Задача 1 *Да се построи минимален тотален краен детерминиран автомат $\mathcal{A}$ с език $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{a, b, c\}^* \circ \{ab, ba\} \circ \{a, b, c\}^*$.*

Обосновете, че вашият автомат има желаните свойства като:

- *(i) се позовете на подходящи места на изучавани алгоритми/конструкции. (не е необходимо да ги описвате формално)*
- **или** *(ii) дадете пълно и изчерпателно доказателство.*

Задача 2 *Да се построи минимален тотален краен детерминиран автомат $\mathcal{A}$ с език $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{01, 0\} \circ \{11\}^* \circ \{0\}$.*

Обосновете, че вашият автомат има желаните свойства като:

- *(i) се позовете на подходящи места на изучавани алгоритми/конструкции. (не е необходимо да ги описвате формално)*
- **или** *(ii) дадете пълно и изчерпателно доказателство.*

Задача 3 *Да се построи краен автомат с азбука $\Sigma = \{1, 2, 3\}$, разпознаващ езика $L = \Sigma^* \setminus (\{1, 2\}\Sigma^* \cap \Sigma^*\{3\}) \cup \{123\}^*$ като:*

- *се използват изучавани конструкции,*
- *или се докаже, че построеният автомат разпознава точно езика L.*

Задача 4 *Да се построи минимален тотален краен детерминиран автомат с азбука $\Sigma = \{a, b\}$ и език $L = \Sigma^*\{a^2b\} \cup \{aba\}\Sigma^*$ като:*

- *се използват изучавани конструкции,*
- *или се докаже, че построеният автомат има желаните свойства.*

Задача 5 *Да се докаже, че езикът $L = \{ \ w0^nw^R \mid w \in \{0, 1\}^*, \ |w| > n \ \}$ не е регулярен.*

Задача 6 *За дума $\alpha \in \{a, b\}^*$ с $A(\alpha)$ бележим броя на буквите a в α. Да се докаже, че езикът $L = \{ \ xy \in \{a, b\}^* \mid |x| > |y|, \ A(x) = A(y) \ \}$ не е регулярен.*

Задача 7 *Да се построи минимален краен тотален детерминиран автомат за езика* $L = \{\ \alpha \in \{0,1\}^* \mid \alpha$ *съдържа поне две срещания на* 010 *като поддума* $\}$.

Задача 8 *Да се построи минимален краен тотален детерминиран автомат за езика* $L = \{\ \alpha \in \{a,b,c\}^* \mid \alpha$ *съдържа всяка от буквите* a, b, c *поне веднъж и* $|\alpha| = 0(mod3)\ \}$.

Задача 9 *За дума* $\alpha \in \{0,1\}^+$ *с* $\overline{\alpha}$ *означаваме числото в двоична бройна система, чийто запис е* α.

$$L(p,r) = \{\alpha \in \{0,1\}^+ \mid \overline{\alpha} \equiv r(\mod p)\}.$$

1. *Да се докаже, че* $L(p,r)$ *е регулярен за всяко* p.
2. *Нека* $L'(p,r) = \{\alpha \in L(p,r) \mid \alpha$ *не съдържа водещи нули*$\}$. *Регулярен ли е* $L'(p,r)$*?*
3. *Регулярен ли е езикът, който е съставен точно от думите* α, *за които* $\overline{\alpha}$ *се дели на* p, *но не се дели на* p^2 *за дадено просто число* p*?*

Задача 10 *Нека* Σ *е крайна непразна азбука. Докажете, че за всяка дума* $w \in \Sigma^*$ *минималният автомат с език* $\Sigma^* \cdot \{w\}$ *има поне* $|w| + 1$ *състояния.*

Задача 11 *Нека* Σ *е крайна непразна азбука. Докажете, че за всяка дума* $w \in \Sigma^*$ *минималният автомат с език* $\Sigma^* \cdot \{w\}$ *има точно* $|w| + 1$ *състояния.*

Задача 12 *Казваме, че език* $L \subseteq \{a,b,c\}^*$ *е* интересен, *ако има естествено число* $n \in \mathbb{N}$ *и крайни автомати* $P_1, P_2, \dots, P_n$ *и* $S_1, S_2, \dots, S_n$ *с азбука* $\{a,b,c\}$ *със следните три свойства:*

- $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{L}(P_i) = \{u \in \{a,b,c\}^* \mid u$ *е префикс на дума от* $L\}$
- $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{L}(S_i) = \{u \in \{a,b,c\}^* \mid u$ *е суфикс на дума от* $L\}$
- $L = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathcal{L}(P_i) \circ \mathcal{L}(S_i))$.

Вярно ли е, че:

1. *всеки интересен език е регулярен?*

2. *всеки регулярен език над $\{a, b, c\}$ е интересен?*

Обосновете отговорите си!

