Didaktika matematiky

Motivace a zavedení konkrétního pojmu školské matematiky

Kateřina Novotná, Adam Papula

20. listopadu 2023

Téma: aritmetická posloupnost – diference; vzorce pro n-tý člen, součet prvních n členů.

Cílová skupina žáků: 3. ročník SŠ., 1 vyučovací hodina (45 minut)

Předpoklady:

Žáci znají:

- **posloupnost** jako speciální případ funkce (definičním oborem $D(f)$ je množina N, příp. její konečná podmnožina),
- **(ne)konečná posloupnost**,
- **n-tý člen posloupnosti** a_n jako funkční hodnota posloupnosti f v bodě n,
- **symbolický zápis (nekonečné) posloupnosti** (tj. a_1, a_2,...a_n),
- **způsoby zadání posloupnosti** – vzorcem pro n-tý člen nebo rekurentně,
- **grafické znázornění posloupností** – graf posloupnosti (jako funkce) nebo znázorněním bodů a_n na číselné ose,
- **vlastnosti/druhy posloupností** – (ne)rostoucí, (ne)klesající, (zdola, shora) omezené.

1 Příklady z praxe

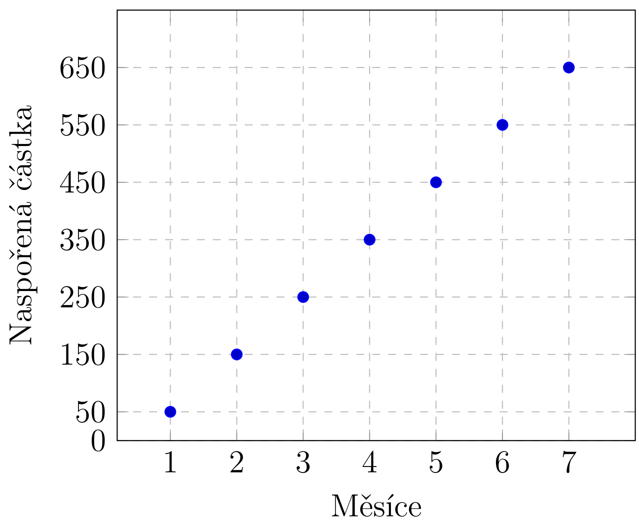
Odhadovaný čas: 20 minut

Uvedení příkladů, se kterými se mohou žáci setkat v běžném životě. Uvedeny budou následující příklady:

- Posloupnost přirozených čísel – společně se určí a_1 a diference.
- **Spoření** (neuvažujeme spořící účet v bance, na začátku období máme již něco naspořeno ($a_1 \neq 0$)) a pravidelně, každý měsíc, ukládáme stejnou částku. *Kolik peněz budeme mát naspořeno za x měsíců?*

  Příklad 1. Amálka si v minulém roce zvládla našetřit 50 Kč. Babička Amálky se na začátku ledna rozhodla, že jí na začátku každého měsíce dá kapesné 100 Kč. Amálka si všechny peníze pečlivě ukládá do pokladničky a nic neutratí. Kolik peněz bude mít naspořeno v polovině června, tj. po šesté výplatě kapesného?

  $$a_1 = 50; d = 100; n = 7$$
  $$a_2 = 50 + 100 = 150 \quad \text{tj. naspořená částka z loňska + kapesné za leden}$$
  $$a_3 = 150 + 100 \quad \text{tj. naspořená částka za leden + kapesné za únor}$$
  $$\ldots$$
  $$a_7 = 50 + (7-1) \cdot 100 = \underline{\underline{650}} \quad \text{tj. Amálka za 6 měsíců naspoří 650 Kč}$$

- **Pokles teploty s rostoucí nadmořskou výškou.** Teplota klesá v průměru o 0,65 °C na 100 výškových metrů, tj. zvýší-li se nadmořská výška o 100 m. n. m., ochladí se v místě v průměru o 0,65 °C. *Jaké můžeme očekávat oteplení/ochlazení, pokud se dostaneme do vyšší/nižší nadmořské výšky?*

  Příklad 2. Průměrná nadmořská výška Prahy, odkud jedeme na dovolenou, je 235 m. n. m. Chceme jet lyžovat do nedaleké Pece pod Sněžkou, jejíž průměrná výška je 769 m. n. m. O kolik se bude lišit teplota oproti Praze, zanedbáme-li všechny ostatní vlivy počasí?

$$235 - 769 = -534 \quad \text{rozdíl nadmořských výšek v pořadí „start – cíl“}$$
$$-534 \cdot \frac{0,65}{100} = \underline{\underline{-3,471}} \quad \text{teplota se sníží o 3,471 °C}$$

- Uvědomění si, že rozdíl každého následujícího a předchozího členu je konstantní.

2 Odvození vzorců

Odhadovaný čas: 10 minut

- Odvození definičního vzorce pro aritmetickou posloupnost – (rekurentní zadání)

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

- Odvození vzorce pro n-tý člen aritmetické posloupnosti matematickou indukcí

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

3 Definice

Odhadovaný čas: 5 minut

Definice 1. *Aritmetická posloupnost* je každá posloupnost určená rekurentně vztahy $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d \; \forall n \in \mathbb{N}$ kde a, d jsou reálná čísla. Číslo d se nazývá *diference aritmetické posloupnosti.*

Název aritmetické posloupnosti je odvozen od toho, že každý její člen (s výjimkou prvního) je roven aritmetickému průměru sousedních členů.
Aritmetická posloupnost s reálnými členy úzce souvisí s lineární funkcí $f : y = ax + b, x \in \mathbb{R}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou daní čísla – dostaneme ji z této funkce, omezíme-li její definiční obor na množinu N.

4 Odvození vzorce pro součet

Odhadovaný čas: 10 minut
Odvození vzorce pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti matematickou indukcí

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n).$$

Příklad 3. Motivace příběhem o C. F. Gaussovi a jeho úloze „Sečti všechna přirozená čísla od 1 do 100.“

$$(1 + 100) + (2 + 99) + \cdots + (100 + 1) = 100 \cdot 101 = 10100$$
$$\Downarrow$$
$$1 + \cdot + 100 = \frac{10100}{2} = \underline{\underline{5050}}$$