Общо уравнение на афинно подпространство

Нека $\mathcal{A}$ е n-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$ и $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ е координатното изображение, съответно на K.

Определение 1. Нека B е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$. *Общо уравнение на B спрямо K* е уравнение на B спрямо K от вида $Ax = b$ (или $Ax - b = 0$), където A е матрица $(n-k) \times n$, $b \in \mathbb{R}^{n-k}$ (и $r(A) = n-k$).
С други думи, общо уравнение на B спрямо K е линейна система с $n-k$ уравнения, която задава B спрямо K ($n-k$ е най-малкият възможен брой уравнения в системата).

Забележка 1. Условието $r(A) = n-k$ следва от останалите условия – виж следващата теорема. Също в нея се вижда, че $n-k$ е най-малкият възможен брой уравнения в системата.

Теорема 1. *0. Подмножеството B на $\mathcal{A}$ е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ B се задава спрямо K с някоя съвместима линейна система от вида $Ax = b$, където рангът на матрицата A е $r(A) = n-k$.*

1. *Всяко k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ има общо уравнение спрямо K, тоест задава се спрямо K с някоя линейна система $Ax = b$ с $n-k$ уравнения (това е най-малкият възможен брой) (и $r(A) = n-k$).*

2. *Обратно: Ако $Ax = b$ е линейна система с n неизвестни и броят на уравненията ѝ е равен на $r(A)$, то тя е съвместима и е общо уравнение спрямо K на някое k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$, където $k = n - r(A)$.*

Частни случаи:

1. Хиперравнина: $k = n-1$.
   Следователно линейната система за общото уравнение се състои от $n-k = 1$ уравнение.

   Теорема 1′. *1. Всяка хиперравнина в $\mathcal{A}$ има общо уравнение спрямо K, тоест уравнение от вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ (и $(a_1, \dots, a_n) \neq 0$).*

   2. Обратно: Всяко уравнение от вида $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, където $(a_1, \dots, a_n) \neq 0$, е общо уравнение спрямо K на някоя хиперравнина в $\mathcal{A}$.

2. Права в 2-мерно афинно пространство (в частност, в геометричната равнина): $n = 2$, $k = 1 = n-1$.
   Нека координатите са (x, y) вместо (x_1, x_2).

   Теорема 1″. *1. Всяка права в 2-мерно афинно пространство $\mathcal{A}$ има общо уравнение спрямо K, тоест уравнение от вида $Ax + By + C = 0$ (и $(A, B) \neq 0$).*

   2. Обратно: Всяко уравнение от вида $Ax + By + C = 0$, където $(A, B) \neq 0$, е общо уравнение спрямо K на някоя права в $\mathcal{A}$.

3. Равнина в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 2 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 1'''. *1. Всяка равнина в 3-мерно афинно пространство $\mathcal{A}$ има общо уравнение спрямо K, тоест уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$ (и $(A, B, C) \neq 0$).*

   2. Обратно: Всяко уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, където $(A, B, C) \neq 0$, е общо уравнение спрямо K на някоя равнина в $\mathcal{A}$.

4. Права в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 1''''. *1. Всяка права в 3-мерно афинно пространство $\mathcal{A}$ има общо уравнение спрямо K, тоест уравнение от вида*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

   (и матрицата $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ има ранг 2).

   2. Обратно: Всяка система от вида

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

   където рангът на матрицата на системата $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ е 2, е общо уравнение спрямо K на някоя права в $\mathcal{A}$.

Теорема 2. *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и линейно независимите вектори $v_1, \dots, v_k \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0)$, $v_j(\xi_j)$, $j = 1, \dots, k$. Тогава k-мерното афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, което минава през P_0 и е успоредно на $v_1, \dots, v_k$, има спрямо K уравнение*

$$B : \left\{ \det M_{i_1 \dots i_{k+1}} = 0, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n \right. , \tag{1}$$

където $M_{i_1 \dots i_{k+1}}$ е квадратната подматрица от ред $k + 1$ на $M = (\underbrace{x - x_0 \ \xi_1 \ \dots \ \xi_k}_{\text{стълбове}})$, състояща се от редовете с номера $i_1, \dots, i_{k+1}$.
Ако в (1) се вземат онези $n - k$ уравнения, които се получават от подматриците, съдържащи фиксирана квадратна подматрица от ред k на $M' = (\underbrace{\xi_1 \ \dots \ \xi_k}_{\text{стълбове}})$ с ненулева детерминанта, то получената система е общо уравнение на B спрямо K.