Задача 13 *Нека $w \in \{0,1,2\}^*$ е дума с дължина n, L е език. Казваме, че L* покрива *срещането на дума $\alpha = w[i..j]$ на позиция $i \leq n$ в w ако думите $w[i+k..n]$ за $k = 0, 1, \ldots, j-i$ започват с дума от L.*

Нека L_1 и L_2 са езици над $\{0,1,2\}$, L' и L'' са езиците:

$$\begin{aligned} L' &= \{w \in \{0,1,2\}^* \mid \text{ има префикс на } w, \text{ който е от } L_1, \text{но } \textbf{не} \text{ се покрива от } L_2\} \\ L'' &= \{w \in \{0,1,2\}^* \mid \text{ всяко срещане на дума от } L_1 \text{ в } w \text{ е покрито от } L_2\}. \end{aligned}$$

Вярно ли е, че винаги когато L_1 и L_2 са регулярни:

1. *L' е регулярен?*

2. *L'' е регулярен?*

Обосновете отговорите си!

Задача 14 *Нека $\Sigma = \{0,1\}$ е азбука. Нека:*

$$\begin{aligned} L^{\leq} &= \{w\alpha w^{rev} \mid \alpha, w \in \Sigma^* \text{ и } |w| \leq |\alpha|\} \\ L^{\geq} &= \{w\alpha w^{rev} \mid \alpha, w \in \Sigma^* \text{ и } |w| \geq |\alpha|\} \end{aligned}$$

Вярно ли е, че:

1. *$L^{\leq}$ е регулярен?*

2. *$L^{\geq}$ е регулярен?*

Обосновете отговорите си!

Задача 15 *За естествени числа $d, n \in \mathbb{N}$ с $A_{d,n} \subseteq \{0,1\}^*$ означаваме езика:*

$$A_{d,n} = \{0^d 1 0^{2d} 1 \ldots 0^{kd} 1 \mid k \leq n\}$$

Нека $A_d = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{d,n}$. Вярно ли е, че:

1. *$A_{d,n}$ е регулярен за всеки избор на $d, n \in \mathbb{N}$?*

2. A_d *е регулярен за всеки избор на* $d \in \mathbb{N}$*?*

Обосновете отговорите си!

Задача 16 *Нека* $Var = \{x, y, z\}$ *е множество от променливи,* $\Sigma = Var \cup \{bind_v \mid v \in Var\} \cup \{unbind_v \mid v \in Var\}$. *Една променлива* $v \in Var$, *наричаме свързана при срещането ѝ на позиция* i *във* $f \in \Sigma^*$, *ако на някоя позиция* $j < i$ *се среща* $bind_v$ *така че на никоя позиция* k, $j < k < i$ *не се среща* $unbind_v$.

Ако $v_1, v_2 \in Var$, $f \in \Sigma^*$, *то субституцията на* v_1 *с* v_2 *във* f *бележим с* $f\langle v_1 \mapsto v_2 \rangle$ *и наричаме думата, получена от* f *чрез непосредствената замяна на всяко несвързано срещане на* v_1 *във* f *с* v_2. $f\langle v_1 \mapsto v_2 \rangle$ *наричаме коректна, ако не променя позициите на които* v_2 *се среща като свързана.*

Ако $w, u, v \in \Sigma^*$, $w[2k] = u[k]$, $w[2k+1] = v[k]$ *за* k *от* 0 *до* $|u|$, $|w| = 2|u| = 2|v|$, *то* $w = intersperse(u, v)$.

$$L = \{intersperse(f, f\langle v_1 \mapsto v_2 \rangle) \mid f \in \Sigma^*, v_1, v_2 \in Var, \text{„}f\langle v_1 \mapsto v_2 \rangle \text{ е коректна“}\}$$

L регулярен език ли е и защо?

Задача 17 *За дума* $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n \in \{0,1\}^*$ *с* $E(\alpha)$ *означаваме редицата от позиции* $i_1 < i_2 < \dots < i_m$, *за които* $a_{i_j} = 1$. *Вярно ли е, че езикът:*

$$L = \{\alpha \in \{0,1\}^* \mid E(\alpha) \text{ е аритметична прогресия}\}$$

е регулярен? Защо?

Задача 18 *За дума* $w = a_1 a_2 \dots a_n$ *с* $even(w)$ *означаваме думата:*

$$even(w) = a_2 a_4 \dots a_{2[\frac{n}{2}]}.$$

Нека L_1 *и* L_2 *са произволни регулярни езици над азбука* Σ *с поне два елемента. Винаги ли е вярно, че:*

1. *езикът* $\{even(w) \mid w \in L_1\}$ *е регулярен? Защо?*

2. *езикът* $\{w \mid even(w) \in L_2\}$ *е регулярен? Защо?*

3. *езикът от всички думи* $\alpha \in \Sigma^*$, *в които всяко срещане на дума* $v \in L_1$ *в* α *не е от вида* $v = even(w)$ *за никоя дума* $w \in L_2$*? Защо?*

