \operatorname{tg} x$, gdzie x jest miarą łukową kąta. Dziedziną funkcji jest $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, zbiorem wartości $W_f = \mathbb{R}$.



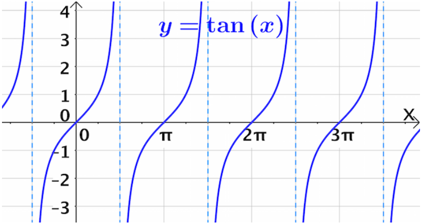
Funkcje trygonometryczne

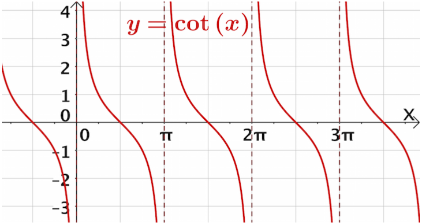
Definicja

Funkcja tangens, $f(x) = \operatorname{tg} x$, gdzie x jest miarą łukową kąta. Dziedziną funkcji jest $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, zbiorem wartości $W_f = \mathbb{R}$.

Definicja

Funkcja cotangens, $f(x) = \operatorname{ctg} x$, gdzie x jest miarą łukową kąta. Dziedziną funkcji jest $D_f = \mathbb{R} - \{k\pi\}$, zbiorem wartości $W_f = \mathbb{R}$.



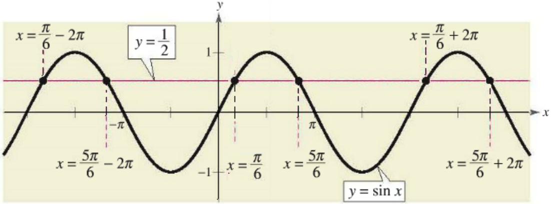


Równania trygonometryczne – przykład

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

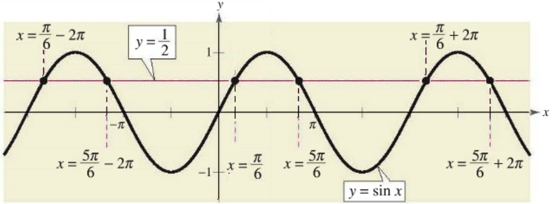
Równania trygonometryczne – przykład

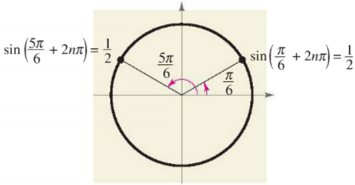
$$\sin x = \frac{1}{2}$$



Równania trygonometryczne – przykład

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

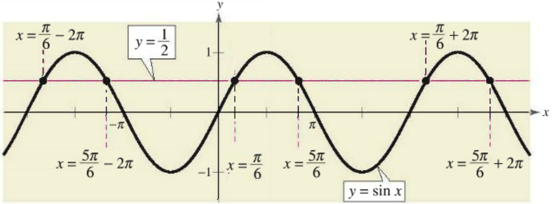


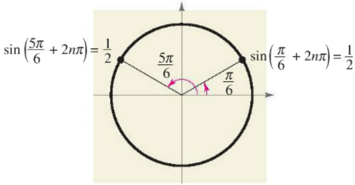


Rozwiązanie

Równania trygonometryczne – przykład

$$\sin x = \frac{1}{2}$$





Rozwiązanie

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Przydatne równości

$$\sin\alpha = \sin\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta + 2k\pi \;\vee\; \alpha = \pi - \beta + 2k\pi$$

Przydatne równości

$$\sin\alpha = \sin\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta + 2k\pi \ \vee \ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi$$

$$\cos\alpha = \cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \pm\beta + 2k\pi$$

Przydatne równości

$$\sin\alpha = \sin\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta + 2k\pi \ \vee \ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi$$

$$\cos\alpha = \cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \pm\beta + 2k\pi$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta + k\pi, \quad \alpha, \beta \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta + k\pi, \quad \alpha, \beta \neq k\pi$$