Теорема 3. *Нека $k \leq n$ и нележащите в $(k-1)$-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ точки $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x^j)$, $j = 0, \dots, k$. Тогава k-мерното афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, което минава през $P_0, \dots, P_k$, има спрямо K уравнение*

$$B : \left\{ \det M_{i_1 \dots i_{k+1}} = 0, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n \right. , \tag{2}$$

където $M_{i_1 \dots i_{k+1}}$ е квадратната подматрица от ред $k+1$ на
$M = (\underbrace{x - x^0 \ \ x^1 - x^0 \ \dots \ x^k - x^0}_{\text{стълбове}})$*, състояща се от редовете с номера $i_1, \dots, i_{k+1}$.*
Ако в (2) се вземат онези $n-k$ уравнения, които се получават от подматриците, съдържащи фиксирана квадратна подматрица от ред k на $M' = (\underbrace{x^1 - x^0 \ \dots \ x^k - x^0}_{\text{стълбове}})$ с ненулева детерминанта, то получената система е общо уравнение на B спрямо K.
В (2) вместо $M_{i_1 \dots i_{k+1}}$ може да се вземе квадратната матрица от ред $k+2$ $\left(\dfrac{N_{i_1 \dots i_{k+1}}}{1 \dots \dots 1}\right)$, където $N_{i_1 \dots i_{k+1}}$ е подматрицата на $N = (\underbrace{x \ x^1 \ \dots \ x^k \ x^0}_{\text{стълбове}})$, състояща се от редовете с номера $i_1, \dots, i_{k+1}$.
($N_{i_1 \dots i_{k+1}}$ е $(k+1) \times (k+2)$ и ѝ се добавя един ред единици за да стане $(k+2) \times (k+2)$.)

Забележка 2. Формулите от Теорема 2 и Теорема 3 не са подходящи за конкретни пресмятания, защото в тях участват много детерминанти, чието пресмятане е трудоемко. Най-простият случай е когато имаме хиперравнина, защото тогава $k = n-1$ и следователно имаме единствена квадратна подматрица от ред $k+1 = n$ на M, а именно самата M. Така че уравнението става само едно: $\det M = 0$. Всъщност и пресмятането на една детерминанта е твърде трудоемко. Но при $n = 2$ и $n = 3$ е лесно, така че при права в равнината и равнина в пространството формулите от Теорема 2 и Теорема 3 са удобни за конкретни пресмятания. За щастие това са случаите, които най-често се срещат на упражненията. В общия случай най-икономичният метод за получаване на общи уравнения в ситуациите от Теорема 2 и Теорема 3 е да се напишат параметрични уравнения, след което да се изключат параметрите, както е обяснено в Забележка 3 по-долу.

Частни случаи:

1. Хиперравнина: $k = n-1$.
   M е $n \times (k+1) = n \times n$. Следователно квадратната подматрица на M от ред $k+1 = n$ е единствена – самата M.

   Теорема 2′. *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и линейно независимите вектори $v_1, \dots, v_{n-1} \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0)$, $v_j(\xi_j)$, $j = 1, \dots, n-1$. Тогава определената от тях хиперравнина B в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

   $$B : \det(\underbrace{x - x_0 \ \ \xi_1 \ \dots \ \xi_{n-1}}_{\text{стълбове}}) = 0.$$

Теорема 3′. *Нека нележащите в $(n-2)$-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ точки $P_0, \ldots, P_{n-1} \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x^j)$, $j = 0, \ldots, n-1$. Тогава определената от тях хиперравнина B в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

$$B : \det(\underbrace{x - x^0 \;\; x^1 - x^0 \; \ldots \; x^{n-1} - x^0}_{\textit{стълбове}}) = 0,$$

или еквивалентно

$$B : \det \left(\begin{array}{cccc} x & x^1 & \ldots & x^{n-1} & x^0 \\ \hline 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{array} \right) = 0.$$

2. Права в 2-мерно афинно пространство (в частност, в геометричната равнина): $n = 2$, $k = 1 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y) вместо (x_1, x_2).

