1 Точни 1-управляващи граматики

Дефиниция 1.1. *Казваме, че 1-управляваща граматика* $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, S, P, F, \# \rangle$ *е* точна *за функция* $f : \Sigma_0^* \to \Sigma_1^*$, *ако* G *представя* f *и* $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$.

Да обърнем внимание, че с изключение на конструкцията SWITCH, в останалите конструкции и функции, които показахме, че са представими с 1-управляващи граматики използвахме допълнителни символи, които не бяха от азбуката на дефиниционната област на съответната функция. Следващият резултат показва, че до голяма степен това е било само за удобство.

Лема 1.1. *Нека* $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$ *има поне два елемента. Ако* $f : \Sigma_0^* \to \Sigma_1^*$ *е представима от 1-управляваща граматика* G*, то* f *се представя и точно от 1-управляваща граматика* G'*. Нещо повече, ако* G *е еднозначна, то и* G' *може да се избере еднозначна.*

Идеята на доказателството е проста. Тъй като $|\Sigma| = |\Sigma_0 \cup \Sigma_1| \geq 2$, може да предполагаме, че $0, 1 \in \Sigma$. Да допуснем, че $G = \langle \Sigma', \mathcal{N}, S, P, F, \# \rangle$ представя $f : \Sigma_0^* \to \Sigma_1^*$. Без ограничение на общността може да предполагаме, че $\Sigma \subseteq \Sigma'$ и тъй като Σ' е крайно, то $2^{d-1} \leq |\Sigma'| < 2^d$ за някое $d \geq 2$.

Сега ако $\Sigma' = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$, то има естествена инекция $\kappa : \Sigma' \to \{0,1\}^d$, която съпоставя на σ_i двоичния запис на i в двоична бройна система. Разбира се, това поражда хомоморфизъм

$$\kappa_* : (\Sigma')^* \to \{0,1\}^*,$$

Тъй като $|\kappa(\sigma_i)| = d$, то $\kappa_*(a_1 \ldots a_n) = \kappa(a_1) \ldots \kappa(a_n)$ има дължина dn и оттук получаваме, че κ_* е инективен. Нека κ_*^{-1} е обратната на κ_*. Тогава, превеждайки хомоморфизма κ, лесно може да получим от G граматика $G_{0,1}$ с азбука $\{0,1\}$, която представя $f_* : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ със свойството:

$$f_*(\kappa_*(w)) = \kappa_*(f(w)), \text{ тоест } f(w) = \kappa_*^{-1}(f^*(\kappa_*(w))) \text{ за всяка дума } w \in \Sigma_0^*.$$

Така ще остане да реализираме точно единствено κ_* и κ_*^{-1} и *да предвидим композицията.*

Доказателство. Нека $G = \langle \Sigma', \mathcal{N}, S, P, F, \# \rangle$ представя $f : \Sigma_0^* \to \Sigma_1^*$. Нека $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \subseteq \Sigma'$ и да разширим Σ' до $\Sigma'' = \Sigma' \cup \{\triangleright, \triangleright', \triangleright''\}$. Предполагаме, че $0, 1 \in \Sigma$ и $\triangleright, \triangleright', \triangleright'' \notin \Sigma'_{\#}$.

Нека $2^{d-1} \leq |\Sigma''| < 2^d$ и $\kappa : \Sigma'' \to \{0,1\}^d$ е инекция, за която $\kappa(0) = 0^d$, $\kappa(1) = 0^{d-1}1$. От това, че $0, 1, \triangleright', \triangleright'' \in \Sigma''$, $d > 2$.

Първо да разгледаме конструкцията:

`Вход:` $G = \langle \Sigma', \mathcal{N}, S, P, F, \# \rangle$, $\kappa : \Sigma'' \to \{0,1\}^d$

$$\begin{aligned} P_{01} &= \{\kappa_*(\alpha) N \kappa_*(\beta) \to \kappa_*(\alpha_1) N \kappa_*(\beta_1) \,|\, \alpha N \beta \to \alpha_1 N_1 \beta_1 \in P\} \\ &\cup \{\kappa_*(\alpha) N \kappa_*(\beta)\# \to \kappa_*(\alpha_1) N \kappa_*(\beta_1)\# \,|\, \alpha N \beta\# \to \alpha_1 N_1 \beta_1\# \in P\} \end{aligned}$$

`Изход:` $G_{01} = \langle \{0,1\}, \mathcal{N}, S, P_{01}, F, \# \rangle$.