Задача 19 *За думи $w = w_1 \dots w_n$, α и β казваме, че срещанията на $\alpha = w_{i+1} \dots w_j$ и $\beta = w_{k+1} \dots w_l$ се застъпват в w ако $i < k < j < l$ или $k < i < l < j$.*

Нека L_1 и L_2 са регулярни езици над азбука Σ с поне два елемента. Винаги ли е вярно, че е регулярен:

1. *езикът от точно онези думи w, които се записват като $w = \alpha\beta\gamma$ за някои непразни думи α, β, γ със свойството, че $\alpha\beta \in L_1$ и $\beta\gamma \in L_2$? Защо?*

2. *езикът от точно онези думи w, за които всяко срещане на дума от L_1 в w не се застъпва с никое срещане на дума от L_2 в w? Защо?*

Задача 20 *Нека Σ е азбука с поне два елемента. За език $L \subseteq \Sigma^*$ с $Max(L)$ и $Min(L)$ бележим езиците:*

$$\begin{aligned} Max(L) &= \{w \in L \,|\, \forall u \in \Sigma^+(wu \notin L)\} \\ Min(L) &= \{w \in L \,|\, \forall u \in L(w \notin u\Sigma^+)\}. \end{aligned}$$

Вярно ли е, че за всеки регулярен език L:

1. *$Min(L)$ е регулярен? Защо?*

2. *$Max(L)$ е регулярен? Защо?*

Задача 21 *Нека:*

$$\begin{aligned} L_1 &= \{uv \,|\, u, v \in \{0,1\}^*(|u| \geq |v|)\} \\ L_2 &= \{uv \,|\, u, v \in 1\{0,1\}^*(|u| \geq |v|)\}. \end{aligned}$$

Вярно ли е, че:

1. *L_1 е регулярен? Защо?*

2. *L_2 е регулярен? Защо?*

Задача 22 *Нека $\Sigma = \{0,1\}$. За език $L \subseteq \Sigma^*$ дефинираме:*

$$\begin{aligned} PS(L) &= \{w \in \Sigma^* \,|\, w \quad \text{е префикс на някоя дума от } L \\ &\qquad\qquad \text{и суфикс на някоя дума от } L\} \\ PS_{unique}(L) &= \{w \in \Sigma^* \,|\, w \quad \text{е префикс и суфикс в една и съща дума от } L\} \\ PS_{distinct}(L) &= \{w \in \Sigma^* \,|\, w \quad \text{е префикс в една и суфикс в друга дума от } L\} \end{aligned}$$

Вярно ли е, че за всеки регулярен език L:

1. *$PS(L)$ е регулярен? Защо?*

2. *$PS_{unique}(L)$ е регулярен? Защо?*

3. *$PS_{distinct}(L)$ е регулярен? Защо?*

Задача 23 *Нека Σ е азбука с поне два елемента. За езици $L_1 \subseteq \{1\}^*$ и $L_2 \subseteq \Sigma^*$ казваме, че $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ е (L_1, L_2)-хубава, ако за всяко $i \leq n$, за което $1^i \in L_1$ е изпълнено, че някой от инфиксите на w, който започва на позиция i е в L_2.*

1. *Вярно ли е, че за всеки регулярен език $L_1 \subseteq \{1\}^*$ езикът:*

$$\{w \in \Sigma^* \mid 1^{|w|} \in L_1\}$$

   е регулярен? Защо?

2. *Вярно ли е, че за всеки два регулярни езика $L_1 \subseteq \{1\}^*$ и $L_2 \subseteq \Sigma^*$ езикът от точно (L_1, L_2)-хубавите думи е регулярен? Защо?*

Задача 24 *Нека $\Sigma = \{0, 1, v, \langle, \rangle, ;, \{, \}\}$.* Връх *наричаме всяка дума над Σ, която започва с v и е следвана от двоичен запис на число.* Ребро *е дума от езика от вида $\langle \alpha; \beta \rangle$, където α и β са върхове. Вярно ли е, че:*

1. *множеството от върхове е регулярен език над Σ?*

2. *множеството от ребра е регулярен език над Σ?*

Граф *е всяка дума над Σ от вида:*

$$G = \{u_1; u_2 \dots ; u_n\}\{e_1; e_2; \dots ; e_m\},$$

където u_i е връх, а e_j е ребро за всяко $i \leq n$, $j \leq m$.

1. *Вярно ли е, че множеството от графи е регулярен език над Σ?*

2. Истински граф *е граф $G = \{u_1; u_2 \dots ; u_n\}\{e_1; e_2; \dots ; e_m\}$, за който всяко ребро $e_j = \langle u_{i_1}; u_{i_2} \rangle$ за някои $1 \leq i_1, i_2 \leq n$. Вярно ли е, че множеството от истински графи е регулярен език над Σ?*