Афинни изображения, еднаквости, подобности

Определение 1 Нека A и B са афинни пространства, $\dim A = m$, $\dim B = n$, K и L са афинни координатни системи съответно в A и B,
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} : A \to \mathbb{R}^m$ и $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} : B \to \mathbb{R}^n$ са координатните изображения, съответни на K и L, и $F : A \to B$ е изображение. Нека $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ е изображението, което съответства на F в координати относно K и L, тоест изображението, такова, че ако $P \in A$ има координатен вектор $x(P) \in \mathbb{R}^m$ спрямо K, то $F(P) \in B$ има координатен вектор $y(F(P)) = \varphi(x(P)) \in \mathbb{R}^n$ спрямо L. Тогава казваме, че $y = \varphi(x)$ *е уравнение на* F *спрямо* K *и* L и пишем $F : y = \varphi(x)$.
Ако $A = B$ и $K = L$, то казваме, че $y = \varphi(x)$ *е уравнение на* F *спрямо* K.

Забележка 1 $\varphi = y \circ F \circ x^{-1}$, така че φ наистина съществува и се определя еднозначно от F.

Пример 1 Нека A е крайномерно афинно пространство и K е афинна координатна система в A. Тогава тъждественото изображение $A \to A$, $P \mapsto P$, има спрямо K уравнение $y = x$.

Пример 2 Нека A е крайномерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U и $u \in U$ е фиксиран вектор. Дефинираме $F : A \to A$ по следния начин: ако $P \in A$, то $F(P) = Q$, където $Q \in A$ е единствената точка, за която $\overrightarrow{PQ} = u$. F се нарича *транслация с вектора* u.

Ако K е афинна координатна система в A и координатният вектор на u спрямо K е s, то F има спрямо K уравнение $y = s + x$.

Пример 3 Нека A е крайномерно афинно пространство, $C \in A$ е фиксирана точка и $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, е фиксирано число. Дефинираме $F : A \to A$ по следния начин: ако $P \in A$, то $F(P) = Q$, където $Q \in A$ е единствената точка, за която $\overrightarrow{CQ} = c.\overrightarrow{CP}$. F се нарича *хомотетия с център* C *и коефициент* c.

Ако $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в A и C има координатен вектор ζ спрямо K, то F има спрямо K уравнение $y = s + cx$, където $s = (1 - c)\zeta$. Обратно, при $c \neq 1$ уравнението $y = s + cx$ е уравнение спрямо K на някоя хомотетия.

Когато $C = O$, то $\zeta = 0$ и хомотетията с център O и коефициент c има спрямо K уравнение $y = cx$.

Пример 4 Нека A е крайномерно евклидово афинно пространство, $K = Oe_1 \dots e_n$ е ортонормирана координатна система в A и $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$. Фиксираме едно $i \in \{1, \dots, n\}$. Изображението $F : A \to A$, което спрямо K има уравнения

$$F : \begin{cases} y_i = d.x_i \\ y_j = x_j \qquad \text{при } j \neq i \end{cases},$$

се нарича *дилатация по i-тата координатна ос на K с коефициент d.*
(F е изображението, при което всички координати остават същите с изключение на i-тата, която се „свива“ (при $d < 1$) или „разтяга“ (при $d > 1$) с коефициент на пропорционалност d. При $d = 1$ имаме тъждественото изображение.)

Уравненията на F могат да се напишат във вида $F : y = D_i x$, където D_i е диагоналната квадратна матрица от ред n, на която i-тият елемент по диагонала е d, а всички останали елементи по диагонала са 1.

Определение 2 Нека A и B са афинни пространства, моделирани съответно върху линейните пространства U и V. Изображението $F : A \to B$ се нарича *афинно изображение*, ако съществува линейно изображение $\Phi : U \to V$ такова, че за всеки $P_1, P_2 \in A$ е изпълнено $\overrightarrow{F(P_1)F(P_2)} = \Phi\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)$. Ако освен това F е биекция, то F се нарича *афинен изоморфизъм* или *афинна трансформация.*

Пример 5 Тъждественото изображение и транслациите в афинно пространство са афинни изоморфизми — при тях $\Phi : U \to U$ е тъждественото изображение на U.

