

# Didaktika matematiky

Zadání a řešení písemné práce – výroky a množiny

Kateřina Novotná, Adam Papula

27. října 2023

**Čas:** 15-20 minut

**Cílový ročník:** 1. ročník SŠ

## Cíle testu:

- Žák užívá správně logické spojky a kvantifikátory.
- Žák správně neguje (kvantifikované) výroky.
- Žák čte a provádí zápisy v matematické symbolice a aplikuje základní množinové operace.

## Bloomova taxonomie:

- Úloha č. 1
  - Znalost faktů a procedurální znalost (I, III)
  - Zapamatování si, rozpoznávat (1a)
- Úloha č. 2
  - Procedurální znalost (III)
  - Aplikovat, provádět (3a)
- Úloha č. 3
  - Procedurální znalost (III)
  - Aplikovat, provádět (3a)
- Úloha č. 4
  - Procedurální znalost (III)
  - Rozumět, interpretovat a aplikovat, provádět (2a + 3a)
- Úloha č. 5
  - Procedurální znalost (III)
  - Aplikovat, provádět (3a)
- Úloha č. 6
  - Procedurální znalost (III)
  - Rozumět, klasifikovat a aplikovat, implementovat (2c + 3b)
- Úloha č. 7
  - Procedurální znalost (III)
  - Aplikovat, provádět (3a)

## Písemná práce: výroky a množiny (varianta A)

JMÉNO: \_\_\_\_\_

TŘÍDA: \_\_\_\_\_

DATUM: \_\_\_\_\_

Body	15	14 – 12	11 – 9	8 – 6	5 – 0
Známka	1	2	3	4	5

1. Určete, zda se jedná o výroky:

- (a) ( $\frac{1}{2}$  b.) ANO    NE    Číslo 12 je prvočíslo.  
(b) ( $\frac{1}{2}$  b.) ANO    NE    Přines mi prosím kapesník.  
(c) ( $\frac{1}{2}$  b.) ANO    NE     $\forall x \in \mathbb{Z} : x + 3 > 0$

2. Určete negace kvantifikovaných výroků:

- (a) (1 b.) Alespoň jeden cestující nevystoupil.

.....

- (b) (1 b.) Právě jedna moje učebnice je těžká.

.....

3. Negujte následující výroky:

- (a) (2 b.) Každé přirozené číslo, které je dělitelné dvaceti, je dělitelné čtyřmi.

.....

.....

- (b) (2 b.) Do kina půjdu s Terkou nebo s Eliškou.

.....

4. (1 ½ b.) Z následujících dvou *symbolicky zapsaných kvantifikovaných výroků* si vyberte **alespoň jeden** (druhý je bonusový), který vyjádříte slovy. Dále rozhodněte o jeho pravdivosti:

(a)  $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$

(b)  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y$

.....  
.....

5. (1 b.) Vypište všechny prvky následující množiny:

$$M = \{\xi \in \mathbb{Z} : -27 < \xi^3 \leq 8\}$$

6. (3 b.) Mějme zadány intervaly  $A = \langle 0, 18 \rangle$ ,  $B = (13, 28)$  a  $C = \langle 15, 17 \rangle$ . Určete  $((A \cap B) \setminus C)'$

7. (2 b.) Ve třídě je 29 žáků, 19 z nich umí lyžovat, 12 jezdí na snowboardu, 5 jich nelyžuje a ani nejedí na snowboardu. Znázorněte pomocí Vennova diagramu a určete, kolik žáků umí lyžovat i jezdit na snowboardu.

## Písemná práce: výroky a množiny (varianta B)

JMÉNO: \_\_\_\_\_

TŘÍDA: \_\_\_\_\_

DATUM: \_\_\_\_\_

Body	15	14 – 12	11 – 9	8 – 6	5 – 0
Známka	1	2	3	4	5

1. Určete, zda se jedná o výroky:

- (a) ( $\frac{1}{2}$  b.) ANO    NE     $\exists! x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{N} : \frac{y}{x} = 0$
- (b) ( $\frac{1}{2}$  b.) ANO    NE    Všechna prvočísla jsou lichá.
- (c) ( $\frac{1}{2}$  b.) ANO    NE    Berlín patří mezi racionální čísla.

2. Určete negace kvantifikovaných výroků:

- (a) (1 b.) Všichni moji kamarádi mají hnědé oči

.....

- (b) (1 b.) Alespoň 4 dny v týdnu bude pršet.

.....

3. Negujte následující výroky:

- (a) (2 b.) Existuje alespoň jeden trojúhelník, ve kterém se všechny jeho výšky neprotínají v jediném bodě.

.....

.....

