2. Крайни Автомати

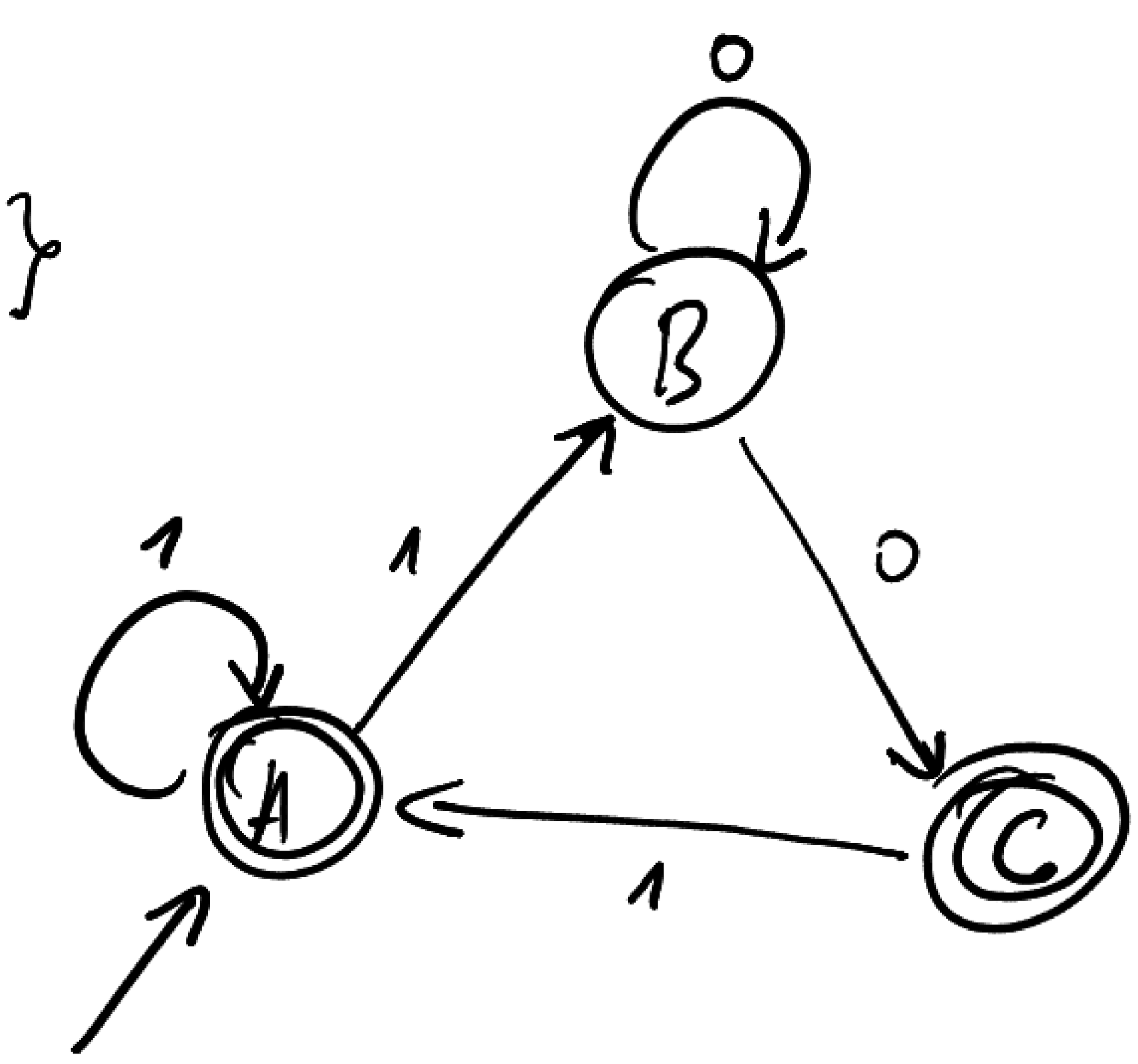
Def Нека Σ е азбука. Краен автомат (с ε-преходи) над Σ наричаме нар. четворка

$$A = (Q, I, \Delta, F)$$

Q – крайно множество (състояния)
$I \subseteq Q$ (начални състояния)
$\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$ (преходи)
$F \subseteq Q$ (финални състояния)

