Фигури от втора степен

Нека $\mathcal{A}$ е n-мерно афинно пространство и K е афинна координатна система в $\mathcal{A}$.

Определение 1 Подмножеството S на $\mathcal{A}$ се нарича *хиперповърхнина от втора степен* (при $n = 2$ *крива от втора степен*, при $n = 3$ *повърхнина от втора степен*), ако спрямо K има уравнение $F(x) = 0$, където $F(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1}x_i + a_{n+1,n+1}$ и матрицата $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ от коефициентите на квадратичната част е ненулева симетрична матрица. (Ако означим $a = (a_{1,n+1}, \dots, a_{1,n})$ и го разглеждаме като ред, а x разглеждаме като стълб, то $F(x) = x^tAx + 2ax + a_{n+1,n+1}$.)

Забележка 1 Дефиницията е коректна, тоест спрямо друга афинна координатна система K' уравнението на S е от същия вид, но с други коефициенти: ако смяната на координатите между K и K' се задава с $x = s + Tx'$, то спрямо K' уравнението на S е $x'^tA'x' + 2a'x' + a'_{n+1,n+1} = 0$, където

$$A' = T^tAT, \quad a' = (a + s^tA)T, \quad a'_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1} + 2as + s^tAs.$$

Забележка 2 Считаме, че точките могат да имат и комплексни координати, тоест разширили сме $\mathcal{A}$ до комплексно афинно пространство.

Твърдение 1 *Нека хиперповърхнините от втора степен S и S' имат спрямо K уравнения*
$S : \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1}x_i + a_{n+1,n+1} = 0$ *и* $S' : \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} a'_{i,n+1}x_i + a'_{n+1,n+1} = 0.$
Тогава $S = S' \Leftrightarrow$ съществува $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$, такова че $a'_{ij} = \rho a_{ij}$ за всички i, j (тоест когато уравнението на S' е уравнението на S, умножено с ρ).

Обратната посока на това твърдение е очевидна, а правата няма да я доказваме за да спестим време.

Забележка 3 В горното твърдение е съществено, че допускаме точки с комплексни координати. Ако разглеждаме само обичайните реални точки, то не е вярно. Например при $n = 2$ да разгледаме кривите с уравнения ${x_1}^2 + {x_2}^2 + 1 = 0$ и ${x_1}^2 + 1 = 0$. Тия уравнения нямат реални решения, така че ако разглеждаме кривите като реални криви те и двете са празното множество и значи съвпадат. Но уравненията им не са пропорционални.

Тъй като формулата за смяната на координатната система и уравненията на афинните трансформации имат един и същ вид, от сметката в Забележка 1 следва също

Твърдение 2 *Образът на хиперповърхнина от втора степен при афинна трансформация (а следователно и при метрична трансформация, тоест еднаквост, когато A е евклидово) е хиперповърхнина от втора степен.*

Определение 2 От Твърдение 2 следва, че множеството от хиперповърхнините от втора степен в A се разбива на класове на еквивалентност относно релацията афинна еквивалентност, а когато A е евклидово и относно релацията метрична еквивалентност, тоест еднаквост. Тия класове се наричат *афинни класове на фигури от втора степен* и съответно *метрични класове на фигури от втора степен.*

Забележка 4 Тъй като формулата за смяната на координатите при смяна на афинни координатни системи и уравненията на афинните трансформации имат един и същ вид, то две фигури от втора степен да са афинно еквивалентни, тоест едната да се получава от другата с афинна трансформация, е същото като да може да се намери друга афинна координатна система, така че уравнението на едната фигура спрямо нея да е същото като уравнението на другата фигура спрямо първоначалната.

Аналогично, тъй като формулата за смяната на координатите при смяна на ортонормирани координатни системи и уравненията на метричните трансформации имат един и същ вид, то две фигури от втора степен да са метрично еквивалентни, тоест едната да се получава от другата с метрична трансформация, е същото като да може да се намери друга ортонормирана координатна система, така че уравнението на едната фигура спрямо нея да е същото като уравнението на другата фигура спрямо първоначалната.