Тъй като κ_* е инекция, то непосредствено се проверява, че за всеки $x, y \in (\Sigma')^*$ следните са еквивалентни:

1. $xNy\# \Rightarrow_G x'N'y'\#$,
2. $\kappa_*(x) N \kappa_*(y)\# \Rightarrow_{G_{01}} \kappa_*(x') N' \kappa_*(y)\#$.

Нещо повече, тъй като $\triangleright, \triangleright', \triangleright'' \notin \Sigma$, то тези символи не се срещат в никой извод в граматиката G. Оттук и от горния инвариант, ако $w \in \Sigma^*$, и $S\kappa_*(w)\# \Rightarrow_{G_{01}}^* \kappa_*(x') N \kappa_*(y')\#$, то $\kappa(\triangleright), \kappa(\triangleright')$ и $\kappa(\triangleright'')$ не завършват в $\kappa_*(x')\kappa_*(y)$ на позиция кратна на d.

Нещо повече, понеже правилата на P_{01} са също в образа на κ_*, то, ако G е еднозначна, G_{01} също е еднозначна. Също така от горния инвариант непосредствено следва, че за всяка дума $w \in \Sigma_0^*$:

$$S\kappa_*(w)\# \Rightarrow_{G_{01}}^* Fv\# \text{ точно тогава, когато } v = f(\kappa_*(w)).$$

Сега ще покажем как може да представим κ_* и κ_*^{-1}:

`Вход:` $\kappa : \Sigma \to \{0,1\}^d$

1. $\mathcal{N} = \{A, R, T, F\}$

2. $P = \{A \to \kappa(\triangleright)R\} \cup P_{\text{replace}} \cup P_{\text{return}}$, където:

$$\begin{aligned} P_{\text{replace}} &= \{R\sigma \to \kappa(\sigma)R \mid \sigma \in \Sigma\} \cup \{R\# \to T\#\} \\ P_{\text{return}} &= \{\kappa(\sigma)T \to T\kappa(\sigma) \mid \sigma \neq \triangleright\} \cup \{\kappa(\triangleright)T \to F\}. \end{aligned}$$

`Изход:`$G_\kappa = \langle \Sigma, \mathcal{N}, A, P, F, \# \rangle$.

Директно се проверява, че за нетерминала R, следните са еквивалентни:

1. $\kappa_*(x)R\sigma y\# \Rightarrow x'Ny'\#$ и $\sigma \in \Sigma$.
2. $x' = \kappa_*(x\sigma)$, $y' = y$ и $N = R$.

Структурата на P_{return} е позната. Така че за нея може да твърдим, че:

$$\kappa_*(x)T\kappa_*(y)\# \Rightarrow^* T\kappa_*(xy)\#$$

точно тогава, когато $x \in \Sigma^*$. Сега трябва да е ясно, че за $w \in \Sigma^*$:

$$Aw\# \Rightarrow^*_{G_\kappa} Fv\# \text{ точно тогава, когато } \kappa(\triangleright)Rw\# \Rightarrow^*_{G_\kappa} \kappa(\triangleright)Tv\#.$$

Сега, както и преди, този извод се разделя на две части:

$$\kappa(\triangleright)Rw\# \overset{\text{инв. за } R}{\Longrightarrow^*_{G_\kappa}} \kappa_*(\triangleright w)R\# \Rightarrow \kappa_*(\triangleright w)T\# \overset{\text{инв. за } T}{\Longrightarrow^*_{G_\kappa}} \kappa(\triangleright)T\kappa_*(w)\#.$$

Следователно $v = \kappa_*(w)$. Това, че ако $v = \kappa_*(w)$, то $Aw\# \Rightarrow^*_{G_\kappa} Fv\#$ трябва да е ясно. Следователно G_κ представя κ_*.