(Q, Δ) е етикетиран мултиграф

Пример: $\Sigma = \{0, 1\}$, $Q = \{A, B, C\}$
$I = \{A\}$, $F = \{A, C\}$
$\Delta = \{ (A, 1, A) \quad (B, 0, C)$
$(A, 1, B) \quad (C, 1, A)$
$(B, 0, B) \}$



Def $A = (Q, S, \Delta, F)$ – краен автомат над Σ
за вс. $A, B \in Q$

$$A \xrightarrow{a_1 \dots a_n} B \overset{def}{\iff} (\exists q_1 \dots q_{n+1} \in Q)(q_1 \dots q_{n+1} \text{ е път в } (Q, \Delta),$$
$$q_1 = A,\ q_{n+1} = B \text{ и}$$
$$(\forall i \in \{1 \dots n\})((q_i, a_i, q_{i+1}) \in \Delta))$$

$\iff$ ($\exists$ път в (Q, Δ) с начало A и край B с конкатенация на етикетите $a_1 \dots a_n$)

1) $(\forall q \in Q)(q \overset{\varepsilon}{\underset{A}{\mapsto}} q)$

2) $\forall u,w \in \Sigma^* \quad q \overset{uw}{\mapsto} q'' \iff (\exists q' \in Q)(q \overset{u}{\underset{A}{\mapsto}} q' \wedge q' \overset{w}{\underset{A}{\mapsto}} q'')$

Def Език на Краен автомат

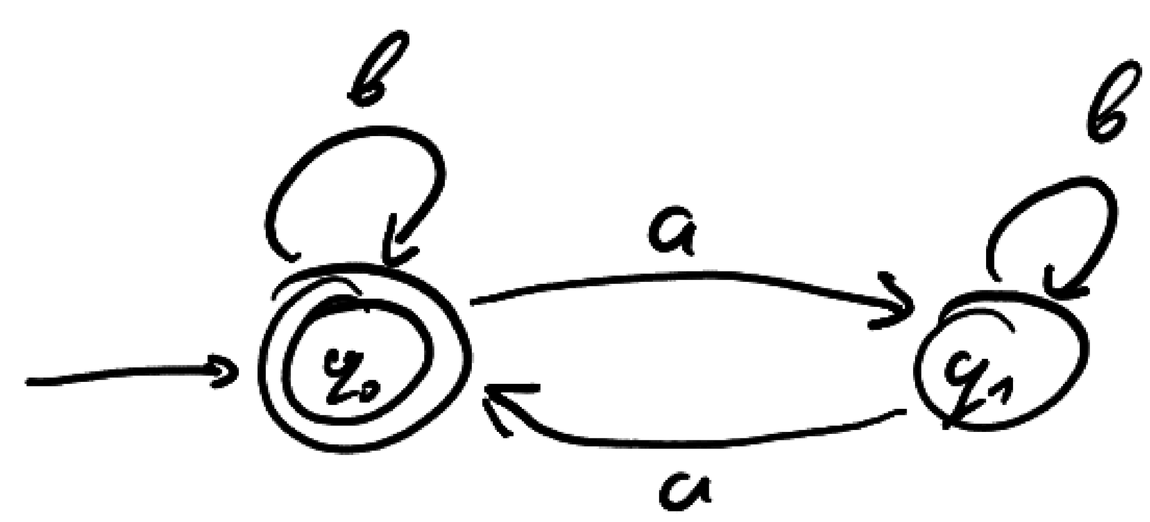
$$L(A) \overset{def}{=} \{ w \in \Sigma^* \mid (\exists q_0 \in S, \exists f \in F)(q_0 \overset{w}{\underset{A}{\mapsto}} f) \}$$

Def Детерминиран краен автомат над Σ

$A = (Q, I, \delta, F)$ е дет. краен автомат над Σ ако A е краен автомат над Σ и $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ е тотална.

Задача:

A:



$L(A) = ?$

Р-е Гледаме автомата. Буквата 'a' ни праща от финално в нефинално състояние и обратно. Това ни води към разглеждане на четността на броя 'a'-та.

Твърдение $(\forall i \in \{0,1\})(q_0 \overset{w}{\underset{A}{\mapsto}} q_i \iff |w|_a \equiv i \pmod 2)$ (*)

Ще докажем (*) с индукция по $|w|_a$

И.Б.: $|w| = 0$ $\quad q_0 \overset{\varepsilon}{\underset{A}{\mapsto}} q_0 \iff |\varepsilon|_a = 0 \equiv 0 \pmod 2$

$q_0 \overset{\varepsilon}{\underset{A}{\not\mapsto}} q_1$ и $|\varepsilon|_a \not\equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow$ ok

И.Х: Нека твърд. е вярно за $|w| = n$.

