

# Zadání a řešení písemné práce

*Téma: exponenciální funkce*

Čas: 20 minut

Cíle testu:

- Úloha č. 1  
*Dimenze kognitivních procesů*  
Kategorie: Zapamatovat si (1)  
Dovednost: Vybavovat si (1.b)
- Úloha č. 2  
*Dimenze kognitivních procesů*  
Kategorie: Rozumět (2)  
Dovednost: Vysvětlovat (2.g)
- Úloha č. 3  
*Dimenze kognitivních procesů*  
Kategorie: Analyzovat (4)  
Dovednost: Rozlišovat (4.a)
- Úloha č. 4  
*Dimenze kognitivních procesů*  
Kategorie: Aplikovat (3)  
Dovednost: Provádět (3.a)
- Úloha č. 5 (bonus)  
*Dimenze kognitivních procesů*  
Kategorie: Aplikovat (3)  
Dovednost: Implementovat (3.b)

## Písemná práce: exponenciální funkce (**varianta A**)

JMÉNO: \_\_\_\_\_ TŘÍDA: \_\_\_\_\_ DATUM: \_\_\_\_\_

<b>Body</b>	$< 9$	$8 - 7$	$6 - 5$	$4 - 3$	$2 - 0$
<b>Známka</b>	1	2	3	4	5

1. [1 b.] Napište definici exponenciální funkce.

.....

.....

.....

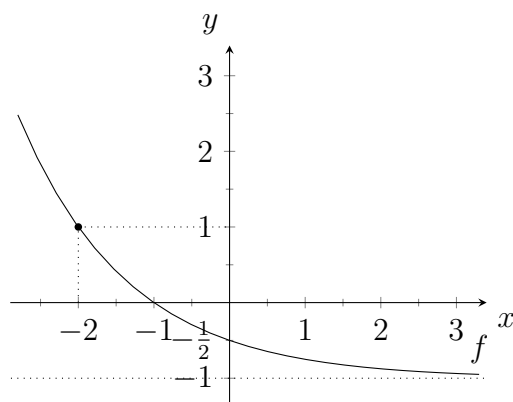
2. [1 b.] Stručně vysvětlete, proč klademe na hodnotu základu exponenciální funkce omezení.

.....

.....

.....

3. [2 b.] Vyberte funkční předpis odpovídající grafu funkce  $f$  níže.



☐  $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 1$

☐  $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$

☐  $f : y = 2^{x-1} + 1$

☐  $f : y = 2^{x+1} - 1$

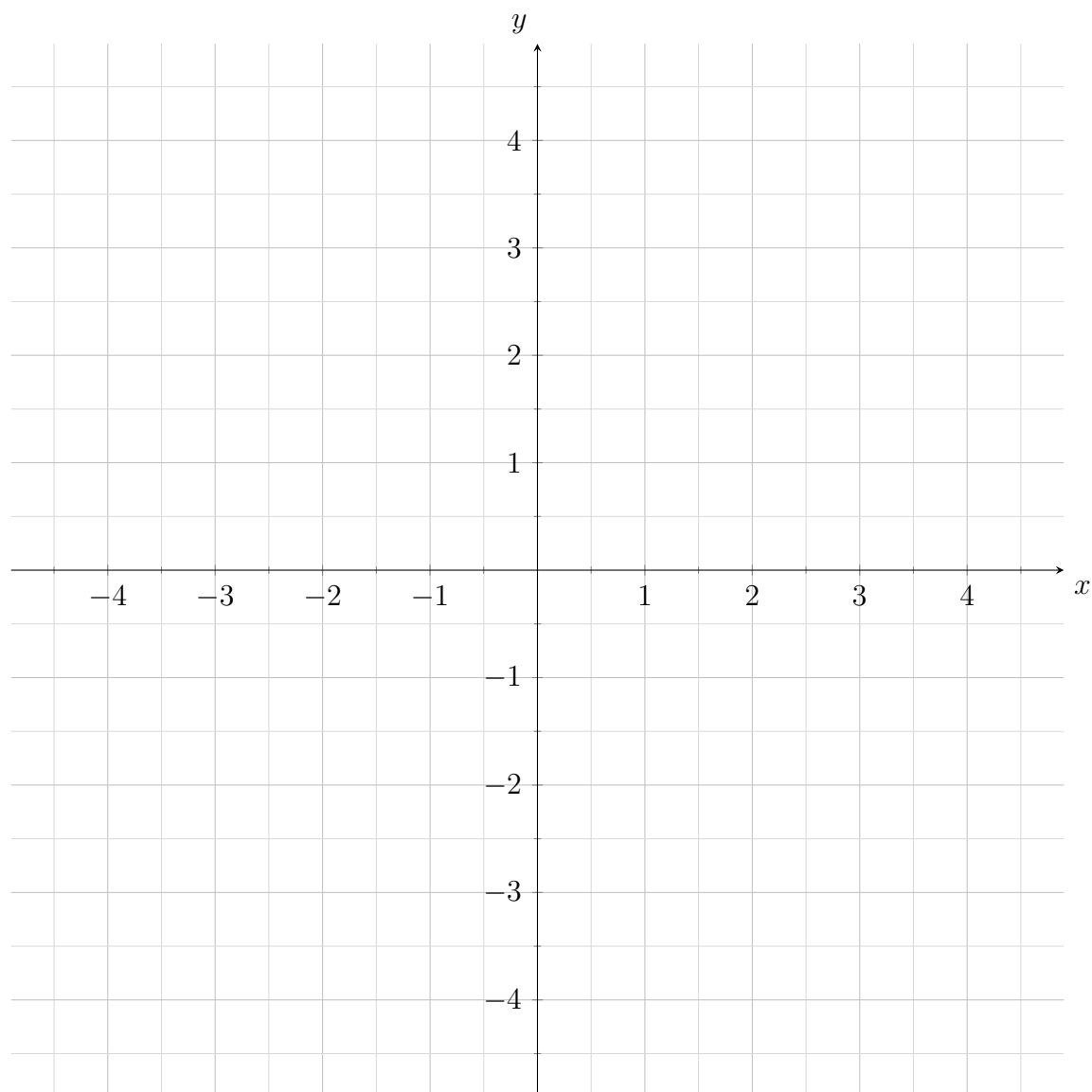
☐ Žádný z uvedených.

