Písemná práce: exponenciální funkce **(varianta A)**

JMÉNO: ______________________ TŘÍDA: ________ DATUM: ____________

Body	< 9	$8-7$	$6-5$	$4-3$	$2-0$
Známka	1	2	3	4	5

1. [1 b.] Napište definici exponenciální funkce.

. . . .

. . . .

. . . .

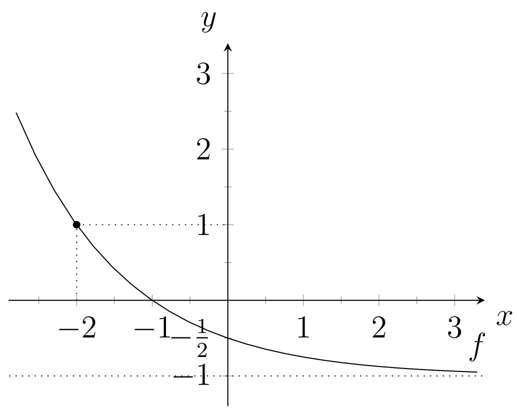
2. [1 b.] Stručně vysvětlete, proč klademe na hodnotu základu exponenciální funkce omezení.

. . . .

. . . .

. . . .

3. [2 b.] Vyberte funkční předpis odpovídající grafu funkce f níže.



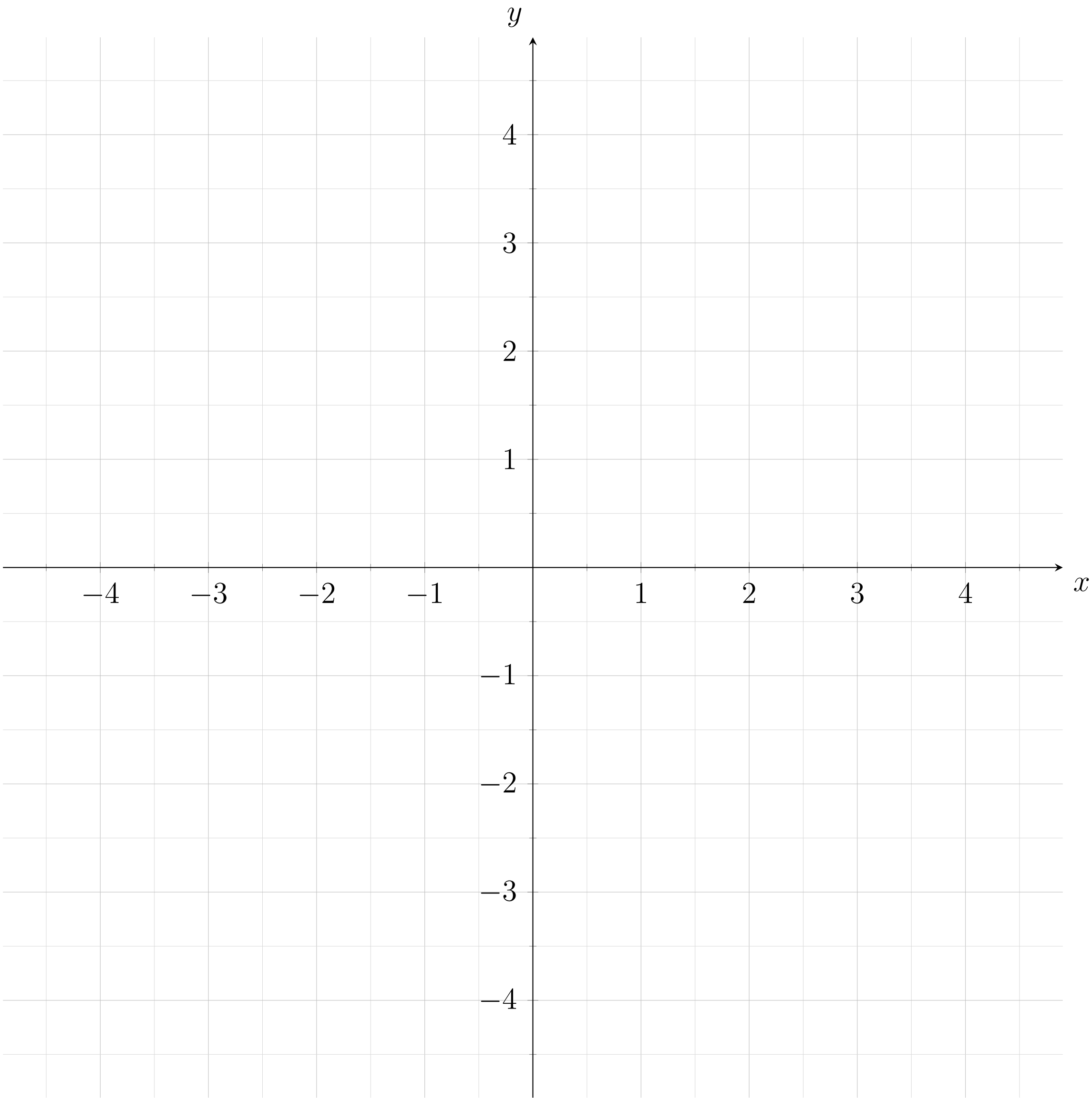
- ☐ $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 1$
- ☐ $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$
- ☐ $f: y = 2^{x-1} + 1$
- ☐ $f: y = 2^{x+1} - 1$
- ☐ Žádný z uvedených.