И.С: Нека $|w| = n+1$. Тогава $w = w'a$ или $w = w'b$

I сл. $w = w'a$

$$q_0 \overset{w}{\underset{A}{\longmapsto}} q_0 \iff (\exists q' \in Q)(q_0 \overset{w'}{\underset{A}{\longmapsto}} q' \wedge q' \overset{a}{\underset{A}{\longmapsto}} q_0)$$

$$\iff q_0 \overset{w'}{\underset{A}{\longmapsto}} q_1 \wedge q_1 \overset{a}{\underset{A}{\longmapsto}} q_0$$

$$\overset{\text{И.П}}{\iff} |w'|_a \equiv 1 \pmod 2$$

$$\iff |w|_a = |w'a|_a = |w'|_a + |a|_a \equiv 1 + 1 \equiv 0 \pmod 2$$

$$q_0 \overset{w}{\underset{A}{\longmapsto}} q_1 \iff (\exists q' \in Q)(q_0 \overset{w'}{\underset{A}{\longmapsto}} q' \wedge q' \overset{a}{\underset{A}{\longmapsto}} q_1)$$

$$\iff q_0 \overset{w'}{\underset{A}{\longmapsto}} q_0 \wedge q_0 \overset{a}{\underset{A}{\longmapsto}} q_1$$

$$\overset{\text{И.П}}{\iff} |w'|_a \equiv 0 \pmod 2$$

$$\iff |w'a|_a \equiv 1 \pmod 2$$

II сл. $w = w'b$

$$q_0 \overset{w}{\underset{A}{\longmapsto}} q_0 \iff (\exists q' \in Q)(q_0 \overset{w'}{\underset{A}{\longmapsto}} q' \wedge q' \overset{b}{\underset{A}{\longmapsto}} q_0)$$

$\hookrightarrow q' = q_0$

$$\iff q_0 \overset{w'}{\underset{A}{\longmapsto}} q_0$$

$$\iff |w'|_a \equiv 0 \pmod 2$$

$$\iff |\underbrace{w'b}_{w}|_a \equiv 0 \pmod 2$$

$$q_0 \overset{w}{\underset{A}{\longmapsto}} q_1 \iff (\exists q' \in Q)(q_0 \overset{w'}{\underset{A}{\longmapsto}} q' \wedge q' \overset{b}{\underset{A}{\longmapsto}} q_1)$$

