Ориентация

Матрица на прехода между базиси (припомняне от алгебрата)

Нека V е n-мерно реално линейно пространство, $n > 0$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ е базис на V и $f = (f_1, \dots, f_n)$ е n-орка вектори от V. Тогава всеки от $f_1, \dots, f_n$ е линейна комбинация на $e_1, \dots, e_n$, тоест съществуват числа $t_{ij} \in \mathbb{R}$, такива че

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \cdots + t_{n1}e_n \\ f_2 & = & t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \cdots + t_{n2}e_n \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ f_j & = & t_{1j}e_1 + t_{2j}e_2 + \cdots + t_{nj}e_n \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ f_n & = & t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \cdots + t_{nn}e_n \end{array} \tag{1}$$

тоест

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i, \quad j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Означаваме $T = (t_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, тоест T е матрицата $n \times n$, чиито стълбове са координатните вектори на $f_1, \dots, f_n$ спрямо базиса e, тоест (i, j)-тият елемент на T е i-тата координата на f_j спрямо базиса e.

Разглеждайки $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ като вектор-редове и считайки, че вектор може да се умножава с число отдясно, получаваме, че (1) (и еквивалентното му (2)) се записва в матричен вид като

$$f = e.T. \tag{3}$$

Твърдение 1 *f е базис на V тогава и само тогава, когато матрицата T е обратима (тоест $\det T \neq 0$).*

Когато f също е базис, T се нарича *матрица на прехода от базиса e към базиса f*.
По Твърдение 1 матрицата на прехода е обратима матрица.

Твърдение 2

1. *Матрицата на прехода от базиса e към същия базис e е единичната матрица E, тоест $e = e.E$.*

2. *Ако матрицата на прехода от базиса e към базиса f е T, то матрицата на прехода от f към e е T^{-1} (тоест матрицата на прехода в обратната посока е обратната матрица), тоест $f = e.T \Rightarrow e = f.T^{-1}$.*

3. *Ако матрицата на прехода от базиса e към базиса f е S, а матрицата на прехода от f към базиса g е T, то матрицата на прехода от e към g е ST, тоест $f = e.S,\ g = f.T \Rightarrow g = e.ST$.*

Забележка 1 В горните неща никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че всичко важи без промяна и ако вместо $\mathbb{R}$ се вземе произволно поле F, тоест ако V е линейно пространство над произволно поле. В нещата за ориентация по-долу обаче е важно, че линейното пространство е над $\mathbb{R}$, защото се използва, че в $\mathbb{R}$ има наредба, която има хубави свойства по отношение на умножението (произведението на две положителни числа е положително и произведението на две отрицателни числа е положително). В произволно поле такава наредба няма.

Ориентация

Нека V е n-мерно реално линейно пространство, $n > 0$.

Определение 1 Нека $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_n)$ са два базиса на V и матрицата на прехода от e към f е T. Казваме, че *e е еднакво ориентиран с f*, и пишем $e \sim f$, ако $\det T > 0$. Казваме, че *e е противоположно ориентиран на f*, и пишем $e \not\sim f$, ако e не е еднакво ориентиран с f, тоест ако $\det T < 0$. (Тъй като T е обратима, $\det T \neq 0$.)

Пример 1 Ако $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е базис и $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, то и $f = (\lambda e_1, e_2, \ldots, e_n)$ е базис и e е еднакво ориентиран с f при $\lambda > 0$ и противоположно ориентиран на f при $\lambda < 0$. Същото заключение е в сила, ако вместо e_1 с λ се умножи който и да е e_i. В частност, ако се смени знака на един от базисните вектори, то първоначалният базис е противоположно ориентиран на новополучения.

Пример 2 Ако $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е базис, то и $f = (e_2, e_1, e_3, \ldots, e_n)$ е базис и e е противоположно ориентиран на f. Същото заключение е в сила, ако вместо e_1 и e_2 се разменят местата на които и да е e_i и e_j.

Пример 3 Ако $n = 3$ и $e = (e_1, e_2, e_3)$ е базис, то и $f = (e_2, e_3, e_1)$ е базис и e е еднакво ориентиран с f.

Теорема 1

1. *Релацията еднаква ориентираност на базиси е релация на еквивалентност в множеството на всички базиси на V.*
2. *Класовете на еквивалентност относно тая релация са два: ако f е един базис на V, то те са $\{e : e \sim f\}$ и $\{e : e \not\sim f\}$.*

Забележка 2 Поради горната теорема в релацията ориентираност на базиси двата базиса играят симетрична роля, така че вместо e е еднакво ориентиран с f можем да казваме *e и f са еднакво ориентирани*, а вместо e е противоположно ориентиран на f — *e и f са противоположно ориентирани*.

Определение 2

1. *Ориентация* в крайномерно реално линейно пространство е клас на еквивалентност относно релацията еднаква ориентираност на базиси.
2. Казваме, че крайномерно реално линейно пространство е *ориентирано*, ако е избрана едната от двете възможни ориентации. Избраната ориентация се нарича *положителна*, а другата – *отрицателна*.

Забележка 3 Избор на ориентация може да се зададе чрез избор на базис: взима се класът на еквивалентност на базиса.

Определение 3 Базис в ориентирано линейно пространство се нарича *положително ориентиран* (съответно *отрицателно ориентиран*), ако задава положителната (съответно отрицателната) ориентация.

Пример 4 Дефинираната от стандартния базис на $\mathbb{R}^n$ ориентация се нарича *стандартна ориентация* в $\mathbb{R}^n$. По подразбиране $\mathbb{R}^n$ се счита ориентирано по тоя начин.

Твърдение 3 *Във всяко крайномерно ориентирано евклидово линейно пространство съществува положително (съответно отрицателно) ориентиран ортонормиран базис.*

Пример 5 Стандартният базис на $\mathbb{R}^n$ е положително ориентиран ортонормиран базис.