4. [6 b.] Mějme reálnou funkci  $g : y = -2^{x-2} + \frac{1}{2}$ , kde  $D_g = (-4, 3)$ .

(A) [4 b.] Nakreslete graf funkce  $g$ .

(B) [1 b.] Určete obor hodnot  $H_g$ .

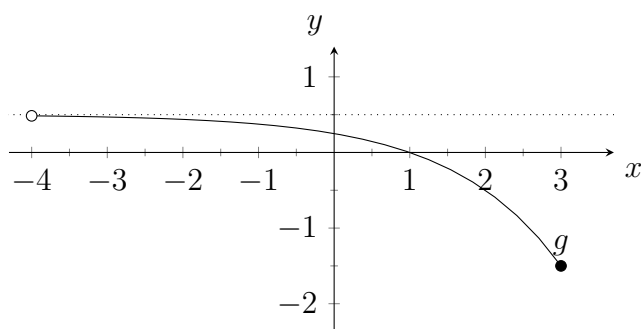
(C) [1 b.] Určete průsečík grafu  $g$  s osou  $x$  a  $y$ .



5. [4 b. – **bonusová úloha**] Mějme reálnou funkci  $h : y = \left(\frac{a+1}{a^2-1}\right)^x$ . Určete, pro jaké hodnoty parametru  $a \in \mathbb{R}$  je funkce  $h$  klesající. Uveďte celý postup řešení.

## Vzorové řešení

1. Necht'  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ . Exponenciální funkci i základu  $a$  se nazývá funkce  $f$  daná rovnicí  $y = a^x$ , jejím definičním oborem je  $D(f) = \mathbb{R}$ .
2. Pro  $a = 1$  je  $y = 1^x = 1$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$ , tj. funkce je konstantní, proto tento případ u exponenciální funkce vylučujeme. Pokud by základ byl záporný, např. mějme funkci  $f(x) = (-2)^x$ . Když za  $x$  dosadíme  $\frac{1}{2}$ , dostaneme  $y = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ . My ale víme, že odmocnina ze záporného čísla v  $\mathbb{R}$  neexistuje. Funkce by tak nebyla definovaná na celém  $\mathbb{R}$ .
3.  $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$
4. Graf:



$$H_g = \left(-\frac{31}{64}, \frac{-3}{2}\right)$$

$$P_x = [1, 0]$$

$$P_y = \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

5. Funkce  $h$  má být klesající, tj.  $0 < \frac{a+1}{a^2-1} < 1$ . Každou z nerovností vyšetříme zvlášť:

$$0 < \frac{a+1}{a^2-1}$$

$$0 < \frac{1}{a-1} ; a \neq -1$$

$$a \in (1, \infty).$$

Druhá nerovnost:

$$\frac{a+1}{a^2-1} < 1$$

$$0 < 1 - \frac{a+1}{a^2-1}$$

$$0 < \frac{a^2 - a - 2}{a^2 - 1}$$

$$0 < \frac{(a-2)(\cancel{a+1})}{(a-1)(\cancel{a+1})}$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$a - 1$	-	+	+
$a - 2$	-	-	+
	+	-	+

Tj.  $a \in \mathbb{R} \setminus ((1, 2) \cup \{-1\})$ . Parametr  $a$  tedy náleží průniku  $\left(\mathbb{R} \setminus ((1, 2) \cup \{-1\})\right) \cap (1, \infty) = (2, \infty)$ .