Пример 6 Хомотетиите в афинно пространство са афинни изоморфизми — при тях $\Phi : U \to U$ е умножението с c.

Пример 7 Нека A е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, и $O \in A$ е фиксирана точка. Изображението *радиус-вектор с начало O*

$$r_O : A \to U, \quad P \mapsto r_O(P) = \overrightarrow{OP}$$

(тоест на точка се съпоставя радиус-векторът ѝ спрямо O), е афинен изоморфизъм — съответното $\Phi : U \to U$ е тъждественото изображение на U.

Пример 8 Нека U и V са линейни пространства и $\Phi : U \to V$ е линейно изображение. Тогава, разглеждайки U и V като афинни пространства, Φ е афинно изображение, като съответното линейно изображение е Φ. При това Φ е афинен изоморфизъм тогава и само тогава, когато е линеен изоморфизъм.

Пример 9 Успоредното проектиране на геометричното пространство в равнина е афинно изображение, което не е афинен изоморфизъм (тоест не е биекция). Същото важи за успоредното проектиране на геометричното пространство или геометричната равнина върху права.

Теорема 1 *Нека A и B са крайномерни афинни пространства, а K и L са афинни координатни системи съответно в A и B. Тогава:*

1. *$F : A \to B$ е афинно изображение $\Leftrightarrow$ уравнението на F спрямо K и L е от вида $y = s + Tx$.*
2. *$F : A \to B$ е афинен изоморфизъм $\Leftrightarrow$ матрицата T в 1. е обратима. (В частност от това следва, че съществува афинен изоморфизъм $F : A \to B \Leftrightarrow$ $\dim A = \dim B$.)*

Пример 10 За диагоналната матрица D_i от Пример 4 имаме $\det D_i = d > 0$ и значи D_i е обратима. Следователно дилатациите в крайномерно евклидово афинно пространство са афинни изоморфизми.

Пример 11 Нека A е n-мерно афинно пространство и K е афинна координатна система в A. Тогава координатното изображение $x : A \to \mathbb{R}^n$ е афинен изоморфизъм. Това следва от Теорема 1, защото уравнението му спрямо K и стандартната координатна система K^0 на $\mathbb{R}^n$ е $y = x$.

Определение 3 Нека A и B са евклидови афинни пространства. Изображението $F : A \to B$ се нарича *еднаквост* или *метрична трансформация* или *изометрия*, ако е биекция и запазва разстоянието между точките, тоест ако за всеки $P_1, P_2 \in A$ е изпълнено $|F(P_1)F(P_2)| = |P_1P_2|$.

Забележка 2 В горното определение „биекция“ може да се замени със „сюрекция“, защото от $|F(P_1)F(P_2)| = |P_1P_2|$ следва, че F е инекция.

Пример 12 В евклидово афинно пространство тъждественото изображение, транслациите и изображението радиус-вектор са еднаквости.

Теорема 2 *Нека A и B са крайномерни евклидови афинни пространства, а K и L са ортонормирани координатни системи съответно в A и B. Тогава $F : A \to B$ е еднаквост $\Leftrightarrow$ уравнението на F спрямо K и L е от вида $y = s + Tx$, където матрицата T е ортогонална (и следователно $\dim A = \dim B$).*

Пример 13 От Теорема 2 още веднъж се вижда, че тъждественото изображение и транслациите в крайномерно евклидово афинно пространство са еднаквости, защото те имат уравнение от вида $y = s + Tx$, където $T = E$.

Пример 14 Нека A е n-мерно евклидово афинно пространство и K е ортонормирана координатна система в A. Тогава координатното изображение $x : A \to \mathbb{R}^n$ е еднаквост. Това следва от Теорема 2, защото уравнението му спрямо K и стандартната координатна система K^0 на $\mathbb{R}^n$ е $y = x$ и K^0 е ортонормирана.

Определение 4 Нека A и B са крайномерни евклидови афинни пространства. Изображението $F : A \to B$ се нарича *подобност*, ако е биекция и съществува $c > 0$ такова, че за всеки $P_1, P_2 \in A$ е изпълнено $|F(P_1)F(P_2)| = c|P_1P_2|$.