Nierówności trygonometryczne

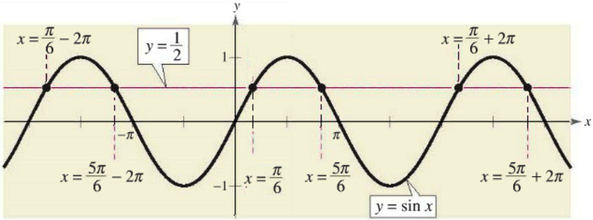
Przykład

$$\sin x > \frac{1}{2}$$

Nierówności trygonometryczne

Przykład

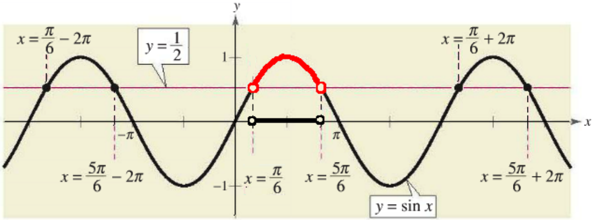
$$\sin x > \frac{1}{2}$$



Nierówności trygonometryczne

Przykład

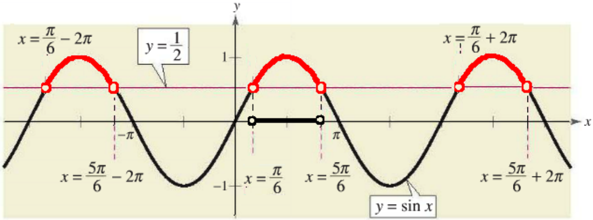
$$\sin x > \frac{1}{2}$$



Nierówności trygonometryczne

Przykład

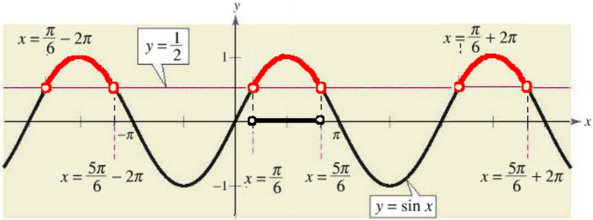
$$\sin x > \frac{1}{2}$$



Nierówności trygonometryczne

Przykład

$$\sin x > \frac{1}{2}$$



$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right)$$

Funkcje cyklometryczne

czyli

odwrotne do trygonometrycznych

Funkcje odwrotne do trygonometrycznych

- Funkcja jest odwracalna jeżeli jest wzajemnie jednoznaczna (jest bijekcją)

Funkcje odwrotne do trygonometrycznych

- Funkcja jest odwracalna jeżeli jest wzajemnie jednoznaczna (jest bijekcją)
- Funkcje trygonometryczne nie są różnowartościowe w swoich dziedzinach.

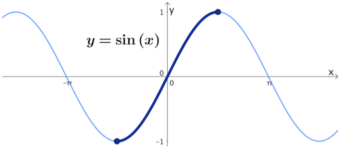
Funkcje odwrotne do trygonometrycznych

- Funkcja jest odwracalna jeżeli jest wzajemnie jednoznaczna (jest bijekcją)
- Funkcje trygonometryczne nie są różnowartościowe w swoich dziedzinach.
- Zatem ograniczamy ich dziedziny

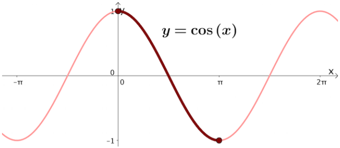
Funkcje odwrotne do trygonometrycznych

- Funkcja jest odwracalna jeżeli jest wzajemnie jednoznaczna (jest bijekcją)
- Funkcje trygonometryczne nie są różnowartościowe w swoich dziedzinach.
- Zatem ograniczamy ich dziedziny

$$y = \sin x, \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$



$$y = \cos x, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle$$



Definicja

Funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \sin x$ w przedziale $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ nazywamy funkcją **arcus sinus** i oznaczamy symbolem arcsin,

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Definicja

Funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \sin x$ w przedziale $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ nazywamy funkcją **arcus sinus** i oznaczamy symbolem arcsin,

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Czyli, $y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x, \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

Definicja

Funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \sin x$ w przedziale $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ nazywamy funkcją **arcus sinus** i oznaczamy symbolem arcsin,

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Czyli, $y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x, \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

Przykład

- $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha \;\Leftrightarrow$

Definicja

Funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \sin x$ w przedziale $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ nazywamy funkcją **arcus sinus** i oznaczamy symbolem arcsin,

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Czyli, $y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x, \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

Przykład

- $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha \ \Leftrightarrow \ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge \alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \ \Rightarrow$

Definicja

Funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \sin x$ w przedziale $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ nazywamy funkcją **arcus sinus** i oznaczamy symbolem arcsin,