$\hookrightarrow q' = q_1$

$$\iff q_0 \overset{w'}{\underset{A}{\longmapsto}} q_1$$

$$\iff |w'|_a \equiv 1 \pmod 2$$

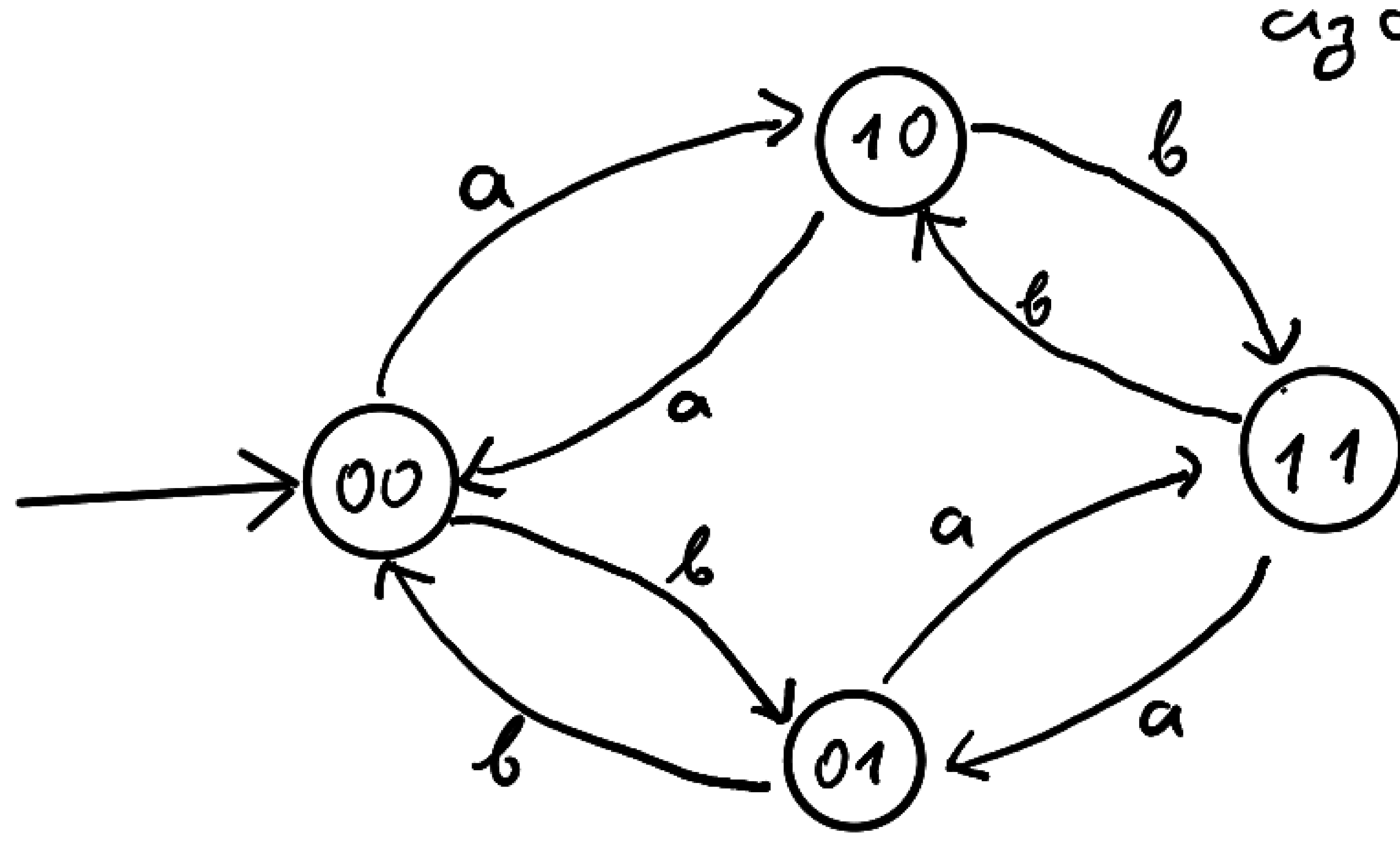
$$\iff |w'b|_a \equiv 1 \pmod 2$$

и така по ПМИ, $q_0 \overset{w}{\underset{A}{\longmapsto}} q_i \iff |w|_a \equiv i \pmod 2$ $(*)$

Така $L(A) = \{ w \in \Sigma^* \mid q_0 \overset{w}{\longmapsto} q_0 \} = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 0 \pmod 2 \}$.

