Funkcje i ich własności

Definicja

Funkcją f nazywamy odwzorowanie zbioru X w zbiór Y, które przyporządkowuje każdemu elementowi x ze zbioru X *dokładnie jeden* element $y = f(x)$ ze zbioru Y. Piszemy:

$$f : X \longrightarrow Y, \quad y = f(x) \text{ dla } x \in X$$

Definicja

Funkcją f nazywamy odwzorowanie zbioru X w zbiór Y, które przyporządkowuje każdemu elementowi x ze zbioru X *dokładnie jeden* element $y = f(x)$ ze zbioru Y. Piszemy:

$$f : X \longrightarrow Y, \quad y = f(x) \text{ dla } x \in X$$

Dziedzina, zbiór wartości

- $X = D_f$ nazywamy **dziedziną** funkcji
- **Dziedzina naturalna** to zbiór tych $x \in \mathbb{R}$, dla których wzór funkcji ma sens.

Definicja

Funkcją f nazywamy odwzorowanie zbioru X w zbiór Y, które przyporządkowuje każdemu elementowi x ze zbioru X *dokładnie jeden* element $y = f(x)$ ze zbioru Y. Piszemy:

$$f : X \longrightarrow Y, \quad y = f(x) \text{ dla } x \in X$$

Dziedzina, zbiór wartości

- $X = D_f$ nazywamy **dziedziną** funkcji
- **Dziedzina naturalna** to zbiór tych $x \in \mathbb{R}$, dla których wzór funkcji ma sens.
- **Zbiór wartości** to zbiór $W_f = \{y \in Y : y = f(x), x \in X\} \subset Y$

Definicja

Funkcją f nazywamy odwzorowanie zbioru X w zbiór Y, które przyporządkowuje każdemu elementowi x ze zbioru X *dokładnie jeden* element $y = f(x)$ ze zbioru Y. Piszemy:

$$f : X \longrightarrow Y, \quad y = f(x) \text{ dla } x \in X$$

Dziedzina, zbiór wartości

- $X = D_f$ nazywamy **dziedziną** funkcji
- **Dziedzina naturalna** to zbiór tych $x \in \mathbb{R}$, dla których wzór funkcji ma sens.
- **Zbiór wartości** to zbiór $W_f = \{y \in Y : y = f(x), x \in X\} \subset Y$
- **Argument** funkcji to wyrażenie na którym funkcja działa (zwykle po prostu x)

Definicja

Wykresem funkcji nazywamy zbiór wszystkich punktów (x, y) na płaszczyźnie takich, że $f(x) = y$ dla $x \in X$.

Definicja

Wykresem funkcji nazywamy zbiór wszystkich punktów (x, y) na płaszczyźnie takich, że $f(x) = y$ dla $x \in X$.

Uwaga

Nie każda krzywa na płaszczyźnie jest wykresem funkcji.

Definicja

Wykresem funkcji nazywamy zbiór wszystkich punktów (x, y) na płaszczyźnie takich, że $f(x) = y$ dla $x \in X$.

Uwaga

Nie każda krzywa na płaszczyźnie jest wykresem funkcji.

- Dziedzina funkcji f jest rzutem wykresu funkcji na oś OX.
- Zbiór wartości funkcji jest rzutem wykresu funkcji na oś OY.

Symetria

Symetria

Definicja

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **parzystą,** jeżeli dla każdego $x \in X$

$$f(-x) = f(x) \quad \wedge -x \in X$$

Symetria

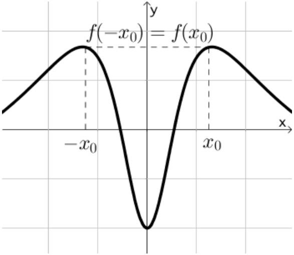
Definicja

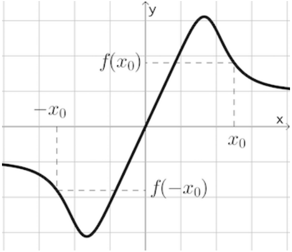
Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **parzystą,** jeżeli dla każdego $x \in X$

$$f(-x) = f(x) \quad \wedge -x \in X$$

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **nieparzystą,** jeżeli dla każdego $x \in X$

$$f(-x) = -f(x) \quad \wedge -x \in X$$





Monotoniczność

Monotoniczność

Definicja

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **rosnącą (malejącą),** jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ spełniających nierówność $x_1 < x_2$ mamy

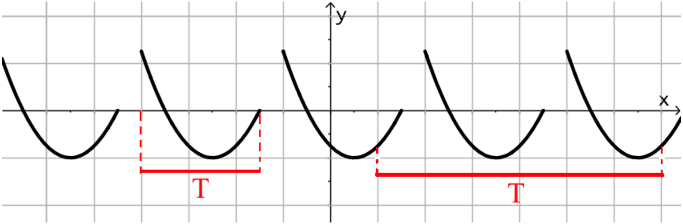
$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

Definicja

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **okresową**, jeżeli istnieje taka liczba rzeczywista $T \neq 0$, że dla dowolnego $x \in X$

$$x + T \in X \quad \wedge \quad f(x+T) = f(x)$$

Liczbę T nazywamy **okresem funkcji** f. Najmniejszy dodatni okres, jeśli istnieje, nazywamy **okresem podstawowym**.