   Теорема 2″. *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и ненулевият вектор $v \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0)$, $v(\xi, \eta)$. Тогава определената от тях права l в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

$$l : \det \begin{pmatrix} x - x_0 & \xi \\ y - y_0 & \eta \end{pmatrix} = 0.$$

   Теорема 3″. *Нека различните точки $P_0, P_1 \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x_j, y_j)$, $j = 0, 1$. Тогава определената от тях права l в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

$$l : \det \begin{pmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{pmatrix} = 0,$$

   или еквивалентно

$$l : \det \begin{pmatrix} x & x_1 & x_0 \\ y & y_1 & y_0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

3. Равнина в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 2 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 2‴. *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и неколинеарните (тоест линейно независими) вектори $v_1, v_2 \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $v_j(\xi_j, \eta_j, \zeta_j)$, $j = 1, 2$. Тогава определената от тях равнина π в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

$$\pi : \det \begin{pmatrix} x - x_0 & \xi_1 & \xi_2 \\ y - y_0 & \eta_1 & \eta_2 \\ z - z_0 & \zeta_1 & \zeta_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Теорема 3'''. *Нека нележащите на една права точки $P_0, P_1, P_2 \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x_j, y_j, z_j)$, $j = 0, 1, 2$. Тогава определената от тях равнина π в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

$$\pi : \det \begin{pmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 0,$$

или еквивалентно

$$\pi : \det \begin{pmatrix} x & x_1 & x_2 & x_0 \\ y & y_1 & y_2 & y_0 \\ z & z_1 & z_2 & z_0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

4. Права в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 2'v. *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и ненулевият вектор $v \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$. Тогава определената от тях права l в $\mathcal{A}$ има спрямо K уравнение*

$$l : \begin{cases} \det \begin{pmatrix} y - y_0 & \eta \\ z - z_0 & \zeta \end{pmatrix} = 0 \\ \det \begin{pmatrix} z - z_0 & \zeta \\ x - x_0 & \xi \end{pmatrix} = 0 \\ \det \begin{pmatrix} x - x_0 & \xi \\ y - y_0 & \eta \end{pmatrix} = 0 \end{cases}.$$

   Ако се вземат двете уравнения, съдържащи фиксирана ненулева координата на v, то получената система е общо уравнение на l спрямо K.

Забележка 3. Преминаване от параметрични уравнения към общо уравнение може да се прави по следния начин. Ако B е зададено с параметрични уравнения

$$B : x = x_0 + \lambda_1 \xi_1 + \cdots + \lambda_k \xi_k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

то тъй като векторите $\xi_1, \dots, \xi_k$ са линейно независими и следователно матрицата $M' = (\xi_1 \dots \xi_k)$ има ранг k, някои k уравнения могат да се решат относно $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Замествайки в останалите $n - k$ уравнения, получаваме линейна система за x, която е общо уравнение на B. (Всъщност Теорема 2 дава явна формула за общото уравнение.)
Обратно: Ако B е зададено с общо уравнение $Ax = b$, то тъй като A има ранг $n - k$, системата може да се реши относно $n - k$ от координатите. Останалите k координати се полагат параметри и се получават параметрични уравнения на B.

Теорема 4. *Нека афинното подпространство B на $\mathcal{A}$ има спрямо K уравнение $Ax = b$ (в частност, това може да е общо уравнение на B) и нека векторът $v \in U$ има спрямо K координатен вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогава $v \parallel B \Leftrightarrow A\xi = 0$ (тоест когато ξ е решение на хомогенната система $Ax = 0$, съответна на $Ax = b$).*

Частни случаи:

1. Хиперравнина: $k = n - 1$.

