Zadání a řešení písemné práce

Téma: exponenciální funkce

Čas: 20 minut
Cíle testu:

- Úloha č. 1
  Dimenze kognitivních procesů
  Kategorie: Zapamatovat si (1)
  Dovednost: Vybavovat si (1.b)

- Úloha č. 2
  Dimenze kognitivních procesů
  Kategorie: Rozumět (2)
  Dovednost: Vysvětlovat (2.g)

- Úloha č. 3
  Dimenze kognitivních procesů
  Kategorie: Analyzovat (4)
  Dovednost: Rozlišovat (4.a)

- Úloha č. 4
  Dimenze kognitivních procesů
  Kategorie: Aplikovat (3)
  Dovednost: Provádět (3.a)

- Úloha č. 5 (**bonus**)
  Dimenze kognitivních procesů
  Kategorie: Aplikovat (3)
  Dovednost: Implementovat (3.b)

Písemná práce: exponenciální funkce **(varianta A)**

JMÉNO: ______________________ TŘÍDA: ________ DATUM: __________

Body	$10-9$	$8-7$	$6-5$	$4-3$	$2-0$
Známka	1	2	3	4	5

1. (3 b.) Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici

$$4^{\frac{1-x}{1+x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

2. (3 b.) Řešte v $\mathbb{Z}$ rovnici

$$\sqrt[4]{4^x} \cdot \sqrt[3]{2^{x-3}} = \sqrt[6]{16}$$

.

3. (4 b.) Řešte v $\mathbb{Z}$ rovnici

$$\sqrt[5]{3^{8x^2}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x^2}{2}} \cdot 3^x = \sqrt[5]{27^4}$$

.

Vzorové řešení

1. Určení podmínek řešitelnosti: $x \neq -1$. ◁ *1 bod*

$$4^{\frac{1-x}{1+x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$2^{\frac{2-2x}{1+x}} = 2^{-\frac{1}{3}} \qquad \triangleleft \textit{ převedení na společný základ (1 bod)}$$

$$\frac{2-2x}{1+x} = -\frac{1}{3}$$

$$6 - 6x = -1 - x$$

$$7 = 5x$$

$$x = \frac{7}{5} \qquad \triangleleft \textit{ správný výsledek (1 bod)}$$

2. Definiční obor rovnice není omezen.

$$\sqrt[4]{4^x} \cdot \sqrt[3]{2^{x-3}} = \sqrt[6]{16}$$

$$2^{\frac{x}{2}} \cdot 2^{\frac{x-3}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \qquad \triangleleft \textit{ převedení na společný základ (1 bod)}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x-3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$3x + 2x - 6 = 4$$

$$5x = 10$$

$$x = 2 \qquad \triangleleft \textit{ správný výsledek (1 bod)}$$

3. Definiční obor rovnice není omezen.

$$\sqrt[5]{3^{8x^2}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x^2}{2}} \cdot 3^x = \sqrt[5]{27^4}$$

$$3^{\frac{8}{5}} \cdot 3^{-x^2} \cdot 3^x = 3^{\frac{12}{5}} \qquad \triangleleft \textit{ převedení na společný základ (2 body)}$$

$$\frac{8}{5}x^2 - x^2 + x = \frac{12}{5}$$

$$3x^2 + 5x - 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12)}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = -3 \wedge \cancel{x_2 = -\frac{4}{3}} \qquad \triangleleft \textit{ správný výsledek a vyřazení } x_2 \textit{ (2 body)}$$

Písemná práce: exponenciální funkce **(varianta B)**

JMÉNO: ____________________________ TŘÍDA: ______ DATUM: __________

Body	<9	$8-7$	$6-5$	$4-3$	$2-0$
Známka	1	2	3	4	5

1. [1 b.] Napište definici exponenciální funkce.

. . . .

. . . .

. . . .