Оттук, ако приложим конструкцията за композиция за G_κ и G_{01} със символ $\kappa(\triangle')$ ще получим граматика над азбуката Σ, която представя $f_* \circ \kappa_* : \Sigma_0^* \to \{0,1\}^*$. Да обърнем внимание, че изобщо казано, G_{01} може и да не представя функция, но тя представя f_* над образа $\kappa_*(\Sigma_0^*)$. Дотук имаме 1-управляваща граматика, която представя:

$$f_* \circ \kappa_* : \Sigma_0^* \to \{0,1\}^*, \text{ така че } f_*(\kappa_*(w)) = \kappa_*(f(w)).$$

Остава да представим κ_*^{-1}. Това може да направим посредством следната конструкция:

`Вход:`$\kappa : \Sigma \to \{0,1\}^d$

1. $\mathcal{N} = \{A', R', T', F'\}$
2. $P = \{A' \to \kappa(\triangleright)R'\} \cup P_{\text{replace}} \cup P_{\text{go}}$, където:

$$\begin{aligned} P_{\text{go}} &= \{R'\sigma \to \sigma R' \mid \sigma \in \{0,1\}\} \cup \{R'\# \to T'\#\} \\ P_{\text{replace}} &= \{\kappa(\sigma)T' \to \sigma T \mid \sigma \neq \triangleright\} \cup \{\kappa(\triangleright)T' \to F'\}. \end{aligned}$$

`Изход:`$G'_\kappa = \langle \Sigma, \mathcal{N}, A', P, F', \# \rangle$.

Това, че G'_κ представя $\kappa_*^{-1} : \{0,1\}^* \to \Sigma^*$ става аналогично на G_κ.

Накрая композираме κ_*^{-1} с $f_* \circ \kappa_*$ като използваме $\kappa(\triangleright'')$ и получаваме представяне за:

$$\kappa_*^{-1} \circ f_* \circ \kappa_* : \Sigma_0^* \to \Sigma_1^*, \text{ за което } (\kappa_*^{-1} \circ f_* \circ \kappa_*)(w) = f(w).$$

При това от, тъй като конструкцията за композиция е точна, то азбуката на тази 1-управляваща граматика е $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$ тоест представянето е точно. Нещо повече, тъй като G_κ, G'_κ са еднозначни и правилата в конструкцията за композиция за еднозначни, то резултатната граматика също е еднозначна, ако G_{01} е еднозначна. В частност, ако G е еднозначна, то и полученото представяне на $\kappa_*^{-1} \circ f_* \circ \kappa_*$ е еднозначно. □

2 Канонични 1-управляващи граматики. Еквивалентност с 1-лентнови машини на Тюринг

Дефиниция 2.1. *Казваме, че 1-управляваща граматика $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S, F, \# \rangle$ е канонична ако всяко правило $\alpha \to \beta \in P$ е от един от следните типове (тук $A, B \in \mathcal{N}$, $a, b \in \Sigma_\#$):*

1. REP*:* $Aa \to Bb$*,*

2. MVR*:* $Aa \to aB$*,*

3. MVL*:* $aA \to Ba$*,*

4. INS*:* $A \to Ba$*,*

5. DEL*:* $Aa \to B$*,*

Лема 2.1. *За всяка 1-управляваща граматика* $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S, F, \# \rangle$ *има еквивалентна на нея 1-управляваща граматика* $G' = \langle \Sigma, \mathcal{N}', P', S, F, \# \rangle$ *със свойството, че за всяко правило* $\alpha \to \beta$, $|\alpha| \leq 2$*. Нещо повече, ако* G *е еднозначна, то и* G' *може да се избере еднозначна.*

Доказателство. Нека $A \in \mathcal{N}$ с $P'_A = \{uAv \to \beta \in P \,|\, |u| + |v| \geq 2, |u| \geq 1\}$, $P''_A = \{Av \to \beta \in P \,|\, |v| \geq 2\}$. Достатъчно е да разгледаме $A \in \mathcal{N}$, за което $P'_A \cup P''_A \neq \emptyset$ и да докажем, че може да модифицираме G така до еквивалентна граматика, като заменим правило в $P'_A \cup P''_A$ с по-къси от него и позволени правила.

