Didaktika informatiky

Zadání a řešení písemné práce – výroky a množiny

Kateřina Novotná, Adam Papula

12. října 2023

Čas: 15-20 minut
Cíle testu:

- Úloha č. **??**
  (TODO: Bloom.)
- Úloha č. **??**
  (TODO: Bloom.)
- Úloha č. **??**
  (TODO: Bloom.)
- Úloha č. **??**
  (TODO: Bloom.)
- Úloha č. **??**
  (TODO: Bloom.)
- Úloha č. **??**
  (TODO: Bloom.)
- Úloha č. **??**
  (TODO: Bloom.)

Písemná práce: výroky a množiny **(varianta A)**

JMÉNO: ______________________ TŘÍDA: ________ DATUM: __________

Body	15	14 – 12	11 – 9	8 – 6	5 – 0
Známka	1	2	3	4	5

1. Určete, zda se jedná o výroky:
   (a) (½ b.) ANO NE Číslo 12 je prvočíslo.
   (b) (½ b.) ANO NE Přines mi prosím kapesník.
   (c) (½ b.) ANO NE $\forall x \in \mathbb{Z} : x + 3 > 0$
2. Určete negace kvantifikovaných výroků:
   (a) (1 b.) Alespoň jeden cestující nevystoupil.

   ....

   (b) (1 b.) Právě jedna moje učebnice je těžká.

   ....
3. Negujte následující výroky:
   (a) (2 b.) Každé přirozené číslo, které je dělitelné dvaceti, je dělitelné čtyřmi.

   ....

   ....

   (b) (2 b.) Do kina půjdu s Terkou nebo s Eliškou.

   ....
4. (1 ½ b.) Z následujících dvou *symbolicky zapsaných kvantifikovaných výroků* si vyberte **jeden**, který vyjádříte slovy. Dále rozhodněte o jeho pravdivosti:
   (a) $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$
   (b) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y$

   ....

   ....
5. (1 b.) Vypište všechny prvky následující množiny:

$$M = \{\xi \in \mathbb{Z} : -27 < \xi^3 \leq 8\}$$

6. (3 b.) Mějme zadány intervaly $A = \langle 0, 18 \rangle$, $B = (13, 28)$ a $C = \langle 15, 17 \rangle$. Určete $((A \cap B) \setminus C)'$

7. (2 b.) Ve třídě je 29 žáků, 19 z nich umí lyžovat, 12 jezdí na snowboardu, 5 jich nelyžuje a ani nejezdí na snowboardu. Znázorněte pomocí Vennova diagramu a určete, kolik žáků umí lyžovat i jezdit na snowboardu.

Písemná práce: výroky a množiny **(varianta B)**

JMÉNO: ______________________ TŘÍDA: ________ DATUM: __________

Body	15	14 – 12	11 – 9	8 – 6	5 – 0
Známka	1	2	3	4	5

1. Určete, zda se jedná o výroky:
   (a) (½ b.) ANO NE $\exists! x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{N} : \frac{y}{x} = 0$
   (b) (½ b.) ANO NE Všechna prvočísla jsou lichá.
   (c) (½ b.) ANO NE Berlín patří mezi racionální čísla.
2. Určete negace kvantifikovaných výroků:
   (a) (1 b.) Všichni moji kamarádi mají hnědé oči

   ....

   (b) (1 b.) Alespoň 4 dny v týdnu bude pršet.

   ....
3. Negujte následující výroky:
   (a) (2 b.) Existuje alespoň jeden trojúhelník, ve kterém se všechny jeho výšky neprotínají v jediném bodě.

   ....

   ....

   (b) (2 b.) Sní polévku právě tehdy, když v ní nebude zelenina.

   ....
4. (1 ½ b.) Z následujících dvou *symbolicky zapsaných kvantifikovaných výroků* si vyberte **jeden**, který vyjádříte slovy. Dále rozhodněte o jeho pravdivosti:
   (a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$
   (b) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

   ....