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

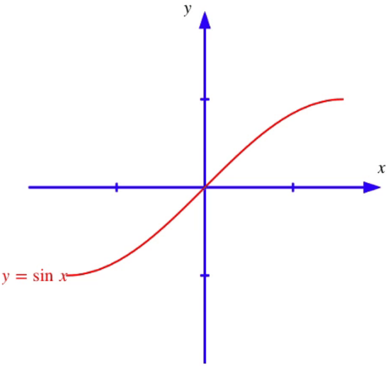
Czyli, $y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x, \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

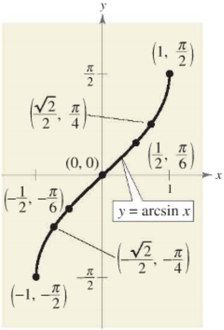
Przykład

- $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha \;\Leftrightarrow\; \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{3}$, więc $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

Wykres Arcus sinusa

- Wykresy f i f^{-1} są symetryczne względem $y = x$.





Funkcje cyklometryczne

Definicja

Funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \cos x$ w przedziale $x \in \langle 0, \pi \rangle$ nazywamy funkcją **arcus cosinus** i oznaczamy symbolem arccos,

$$f^{-1}(x) = \arccos x, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Funkcje cyklometryczne

Definicja

Funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \cos x$ w przedziale $x \in \langle 0, \pi \rangle$ nazywamy funkcją **arcus cosinus** i oznaczamy symbolem arccos,

$$f^{-1}(x) = \arccos x, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Czyli, $y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x, \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad y \in \langle 0, \pi \rangle$

Funkcje cyklometryczne

Definicja

Funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \cos x$ w przedziale $x \in \langle 0, \pi \rangle$ nazywamy funkcją **arcus cosinus** i oznaczamy symbolem arccos,

$$f^{-1}(x) = \arccos x, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Czyli, $y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x, \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad y \in \langle 0, \pi \rangle$

Przykład

- $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha \ \Leftrightarrow$

Funkcje cyklometryczne

Definicja

Funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \cos x$ w przedziale $x \in \langle 0, \pi \rangle$ nazywamy funkcją **arcus cosinus** i oznaczamy symbolem arccos,

$$f^{-1}(x) = \arccos x, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Czyli, $y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x, \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle\,, \quad y \in \langle 0, \pi \rangle$

Przykład

- $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha \ \Leftrightarrow \ \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge \alpha \in \langle 0, \pi \rangle \ \Rightarrow$

Funkcje cyklometryczne

Definicja

Funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \cos x$ w przedziale $x \in \langle 0, \pi \rangle$ nazywamy funkcją **arcus cosinus** i oznaczamy symbolem arccos,

$$f^{-1}(x) = \arccos x, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

Czyli, $y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x, \qquad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad y \in \langle 0, \pi \rangle$

Przykład

- $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha \;\Leftrightarrow\; \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \alpha \in \langle 0, \pi \rangle \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{6}$, więc $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$

Funkcje cyklometryczne

Definicja

Funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ w przedziale $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nazywamy funkcją **arcus tangens** i oznaczamy symbolem arctg,

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Czyli, $y = \operatorname{arc\,tg} x \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} y = x, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Funkcje cyklometryczne

Definicja

Funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$ w przedziale $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nazywamy funkcją **arcus tangens** i oznaczamy symbolem arctg,

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Czyli, $y = \operatorname{arc\,tg} x \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} y = x, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Definicja

Funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$ w przedziale $x \in (0, \pi)$ nazywamy funkcją **arcus cotangens** i oznaczamy symbolem arcctg,

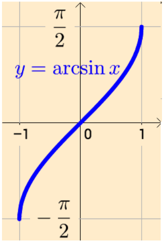
$$f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,ctg} x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Czyli, $y = \operatorname{arc\,ctg} x \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{ctg} y = x, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad y \in (0, \pi)$

Funkcje cyklometryczne zusammen do kupy

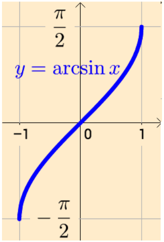
Funkcje cyklometryczne zusammen do kupy

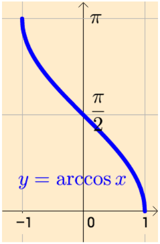
Funkcja	D_f	W_f
$y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x$	$\langle -1, 1\rangle$	$\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$