## Písemná práce: exponenciální funkce (varianta B)

JMÉNO: \_\_\_\_\_

TŘÍDA: \_\_\_\_\_

DATUM: \_\_\_\_\_

Body	< 9	8 – 7	6 – 5	4 – 3	2 – 0
Známka	1	2	3	4	5

1. [1 b.] Napište definici exponenciální funkce.

.....

.....

.....

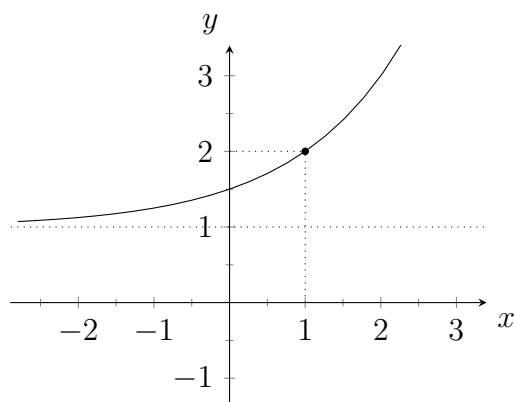
2. [1 b.] Stručně vysvětlete, co rozumíme po pojmem přirozená exponenciální funkce.

.....

.....

.....

3. [2 b.] Vyberte funkční předpis odpovídající grafu funkce  $f$  níže.



☐  $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 1$

☐  $f : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$

☐  $f : y = 2^{x-1} + 1$

☐  $f : y = 2^{x+1} - 1$

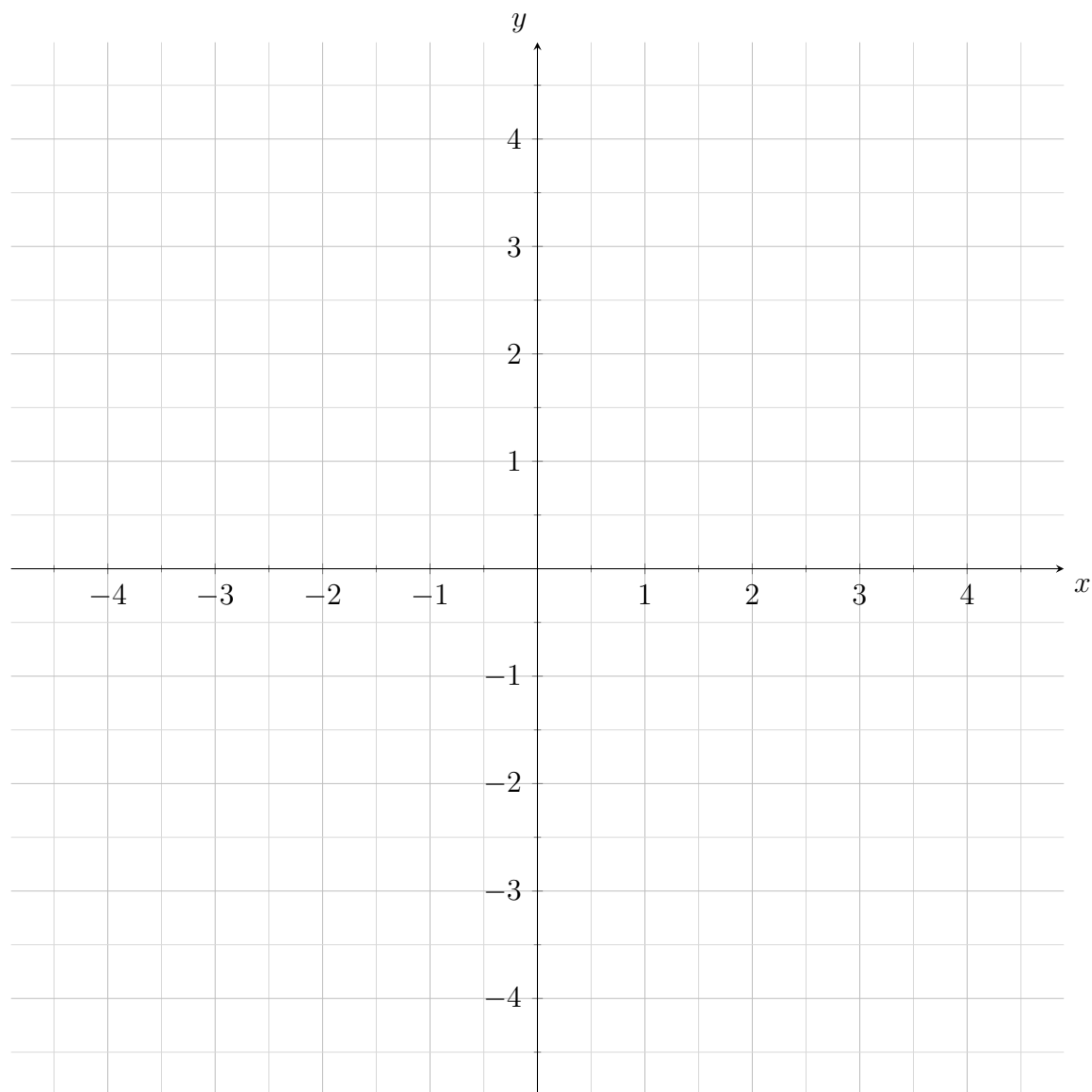
☐ Žádný z uvedených.