1. $P'_A \neq \emptyset$. Нека (u', v) е такова, че $(|u'|, |v|) \in (\mathbb{N}^2, \prec_{lex})$ максимално със свойството, че има $a \in \Sigma$, за което $au'Av \to \beta \in P$.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N} & = & \mathcal{N} \cup \{A_{u',v}\} \\ P_{u',A,v} & = & \{u'Av \to A_{u',v}\} \cup \{bA_{u',v} \to \beta \,|\, bu'Av \to \beta \in P\} \\ P' & = & P \setminus \{bu'Av \to \beta \,|\, bu'Av \to \beta \in P\} \cup P_{u',A,v} \\ G' & = & \langle \Sigma, \mathcal{N}', P', S, F, \# \rangle . \end{array}$$

   Първо да забележим, че ако $xau'Avy \Rightarrow_G x\beta y$, то този преход може да се изрази като $xa(u'Av)y \Rightarrow_{G'} xaA_{u',v}y \Rightarrow_{G'} x\beta y$. Обратно, ако $xaA_{u',v}y \Rightarrow_{G'} x\beta y$, то $A_{u',v}$ е въведено от правилото $u'Av \to A_{u',v}$. Следователно в извода:

$$xau'Avy \Rightarrow_{G'} xaA_{u',v}y \Rightarrow_{G'} x\beta y$$

   и освен това $au'Av \to \beta \in P$, защото иначе $aA_{u',v} \to \beta$ нямаше да е правило в P'. С това показахме, че G' и G са еквивалентни.

   Сега да проверим, че ако G е еднозначна, то и G' е еднозначна. Достатъчно е да направим това за новите правила $P' \setminus P$.

   Първо да разгледаме правилата $aA_{u',v} \to \beta$. Нека $xaA_{u',v}y \Rightarrow x\beta' y$ и $xaA_{u',v}y \Rightarrow x\beta'' y$. Тогава в G има $au'Av \to \beta'$ и $au'Av \to \beta''$ и съответно $xau'Avy \Rightarrow x\beta' y$ и $xau'Avy \Rightarrow x\beta'' y$ и ако G е еднозначна, то $\beta' = \beta''$.

   Сега да допуснем, че $xu'Avy \Rightarrow_{G'} x\beta y$ с $\beta \neq A_{u',v}$. Оттук има правило $u''Av'' \to \beta \in P$, за което $xu'Avy = x''u''Av''y''$. Има два случая. Ако $|u''| \leq |u'|$, то тогава ако $a \in \Sigma$, за което $au'Av \to \beta' \in P$, получаваме, че към $au'Avy$ може да се приложат две различни правила, тоест G не е еднозначна.

   Ако $|u''| > |u'|$, то от избора на u' имаме, че $|u''| = |u'| + 1$ а от избора на v, знаем тогава, че $|v''| \leq |v|$. Тъй като G е еднозначна и $|u''| = |u'| + 1 \neq 0$, то $|v''| = |v'| = 0$. Следователно $u''A \to \beta \notin P'$.

2. $P'_A = \emptyset$. Тогава разсъждаваме симетрично за $P''_A \neq \emptyset$.

□

Лема 2.2. *За всяка 1-управляваща граматика* $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S, F, \# \rangle$*, в която има еквивалентна на нея 1-управляваща граматика* $G' = \langle \Sigma, \mathcal{N}', P', S, F, \# \rangle$ *със свойството, че за всяко правило* $\alpha \to \beta$, $|\beta| \leq 2$ *и* $|\alpha| \leq 2$*. Нещо повече, ако* G *е еднозначна, то и* G' *може да се избере еднозначна.*

Доказателство. От предишната лема може да предполагаме, че левите страни на правилата от P са с дължина не по-голяма от 2. Сега, ако имаме с дясна страна $\alpha \to uBv$ с $|u| + |v| \geq 2$, то има два случая:

1. $|u| \geq 1$. Тогава $u = au'$. Заменяме $\alpha \to uBv$ с $\alpha \to aB'$ и $B' \to u'Bv$, където B' е нов нетерминал.

