

ЗАДАЧИ ОТ ЛИНЕЙНА ЗАВИСИМОСТ И ЛИНЕЙНА НЕЗАВИСИМОСТ НА ВЕКТОРИ

Необходим материал: векторни бази в линейно пространство, координатни условия за колинеарност и компланарност на вектори

1 зад. Даден е паралелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точката M е средата на ръба BC . Права g минава през M , пресича AC_1 в точката N и пресича DD_1 в точката P . Да се намерят отношенията $MN:NP$, $AN:NC_1$, $DP:DD_1$.

Упътване: Изберете векторна база в пространството, използвайте $\overrightarrow{AN} = x \cdot \overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{DP} = y \cdot \overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{MN} = z \cdot \overrightarrow{NP}$.

Отг: $MN:NP = 1:2$, $AN:NC_1 = 2:1$, $DP:DD_1 = 2:1$

2 зад. Даден е паралелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Да се определи положението на точките M и N , за които $M \in AC$, $N \in DC_1$ и $MN \parallel BD_1$.

Упътване: Изберете векторна база в пространството, използвайте $\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN} = y \cdot \overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{MN} = z \cdot \overrightarrow{BD_1}$.

Отг: $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{DC_1}$

3 зад. Даден е куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Правата AC_1 пробоща равнината (BDA_1) в точката M . Да се определи отношението $AM:MC_1$.

Упътване: Изберете векторна база в пространството, използвайте

$$\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AC_1} \text{ и } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA_1} + y \cdot \overrightarrow{A_1B} + z \cdot \overrightarrow{A_1D}.$$

Отг: $AM:MC_1 = 1:2$

4 зад. Даден е тетраедър $ABCD$. Точките M и N са средите съответно на AB и CD . Точката P е от ръба AD , такава че $AP:AD = 2:3$. Точката Q е от ръба BC , такава че отсечките MN и PQ се пресичат. Да се определи положението на Q върху ръба BC .

Упътване: Изберете векторна база в пространството, използвайте $\overrightarrow{BQ} = x \cdot \overrightarrow{BD}$. Определете координатите на векторите \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{MN} и \overrightarrow{PN} спрямо базата. Използвайте условие за компланарност на тези вектори.

Отг: $BQ:BC = 2:3$

5 зад. Даден е тетраедър $ABCD$. Точките M и N са средите съответно на AB и CD . Точката P е средата на ръба BC . Равнината β минава през точката P и е успоредна на правите DM и AN . Да се намери в какво отношение равнината β разделя ръба AD .

Упътване: Изберете векторна база в пространството. Нека $AD \cap \beta = Q$. Определете координатите на векторите \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{AN} и \overrightarrow{DM} спрямо базата. Използвайте условие за компланарност на тези вектори.

Отг: Q е средата на ръба AD

6 зад. Даден е паралелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точките M и N са средите съответно на AD и CC_1 . Равнината β минава през MN и е успоредна на DB_1 . Да се намери в какво отношение равнината β разделя ръба BB_1 .

Упътване: Изберете векторна база в пространството. Нека точката $Q = \beta \cap BB_1$. Определете координатите на векторите \overrightarrow{MQ} , \overrightarrow{MN} и $\overrightarrow{DB_1}$ спрямо базата. Използвайте условие за компланарност на тези вектори.

Отг: $BQ:QB_1 = 5:1$