Funkcje cyklometryczne zusammen do kupy

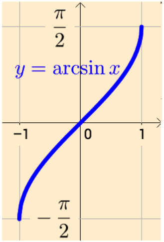
Funkcja			D_f	W_f
$y = \arcsin x$	$\Leftrightarrow$	$\sin y = x$	$\langle -1, 1\rangle$	$\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$
$y = \arccos x$	$\Leftrightarrow$	$\cos y = x$	$\langle -1, 1\rangle$	$\langle 0, \pi\rangle$

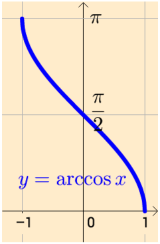


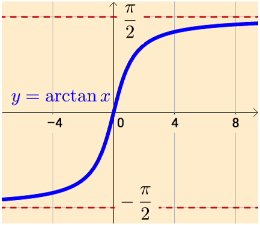


Funkcje cyklometryczne zusammen do kupy

Funkcja			D_f	W_f
$y = \arcsin x$	$\Leftrightarrow$	$\sin y = x$	$\langle -1, 1\rangle$	$\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$
$y = \arccos x$	$\Leftrightarrow$	$\cos y = x$	$\langle -1, 1\rangle$	$\langle 0, \pi\rangle$
$y = \operatorname{arc\,tg} x$	$\Leftrightarrow$	$\operatorname{tg} y = x$	$(-\infty, \infty)$	$(-\pi/2, \pi/2)$

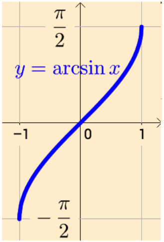


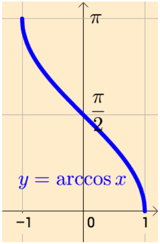


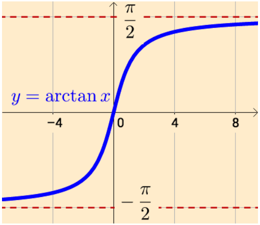


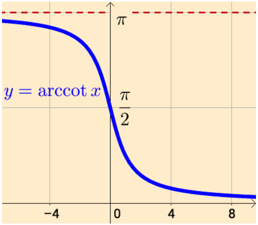
Funkcje cyklometryczne zusammen do kupy

Funkcja			D_f	W_f
$y = \arcsin x$	$\Leftrightarrow$	$\sin y = x$	$\langle -1, 1\rangle$	$\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$
$y = \arccos x$	$\Leftrightarrow$	$\cos y = x$	$\langle -1, 1\rangle$	$\langle 0, \pi\rangle$
$y = \operatorname{arc\,tg} x$	$\Leftrightarrow$	$\operatorname{tg} y = x$	$(-\infty, \infty)$	$(-\pi/2, \pi/2)$
$y = \operatorname{arc\,ctg} x$	$\Leftrightarrow$	$\operatorname{ctg} y = x$	$(-\infty, \infty)$	$(0, \pi)$









Z własności funkcji odwrotnych mamy ...

$$\arcsin(\sin x) = x \text{ dla } x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$\sin(\arcsin x) = x \text{ dla } x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x \text{ dla } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x \text{ dla } x \in \mathbb{R} \qquad \text{etc.}$$

Funkcje cyklometryczne i równania trygonometryczne

Przydatne równości kiedyś ...

Przydatne równości dziś ...

Funkcje cyklometryczne i równania trygonometryczne

Przydatne równości kiedyś ...

$$\sin x = \sin \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + 2k\pi \ \vee \ x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

Przydatne równości dziś ...

$$\begin{aligned} \sin x = a \ \wedge \ a \in \langle -1, 1 \rangle \quad \Leftrightarrow \quad & x = \arcsin a + 2k\pi \ \vee \\ & x = \pi - \arcsin a + 2k\pi \end{aligned}$$

Funkcje cyklometryczne i równania trygonometryczne

Przydatne równości kiedyś ...

$$\sin x = \sin \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + 2k\pi \ \vee \ x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

$$\cos x = \cos \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\alpha + 2k\pi$$

Przydatne równości dziś ...

$$\begin{aligned} \sin x = a \ \wedge \ a \in \langle -1, 1\rangle \quad &\Leftrightarrow \quad x = \arcsin a + 2k\pi \ \vee \\ & \quad x = \pi - \arcsin a + 2k\pi \\ \cos x = a \ \wedge \ a \in \langle -1, 1\rangle \quad &\Leftrightarrow \quad x = \pm \arccos a + 2k\pi \end{aligned}$$

Funkcje cyklometryczne i równania trygonometryczne

Przydatne równości kiedyś ...

