Афинни координатни системи

Координати спрямо базис в линейно пространство (припомняне от алгебрата)

Нека V е n-мерно реално линейно пространство и $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на V.

Определение 1 Нека $v \in V$. Тогава v се представя по единствен начин като линейна комбинация на базисните вектори: $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Коефициентите $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ в тая линейна комбинация се наричат *координати на v спрямо базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$*. Пишем $v(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Векторът $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ се нарича *координатен вектор на v спрямо e.*

За $i = 1, \dots, n$ функцията

$$x_i : V \to \mathbb{R} : \quad v \mapsto i\text{-тата координата на } v \ (= \lambda_i)$$

се нарича *i-та координатна функция, съответна на базиса e.* (И следователно имаме $v = \sum_{i=1}^{n} x_i(v) e_i$.)

Изображението

$$x : V \to \mathbb{R}^n : \quad v \mapsto \text{координатния вектор на } v \ (= \lambda), \qquad \text{тоест} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

се нарича *координатно изображение, съответно на базиса e* или (поради Твърдение 1 по-долу) *координатен изоморфизъм, съответен на базиса e.*

Забележка 1 Разглеждайки $e = (e_1, \dots, e_n)$ като ред, а $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ като стълб и считайки, че вектор може да се умножава с число отдясно, получаваме, че равенството $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ може да се запише в матричен вид като $v = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, тоест $v = e.\lambda$, тоест $v = e.x(v)$. Следователно координатното изображение се задава с $x(e.\lambda) = \lambda$.

Пример 1 $x(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Пример 2 Нека $e^0 = (e_1^0, \dots, e_n^0)$ е *стандартният базис на* $\mathbb{R}^n$, тоест

$$e_i^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \ , \quad i = 1, \dots, n$$

(i-тата компонента на e_i^0 е 1, всички останали са 0). Тогава за $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ имаме $a = a_1 e_1^0 + \cdots + a_n e_n^0$. Следователно координатите спрямо стандартния базис са си компонентите на вектора. В частност, координатното изображение $x^0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е $x^0(a) = a$, тоест x^0 е тъждественото изображение на $\mathbb{R}^n$.

Твърдение 1 *Координатните функции $x_1, \dots, x_n : V \to \mathbb{R}$ са линейни изображения. Координатното изображение $x : V \to \mathbb{R}^n$ е линеен изоморфизъм.*

Забележка 2 В направеното по-горе не се използват никакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че то важи и за линейни пространства над произволно поле F — навсякъде вместо $\mathbb{R}$ се пише F, тоест вместо реални числа се взимат елементи на F.

Афинни координатни системи

Нека A е n-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство V.

Определение 2 *Афинна координатна система* K в A е двойка, състояща се от точка $O \in A$ и базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ на V. Пишем $K = Oe_1 \dots e_n$. Точката O се нарича *начало* на координатната система, а $e_1, \dots, e_n$ – *координатни* или *базисни вектори*.

Определение 3 Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в A и $P \in A$. *Координати на P спрямо K* се наричат координатите на вектора $\overrightarrow{OP}$ спрямо базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$, тоест координатите на P спрямо K са $\lambda_1, \dots, \lambda_n \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Пишем $P(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
(Векторът $\overrightarrow{OP} \in V$ се нарича *радиус-вектор на P спрямо K*.)
Векторът $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = x\left(\overrightarrow{OP}\right) \in \mathbb{R}^n$, където x е координатният изоморфизъм, съответен на базиса e, се нарича *координатен вектор на P спрямо K* .
За $i = 1, \dots, n$ функцията

$$x_i : A \to \mathbb{R} : \quad P \mapsto i\text{-тата координата на } P \ (= \lambda_i = x_i\left(\overrightarrow{OP}\right)),$$

където дясното x_i е i-тата координатна функция, съответна на базиса e, се нарича *i-та координатна функция, съответна на координатната система K*. (И следователно имаме $P(x_1(P), \dots, x_n(P))$.)
Изображението

$$x : A \to \mathbb{R}^n : \quad P \mapsto \text{координатния вектор на } P \ (= \lambda), \quad \text{тоест } x(P) = x\left(\overrightarrow{OP}\right),$$

където дясното x е координатният изоморфизъм, съответен на базиса e, се нарича *координатно изображение съответно на координатната система K*.
Ако $v \in V$ е вектор, то под *координати на v спрямо K* ще разбираме координатите на v спрямо базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$.

