

Metody Numeryczne - Projekt 2

Celem projektu jest zaimplementowanie metod rozwiązujących układy równań liniowych – metod iteracyjnych Gaussa-Seidla i Jacobiego oraz metody bezpośredniej – faktoryzacji LU. Metody zaimplementowałem w języku C++, a wykresy zostały sporządzone na podstawie danych w Matlabie.

Zadania A, B, D

Rozmiar macierzy, wartości na diagonalu oraz wartości w wektorze b były zależne od numeru indeksu.

```
Test metod dla
N = 941
a1 = 11
a2 = -1
a3 = -1
```

```
Metoda iteracyjna Jacobiego:
Iteracja: 1 Norma: 78.0269
Iteracja: 2 Norma: 28.3471
Iteracja: 3 Norma: 10.3015
Iteracja: 4 Norma: 3.74399
Iteracja: 5 Norma: 1.36082
Iteracja: 6 Norma: 0.494637
Iteracja: 7 Norma: 0.179799
Iteracja: 8 Norma: 0.0653581
Iteracja: 9 Norma: 0.0237586
Iteracja: 10 Norma: 0.00863678
Iteracja: 11 Norma: 0.0031397
Iteracja: 12 Norma: 0.00114138
Iteracja: 13 Norma: 0.000414935
Iteracja: 14 Norma: 0.000150845
Iteracja: 15 Norma: 5.48389e-05
Iteracja: 16 Norma: 1.99365e-05
Iteracja: 17 Norma: 7.2479e-06
Iteracja: 18 Norma: 2.63499e-06
Iteracja: 19 Norma: 9.57962e-07
Iteracja: 20 Norma: 3.48273e-07
Iteracja: 21 Norma: 1.26618e-07
Iteracja: 22 Norma: 4.60332e-08
Iteracja: 23 Norma: 1.67359e-08
Iteracja: 24 Norma: 6.08457e-09
Liczba iteracji: 24 Norma: 6.08457e-09
Czas metoda iteracyjna Jacobiego: 0.150591s
```

Metoda iteracyjna Jacobiego uzyskała wystarczająco dokładny wynik po 24 iteracjach. Zajęło jej to 0.1506s.

```
Metoda iteracyjna Gaussa-Seidla:  
Iteracja: 1 Norma: 47.6975  
Iteracja: 2 Norma: 10.5877  
Iteracja: 3 Norma: 2.35092  
Iteracja: 4 Norma: 0.522035  
Iteracja: 5 Norma: 0.115924  
Iteracja: 6 Norma: 0.0257426  
Iteracja: 7 Norma: 0.00571659  
Iteracja: 8 Norma: 0.00126947  
Iteracja: 9 Norma: 0.000281912  
Iteracja: 10 Norma: 6.26042e-05  
Iteracja: 11 Norma: 1.39026e-05  
Iteracja: 12 Norma: 3.08736e-06  
Iteracja: 13 Norma: 6.85616e-07  
Iteracja: 14 Norma: 1.52256e-07  
Iteracja: 15 Norma: 3.38119e-08  
Iteracja: 16 Norma: 7.50868e-09  
Liczba iteracji: 16 Norma: 7.50868e-09  
Czas metoda iteracyjna Gaussa-Seidla: 0.153019s
```

Metoda iteracyjna Gaussa-Seidla potrzebowała tylko 16 iteracji do osiągnięcia wystarczająco dokładnego wyniku, jednak zajęło jej to bardzo zbliżoną ilość czasu.

```
Metoda bezpośrednia - faktoryzacja LU:  
Faktoryzacja LU - norma: 2.79657e-15  
Czas metoda bezpośrednia - faktoryzacja LU: 1.09975s
```

