Zadání a řešení písemné práce

Téma: exponenciální funkce

Čas: 15-20 minut
Cíle testu:

- Úloha č. 1
  Dimenze kognitivních procesů
  Kategorie: Aplikovat (3)
  Dovednost: Provádět (3.a)
- Úloha č. 2
  Dimenze kognitivních procesů
  Kategorie: Aplikovat (3)
  Dovednost: Provádět (3.a)
- Úloha č. 3
  Dimenze kognitivních procesů
  Kategorie: Aplikovat (3)
  Dovednost: Implementovat (3.b)

Písemná práce: exponenciální rovnice **(varianta A)**

JMÉNO: ______________________ TŘÍDA: ________ DATUM: ____________

Body	$10-9$	$8-7$	$6-5$	$4-3$	$2-0$
Známka	1	2	3	4	5

1. (3 b.) Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici
$$4^{\frac{1-x}{1+x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

2. (3 b.) Řešte v $\mathbb{Z}$ rovnici
$$\sqrt[4]{4^x} \cdot \sqrt[3]{2^{x-3}} = \sqrt[6]{16}$$
.

3. (4 b.) Řešte v $\mathbb{Z}$ rovnici
$$\sqrt[5]{3^{8x^2}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x^2}{2}} \cdot 3^x = \sqrt[5]{27^4}$$
.

Vzorové řešení

1. Určení podmínek řešitelnosti: $x \neq -1$. ◁ *1 bod*

$$
\begin{aligned}
4^{\frac{1-x}{1+x}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\
2^{\frac{2-2x}{1+x}} &= 2^{-\frac{1}{3}} && \triangleleft \textit{ převedení na společný základ (1 bod)} \\
\frac{2-2x}{1+x} &= -\frac{1}{3} \\
6-6x &= -1-x \\
7 &= 5x \\
x &= \frac{7}{5} && \triangleleft \textit{ správný výsledek (1 bod)}
\end{aligned}
$$

2. Definiční obor rovnice není omezen.

$$
\begin{aligned}
\sqrt[4]{4^x} \cdot \sqrt[3]{2^{x-3}} &= \sqrt[6]{16} \\
2^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x-3}{3}} &= 2^{\frac{2}{3}} && \triangleleft \textit{ převedení na společný základ (2 body)} \\
\frac{x}{2} + \frac{x-3}{3} &= \frac{2}{3} \\
3x + 2x - 6 &= 4 \\
5x &= 10 \\
x &= 2 && \triangleleft \textit{ správný výsledek (1 bod)}
\end{aligned}
$$

3. Definiční obor rovnice není omezen.

$$
\begin{aligned}
\sqrt[5]{3^{8x^2}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x^2}{2}} \cdot 3^x &= \sqrt[5]{27^4} \\
3^{\frac{8}{5}} \cdot 3^{-x^2} \cdot 3^x &= 3^{\frac{12}{5}} && \triangleleft \textit{ převedení na společný základ (2 body)} \\
\frac{8}{5}x^2 - x^2 + x &= \frac{12}{5} \\
3x^2 + 5x - 12 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12)}}{2 \cdot 3} \\
x_1 = -3 \wedge \cancel{x_2 = -\frac{4}{3}} & && \triangleleft \textit{ správný výsledek a vyřazení } x_2 \textit{ (2 body)}
\end{aligned}
$$

Písemná práce: exponenciální rovnice **(varianta B)**

JMÉNO: ____________________ TŘÍDA: ________ DATUM: __________

Body	$10-9$	$8-7$	$6-5$	$4-3$	$2-0$
Známka	1	2	3	4	5

1. [3 b.] Řešte v $\mathbb{R}$.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x}{x-2}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

2. [3 b.] Řešte v $\mathbb{Z}$.

$$\sqrt[6]{6^{5x}} \cdot \sqrt[3]{6^{x+5}} = \sqrt[4]{36}$$

3. [4 b.] Řešte v $\mathbb{Z}$.

$$2 \cdot 0,5^{x^2+\frac{8}{3}x} = \frac{8}{\sqrt[3]{4}}$$

Vzorové řešení

1. Určení podmínek řešitelnosti: $x \neq 2$. $\triangleleft$ *1 bod*

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x}{x-2}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{-2\cdot\frac{x}{x-2}} = 3^{\frac{1}{2}} \qquad \triangleleft \text{ převedení na společný základ (1 bod)}$$

$$-2 \cdot \frac{x}{x-2} = \frac{1}{2}$$

$$-4x = x - 2$$

$$-5x = -2$$

$$x = \frac{2}{5} \qquad \triangleleft \text{ správný výsledek (1 bod)}$$

2. Definiční obor rovnice není omezen.

$$\sqrt[6]{6^{5x}} \cdot \sqrt[3]{6^{x+5}} = \sqrt[4]{36}$$

$$6^{\frac{5x}{6}} \cdot 6^{\frac{x+5}{3}} = 36^{\frac{1}{4}}$$

$$6^{\frac{5x}{6}} \cdot 6^{\frac{x+5}{3}} = 6^{\frac{1}{2}}$$

$$6^{\frac{5x}{6}+\frac{x+5}{3}} = 6^{\frac{1}{2}} \qquad \triangleleft \text{ převedení na společný základ (2 body)}$$

$$\frac{5x}{6} + \frac{x+5}{3} = \frac{1}{2}$$

$$5x + 2x + 10 = 3$$

$$7x = -7$$

$$x = -1 \qquad \triangleleft \text{ správný výsledek (1 bod)}$$

3. Definiční obor není omezen.

$$2 \cdot 0,5^{x^2+\frac{8}{3}x} = \frac{8}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+\frac{8}{3}x} = \frac{2^3}{2^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+\frac{8}{3}x} = 2^{\frac{4}{3}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+\frac{8}{3}x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} \qquad \triangleleft \text{ převedení na společný základ (2 body)}$$

$$x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{4}{3} = 0$$

$$3x^2 + 8x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = -2 \wedge \cancel{x_2 = -\frac{2}{3}} \qquad \triangleleft \text{ správný výsledek a vyřazení } x_2 \text{ (2 body)}$$