- (b) (2 b.) Sní polévku právě tehdy, když v ní nebude zelenina.

.....

4. (1 ½ b.) Z následujících dvou *symbolicky zapsaných kvantifikovaných výroků* si vyberte **alespoň jeden** (druhý je bonusový), který vyjádříte slovy. Dále rozhodněte o jeho pravdivosti:

(a)  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$

(b)  $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

.....  
.....

5. (1 b.) Vypište všechny prvky následující množiny:

$$S = \{\chi \in \mathbb{N} : -18 < \chi^3 \leq 64 | \chi \text{ je sudé}\}$$

6. (3 b.) Mějme zadány intervaly  $A = (-5, 12)$ ,  $B = \langle 4, 11 \rangle$  a  $C = \langle 3, 5 \rangle$ .  
Určete  $((A \setminus B) \cup C)'$

7. (2 b.) Ve třídě hraje 21 žáků fotbal nebo košíkovou, 4 žáci z této třídy nehrají ani fotbal, ani košíkovou, 12 žáků hraje košíkovou, 14 žáků hraje fotbal. Znázorněte pomocí Vennova diagramu a určete, kolik žáků hraje pouze fotbal.

**Písemná práce: výroky a množiny (varianta A) – řešení**

1. Určete, zda se jedná o výroky:

- (a) ( $\frac{1}{2}$  b.) ☐ ANO ☒ NE Číslo 12 je prvočíslo.  
(b) ( $\frac{1}{2}$  b.) ANO ☒ NE Přines mi prosím kapesník.  
(c) ( $\frac{1}{2}$  b.) ☐ ANO ☒ NE  $\forall x \in \mathbb{Z} : x + 3 > 0$

2. Určete negace kvantifikovaných výroků:

- (a) (1 b.) Alespoň jeden cestující nevystoupil.

**Řešení:** Všichni cestující vystoupili.

- (b) (1 b.) Právě jedna moje učebnice je těžká.

**Řešení:** Žádná moje učebnice nebo alespoň dvě moje učebnice jsou těžké.

3. Negujte následující výroky:

- (a) (2 b.) Každé přirozené číslo, které je dělitelné dvaceti, je dělitelné čtyřmi.

**Řešení:** Existuje alespoň jedno přirozené číslo, které je dělitelné dvaceti a není dělitelné čtyřmi.

- (b) (2 b.) Do kina půjdu s Terkou nebo s Eliškou.

**Řešení:** Do kina nepůjdu s Terkou a nepůjdu ani s Eliškou.

4. (1 ½ b.) Z následujících dvou *symbolicky zapsaných kvantifikovaných výroků* si vyberte **alespoň jeden** (druhý je bonusový), který vyjádříte slovy. Dále rozhodněte o jeho pravdivosti:

(a)  $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$

(b)  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y$

**Řešení:**

- (a) Výrok je pravdivý.

Druhá odmocnina z druhé mocniny libovolného reálného čísla je rovna jeho absolutní hodnotě.

- (b) Výrok je pravdivý.

Existuje takové reálné číslo  $x$ , že pro všechna reálná čísla  $y$  platí  $x \cdot y = y$

5. (1 b.) Vypište všechny prvky následující množiny:

$$M = \{\xi \in \mathbb{Z} : -27 < \xi^3 \leq 8\}$$

**Řešení:**

$$M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

6. (3 b.) Mějme zadány intervaly  $A = \langle 0, 18 \rangle$ ,  $B = (13, 28)$  a  $C = \langle 15, 17 \rangle$ . Určete  $((A \cap B) \setminus C)'$

**Řešení:**

$$A \cap B = (13, 18)$$

$$(A \cap B) \setminus C = (13, 15) \cup (17, 18)$$

$$((A \cap B) \setminus C)' = (-\infty, 13) \cup \langle 15, 17 \rangle \cup (18, \infty)$$

7. (2 b.) Ve třídě je 29 žáků, 19 z nich umí lyžovat, 12 jezdí na snowboardu, 5 jich nelyžuje a ani nejedí na snowboardu. Znázorněte pomocí Vennova diagramu a určete, kolik žáků umí lyžovat i jezdit na snowboardu.

