7. Интересни конструкции с Автомати.

Задача 1 За език $L \subseteq \Sigma^*$, дефинираме операциите

$Pref(L) = \{ x \in \Sigma^* \mid (\exists y \in \Sigma^*)(xy \in L) \}$

$Suff(L) = \{ y \in \Sigma^* \mid (\exists x \in \Sigma^*)(xy \in L) \}$

Вярно ли е, че за всеки регулярен език L, $Pref(L)$ и $Suff(L)$ също са регулярни?

Задача 2 Вярно ли е, че за всеки регулярен език $L \subseteq \Sigma^*$ и за всеки език $K \subseteq \Sigma^*$ езикът

$$s(K, L) \overset{def}{=} \{ v \in \Sigma^* \mid (\exists u \in K)(uv \in L) \}$$

е регулярен?

Задача 3 Вярно ли е, че за всяка двойка регулярни езици $A, B \subseteq \Sigma^*$ езикът:

$$L = \{ w \mid w \in A \ \& \ \neg(\exists y \in B, x, y \in \Sigma^*)(xyz = w) \}$$

е регулярен?

Задача 4 За език $L \subseteq \Sigma^*$ дефинираме операцията

$\frac{1}{2}(L) = \{ x \in \Sigma^* \mid (\exists y \in \Sigma^*)(xy \in L \ \& \ |x| = |y|)$

Вярно ли е, че регулярните езици са затворени относно тази операция?

Преговор (Релация на Майхил-Нероуд)

$$\sim_A \subseteq Q \times Q \qquad (A = \langle \Sigma, Q, I, \Delta, F \rangle)$$

$$q \sim_A p \overset{def}{\iff} L(q) = L(p)$$

$$\iff (\forall w \in \Sigma^*)((\exists f_1 \in F)(q \overset{w}{\vdash_A} f_1) \iff (\exists f_2 \in F)(q \overset{w}{\vdash_A} f_2))$$

$$\equiv_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* \qquad (L \subseteq \Sigma^*)$$

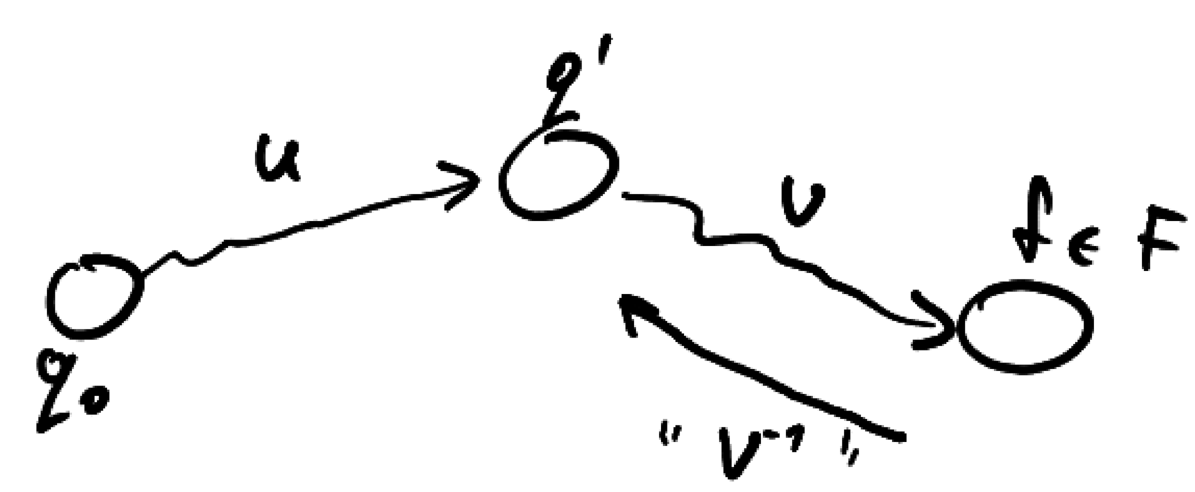
$$u \equiv_L v \overset{def}{\iff} (\forall w \in \Sigma^*)(uw \in L \iff vw \in L)$$

Зад. 4 $L \subseteq \Sigma^*$ - регулярен.