$$\begin{array}{lcl}\sin x = \sin\alpha & \Leftrightarrow & x = \alpha + 2k\pi \ \vee \ x = \pi - \alpha + 2k\pi \\ \cos x = \cos\alpha & \Leftrightarrow & x = \pm\alpha + 2k\pi \\ \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha & \Leftrightarrow & x = \alpha + k\pi, \quad x, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\end{array}$$

Przydatne równości dziś ...

$$\begin{array}{lcl}\sin x = a \ \wedge \ a \in \langle -1, 1\rangle & \Leftrightarrow & x = \arcsin a + 2k\pi \ \vee \\ & & x = \pi - \arcsin a + 2k\pi \\ \cos x = a \ \wedge \ a \in \langle -1, 1\rangle & \Leftrightarrow & x = \pm \arccos a + 2k\pi \\ \operatorname{tg} x = a \ \wedge \ a \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow & x = \operatorname{arc\,tg} a + k\pi\end{array}$$

Funkcje cyklometryczne i równania trygonometryczne

Przydatne równości kiedyś ...

$$\begin{aligned}
\sin x = \sin\alpha &\quad\Leftrightarrow\quad x = \alpha + 2k\pi \ \vee\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \\
\cos x = \cos\alpha &\quad\Leftrightarrow\quad x = \pm\alpha + 2k\pi \\
\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha &\quad\Leftrightarrow\quad x = \alpha + k\pi, \qquad x, y \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi \\
\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\alpha &\quad\Leftrightarrow\quad x = \alpha + k\pi, \qquad x, y \neq k\pi
\end{aligned}$$

Przydatne równości dziś ...

$$\begin{aligned}
\sin x = a \ \wedge\ a \in \langle -1, 1\rangle &\quad\Leftrightarrow\quad x = \arcsin a + 2k\pi \ \vee \\
&\qquad\quad\ x = \pi - \arcsin a + 2k\pi \\
\cos x = a \ \wedge\ a \in \langle -1, 1\rangle &\quad\Leftrightarrow\quad x = \pm\arccos a + 2k\pi \\
\operatorname{tg} x = a \ \wedge\ a \in \mathbb{R} &\quad\Leftrightarrow\quad x = \operatorname{arc\,tg} a + k\pi \\
\operatorname{ctg} x = a \ \wedge\ a \in \mathbb{R} &\quad\Leftrightarrow\quad x = \operatorname{arc\,ctg} a + k\pi
\end{aligned}$$

Równania i nierówności cyklometryczne

Strategie

- Użyj definicji i zamień na równanie trygonometryczne

$$\arccos(x+2) = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow$$

Równania i nierówności cyklometryczne

Strategie

- Użyj definicji i zamień na równanie trygonometryczne

$$\arccos(x+2) = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = x + 2$$

Równania i nierówności cyklometryczne

Strategie

- Użyj definicji i zamień na równanie trygonometryczne

$$\arccos(x+2) = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = x+2$$

- Użyj monotoniczności

$$\operatorname{arc\,ctg}(x-4) > \operatorname{arc\,ctg}(x^2) \quad \Leftrightarrow$$

Równania i nierówności cyklometryczne

Strategie

- Użyj definicji i zamień na równanie trygonometryczne

$$\arccos(x+2) = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = x+2$$

- Użyj monotoniczności

$$\operatorname{arc\,ctg}(x-4) > \operatorname{arc\,ctg}(x^2) \quad \Leftrightarrow \quad x-4 < x^2$$

Równania i nierówności cyklometryczne

Strategie

- Użyj definicji i zamień na równanie trygonometryczne

$$\operatorname{arc\,cos}(x+2) = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = x+2$$

- Użyj monotoniczności

$$\operatorname{arc\,ctg}(x-4) > \operatorname{arc\,ctg}(x^2) \quad \Leftrightarrow \quad x-4 < x^2$$

- Użyj monotoniczności i własności funkcji odwrotnych

$$\operatorname{arc\,sin}(x-4) < \frac{\pi}{5} \quad \Leftrightarrow$$

Równania i nierówności cyklometryczne

Strategie

- Użyj definicji i zamień na równanie trygonometryczne

$$\arccos(x+2)=\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=x+2$$

- Użyj monotoniczności

$$\operatorname{arcctg}(x-4)>\operatorname{arcctg}(x^2) \quad \Leftrightarrow \quad x-4<x^2$$

- Użyj monotoniczności i własności funkcji odwrotnych

$$\arcsin(x-4)<\frac{\pi}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\arcsin(x-4))<\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$