**Řešení:** Označme si množinu všech žáků třídy jako  $T$ ,  $|T| = 29$ . Žáky, kteří umí lyžovat označíme  $L$ ,  $|L| = 19$ . Snowboardisty označíme  $S$ ,  $|S| = 12$ . Žáků, kteří neumí ani lyžovat ani na snowboardu je celkem 5. Tedy

$$|L \cup S| = 29 - 5 = 24$$

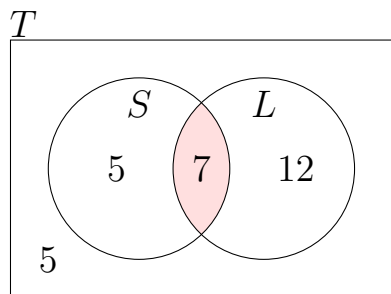
žáků umí buď lyžovat, nebo na snowboardu nebo obojí. Nyní, pokud sečteme žáky, co umí lyžovat a na snowboardu dostaneme

$$19 + 12 = 31,$$

což odpovídá případu, kdy neexistuje ani jeden žák co umí na lyžích a snowboardu zároveň. Jelikož ale platí  $31 > 24$ , dostaneme informaci, že celkem

$$31 - 24 = \underline{\underline{7}}$$

žáků umí na lyžích a snowboardu zároveň.





**Písemná práce: výroky a množiny (varianta B) – řešení**

1. Určete, zda se jedná o výroky:

- (a) ( $\frac{1}{2}$  b.) ☐ ANO ☒ NE  $\exists! x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{N} : \frac{y}{x} = 0$
- (b) ( $\frac{1}{2}$  b.) ☐ ANO ☒ NE Všechna prvočísla jsou lichá.
- (c) ( $\frac{1}{2}$  b.) ANO ☐ ANO ☒ NE Berlín patří mezi racionální čísla.

2. Určete negace kvantifikovaných výroků:

- (a) (1 b.) Všichni moji kamarádi mají hnědé oči

**Řešení:** Alespoň jeden můj kamarád nemá hnědé oči.

- (b) (1 b.) Alespoň 4 dny v týdnu bude pršet.

**Řešení:** Nejvýše 3 dny v týdnu bude pršet.

3. Negujte následující výroky:

- (a) (2 b.) Existuje alespoň jeden trojúhelník, ve kterém se všechny jeho výšky neprotínají v jediném bodě.

**Řešení:** V každém trojúhelníku se všechny jeho výšky protínají v jediném bodě.

- (b) (2 b.) Sní polévku právě tehdy, když v ní nebude zelenina.

**Řešení:** Sní polévku a bude v ní zelenina nebo v polévce zelenina nebude a polévku nesní.

4. (1 ½ b.) Z následujících dvou *symbolicky zapsaných kvantifikovaných výroků* si vyberte **alespoň jeden** (druhý je bonusový), který vyjádříte slovy. Dále rozhodněte o jeho pravdivosti:

(a)  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$

(b)  $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

**Řešení:**

(a) Výrok není pravdivý.

Druhá mocnina každého reálného čísla je větší než nula.

(b) Výrok není pravdivý.

Pro každá dvě reálná čísla platí: čísla se sobě rovnají právě tehdy, když se rovnají jejich druhé mocniny.

5. (1 b.) Vypište všechny prvky následující množiny:

$$S = \{\chi \in \mathbb{N} : -18 < \chi^3 \leq 64 | \chi \text{ je sudé}\}$$

**Řešení:**

$$S = \{2, 4\}$$

6. (3 b.) Mějme zadány intervaly  $A = (-5, 12)$ ,  $B = \langle 4, 11 \rangle$  a  $C = \langle 3, 5 \rangle$ .  
Určete  $((A \setminus B) \cup C)'$

**Řešení:**

$$A \setminus B = (-5, 4) \cup \langle 11, 12 \rangle$$

$$(A \setminus B) \cup C = (-5, 5) \cup \langle 11, 12 \rangle$$

$$((A \setminus B) \cup C)' = (-\infty, -5) \cup (-5, 11) \cup \langle 12, \infty \rangle$$

7. (2 b.) Ve třídě hraje 21 žáků fotbal nebo košíkovou, 4 žáci z této třídy nehrají ani fotbal, ani košíkovou, 12 žáků hraje košíkovou, 14 žáků hraje fotbal. Znárodněte pomocí Vennova diagramu a určete, kolik žáků hraje pouze fotbal.

**Řešení:** Označme si množinu všech žáků třídy jako  $T$ . Žáky, kteří hrají fotbal označíme  $F$  a žáky hrající košíkovou  $K$ . Víme, že

$$|F \cap K| = 21.$$

Dále ze zadání víme, že

$$|(F \cap K)'| = 4.$$

Pro množinu  $K$  platí  $|K| = 12$  a pro množinu  $F$  platí  $|F| = 14$ . Máme tedy

$$12 + 14 = 26,$$

přičemž sportuje pouze 21 žáků, tedy

$$26 - 21 = 5$$

žáků hraje obě hry. Nyní nám stačí dopočítat počet žáků hrající pouze fotbal,

$$14 - 5 = \underline{\underline{9}}$$