   Теорема 4′. *Нека хиперравнината B в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$, а векторът $v \in U$ има спрямо K координатен вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогава $v \parallel B \Leftrightarrow a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n = 0$.*

2. Права в 2-мерно афинно пространство (в частност, в геометричната равнина): $n = 2$, $k = 1 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y) вместо (x_1, x_2).

   Теорема 4″. *Нека правата l в 2-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение $Ax + By + C = 0$, а векторът v има спрямо K координати (ξ, η). Тогава $v \parallel l \Leftrightarrow A\xi + B\eta = 0$.*
   В частност, векторът $u(-B, A)$ е ненулев вектор, колинеарен с l.

3. Равнина в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 2 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 4‴. *Нека равнината π в 3-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, а векторът v има спрямо K координати (ξ, η, ζ). Тогава $v \parallel \pi \Leftrightarrow A\xi + B\eta + C\zeta = 0$.*

4. Права в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k = 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 4′ᵛ. *Нека правата l в 3-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

   $$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

   а векторът v има спрямо K координати (ξ, η, ζ). Тогава
   $$v \parallel l \Leftrightarrow \begin{cases} A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta = 0 \\ A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta = 0 \end{cases}.$$

Забележка 4. В горните неща никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че всичко важи без промяна и ако вместо $\mathbb{R}$ се вземе произволно поле F, тоест ако U е линейно пространство над произволно поле.

Декартово уравнение на права в равнината

Нека l е права в равнината, която не е успоредна на Oy. Нека l има спрямо K общо уравнение $Ax + By + C = 0$. Тогава $B \neq 0$, защото ако допуснем, че $B = 0$, то $A.0 + B.1 = 0$ и значи по Теорема 2 $e_2(0,1) \parallel l$, тоест $Oy \parallel l$ — противоречие. Следователно уравнението $Ax+By+C = 0$ е еквивалентно на $y = -\frac{A}{B}\cdot x - \frac{C}{B}$. Означаваме $k = -\frac{A}{B}$, $m = -\frac{C}{B}$. Следователно l има спрямо K уравнение $y = kx + m$.

Уравнение на l спрямо K от тоя вид се нарича *декартово уравнение на l спрямо K*. (И горните разсъждения показват, че всяка права, която не е успоредна на Oy, има декартово уравнение.) Коефициентът k се нарича *ъглов коефициент на l спрямо K*.

Наименованието „ъглов коефициент“ идва от следното: Ако v е ненулев вектор, колинеарен с l и координатите на v спрямо K са (a, b), то $k = \frac{b}{a}$.

Нека координатната система K е ортонормирана. Тогава $k = \operatorname{tg}\alpha$, където $\alpha = \sphericalangle(Ox, r)$, където r е лъчът върху l, сочещ в полуравнината относно правата Ox, в която лежи положителната полуос на Oy, тоест в „горната полуравнина“. (С други думи, посоката на r се определя от вектор върху l, чиято втора координата е неотрицателна.)

Декартово уравнение на равнина в пространството

Нека π е равнина в пространството, която не е успоредна на Oz. Нека π има спрямо K общо уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогава $C \neq 0$, защото ако допуснем, че $C = 0$, то $A.0 + B.0 + C.1 = 0$ и значи по Теорема 3 $e_3(0,0,1) \parallel \pi$, тоест $Oz \parallel \pi$ — противоречие. Следователно уравнението $Ax + By + Cz + D = 0$ е еквивалентно на $z = -\frac{A}{C}\cdot x - \frac{B}{C}\cdot y - \frac{D}{C}$. Означаваме $k = -\frac{A}{C}$, $l = -\frac{B}{C}$, $m = -\frac{D}{C}$. Следователно π има спрямо K уравнение $z = kx + ly + m$.

Уравнение на π спрямо K от тоя вид се нарича *декартово уравнение на π спрямо K*. (И горните разсъждения показват, че всяка равнина, която не е успоредна на Oz, има декартово уравнение.)