2. $|u| = 0$. Тогава $v = v'a$. Заменяме $\alpha \to Bv$ с $\alpha \to B'a$ и $B' \to v'$, където B' е нов нетерминал.

Ясно е, че ако изходните правила са били еднозначни, то и новодобавените имат това свойство. Еквивалентността също е ясна. □

Лема 2.3. *За всяка 1-управляваща граматика $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S, F, \# \rangle$ има еквивалентна на нея 1-управляваща канонична граматика $G' = \langle \Sigma, \mathcal{N}', P', S, F, \# \rangle$.*

Нещо повече G' може да се избере така, че за всяко $A \in \mathcal{N}'$, за което има MVLEFT *правила да има* <u>*единствен*</u> *$A' \in \mathcal{N}'$, за който за всяко $a \in \Sigma$:*

$$Aa \to aA' \in P'.$$

При това, ако G е била еднозначна, то G' също е еднозначна.

Доказателство. Първо да отбележим, че ако G е канонична и $A \in \mathcal{N}$, за който има MVLEFT правила, то допълнителното условие за A може да бъде осигурено така:

1. $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cup \{A'\}$
2. $P' = P \setminus \{aA \to Ba \,|\, aA \to Ba \in P\} \cup \{aA \to A'a \,|\, a \in \Sigma\} \cup \{A'a \to Ba \,|\, aA \to Ba \in P\}$.
3. $G' = \langle \Sigma, \mathcal{N}', P', S, F, \# \rangle$.

Правилата за A' са от тип $A'a \to Ba$, тоест REP, а останалите добавени правила са от желания вид, за всяко $a \in \Sigma$, $aA \to A'a$.

Нещо повече, лесно се съобразява, че ако в G е направен едностъпков извод: $xaAy \Rightarrow_G xBay$, то той може да се симулира като $xaAy \Rightarrow_{G'} xA'ay \Rightarrow_{G'} xBay$. Обратно, ако $xA'ay \Rightarrow_{G'} xBay$, то A' е породено от $xaAy \Rightarrow_{G'} xA'ay \Rightarrow_{G'} xBay$ и следователно $xaAy \Rightarrow_G xBay$. Оттук G и G' са еквивалентни и ако G е еднозначна, то и G' е еднозначна.

Сега ще установим първата част на лемата. От предишните две леми може да предполагаме, че за правилата $\alpha \to \beta \in P$ е в сила, че $|\alpha|, |\beta| \in \{1, 2\}$.

1. $|\alpha| = |\beta| = 1$, заменяме $A \to B$ с $\{Aa \to Ba \,|\, a \in \Sigma_{\#}\}$, това са REP правила.
2. $|\alpha| = 1, |\beta| = 2$. Ако правилото е $A \to Ba$, то това е INS. Ако е $A \to aB$, то го заменяме с $A \to B'a$ и $B'a \to aB$, където B' е нов. Първото правило е INS, второто MVR.
3. $|\alpha| = 2, |\beta| = 1$. Ако правилото е $Aa \to B$, то това е DEL. Ако е $aA \to B$, то го заменяме с $aA \to A'a$ и $A'a \to B$, първото е MVL, а второто – REP.
4. $|\alpha| = |\beta| = 2$.
   (а) $Aa \to Bb$, то това е REP.
   (б) $Aa \to bB$, то го заменяме с $Aa \to B'b$ и $B'b \to bB$, където B' е нов. Първото е правило е REP, а второто – MVR.
   (в) $aA \to \beta$, то го заменяме с $aA \to A'a$ и $A'a \to \beta$, където A' е нов. Първото правило е MVL, а второто е от един от горните два вида.