4. [6 b.] Mějme reálnou funkci $g : y = -2^{x-2} + \frac{1}{2}$, kde $D_g = (-4, 3\rangle$.

(A) [4 b.] Nakreslete graf funkce g.

(B) [1 b.] Určete obor hodnot H_g.

(C) [1 b.] Určete průsečík grafu g s osou x a y.



5. [4 b. – **bonusová úloha**] Mějme reálnou funkci $h : y = \left(\frac{a+1}{a^2-1}\right)^x$. Určete, pro jaké hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je funkce h klesající. Uveďte celý postup řešení.

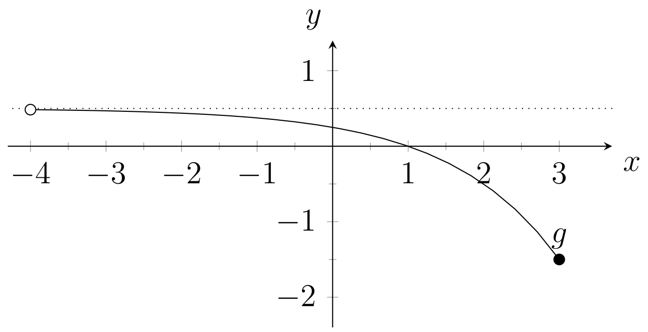
Vzorové řešení

1. Nechť $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Exponenciální funkcí i základu a se nazývá funkce f daná rovnicí $y = a^x$, jejím definičním oborem je $D(f) = \mathbb{R}$.

2. Pro $a = 1$ je $y = 1^x = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, tj. funkce je konstantní, proto tento případ u exponenciální funkce vylučujeme. Pokud by základ byl záporný, např. mějme funkci $f(x) = (-2)^x$. Když za x dosadíme $\frac{1}{2}$, dostaneme $y = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$. My ale víme, že odmocnina ze záporného čísla v $\mathbb{R}$ neexistuje. Funkce by tak nebyla definovaná na celém $\mathbb{R}$.

3. $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$

4. Graf:



$$H_g = \left(-\tfrac{31}{64}, \tfrac{-3}{2}\right\rangle$$
$$P_x = [1, 0]$$
$$P_y = \left[0, \tfrac{1}{4}\right]$$

5. Funkce h má být klesající, tj. $0 < \frac{a+1}{a^2-1} < 1$. Každou z nerovností vyšetříme zvlášť:

$$0 < \frac{a+1}{a^2-1}$$
$$0 < \frac{1}{a-1} \;;\; a \neq -1$$
$$a \in (1, \infty).$$

Druhá nerovnost:

$$\frac{a+1}{a^2-1} < 1$$
$$0 < 1 - \frac{a+1}{a^2-1}$$
$$0 < \frac{a^2-a-2}{a^2-1}$$
$$0 < \frac{(a-2)\cancel{(a+1)}}{(a-1)\cancel{(a+1)}}$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$a - 1$	-	$+$	$+$
$a - 2$	-	-	$+$
	$+$	-	$+$

Tj. $a \in \mathbb{R} \setminus \big((1,2) \cup \{-1\}\big)$. Parametr a tedy náleží průniku $\Big(\mathbb{R} \setminus \big((1,2) \cup \{-1\}\big)\Big) \cap (1, \infty) = (2, \infty)$.