Теорема 1 (афинна класификация на хиперповърхнините от втора степен) *Съществуват краен брой афинни класове фигури от втора степен в n-мерно афинно пространство. Те се задават от хиперповърхнините, които спрямо дадена афинна координатна система имат някое от следните уравнения:*

$$\begin{array}{lll}
{x_1}^2 + \cdots + {x_p}^2 - {x_{p+1}}^2 - \cdots - {x_{p+q}}^2 & = 1, & 1 \leq p+q \leq n, \\
{x_1}^2 + \cdots + {x_p}^2 - {x_{p+1}}^2 - \cdots - {x_{p+q}}^2 & = 0, & n \geq p \geq q \geq 0,\ 1 \leq p+q \leq n, \\
{x_1}^2 + \cdots + {x_p}^2 - {x_{p+1}}^2 - \cdots - {x_{p+q}}^2 - 2x_{p+q+1} & = 0, & n \geq p \geq q \geq 0,\ 1 \leq p+q \leq n-1.
\end{array}$$

(без доказателство)

Теорема 2 (метрична класификация на хиперповърхнините от втора степен) *Съществуват безбройно много метрични класове фигури от втора степен в n-мерно евклидово афинно пространство. Те се задават от хиперповърхнините, които спрямо дадена ортонормирана координатна система имат някое от следните уравнения:*

$$\frac{{x_1}^2}{{a_1}^2} + \dots + \frac{{x_p}^2}{{a_p}^2} - \frac{{x_{p+1}}^2}{{a_{p+1}}^2} - \dots - \frac{{x_{p+q}}^2}{{a_{p+q}}^2} = 1, \quad \begin{array}{l} 1 \leq p+q \leq n, \\ a_1 \geq \dots \geq a_p > 0, \\ a_{p+1} \geq \dots \geq a_{p+q} > 0, \end{array}$$

$$\frac{{x_1}^2}{{a_1}^2} + \dots + \frac{{x_p}^2}{{a_p}^2} - \frac{{x_{p+1}}^2}{{a_{p+1}}^2} - \dots - \frac{{x_{p+q}}^2}{{a_{p+q}}^2} = 0, \quad \begin{array}{l} n \geq p \geq q \geq 0,\ 1 \leq p+q \leq n, \\ a_1 \geq \dots \geq a_p > 0, \\ a_{p+1} \geq \dots \geq a_{p+q} > 0, \end{array}$$

$$\frac{{x_1}^2}{{a_1}^2} + \dots + \frac{{x_p}^2}{{a_p}^2} - \frac{{x_{p+1}}^2}{{a_{p+1}}^2} - \dots - \frac{{x_{p+q}}^2}{{a_{p+q}}^2} - 2x_{p+q+1} = 0, \quad \begin{array}{l} n \geq p \geq q \geq 0,\ 1 \leq p+q \leq n-1, \\ a_1 \geq \dots \geq a_p > 0, \\ a_{p+1} \geq \dots \geq a_{p+q} > 0. \end{array}$$

(без доказателство)

Забележка 5 Неравенствата между p и q в Теорема 1 са за да се осигури поне едно събираемо от втора степен (за да е фигура от втора степен) и когато няма свободен член броят на събираемите с коефициент $+1$ да е не по-малък от броя на събираемите с коефициент -1. Последното може да се постигне чрез преномериране на координатите, което е афинна трансформация.

Аналогична е причината за неравенствата между p и q, а също и за неравенствата между a-тата в Теорема 2, защото преномерирането на координатите на ортонормирана координатна система е метрична трансформация.
Това е така, защото преномерирането на координатите се задава с уравнението $y = Tx$, където стълбовете на T са стълбовете на единичната матрица, но пермутирани по същия начин както са пермутирани координатите. Следователно T е ортогонална, така че тая трансформация е метрична, когато координатната система е ортонормирана, и афинна, когато координатната система е афинна.

Забележка 6 Броят на афинните класове е краен, защото двойките (p, q), които удовлетворяват неравенствата в Теорема 1, е краен. Метричните класове са безбройно много, защото при тях участват още коефициентите a, а броят на a-тата, които удовлетворяват неравенствата в Теорема 2 е безкраен.

Забележка 7 Поради Забележка 4 Теорема 1 може да се интерпретира по следния начин: За всяка хиперповърхнина от втора степен в афинно пространство съществува афинна координатна система, спрямо която уравнението ѝ е някое от уравненията от Теорема 1. Поради това тия уравнения се наричат *афинни канонични уравнения на фигурите от втора степен.*

Аналогично Теорема 2 може да се интерпретира по следния начин: За всяка хиперповърхнина от втора степен в евклидово афинно пространство съществува ортонормирана координатна система, спрямо която уравнението ѝ е някое от уравненията от Теорема 2. Поради това тия уравнения се наричат *метрични канонични уравнения на фигурите от втора степен.*

Забележка 8 Доказателството на Теорема 2 се свежда по същество до диагонализация на симетричната матрица A, тоест до намиране на собствените ѝ стойности и ортонормиран базис от собствени вектори (който ще е координатния базис на новата координатна система). След това се прави транслация, тоест $y = s + x$, за да се изчистят всички събираеми от първа степен, чиито променливи участват и на втора степен. Накрая, ако е нужно, се прави още една смяна на ортонормирания базис за да остане само едно събираемо от първа степен и след това с още една транслация (при която само компонентата s_{p+q+1} на s е евентуално различна от 0) се изчиства свободния член.