□

Лема 2.4. *Всяка канонична 1-управляваща граматика е еквивалентна на 1-управляваща граматика със $\Sigma' = \Sigma \cup \{\_\}$ и правила от типове* REP, MVL, MVR *и:*

1. INSE*: $A\# \to Ba\#$*
2. DELE*: $A\_\# \to B\#$.*

Идея. 1. Нека $\rho = N \to N'a$ е от тип INS. Да забележим, че ако G е еднозначна, това е единственото правило с лява страна N. По същество идеята е следната: да маркираме позицията, на която трябва да се добави a, да изместим символите вдясно от тази позиция с 1 позиция вдясно; да се върнем на маркираната позиция и да поставим на нея a, преминавайки в нетерминала N'. За целта може да разгледаме следното множество от правила и нови нетерминали:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N}' & = & \mathcal{N} \cup \{C, R\} \cup \{T_\sigma, \,|\, \sigma \in \Sigma'_{\#}\} \\ P' & = & P \setminus \{N \to N'a\} \cup \{N\sigma \to \_T_\sigma \,|\, \sigma \in \Sigma'\} \cup \{N\# \to C\_\#, C\_ \to aN'\} \\ & & \cup \{T_\sigma \sigma' \to \sigma T_{\sigma'} \,|\, \sigma' \in \Sigma'\} \cup \{T_\sigma \# \to R\sigma\#\} \\ & & \cup \{\sigma R \to R\sigma \,|\, \sigma \in \Sigma'\} \cup \{\_R \to aN'\}. \end{array}$$

Тази граматика има правила, $N\sigma \to \_T_\sigma$ и $T_\sigma \sigma' \to \sigma T_{\sigma'}$, които не са от позволените. Но всяко едно такова правила изобщо казано е от вида $Xb \to cY$ и може да бъде симулирано чрез следните две правила:

$$Xb \to Z_{Y,c}c, \quad Z_{Y,c}c \to cY$$

където $Z_{Y,c}$ е нов нетерминал. Първото правило е от тип REP, а второто от тип MVR.

2. Нека $\rho = Na \to N'$, $a \in \Sigma'$. Отново идеята е интуитивна. Изтриването на a може да представим като: маркиране на позицията, на която е a; намирането на края на думата ($\#$); изместването на символите вдясно от a с една позиция вляво. Когато се попълни маркираната позиция, преминаваме в нетерминала N'. За целта може да разгледаме следното множество от правила и нови нетерминали:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}' &= \mathcal{N} \cup \{R, C\} \cup \{T_\sigma \mid \sigma \in \Sigma'\} \\ P' &= P \setminus \{Na \to N'\} \cup \{Na \to \_R\} \\ &\cup \{R\sigma \to \sigma R \mid \sigma \in \Sigma'\} \cup \{\sigma R\# \to T_\sigma \# \mid \sigma \in \Sigma'\} \\ &\cup \{\sigma' T_\sigma \to T_{\sigma'}\sigma \mid \sigma' \in \Sigma'\} \cup \{\_T_\sigma \to N'\sigma \mid \sigma \in \Sigma'\}. \end{aligned}$$

□

Забележка 2.1. Да забележим, че при новодобавените правила няма нетерминали X, които да имат едновременно правила с лява страна $X\_$ и $X\#$.

Теорема 2.1. *Нека* $G = \langle \Sigma \cup \{\_\}, \mathcal{N}, P, S, F, \#\rangle$ *има правила само от типове* REP, MVL, MVR, INDE *и* DELE. *Тогава* $\mathcal{M} = \langle \Sigma \cup \{\_\} \cup \{\boxdot\}, \mathcal{N}, S, \Delta, \{F\}, \boxdot\rangle$ *с преходи:*

$$\begin{aligned} \Delta = &\{\langle (A, a), (B, b)\rangle \mid Aa \to Bb \in P \text{ е REP}\} \cup \{\langle (A\boxdot, B\boxdot)\rangle \mid A\# \to B\# \in P\} \\ &\cup \{\langle (A, a), (B, \leftarrow)\rangle \mid \exists b \in \Sigma(bA \to Bb \in P \text{ е MVL})\} \\ &\cup \{\langle (A, a), (B, \rightarrow)\rangle \mid Aa \to aB \in P \text{ е MVR}\} \\ &\cup \{\langle (A, \boxdot), (B, a)\rangle \mid A\# \to Ba\# \in P\} \\ &\cup \{\langle (A, \_), (B, \boxdot)\rangle \mid A\_\# \to B\# \in P\} \end{aligned}$$

има език $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$.