Písemná práce: exponenciální funkce **(varianta B)**

JMÉNO: ______________________ TŘÍDA: ________ DATUM: __________

Body	< 9	$8-7$	$6-5$	$4-3$	$2-0$
Známka	1	2	3	4	5

1. [1 b.] Napište definici exponenciální funkce.

. . . .

. . . .

. . . .

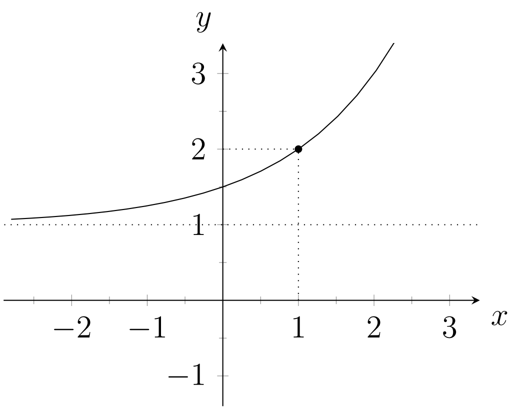
2. [1 b.] Stručně vysvětlete, co rozumíme po pojmem přirozená exponenciální funkce.

. . . .

. . . .

. . . .

3. [2 b.] Vyberte funkční předpis odpovídající grafu funkce f níže.



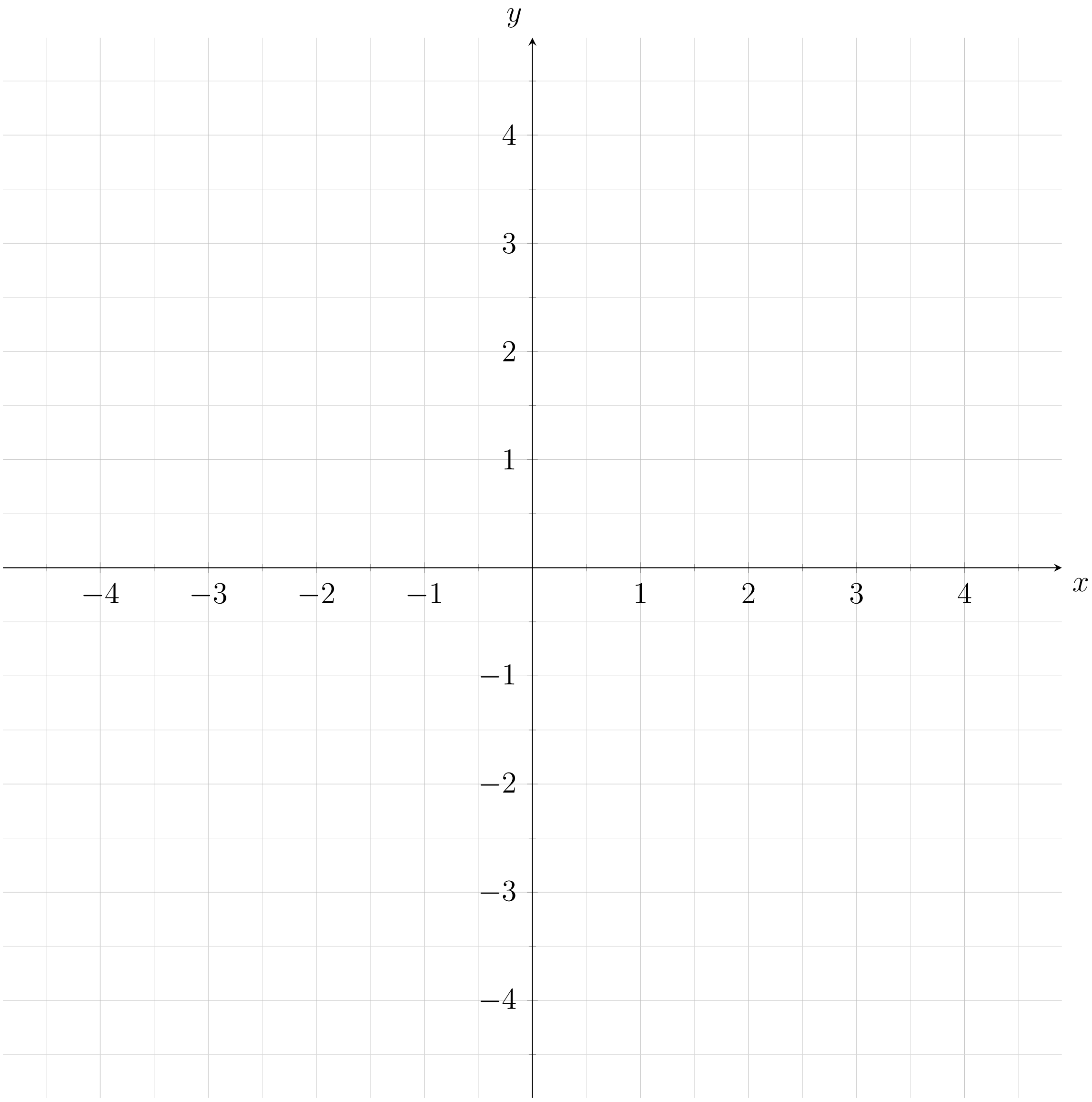
- ☐ $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 1$
- ☐ $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$
- ☐ $f : y = 2^{x-1} + 1$
- ☐ $f : y = 2^{x+1} - 1$
- ☐ Žádný z uvedených.