4. [6 b.] Mějme reálnou funkci  $g : y = -\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} + 1$ , kde  $D_g = \left\langle -\frac{5}{2}, 3 \right\rangle$ .

(A) [4 b.] Nakreslete graf funkce  $g$ .

(B) [1 b.] Určete obor hodnot  $H_g$ .

(C) [1 b.] Určete průsečík grafu  $g$  s osou  $x$  a  $y$ .

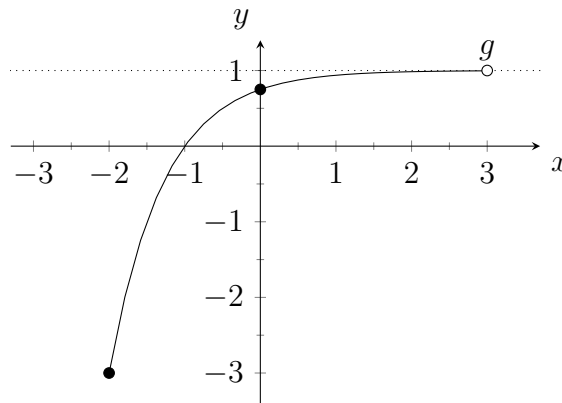




5. [4 b. – **bonusová úloha**] Mějme reálnou funkci  $h : y = \left(\frac{a+1}{a^2-1}\right)^x$ . Určete, pro jaké hodnoty parametru  $a \in \mathbb{R}$  je funkce  $h$  klesající. Uveďte celý postup řešení.

## Vzorové řešení

1. Nechť  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ . Exponenciální funkci i základu  $a$  se nazývá funkce  $f$  daná rovnicí  $y = a^x$ , jejím definičním oborem je  $D(f) = \mathbb{R}$ .
2. Exponenciální funkce, jejímž základem je číslo  $e$ , se nazývá přirozená exponenciální funkce
3.  $f : y = 2^{x-1} + 1$
4. Graf:



$$H_g = \left\langle -3, \frac{255}{256} \right\rangle$$

$$P_x = [-1, 0]$$

$$P_y = \left[0, \frac{3}{4}\right]$$

5. Funkce  $h$  má být klesající, tj.  $0 < \frac{a+1}{a^2-1} < 1$ . Každou z nerovností vyšetříme zvlášť:

$$0 < \frac{a+1}{a^2-1}$$

$$0 < \frac{1}{a-1} ; a \neq -1$$

$$a \in (1, \infty).$$

Druhá nerovnost:

$$\frac{a+1}{a^2-1} < 1$$

$$0 < 1 - \frac{a+1}{a^2-1}$$

$$0 < \frac{a^2 - a - 2}{a^2 - 1}$$

$$0 < \frac{(a-2)\cancel{(a+1)}}{(a-1)\cancel{(a+1)}}$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$a - 1$	-	+	+
$a - 2$	-	-	+
	+	-	+

Tj.  $a \in \mathbb{R} \setminus ((1, 2) \cup \{-1\})$ . Parametr  $a$  tedy náleží průniku  $\left(\mathbb{R} \setminus ((1, 2) \cup \{-1\})\right) \cap (1, \infty) = (2, \infty)$ .