

WSTĘP DO RACHUNKU PRAWDOPODOBIENSTWA
4. PRAWDOPODOBIENSTWO CAŁKOWITE. WZÓR BAYESA.

Twierdzenie (Wzór łańcuchowy). Jeżeli zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_n spełniają warunek $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, to

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Twierdzenie. Jeśli $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ jest rozbiciem przestrzeni Ω na rozłączne zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dla każdego zdarzenia $B \in \mathcal{F}$ mamy

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i) \mathbb{P}(A_i),$$

a dla każdego $j = 1, 2, \dots, n$,

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j) \mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_j) \mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i) \mathbb{P}(A_i)}.$$

Pierwsze z powyższych równań nazywamy **wzorem na prawdopodobieństwo całkowite**, a drugie **wzorem Bayesa**.

DODATEK A. ZADANIA NA ĆWICZENIA

Zadanie 1. Fabryka wytwarza gwoździe na trzech maszynach M_1, M_2 oraz M_3 , których udział w produkcji wynosi odpowiednio 25%, 35% oraz 40%. Maszyny dają odpowiednio 5%, 4% oraz 2% gwoździ wybrakowanych.

- (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany gwoździe wyprodukowany w fabryce jest wybrakowany?
- (b) Podczas kontroli jakości losowo wybrano gwoździe, który okazał się być wybrakowany. Jakie jest prawdopodobieństwo, że został on wyprodukowany przez maszynę M_1 ?

Zadanie 2. Z urny zawierającej trzy kule białe i pięć czarnych wyciągamy kolejno (bez zwracania) trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyciągniemy kolejno kulę białą, czarną i białą.

Zadanie 3. Student zna odpowiedź na pytanie egzaminacyjne z prawdopodobieństwem p . Jeżeli nie zna odpowiedzi, to zgaduje jedną z k możliwych odpowiedzi z prawdopodobieństwem $1/k$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że znał odpowiedź, jeżeli wiemy, że odpowiedział prawidłowo?

Zadanie 4. W pierwszej urnie znajdują się dwie białe i dwie czarne kule, druga zawiera jedną kulę białą i dwie czarne. Z pierwszej urny wyciągamy losowo dwie kule i przekładamy do drugiej urny, z której losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że do drugiej urny przełożyliśmy dwie białe kule, jeśli wylosowana z drugiej urny kula jest (a) biała, (b) czarna?

Zadanie 5. Bolek i Lolek codziennie kończą pracę niezależnie od siebie, tak by w losowym momencie pomiędzy godziną 17:00 i 17:20 zjawić się na pobliskim przystanku autobusowym, z którego autobus odjeżdża w losowym momencie między 17:00 a 17:10. Pewnego dnia Lolek dociera na przystanek o godz. 17:05 i nie zastaje na nim Bolka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że autobus już odjechał?

DODATEK B. ZADANIA DOMOWE

Zadanie 1. Trzy grupy ćwiczeniowe, G_1, G_2 i G_3 , liczą odpowiednio 20, 25 i 20 studentów. W każdej z nich liczba przygotowanych do kartkówki wynosi odpowiednio 8, 10 i 10 studentów. Kartkówki piszą wszyscy razem. Sprawdzający wybiera losowo pracę jednego studenta. Jakie jest prawdopodobieństwo, że praca należy do studenta z grupy G_1 , jeśli okazało się, że otrzymał on za nią maksimum punktów?

Zakładamy oczywiście, że studenci przygotowani zawsze dostają maksymalną ocenę z kartkówek.

Zadanie 2. W urnie znajduje się 10 losów wygrywających i 100 przegrywających, przy czym pojedynczy los kosztuje złotówkę. Wyciągamy z urny po jednym losie tak długo, aż trafimy los wygrywający (wyciągnięte losy zachowujemy). Ile wynosi prawdopodobieństwo, że będzie nas to kosztowało 4zł?

Zadanie 3. W urnie są cztery kule białe i dwie czarne. Wyciągamy jedną kulę z urny i przemaalowujemy ją na czerwono, po czym wrzucamy ją do urny, a następnie losujemy następną kulę.

- (a) Jaka jest szansa, że za drugim razem wyciągnęliśmy kulę białą?
- (b) Przypuśćmy, że za drugim razem wylosowaliśmy kulę białą. Jaka jest szansa, że przemaalowaliśmy na czerwono jedną z czarnych kul?

- (c) Przypuśćmy, że za drugim razem wylosowaliśmy kulę czerwoną. Jaka jest szansa, że przemaalowaliśmy na czerwono jedną z czarnych kul? Czy otrzymany wynik jest zaskakujący?

Zadanie 4. Spośród mężczyzn 5%, a spośród kobiet 0,25% ma daltonizm (tj. nie rozróżnia niektórych kolorów). Wybieramy losowo osobę (zakładamy, że szanse trafienia na mężczyznę i na kobietę są takie same).

- (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana osoba nie rozróżnia kolorów?
(b) Wylosowana osoba nie rozróżnia kolorów. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna.

Zadanie 5. Każda z trzech urn zawiera po cztery kule. W i -tej urnie, $i = 1, 2, 3$, jest i kul białych i $4 - i$ kul czarnych. Z losowo wybranej urny (przy czym każda urna jest równoprawdopodobna) losujemy jednocześnie dwie kule.

- (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowane kule będą różnych kolorów?
(b) Jeśli wylosowane kule są różnych kolorów, ile wynosi prawdopodobieństwo, że wybraliśmy pierwszą urnę?

Zadanie 6. W urnie są cztery kule białe i dwie czarne. Wyciągamy jedną kulę z urny, zmieniamy jej kolor na 'przeciwny', wrzucamy z powrotem do urny, a potem wyciągamy następną. Jaka jest szansa, że za drugim razem wyciągnęliśmy kulę białą?

Zadanie 7. 60% poczty otrzymywanej przez pewnego internautę stanowi spam. Słowo *viagra* występuje w 5% wiadomości spamowych oraz w 0.01% wiadomości niesпамowych. Internauta otrzymał wiadomość zawierającą słowo *viagra* – jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to spam? Internauta otrzymał wiadomość nie zawierającą słowa *viagra* – jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to spam?

DODATEK C. ODPOWIEDZI DO ZADAŃ DOMOWYCH

B.1 (użyj wzoru Bayesa) $2/7$

B.2 (użyj wzoru łańcuchowego) $\frac{100}{110} \cdot \frac{99}{109} \cdot \frac{98}{108} \cdot \frac{10}{107}$

B.3 (a) $5/9$, (b) $2/5$, (c) $1/3$ (wynik nie jest zaskakujący, prawdopodobieństwo wylosowania czerwonej kuli w drugim losowaniu nie zależy od tego, co wydarzyło się w pierwszym losowaniu)

B.4 (a) (użyj wzoru na prawdopodobieństwo całkowite) $2,625\%$,

(b) (użyj wzoru Bayesa) $\frac{2,5}{2,625} \approx 95,24\%$

B.5 (a) (użyj wzoru na prawdopodobieństwo całkowite) $5/9$,

(b) (użyj wzoru Bayesa) $3/10$

B.6 (użyj wzoru na prawdopodobieństwo całkowite) $11/18$

B.7 (w obu przypadkach użyj wzoru Bayesa) $\frac{300}{300,4} \approx 99,87\%$, $\frac{570}{969,96} \approx 58,77\%$