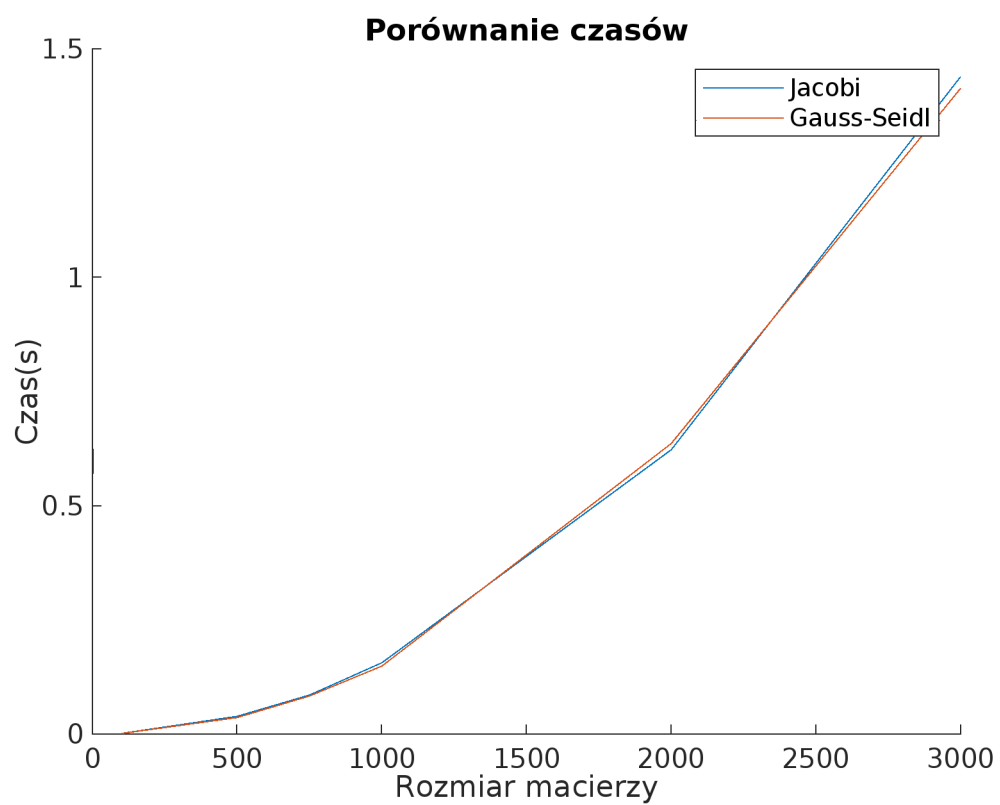
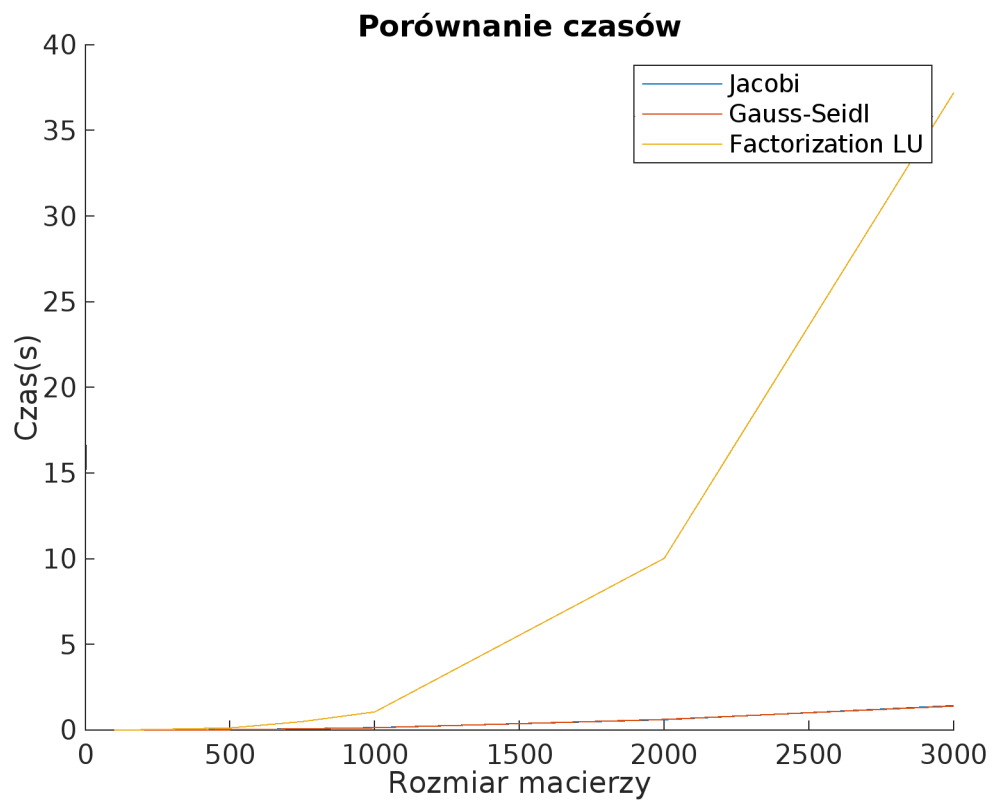
Metoda bezpośrednia – faktoryzacja LU potrzebowała najwięcej czasu na realizację obliczeń. Ostateczny wynik jest bardziej dokładny od tych otrzymanych przy użyciu metod iteracyjnych.