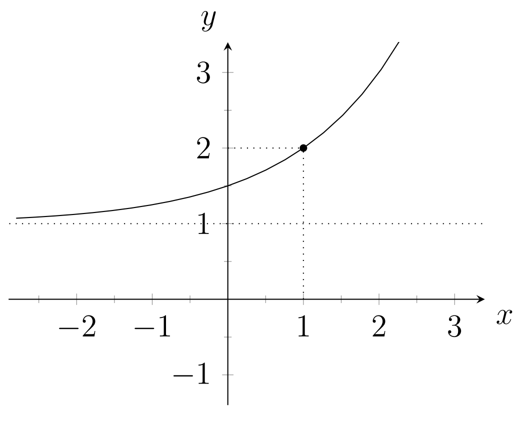
2. [1 b.] Stručně vysvětlete, co rozumíme po pojmem přirozená exponenciální funkce.

. . . .

. . . .

. . . .

3. [2 b.] Vyberte funkční předpis odpovídající grafu funkce f níže.



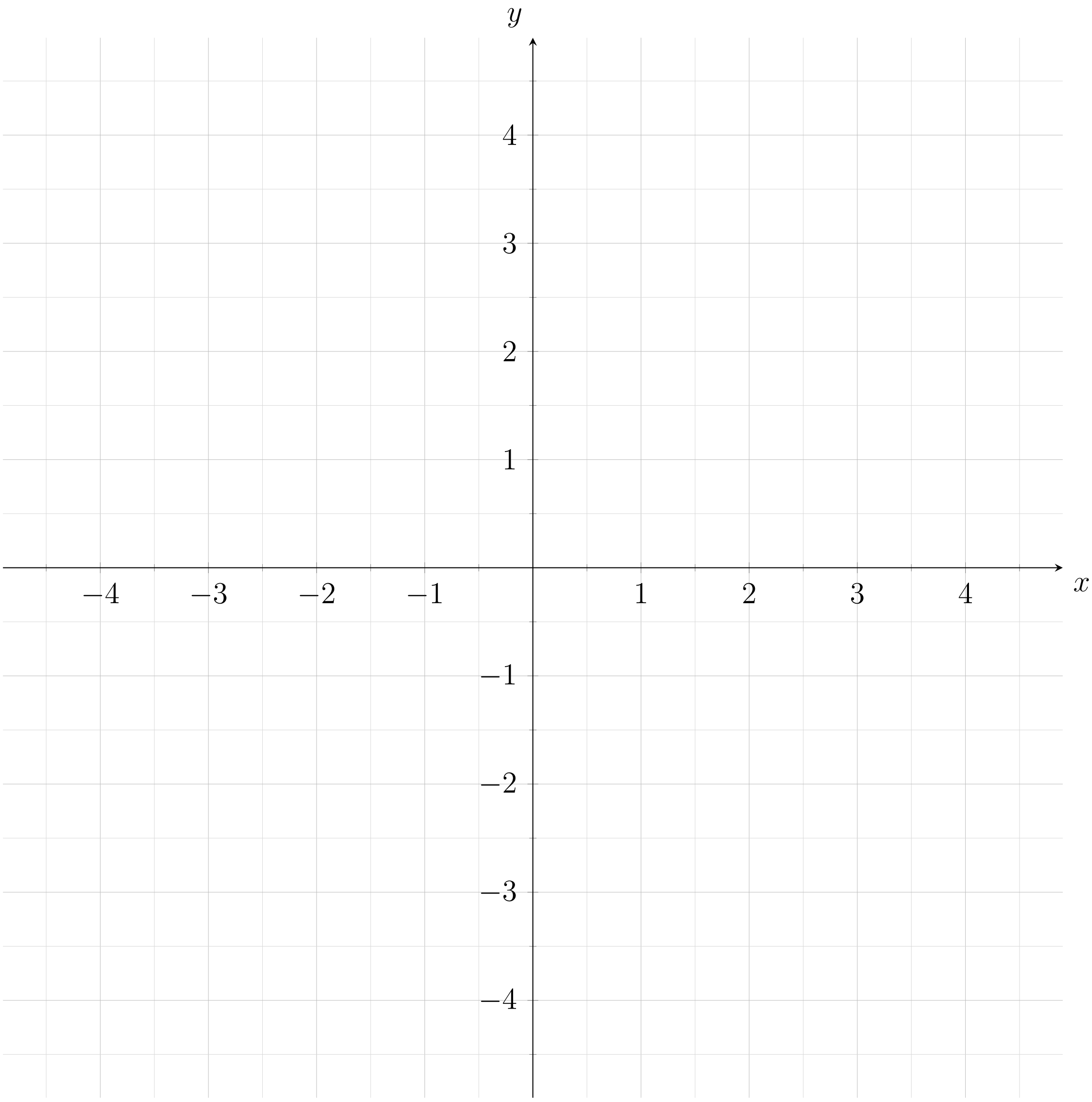
- ☐ $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 1$
- ☐ $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$
- ☐ $f: y = 2^{x-1} + 1$
- ☐ $f: y = 2^{x+1} - 1$
- ☐ Žádný z uvedených.