Przekształcenia wykresów funkcji

Przekształcenia wykresów funkcji

Jeżeli dany jest wykres funkcji $f(x)$, to

Przekształcenia wykresów funkcji

Jeżeli dany jest wykres funkcji $f(x)$, to

1. przesunięcie w kierunku osi OY: $y = f(x) \pm d$
2. przesunięcie w kierunku osi OX: $y = f(x \pm b)$

Przekształcenia wykresów funkcji

Jeżeli dany jest wykres funkcji $f(x)$, to

1. przesunięcie w kierunku osi OY: $y = f(x) \pm d$
2. przesunięcie w kierunku osi OX: $y = f(x \pm b)$

    - przesunięcie o wektor $[p, q]$: $y = f(x - p) + q$

Przekształcenia wykresów funkcji

Jeżeli dany jest wykres funkcji $f(x)$, to

1. przesunięcie w kierunku osi OY: $y = f(x) \pm d$
2. przesunięcie w kierunku osi OX: $y = f(x \pm b)$
   - przesunięcie o wektor $[p, q]$: $y = f(x - p) + q$
3. rozciąganie/sciskanie w kierunku osi OY: $y = cf(x)$
4. rozciąganie/sciskanie w kierunku osi OX: $y = f(cx)$

Przekształcenia wykresów funkcji

Jeżeli dany jest wykres funkcji $f(x)$, to

1. przesunięcie w kierunku osi OY: $y = f(x) \pm d$
2. przesunięcie w kierunku osi OX: $y = f(x \pm b)$
    - przesunięcie o wektor $[p, q]$: $y = f(x - p) + q$
3. rozciąganie/sciskanie w kierunku osi OY: $y = cf(x)$
4. rozciąganie/sciskanie w kierunku osi OX: $y = f(cx)$
5. odbicie względem osi OX: $y = -f(x)$
6. odbicie względem osi OY: $y = f(-x)$

Przekształcenia wykresów funkcji

Jeżeli dany jest wykres funkcji $f(x)$, to

1. przesunięcie w kierunku osi OY: $y = f(x) \pm d$
2. przesunięcie w kierunku osi OX: $y = f(x \pm b)$
    - przesunięcie o wektor $[p, q]$: $y = f(x - p) + q$
3. rozciąganie/sciskanie w kierunku osi OY: $y = cf(x)$
4. rozciąganie/sciskanie w kierunku osi OX: $y = f(cx)$
5. odbicie względem osi OX: $y = -f(x)$
6. odbicie względem osi OY: $y = f(-x)$
7. nakładanie wartości bezwzględnej: $y = |f(x)|$
8. nakładanie wartości bezwzględnej: $y = f(|x|)$

Definicja

Złożeniem funkcji $f : Y \to Z$ i $g : X \to Y$ nazywamy funkcję $h : X \to Z$ daną wzorem

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Funkcję g nazywamy funkcją **wewnętrzną**, a funkcję f– funkcją **zewnętrzną**

$$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$

Definicja (Injekcja, surjekcja, bijekcja)

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **różnowartościową (injekcją),** jeżeli różnym argumentom przyporządkowuje różne wartości, tj. dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{ozn. } f : X \xrightarrow{1-1} Y$$

Definicja (Injekcja, surjekcja, bijekcja)

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **różnowartościową (injekcją),** jeżeli różnym argumentom przyporządkowuje różne wartości, tj. dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{ozn. } f : X \xrightarrow{1-1} Y$$

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **"na" (surjekcją)**, jeżeli dowolny $y \in Y$ jest wartością funkcji dla pewnego $x \in X$, tzn. $W_f = Y$

$$\text{ozn. } f : X \xrightarrow{na} Y$$

Definicja (Injekcja, surjekcja, bijekcja)

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **różnowartościową (injekcją),** jeżeli różnym argumentom przyporządkowuje różne wartości, tj. dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$

$$x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{ozn. } f : X \xrightarrow{1-1} Y$$

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **"na" (surjekcją)**, jeżeli dowolny $y \in Y$ jest wartością funkcji dla pewnego $x \in X$, tzn. $W_f = Y$

$$\text{ozn. } f : X \xrightarrow{na} Y$$

Funkcję, która jest jednocześnie 1–1 i "na" nazywamy funkcją **wzajemnie jednoznaczną (bijekcją)**.

$$\text{ozn. } f : X \xrightarrow[na]{1-1} Y$$

Definicja

Jeżeli $f : X \to Y$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną, to jest ona **odwracalna**. **Funkcją odwrotną**, ozn. $f^{-1} : Y \to X$ do f jest funkcja taka, że dla każdego $x \in X, y \in Y$

$$f^{-1}(y) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = f(x)$$

- Wykres funkcji odwrotnej otrzymujemy z wykresu $f(x)$ przez odbicie względem prostej $y = x$.