Zadanie E

Zadanie polega na porównaniu czasów poszczególnych metod przy zmienianiu rozmiaru macierzy. Korzystamy tu z takich samych wartości dla komórek macierzy oraz wektora b. Zmienia się tylko rozmiar macierzy oraz długość wektora.

Testy zostały przeprowadzone dla $N = \{100, 500, 750, 1000, 2000, 3000\}$

Poniższe wykresy przedstawiają czas wykonania metod. Na pierwszym wykresie można zauważyć, że metoda bezpośrednia potrzebuje zdecydowanie więcej czasu od metod iteracyjnych dla większych N. Na drugim wykresie znajdują się tylko metody iteracyjne, których czas potrzebny do wykonania obliczeń jest bardzo zbliżony.



Zadanie C

Wartości umieszczone na diagonalu zostały zmienione.

```
Zadanie C
Test metod dla
N = 941
a1 = 3
a2 = -1
a3 = -1

Metoda iteracyjna Jacobiego:
Liczba iteracji: 1000 Norma: 2.50116e+126
Czas metoda iteracyjna Jacobiego: 5.3434s

Metoda iteracyjna Gaussa-Seidla:
Liczba iteracji: 1000 Norma: inf
Czas metoda iteracyjna Gaussa-Seidla: 7.57822s

Metoda bezposrednia - faktoryzacja LU:
Faktoryzacja LU - norma: 1.74458e-13
Czas metoda bezpośrednia - faktoryzacja LU: 1.2116s
```

Dla takich wartości metody iteracyjne z każdą iteracją osiągały coraz mniej dokładny wynik, błąd zmierzał do nieskończoności.

Faktoryzacja LU ponownie uzyskała dokładny wynik przy podobnym czasie jak w poprzednim przypadku.

Podsumowanie

- Metody iteracyjne są bardzo przydatne w redukcji czasu, potrzebnego do przeprowadzenia dokładnych obliczeń, jednak dla pewnych danych nie są w stanie. Do ich użycia macierz powinna być macierzą przekątniowo dominującą, czyli taką, w której element na diagonalu jest większy od sumy wartości bezwzględnej pozostałych elementów w danym wierszu.
- Wzrost czasu dla metod iteracyjnych wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy jest zdecydowanie mniejszy, wynika to z większej złożoności obliczeniowej tych metod.
- Metoda iteracyjna Gaussa-Seidla wymaga mniej iteracji od metody iteracyjnej Jacobiego. Wynika to z tego, że w metodzie Gaussa-Seidla używamy nowo obliczonych wartości wektora w obecnej iteracji do obliczenia kolejnych wartości tego wektora.
- W moim przypadku nie było zauważalnej różnicy w prędkości obu metod, myślę, że poprawiając implementację metody Gaussa-Seidla można uzyskać lepszy czas, niż dla metody Jacobiego.

*podczas prezentacji, metoda faktoryzacji LU dawała mało dokładne wyniki - znalazłem błąd zakresu pętli przy rozkładzie macierzy $M = L * U$