   ....
5. (1 b.) Vypište všechny prvky následující množiny:

$$S = \{\chi \in \mathbb{N} : -18 < \chi^3 \leq^6 4|\chi \text{ je sudé}\}$$

6. (3 b.) Mějme zadány intervaly $A = (-5, 12)$, $B = \langle 4, 11)$ a $C = \langle 3, 5\rangle$.
   Určete $((A \setminus B) \cup C)'$

7. (2 b.) Ve třídě hraje 21 žáků fotbal nebo košíkovou, 4 žáci z této třídy nehrají ani fotbal, ani košíkovou, 12 žáků hraje košíkovou, 14 žáků hraje fotbal. Znázorněte pomocí Vennova diagramu a určete, kolik žáků hraje pouze fotbal.

Písemná práce: výroky a množiny **(varianta A)** – řešení

1. Určete, zda se jedná o výroky:
   (a) (½ b.) $\boxed{\text{ANO}}$ NE Číslo 12 je prvočíslo.
   (b) (½ b.) ANO $\boxed{\text{NE}}$ Přines mi prosím kapesník.
   (c) (½ b.) $\boxed{\text{ANO}}$ NE $\forall x \in \mathbb{Z} : x + 3 > 0$

2. Určete negace kvantifikovaných výroků:
   (a) (1 b.) Alespoň jeden cestující nevystoupil.

   Řešení: Všichni cestující vystoupili.

   (b) (1 b.) Právě jedna moje učebnice je těžká.

   Řešení: Žádná moje učebnice nebo alespoň dvě moje učebnice jsou těžké.

3. Negujte následující výroky:
   (a) (2 b.) Každé přirozené číslo, které je dělitelné dvaceti, je dělitelné čtyřmi.

   Řešení: Existuje alespoň jedno přirozené číslo, které je dělitelné dvaceti a není dělitelné čtyřmi.

   (b) (2 b.) Do kina půjdu s Terkou nebo s Eliškou.

   Řešení: Do kina nepůjdu s Terkou a nepůjdu ani s Eliškou.

4. (1 ½ b.) Z následujících dvou *symbolicky zapsaných kvantifikovaných výroků* si vyberte **jeden**, který vyjádříte slovy. Dále rozhodněte o jeho pravdivosti:
   (a) $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$
   (b) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y$

   Řešení:

   (a) Výrok je pravdivý.
   Druhá odmocnina z druhé mocniny libovolného reálného čísla je rovna jeho absolutní hodnotě.

(b) Výrok je pravdivý.
Existuje takové reálné číslo x, že pro všechna reálná čísla y platí $x \cdot y = y$

5. (1 b.) Vypište všechny prvky následující množiny:

$$M = \{\xi \in \mathbb{Z} : -27 < \xi^3 \leq 8\}$$

Řešení:

$$M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

6. (3 b.) Mějme zadány intervaly $A = \langle 0, 18\rangle$, $B = (13, 28)$ a $C = \langle 15, 17\rangle$. Určete $((A \cap B) \setminus C)'$

Řešení:

$$\begin{aligned} A \cap B &= (13, 18\rangle \\ (A \cap B) \setminus C &= (13, 15) \cup (17, 18\rangle \\ ((A \cap B) \setminus C)' &= (-\infty, 13\rangle \cup \langle 15, 17\rangle \cup (18, \infty) \end{aligned}$$

7. (2 b.) Ve třídě je 29 žáků, 19 z nich umí lyžovat, 12 jezdí na snowboardu, 5 jich nelyžuje a ani nejezdí na snowboardu. Znázorněte pomocí Vennova diagramu a určete, kolik žáků umí lyžovat i jezdit na snowboardu.

Řešení: Označme si množinu všech žáků třídy jako T, $|T| = 29$. Žáky, kteří umí lyžovat označíme L, $|L| = 19$. Snowboardisty označíme S, $|S| = 12$. Žáků, kteří neumí ani lyžovat ano na snowboardu je celkem 5. Tedy

$$|L \cup S| = 29 - 5 = 24$$

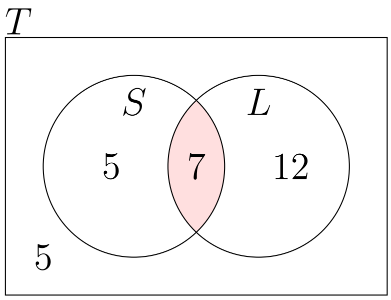
žáků umí buď lyžovat, nebo na snowboardu nebo obojí. Nyní, pokud sečteme žáky, co umí lyžovat a na snowboardu dostaneme

$$19 + 12 = 31,$$

což odpovídá případu, kdy neexistuje ani jeden žák co umí na lyžích a snowboardu zároveň. Jelikož ale platí $31 > 24$, dostaneme informaci, že celkem

$$31 - 24 = \underline{\underline{7}}$$

žáků umí na lyžích a snowboardu zároveň.