Доказателство. Ще казваме, че конфигурация κ съответства на $uAv\#$, ако $\kappa = (A, uv\boxdot, |u|)$. Ясно е, че това съотвествие е взаимно еднозначно. Ще докажем, че $(A, uv\boxdot, |u|) \Rightarrow_M (B, u'v'\boxdot, |u'|)$ точно когато $uAv\# \Rightarrow_G u'Bv'\#$.

1. $|v| = 0$, $|v'| = 0$. Тогава, $u' = u$ и $(A, u\boxdot, |u|) \Rightarrow_M (B, u\boxdot, |u|)$ тогава и само тогава, когато $A\# \to B\# \in P$, откъдето $uA\# \Rightarrow_G uB\#$. Обратното също е ясно (защото правилата са с лява страна 2).

2. $|v| = 0$, $|v'| = 1$. Тогава, $u' = u$ и $(A, u\boxdot, |u|) \Rightarrow_M (B, ua\boxdot, |u|)$, което тогава и само тогава, когато $A\# \to Ba\# \in P$. Следотаветлно $uA\# \Rightarrow_G uBa\#$. Обратно, ако $uA\# \Rightarrow uBa\#$, то $A\# \to Ba\#$ и следователно $\langle (A\boxdot), (B, a)\rangle \in \Delta$.

3. $|v| = 1$, $|v'| = 0$, $|u'| = |u|$. Тогава $(A, ua\boxdot, |u|) \Rightarrow_M (B, u\boxdot, |u|)$, което е възможно само ако направеният преход е $\langle (A, a), (B, \boxdot)\rangle$. Следователно $a = \_$ и $Aa\# \to B\# \in P$. Сега е ясно, че $uA\_\# \Rightarrow_G uB\#$. Обратно, ако $uAa\# \Rightarrow_G uB\#$, то е приложено DELE, защото е намалял броят на символите и тогава обратната посока също е ясна.

4. $|v| = 0$, $|v'| = 1$, $|u| = |u'| + 1$. Тогава $v' = a$ и $u = u'a$, тоест $(A, u'a\boxdot, |u'a|) \Rightarrow_M (B, u'a\boxdot, |u'|)$. Следователно има MVL $bA \to bB$ в G. Но тогава B е еднозначно определено и е за всички символи $x \in \Sigma$, в частност за a. Следователно $uaA\# \Rightarrow_G uBa\#$. Обратната посока е ясна.

5. $|v| = |v'| - 1$ и $|u| = |u'| + 1$. Аналогично на горния случай.

6. $|v| = |v'| + 1$ и $|u| = |u'| - 1$. Тогава $v = av'$ и $u' = ua$ и се прави десен преход $(A, uav'\boxdot, |u|) \Rightarrow_M (B, uav'\boxdot, |u| + 1)$, което е възможно само ако $Aa \to aB$ в G. Следователно $uAav'\# \Rightarrow_G uaBv'\#$. Обратното също е ясно.

7. $|v| = |v'| > 0$. Тогава $|u'| = |u|$ и $v = av''$, $v' = bv''$ за някои $\{(A, a), (B, b)\} \in \Delta$, което е точно когато $Aa \to Bb$ е REP в G. И отново е ясно, че $uAav''\# \Rightarrow_G uBbv''\#$.

Сега с индукция по дължината на изпълнението/извода получаваме, че следните са еквивалентни:

1. $(S, w\boxdot, 0) \Rightarrow_M (A, uv\boxdot, |u|)$,

2. $Sw\# \Rightarrow_G uAv\#$.

Следователно, в частност $Sw\# \Rightarrow_G uFv\#$ точно тогава, когато $(S, w\boxdot, 0) \Rightarrow_M (F, uv\boxdot, |u|)$, тоест $w \in \mathcal{L}(G)$ точно тогава, когато $w \in \mathcal{L}(M)$. □