Същото може да се направи и за да се докаже Теорема 1. Тъй като се работи относно афинна координатна система, то трансформациите, които се извършват, няма да са метрични, а само афинни (или еквивалентно, новите координатни системи ще са афинни, а не ортонормирани). Това обаче не проваля нищо, защото за тая теорема ни трябват само афинни трансформации. Накрая, след като са получени уравненията от Теорема 2, се прави трансформация от вида $y_i = \dfrac{x_i}{a_i}$ (това очевидно е афинна трансформация) за да се махнат параметрите a и да останат уравненията от Теорема 1.

При $n = 2$ от Теорема 1 и Теорема 2 получаваме:

Теорема 3 (афинна класификация на кривите от втора степен в равнината) *Съществуват 9 афинни класа криви от втора степен:*

№	наименование	представител/ афинно канонично уравнение	бележки
1	*имагинерна елипса*	$q_1 : {x_1}^2 + {x_2}^2 + 1 = 0$	*Няма реални точки.*
2	*елипса*	$q_2 : {x_1}^2 + {x_2}^2 - 1 = 0$	
3	*хипербола*	$q_3 : {x_1}^2 - {x_2}^2 + 1 = 0$	
4	*парабола*	$q_4 : {x_1}^2 - 2x_2 = 0$	
5	*две комплексно спрегнати пресичащи се прави*	$q_5 : {x_1}^2 + {x_2}^2 = 0$	*Състои се от две комплексно спрегнати пресичащи се прави и има единствена реална точка – пресечната им точка. За q_5 това са правите $x_1 - \mathrm{i}x_2 = 0$ и $x_1 + \mathrm{i}x_2 = 0$ и точката $(0,0)$.*
6	*две комплексно спрегнати успоредни прави*	$q_6 : {x_1}^2 + 1 = 0$	*Няма реални точки. Състои се от две комплексно спрегнати успоредни прави. За q_6 това са правите $x_1 - \mathrm{i} = 0$ и $x_1 + \mathrm{i} = 0$.*
7	*две реални пресичащи се прави*	$q_7 : {x_1}^2 - {x_2}^2 = 0$	*Състои се от две реални пресичащи се прави. За q_7 това са правите $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$ и пресечната им точка е $(0,0)$.*
8	*две реални успоредни прави*	$q_8 : {x_1}^2 - 1 = 0$	*Състои се от две реални успоредни прави. За q_8 това са правите $x_1 - 1 = 0$ и $x_1 + 1 = 0$.*
9	*една двойна права*	$q_9 : {x_1}^2 = 0$	*Състои се от една реална права. За q_9 това е правата $x_1 = 0$.*

Теорема 4 (метрична класификация на кривите от втора степен в равнината) *Съществуват безбройно много метрични класове криви от втора степен. Те се задават от кривите с уравнения:*

представител/ метрично канонично уравнение	афинен клас
$\frac{{x_1}^2}{{a_1}^2} + \frac{{x_2}^2}{{a_2}^2} + 1 = 0,\ a_1 \geq a_2 > 0$	*имагинерна елипса*
$\frac{{x_1}^2}{{a_1}^2} + \frac{{x_2}^2}{{a_2}^2} - 1 = 0,\ a_1 \geq a_2 > 0$	*елипса*
$\frac{{x_1}^2}{{a_1}^2} - \frac{{x_2}^2}{{a_2}^2} + 1 = 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0$	*хипербола*
${x_1}^2 - 2px_2 = 0,\ p > 0$	*парабола*
${x_1}^2 + a^2{x_2}^2 = 0,\ a \geq 1$	*две комплексно спрегнати пресичащи се прави*
${x_1}^2 + a^2 = 0,\ a > 0$	*две комплексно спрегнати успоредни прави*
${x_1}^2 - a^2{x_2}^2 = 0,\ a \geq 1$	*две реални пресичащи се прави*
${x_1}^2 - a^2 = 0,\ a > 0$	*две реални успоредни прави*
${x_1}^2 = 0$	*една двойна права*

Забележка 9 Теорема 4 всъщност е доказана на упражненията — това е алгоритъмът за канонизация. А Теорема 3 следва от нея по същия начин както Теорема 1 следва от Теорема 2 — виж Забележка 8.