Písemná práce: výroky a množiny **(varianta B)** – řešení

1. Určete, zda se jedná o výroky:
   (a) (½ b.) $\boxed{\text{ANO}}$ NE $\exists! x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{N} : \frac{y}{x} = 0$
   (b) (½ b.) $\boxed{\text{ANO}}$ NE Všechna prvočísla jsou lichá.
   (c) (½ b.) ANO $\boxed{\text{NE}}$ Berlín patří mezi racionální čísla.

2. Určete negace kvantifikovaných výroků:
   (a) (1 b.) Všichni moji kamarádi mají hnědé oči

   Řešení: Alespoň jeden můj kamarád nemá hnědé oči.

   (b) (1 b.) Alespoň 4 dny v týdnu bude pršet.

   Řešení: Nejvýše 3 dny v týdnu bude pršet.

3. Negujte následující výroky:
   (a) (2 b.) Existuje alespoň jeden trojúhelník, ve kterém se všechny jeho výšky neprotínají v jediném bodě.

   Řešení: V každém trojúhelníku se všechny jeho výšky protínají v jediném bodě.

   (b) (2 b.) Sní polévku právě tehdy, když v ní nebude zelenina.

   Řešení: Sní polévku a bude v ní zelenina nebo v polévce zelenina nebude a polévku nesní.

4. (1 ½ b.) Z následujících dvou *symbolicky zapsaných kvantifikovaných výroků* si vyberte **jeden**, který vyjádříte slovy. Dále rozhodněte o jeho pravdivosti:
   (a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$
   (b) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

   Řešení:

   (a) Výrok není pravdivý.
   Druhá mocnina každého reálného čísla je větší než nula.

(b) Výrok není pravdivý.
Pro každá dvě reálná čísla platí: čísla se sobě rovnají právě tehdy, když se rovnají jejich druhé mocniny.

5. (1 b.) Vypište všechny prvky následující množiny:

$$S = \{\chi \in \mathbb{N} : -18 < \chi^3 \leq^6 4 | \chi \text{ je sudé}\}$$

Řešení:

$$S = \{2, 4\}$$

6. (3 b.) Mějme zadány intervaly $A = (-5, 12)$, $B = \langle 4, 11)$ a $C = \langle 3, 5\rangle$. Určete $((A \setminus B) \cup C)'$

Řešení:

$$\begin{aligned} A \setminus B &= (-5, 4) \cup \langle 11, 12) \\ (A \setminus B) \cup C &= (-5, 5\rangle \cup \langle 11, 12) \\ ((A \cap B) \setminus C)' &= (-\infty, -5\rangle \cup (-5, 11) \cup \langle 12, \infty) \end{aligned}$$

7. (2 b.) Ve třídě hraje 21 žáků fotbal nebo košíkovou, 4 žáci z této třídy nehrají ani fotbal, ani košíkovou, 12 žáků hraje košíkovou, 14 žáků hraje fotbal. Znázorněte pomocí Vennova diagramu a určete, kolik žáků hraje pouze fotbal.

Řešení: Označme si množinu všech žáků třídy jako T. Žáky, kteří hrají fotbal označíme F a žáky hrající košíkovou K. Víme, že

$$|F \cap K| = 21.$$

Dále ze zadání víme, že

$$|(F \cap K)'| = 4.$$

Pro množinu K platí $|K| = 12$ a pro množinu F platí $|F| = 14$. Máme tedy

$$12 + 14 = 26,$$

přičemž sportuje pouze 21 žáků, tedy

$$26 - 21 = 5$$

žáků hraje obě hry. Nyní nám stačí dopočítat počet žáků hrající pouze fotbal,

$$14 - 5 = \underline{\underline{9}}$$