Забележка 3 В горното определение означихме с x и съответния на базиса e координатен изоморфизъм $V \to \mathbb{R}^n$, и съответното на координатната система K координатно изображение $A \to \mathbb{R}^n$. Обикновено няма опасност от объркване, защото аргументите в първия случай са вектори от V, а във втория случай — точки от A. А и използването на едно и също означение е в съзвучие и с уговорката накрая на определението, че под координати на вектор относно K се разбират координатите му относно e. В случай, че има опасност от объркване, можем да слагаме индекси съответно e и K, тоест съответния на базиса e координатен изоморфизъм да е $x_e : V \to \mathbb{R}$, а съответното на координатната система K координатно изображение да е $x_K : A \to \mathbb{R}^n$.

Забележка 4 Вместо $K = Oe_1 \dots e_n$ често се пише $K = Ox_1 \dots x_n$.
Правата през началото O, която е успоредна на i-тия координатен вектор e_i и е ориентирана с e_i, се нарича *i-та координатна ос* и се означава често с Ox_i.
(Ос е ориентирана права.)
Когато размерността на афинното пространство е малка, често координатите се означават с x, y, z вместо с x_1, x_2, x_3.
Оста Ox_1 (или Ox, ако първата координата е означена с x) се нарича *абсцисна ос*, а координатата x_1 (или x) — *абсциса*.
При $n \geq 2$ оста Ox_2 (или Oy, ако втората координата е означена с y) се нарича *ординатна ос*, а координатата x_2 (или y) — *ордината*.
При $n = 3$ оста Ox_3 (или Oz, ако третата координата е означена със z) се нарича *апликатна ос*, а координатата x_3 (или z) — *апликата*.

Пример 3 $x(O) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Пример 4 Нека $A = V$, тоест разглеждаме линейното пространство V като афинно пространство. Ако началото на K е $O = 0$ – нулевият вектор на V, то $x_K(P) = x_e(P)$. Ако началото O на K е произволно, то $x_K(P) = x_e(P) - x_e(O)$.

Пример 5 Нека $K^0 = 0e_1^0 \dots e_n^0$ е *стандартната координатна система в* $\mathbb{R}^n$, тоест началото е нулевият вектор на $\mathbb{R}^n$, а $e^0 = (e_1^0, \dots, e_n^0)$ е стандартният базис на $\mathbb{R}^n$. Тогава за $a \in \mathbb{R}^n$ имаме $x(a) = a$, тоест координатното изображение съответно на K^0 е тъждественото изображение на $\mathbb{R}^n$. В частност, координатите спрямо стандартната координатна система на $\mathbb{R}^n$ на точката $a \in \mathbb{R}^n$ са си компонентите на a.

Теорема 1 *Нека координатните вектори спрямо K на точките $P, Q \in A$ са съответно $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогава координатният вектор спрямо e на вектора $\overrightarrow{PQ} \in V$ е $b - a$, тоест $x\left(\overrightarrow{PQ}\right) = x(Q) - x(P)$.*

Твърдение 2 *Координатното изображение $x : A \to \mathbb{R}^n$ е биекция.*

Забележка 5 В горните неща никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че всичко важи без промяна и ако вместо $\mathbb{R}$ се вземе произволно поле F, тоест ако V е линейно пространство над произволно поле.

Ориентирани координатни системи

Определение 4 Афинна координатна система в ориентирано афинно пространство се нарича *положително ориентирана* или *дясна* (съответно *отрицателно ориентирана* или *лява*), ако координатният базис е положително (съответно отрицателно) ориентиран.

Пример 6 В $\mathbb{R}^n$, разглеждано като афинно пространство, имаме стандартната ориентация (зададена от стандартния базис). Спрямо нея стандартната афинна координатна система в $\mathbb{R}^n$ е положително ориентирана.

Ортонормирани координатни системи

Нека A е n-мерно евклидово афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U (и следователно U е евклидово линейно пространство).

Определение 5 Афинната координатна система $K = Oe_1 \dots e_n$ се нарича *ортонормирана*, когато координатният базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ е ортонормиран.

Пример 7 В $\mathbb{R}^n$, разглеждано като афинно пространство, стандартната афинна координатна система е ортонормирана.

Теорема 2 *Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е ортонормирана координатна система и спрямо нея точките $P, Q \in A$ имат координати $P(a_1, \dots, a_n)$, $Q(b_1, \dots, b_n)$. Тогава*

$$|PQ| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}, \qquad \textit{тоест } |PQ| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i(Q) - x_i(P))^2}.$$