ЗАДАЧИ ЗА МЕДИЦЕНТЪР НА СИСТЕМА ОТ ТОЧКИ

Определение: ***Медицентър*** на система от точки $A_1, A_2, \dots, A_n, n \geq 1$ наричаме точката M, за която е изпълнено равенството

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \cdots + \overrightarrow{MA_n} = \vec{o}.$$

1 зад. Да се докаже, че точката M е медицентър на система от точки $A_1, A_2, \dots, A_n, n \geq 1$ тогава и само тогава, когато за произволна точка O е изпълнено равенството:

$$n.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}.$$

2 зад. Да се докаже, че всяка система, състояща се от краен брой точки, има точно един медицентър.

Забележка 1: Медицентърът на система от една точка A_1 съвпада с токата. Медицентърът на система от две различни точки A_1, A_2 е средата на отсечката A_1A_2.

Лема 1: Нека точката G е медицентърът на системата от точки $A_1, A_2, \dots, A_m, m > 1$, а точката M е медицентърът на системата от точки $A_2, \dots, A_m, m > 1$.

Докажете, че точките A_1, G и M лежат на една права, като $\overrightarrow{GA_1} + (m-1).\overrightarrow{GM} = \vec{o}$.

Извод: Точката G е вътрешна за отсечката A_1M и я дели в отношение $(m-1):1$, считано от A_1.

Лема 2: Нека точката M е медицентърът на системата от точки $A_1, A_2, \dots, A_m, m \geq 1$,

точката N е медицентърът на системата от точки $B_1, B_2, \dots, B_n, n \geq 1$, а точката G е медицентърът на системата от точки $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n$.

Докажете, че точките M, G и N лежат на една права, като $m.\overrightarrow{GM} + n.\overrightarrow{GN} = \vec{o}$.

Извод: Точката G е вътрешна за отсечката MN и я дели в отношение $n:m$, считано от M.

Забележка 2: Покажете, че ***Лема 1*** непосредствено следва от ***Лема 2*** при подходящ избор на m и n.

3 зад. Даден е триъгълник ABC. Точката G е медицентърът на системата от точки A, B и C. Медиана в триъгълник е отсечка, която свързва връх на триъгълника със средата (медицентъра) на срещуположната страна.

Като се приложи ***Лема 1*** да се докаже, че трите медиани в триъгълника ABC се пресичат в точката G и да се определи отношението, в което тя ги дели.

4 зад. Даден е произволен четириъгълник $ABCD$. Точката G е медицентърът на системата от точки A, B, C и D.

- Медиана в четириъгълник е отсечка, която свързва връх на четириъгълника с медицетъра на триъгълника, образуван от останалите върхове. Като се приложи ***Лема 1*** да се докаже, че четирите медиани в четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точката G и да се определи отношението, в което тя ги дели;
- Средни отсечки на четириъгълник $ABCD$ са отсечките, свързващи средите на: AB и CD, AD и BC, AC и BD. Като се приложи ***Лема 2*** да се докаже, че всяка средна отсечка на $ABCD$ минава през точката G и да се определи отношението, в което тя ги дели.

5 зад. Даден е произволен тетраедър $ABCD$. Точката G е медицентърът на системата от точки A, B, C и D.

- Медиана в тетраедър е отсечка, която свързва връх на тетраедъра с медицетъра на триъгълника, образуван от останалите върхове. Като се приложи ***Лема 1*** да се докаже, че четирите медиани в тетраедъра $ABCD$ се пресичат в точката G и да се определи отношението, в което тя ги дели;
- Средни отсечки на тетраедър $ABCD$ са отсечките, свързващи средите срещуположните ръбове (AB и CD, AD и BC, AC и BD). Като се приложи ***Лема 2*** да се докаже, че всяка средна отсечка на $ABCD$ минава през точката G и да се определи отношението, в което тя ги дели.