4. [6 b.] Mějme reálnou funkci $g : y = -\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} + 1$, kde $D_g = \left\langle -\frac{5}{2}, 3 \right)$.

(A) [4 b.] Nakreslete graf funkce g.

(B) [1 b.] Určete obor hodnot H_g.

(C) [1 b.] Určete průsečík grafu g s osou x a y.



5. [4 b. – **bonusová úloha**] Mějme reálnou funkci $h: y = \left(\frac{a+1}{a^2-1}\right)^x$. Určete, pro jaké hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je funkce h klesající. Uveďte celý postup řešení.

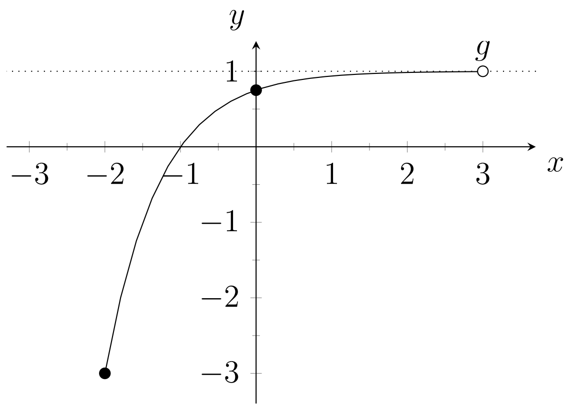
Vzorové řešení

1. Nechť $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Exponenciální funkcí i základu a se nazývá funkce f daná rovnicí $y = a^x$, jejím definičním oborem je $D(f) = \mathbb{R}$.

2. Exponenciální funkce, jejímž základem je číslo e, se nazývá přirozená exponenciální funkce

3. $f : y = 2^{x-1} + 1$

4. Graf:



$$H_g = \left\langle -3, \tfrac{255}{256} \right)$$
$$P_x = [-1, 0]$$
$$P_y = \left[0, \tfrac{3}{4}\right]$$

5. Funkce h má být klesající, tj. $0 < \frac{a+1}{a^2-1} < 1$. Každou z nerovností vyšetříme zvlášť:

$$0 < \frac{a+1}{a^2-1}$$
$$0 < \frac{1}{a-1} \; ; \; a \neq -1$$
$$a \in (1, \infty).$$

Druhá nerovnost:

$$\frac{a+1}{a^2-1} < 1$$
$$0 < 1 - \frac{a+1}{a^2-1}$$
$$0 < \frac{a^2-a-2}{a^2-1}$$
$$0 < \frac{(a-2)\cancel{(a+1)}}{(a-1)\cancel{(a+1)}}$$

	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$a-1$	-	$+$	$+$
$a-2$	-	-	$+$
	$+$	-	$+$

Tj. $a \in \mathbb{R} \setminus \big((1,2) \cup \{-1\}\big)$. Parametr a tedy náleží průniku $\Big(\mathbb{R} \setminus \big((1,2) \cup \{-1\}\big)\Big) \cap (1,\infty) = (2,\infty)$.