Двойно векторно произведение

Да се докаже, че за всеки три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е изпълнено равенството:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\vec{c}).\vec{b} - (\vec{b}\vec{c}).\vec{a} \quad (*)$$

Д-во:

* Проверете, че равенството (*) е вярно, ако
- $\vec{a}=\vec{o}$ или $\vec{b}=\vec{o}$, или $\vec{c}=\vec{o}$;
- $\vec{a}\parallel\vec{b}$ (ненулеви);

* Ще докажем (*) при $\vec{a}\neq\vec{o}$, $\vec{b}\neq\vec{o}$, $\vec{c}\neq\vec{o}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - лнз

1 сл. Нека $\vec{c}=\vec{a}$, разгл. $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}=?$

* $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a} = \alpha.\vec{a}+\beta.\vec{b} \; | \cdot\vec{a} \Rightarrow$

$$[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}].\vec{a} = \alpha.\vec{a}^2+\beta.(\vec{a}\vec{b})$$

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\underbrace{(\vec{a}\times\vec{a})}_{\vec{o}} = \alpha.\vec{a}^2+\beta.(\vec{a}\vec{b})$$

$$0=\alpha.\vec{a}^2+\beta.(\vec{a}\vec{b}) \Rightarrow \alpha = -\frac{(\vec{a}\vec{b})}{\vec{a}^2}.\beta$$

* $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a} = \alpha.\vec{a}+\beta.\vec{b} \; / \cdot\vec{b}$

$$[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}]\cdot\vec{b} = \alpha.(\vec{a}\vec{b})+\beta.\vec{b}^2$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \alpha.(\vec{a}\vec{b})+\beta.\vec{b}^2$$

$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \alpha\cdot(\vec{a}\vec{b}) + \beta\cdot\vec{b}^2$, но $\alpha = -\frac{(\vec{a}\vec{b})}{\vec{a}^2}\cdot\beta$

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \beta\cdot\left(-\frac{(\vec{a}\vec{b})^2}{a^2} + \vec{b}^2\right)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \beta\cdot\left(\frac{\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2}{\vec{a}^2}\right)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \beta\cdot\frac{(\vec{a}\times\vec{b})^2}{\vec{a}^2} \Rightarrow \quad \beta = \vec{a}^2$$

$$\alpha = -(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Окончателно: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a} = \vec{a}^2\cdot\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\cdot\vec{a}$ (1)

2 сл. Нека $\vec{c} = \vec{b}$, разгл. $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b} = ?$

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b} = \gamma\cdot\vec{a} + \delta\cdot\vec{b}$ {δ - делта}

$$\begin{cases} [(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}]\cdot\vec{a} = \gamma\cdot\vec{a}^2 + \delta\cdot(\vec{a}\vec{b}) \\ [(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}]\cdot\vec{b} = \gamma\cdot(\vec{a}\vec{b}) + \delta\cdot\vec{b}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\vec{a}\times\vec{b})^2 = \gamma\cdot\vec{a}^2 + \delta\cdot(\vec{a}\vec{b}) \\ 0 = \gamma\cdot(\vec{a}\vec{b}) + \delta\cdot\vec{b}^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \delta = -\frac{(\vec{a}\vec{b})}{\vec{b}^2}\cdot\gamma$$

Решение: $\delta = +(\vec{a}\vec{b})$, $\gamma = -\vec{b}^2$

Окончателно: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b} = (\vec{a}\vec{b})\cdot\vec{b} - \vec{b}^2\cdot(\vec{a})$ (2)

3 сл. Нека вектор $\vec{c}$ е произволен, тогава

$$\vec{c} = x.\vec{a} + y.\vec{b} + z.(\vec{a}\times\vec{b})$$

Пресмятаме $(\vec{a}\vec{c})$, $(\vec{b}\vec{c})$ и $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$:

$$\left|\begin{array}{l} (\vec{a}\vec{c}) = x.\vec{a}^2 + y.(\vec{a}\vec{b}) + z.0 \\ (\vec{b}\vec{c}) = x.(\vec{a}\vec{b}) + y.\vec{b}^2 + z.0 \end{array}\right. \quad (3)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\times\left(x.\vec{a} + y.\vec{b} + z.(\vec{a}\times\vec{b})\right) =$$

$$= x.\Big[\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}}_{\text{от } (1)}\Big] + y.\Big[\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}}_{\text{от } (2)}\Big] + z.\vec{0} =$$

$$= x.\left[\vec{a}^2.\vec{b} - (\vec{a}\vec{b}).\vec{a}\right] + y.\left[(\vec{a}\vec{b}).\vec{b} - \vec{b}^2.\vec{a}\right] =$$

$$= \underbrace{\left[x.\vec{a}^2 + y.(\vec{a}\vec{b})\right]}_{\text{от } (3) \Rightarrow \, = (\vec{a}\vec{c})}.\vec{b} - \underbrace{\left[x.(\vec{a}\vec{b}) + y.\vec{b}^2\right]}_{\text{от } (3) \Rightarrow \, = (\vec{b}\vec{c})}.\vec{a}$$

Окончателно:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\vec{c}).\vec{b} - (\vec{b}\vec{c}).\vec{a}$$

$\square$