4. [6 b.] Mějme reálnou funkci $g : y = -\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} + 1$, kde $D_g = \left\langle -\frac{5}{2}, 3 \right)$.

(A) [4 b.] Nakreslete graf funkce g.

(B) [1 b.] Určete obor hodnot H_g.

(C) [1 b.] Určete průsečík grafu g s osou x a y.



5. [4 b. – **bonusová úloha**] Mějme reálnou funkci $h : y = \left(\frac{a+1}{a^2-1}\right)^x$. Určete, pro jaké hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je funkce h klesající. Uveďte celý postup řešení.

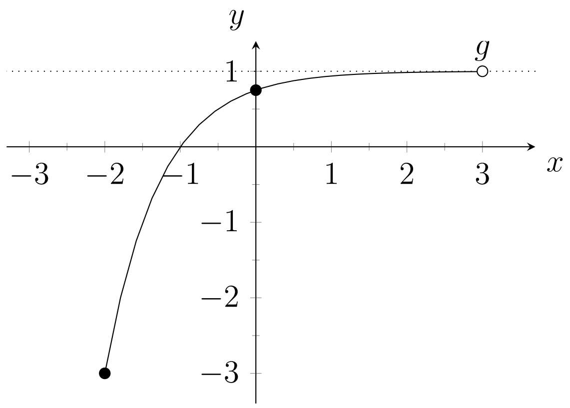
Vzorové řešení

1. Nechť $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Exponenciální funkcí i základu a se nazývá funkce f daná rovnicí $y = a^x$, jejím definičním oborem je $D(f) = \mathbb{R}$.

2. Exponenciální funkce, jejímž základem je číslo e, se nazývá přirozená exponenciální funkce

3. $f : y = 2^{x-1} + 1$

4. Graf:



$$
\begin{aligned}
H_g &= \left\langle -3, \tfrac{255}{256} \right) \\
P_x &= [-1, 0] \\
P_y &= \left[0, \tfrac{3}{4}\right]
\end{aligned}
$$

5. Funkce h má být klesající, tj. $0 < \frac{a+1}{a^2-1} < 1$. Každou z nerovností vyšetříme zvlášť:

$$
\begin{aligned}
&0 < \frac{a+1}{a^2-1} \\
&0 < \frac{1}{a-1}\ ;\ a \neq -1 \\
&a \in (1, \infty).
\end{aligned}
$$

Druhá nerovnost:

$$
\begin{aligned}
\frac{a+1}{a^2-1} &< 1 \\
0 &< 1 - \frac{a+1}{a^2-1} \\
0 &< \frac{a^2-a-2}{a^2-1} \\
0 &< \frac{(a-2)\cancel{(a+1)}}{(a-1)\cancel{(a+1)}}
\end{aligned}
$$

	$(-\infty, 1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$a-1$	-	$+$	$+$
$a-2$	-	-	$+$
	$+$	-	$+$

Tj. $a \in \mathbb{R} \setminus \big((1,2) \cup \{-1\}\big)$. Parametr a tedy náleží průniku $\Big(\mathbb{R} \setminus \big((1,2) \cup \{-1\}\big)\Big) \cap (1,\infty) = (2,\infty)$.