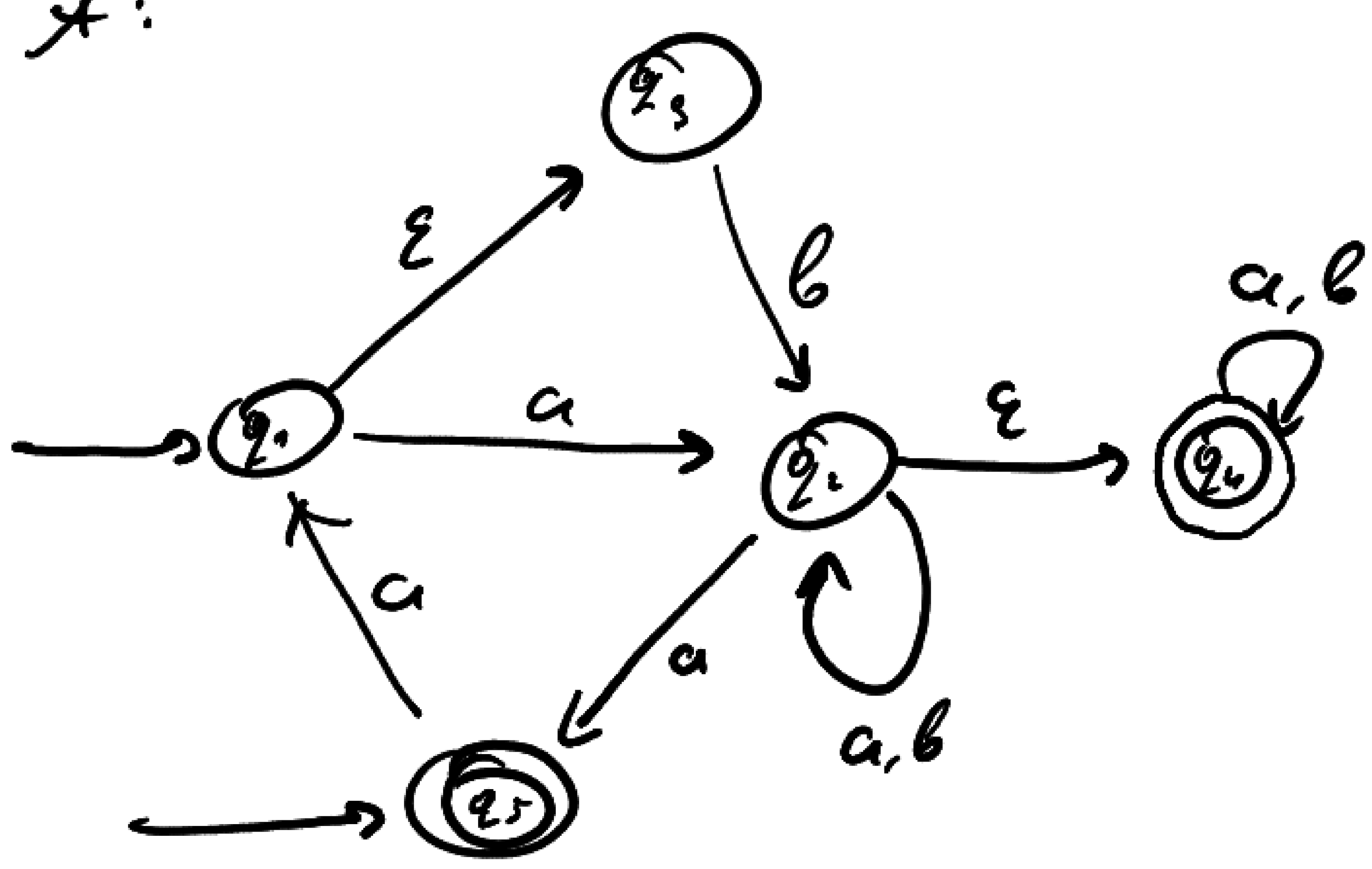
Доказахме, че $L(A)$ е мн-вото от думи с четен брой 'a'-та. $\square$

Задача: Кой е езикът на следния автомат над азбуката $\Sigma = \{a, b\}$?



Итерация в автомат

A:



Задача: $bbaab \overset{?}{\in} L(A)$

Как смятаме това в недетерминиран автомат?

Def $\delta^*_A : \Sigma^* \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$

$$\forall w \in \Sigma^* \quad \delta^*_A(w) = \{q \in Q \mid (\exists q_0 \in I)(q_0 \xrightarrow[A]{w} q)\}$$

Заб: Тогава $w \in L(A) \iff F \cap \delta^*_A(w) \neq \emptyset$

Св-ва $\forall w' \in \Sigma^* \quad \forall a \in \Sigma$

$$\delta^*_A(w'a) = C_\varepsilon(\{q \in Q \mid (\exists q' \in \delta^*_A(w'))(\langle q', a, q\rangle \in \Delta)\})$$

$$\delta^*_A(\varepsilon) = C_\varepsilon(I)$$

Т.е. можем да пресмятаме $\delta^*_A(w)$ "постъпково" по дължината на w и няма нужда да разглеждаме всички пътища в автомата.

Р-е на задачата:

$\delta^*_A(\varepsilon) = C_\varepsilon(I) = \{q_1, q_3\}$

$\delta^*_A(b) = C_\varepsilon(\{q_2\}) = \{q_2, q_4\}$

$\delta^*_A(bb) = C_\varepsilon(\{q_2, q_4\}) = \{q_2, q_4\}$

$\delta^*_A(bba) = C_\varepsilon(\{q_2, q_5, q_4\}) = \{q_2, q_5, q_4\}$

$\delta^*_A(bbaa) = C_\varepsilon(\{q_2, q_5, q_1, q_4\}) = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$

$\delta^*_A(bbaab) = C_\varepsilon(\{q_2, q_4\}) = \{q_2, q_4\}$

$\delta^*_A(bbaab) \cap F = \{q_4\}$

$\Rightarrow bbaab \in L(A)$

$\square$