Didaktika matematiky

Aplikační úloha

Kateřina Novotná, Adam Papula

13. prosince 2023

Téma: Přirozený logaritmus.

Cílová skupina žáků: 2. ročník SŠ.

Cíl úlohy:

- Žák aplikuje přirozený logaritmus na úlohu ze života.
- Žák správně pracuje se vzorcem (tzn. dosazení,...).
- Žák správně pracuje s neznámou ve vzorci.
- Žák vyjádří neznámou v exponentu ze vzorce.

Předpoklady:

Žáci znají:

- přirozený logaritmus,
- práce se vzorcem, dosazení do vzorce,
- vyjádření neznámé ze vzorce,
- exponenciální funkce.

1 Zadání

Ideálně upečený cheesecake čerstvě vyndaný z trouby má teplotou 74 °C. Umístíme jej do ledničky, ve které je teplota nastavena na 1,7 °C. Po 10 minutách cheesecake změříme a zjistíme, že jeho vnitřní teplota klesla na 65,6 °C. Nejvhodnější teplota na servírování je pokojová teplota. Zákazník požaduje přesnou teplotu 21,1 °C. Kdy nejpozději musíme začít péct, víme-li, že se cheesecake peče 75 minut?

1.1 Nápověda

Teplota (T) objektu v prostředí se vzduchem o teplotě T_v se bude chovat podle vzorce

$$T(t) = D_0 \cdot e^{-tk} + T_v$$

Kde

- t je čas,
- D_0 je rozdíl mezi počáteční teplotou objektu a prostředí (v našem případě teplota cheesecake a lednice),
- k je konstanta kontinuální rychlosti ochlazování objektu.

Nejprve je potřeba zjistit konstantu dopočítáním z již známých údajů. Následně tuto konstantu použít pro výpočet požadovaných údajů.

2 Řešení

Víme:

$$T(t) = D_0 \cdot e^{-tk} + 1,7$$

Poznámka: Zde je nutné ze zadání správně vyčíst jednotlivé údaje.

Dopočítání konstanty,

- $T(0) = 74$, tedy (nic nám nedá, pouze ověření):

$$74 = (74 - 1,7) \cdot e^{-0k} + 1,7$$

- $T(10) = 65,6$ a tedy:

$$\begin{aligned} 65,6 &= (74 - 1,7) \cdot e^{-10k} + 1,7 \\ 63,9 &= 72,3 \cdot e^{-10k} \\ \frac{63,9}{72,3} &= e^{-10k} \\ \ln \frac{63,9}{72,3} &= -10k \\ k &= \frac{\ln \frac{63,9}{72,3}}{-10} \end{aligned}$$

Poznámka: Žáci si musí uvědomit, že nechtějí vyjádřit e, ale proměnnou k.

Nyní, když známe konstantu, můžeme ji doplnit do vzorce pro ochlazování objektu.

$$T(t) = 72,3 \cdot e^{t \cdot (\frac{1}{10} \cdot \ln \frac{63,9}{72,3})} + 1,7$$

Dosazením $21,1$ za $T(t)$ a následným dopočítáním proměnné t zjistíme, jak dlouho cheesecake bude chladnout. *Poznámka: Méně pečliví žáci mohou mít problém se zápisem exponentu u e, může nastat problém se znaménkem minus v exponentu.*

Poznámka: Zde si musí uvědomit, že $T(t)$ je funkce závislosti teploty na čase, t je čas ke kterému se chtějí dopracovat, $T(t)$ znají.

$$\begin{aligned} 21,1 &= 72,3 \cdot e^{t \cdot (\frac{1}{10} \cdot \ln \frac{63,9}{72,3})} + 1,7 \\ 19,4 &= 72,3 \cdot e^{t \cdot (\frac{1}{10} \cdot \ln \frac{63,9}{72,3})} \\ \frac{19,4}{72,3} &= e^{t \cdot (\frac{1}{10} \cdot \ln \frac{63,9}{72,3})} \\ \ln \frac{19,4}{72,3} &= t \cdot (\frac{1}{10} \cdot \ln \frac{63,9}{72,3}) \\ t &= \frac{\ln \frac{19,4}{72,3}}{\frac{1}{10} \cdot \ln \frac{63,9}{72,3}} \\ t &\approx 106,5 \end{aligned}$$

Poznámka: Výsledek $106,5$ *minut není konečný výsledek, je potřeba ještě připočítat čas pečení.*
Poznámka: Může nastat problém se správným určením jednotky u výsledku.

Chladnutí dortu bude trvat $106,5$ minuty, samotné pečení zabere dalších 75 minut. Nejpozději musíme začít $181,5$ (3 hodiny a $1,5$ minuty) minuty před příchodem zákazníka.