Сл. $\exists A = \langle \Sigma, Q, \{q_0\}, \delta, F \rangle$ - ДКА

с един $L(A) = L$.

искаме автомат за $\frac{1}{2}L$



$$Q^{\frac{1}{2}} = Q \times Q$$

$$\Delta^{\frac{1}{2}} = \{((q', q''), a, (p', p'')) \mid (q', a, p') \in \delta \ \& \ (q'', a, p'') \in \delta^{-1}\}$$

$$I^{\frac{1}{2}} = \{(q_0, q) \mid q \in Q\}$$

$$F^{\frac{1}{2}} = \{(q, q) \mid q \in Q\}$$

аналогично може

$$A_q = \langle \Sigma, Q^{\frac{1}{2}q}, I^{\frac{1}{2}q}, \Delta^{\frac{1}{2}q}, F^{\frac{1}{2}q} \rangle$$

$$Q^{\frac{1}{2}q} = Q \times Q$$

$$\Delta^{\frac{1}{2}q} = \{ ((a,b), \sigma, (a',b')) \mid (a,\sigma,a') \in \Delta \ \& \ (b,\sigma,b') \in \Delta \}$$

$$I^{\frac{1}{2}q} = \{ (q_0, q) \}$$

$$F^{\frac{1}{2}q} = \{ (q, f) \mid f \in F \}$$

ще док., че $\quad L(A_q) = \{ x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : |x| = |y| \ \& \ q_0 \xmapsto{x} q \xmapsto{y} f \in F \}$

Тогава $\bigcup_{q \in Q} L(A_q) = L$ е крайно обединение

$\boxed{\text{Зад. 1}}$ L - регулярен $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $Pref(L)$ - регулярен.

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ $Suff(L)$ - регулярен.

Първо може да забележим, че

$Suff(L) = Rev(Pref(Rev(L)))$, като знаем, че Rev е операция, запазваща регулярност. Достатъчно е да докажем, че $Pref$ запазва регулярност.

Разглеждаме релациите $\equiv_L$ и $\equiv_{Pref(L)}$. Ще докажем, че

$$\forall u, v \in \Sigma^* \quad u \equiv_L v \implies u \equiv_{Pref(L)} v$$

$u \equiv_L v \iff \forall w \in \Sigma^* \; uw \in L \iff vw \in L$ (1)

$u \equiv_{Pref(L)} v \iff \forall w \in \Sigma^* \; uw \in Pref(L) \iff vw \in Pref(L)$

$\iff \forall w \, (\exists u' : uwu' \in L \iff \exists v' : vwv' \in L)$ (2)

за $u' = \varepsilon = v'$ е очевидно вярно, че (1) $\Rightarrow$ (2)

Така получихме, че $\equiv_L \subseteq \equiv_{Pref(L)}$ т.е.

$\equiv_L$ е изфиняване на $\equiv_{Pref(L)}$ и оттук следва, че

$\infty > \left| \Sigma^*/_{\equiv_L} \right| \geq \left| \Sigma^*/_{\equiv_{Pref(L)}} \right|$ (тъй като L е регулярен)

Иначе казано, МДКА за Pref(L) има $\leq$ състояния от тези за L, който е краен.

Така показахме, че $Pref(L)$ е регулярен.

$\boxed{\text{Зад 2}}$ Можем да конструираме автомата за Suff(L), но начални състояния остават само тези,:

$I = \{ i \in Q \mid \exists k \in K : q_0 \xrightarrow{k} i \}$

$\boxed{\text{Зад 3}}$ Изразът се опростява до

$L = A \cap (\Sigma^* \circ B \circ \Sigma^*)$,

за което можем да построим автомат.