Забележка 3 В горното определение „биекция“ може да се замени със „сюрекция“, защото от $|F(P_1)F(P_2)| = c|P_1P_2|$ следва, че F е инекция.

Пример 15 Всяка еднаквост е подобност с коефициент $c = 1$.

Пример 16 Хомотетиите с коефициент c са подобности с коефициент c.

Теорема 3 *Нека A и B са крайномерни евклидови афинни пространства, а K и L са ортонормирани координатни системи съответно в A и B. Тогава $F : A \to B$ е подобност с коефициент $c \Leftrightarrow$ уравнението на F спрямо K и L е от вида $y = s + cTx$, където матрицата T е ортогонална (и следователно $\dim A = \dim B$).*

Пример 17 От Теорема 3 още веднъж се вижда, че хомотетиите в крайномерно евклидово афинно пространство са подобности, защото те имат уравнение от вида $y = s+cTx$, където $T = E$.

Следствие 1 *Еднаквостите и подобностите са афинни изоморфизми.*

Теорема 4 *Нека A и B са крайномерни афинни пространства, C е афинно подпространство на A и $F : A \to B$ е афинно изображение. Тогава $F(C)$ е афинно подпространство на B. Ако освен това F е афинен изоморфизъм, то $\dim F(C) = \dim C$.*

Забележка 4 От Следствие 1 е ясно, че Теорема 4 важи в частност за еднаквостите и подобностите, тоест образът на афинно подпространство при еднаквост или подобност е афинно подпространство със същата размерност.

Твърдение 1

1. *Композицията на афинни изображения, афинни изоморфизми, еднаквости, подобности е съответно афинно изображение, афинен изоморфизъм, еднаквост, подобност.*

2. *Обратното изображение на афинен изоморфизъм, еднаквост, подобност е съответно афинен изоморфизъм, еднаквост, подобност.*

Определение 5 Нека A и B са афинни пространства и $M \subset A$ и $N \subset B$. Казваме, че *M и N са афинно еквивалентни*, ако съществува афинна трансформация $F : A \to B$ такава, че $F(M) = N$. Ако освен това A и B са евклидови, то казваме, че *M и N са еднакви* или *метрично еквивалентни*, ако съществува еднаквост (тоест метрична трансформация) $F : A \to B$ такава, че $F(M) = N$, и казваме, че *M и N са подобни*, ако съществува подобност $F : A \to B$ такава, че $F(M) = N$.

Твърдение 2 *Афинната еквивалентност, еднаквостта и подобността на подмножества на афинно пространство A (евклидово в последните два случая) са релации на еквивалентност в множеството на всички подмножества на A.*

Твърдение 3 *Всеки две k-мерни афинни подпространства на крайномерно афинно пространство (съответно крайномерно евклидово афинно пространство) са афинно (съответно метрично) еквивалентни.*

Теорема 5 *Всеки афинен изоморфизъм на n-мерни евклидови афинни пространства може да се представи като композиция на еднаквост и n дилатации по взаимно перпендикулярни оси с общо начало, тоест ако A и B са n-мерни евклидови афинни пространства и $F : A \to B$ е афинен изоморфизъм, то съществуват еднаквост $G : A \to B$, ортонормирана координатна система в A и за $i = 1, \dots, n$ дилатация H_i по i-тата ѝ координатна ос с някакъв коефициент d_i, такива че $F = G \circ H_1 \circ \dots \circ H_n$.*
(без доказателство)

Забележка 5 От Теорема 5 следва, че афинно еквивалентните фигури на дадена фигура в n-мерно евклидово афинно пространство се получават като се вземат еднаквите на нея фигури и се деформират (тоест разтегнат или сплескат с някакъв коефициент на пропорционалност) по направленията на n перпендикулярни прави с общо начало.

Забележка 6 Както е известно от курса по алгебра, в линейната алгебра може да не се прави разлика между изоморфните линейни пространства, защото те имат едни и същи линейно-алгебрични свойства. Тъй като крайномерните линейни пространства са изоморфни тогава и само тогава, когато имат една и съща размерност, то от гледна точка на линейната алгебра има по същество единствено n-мерно линейно пространство, а именно $\mathbb{R}^n$. По същия начин в афинната геометрия (тоест теорията на афинните пространства) може да не се прави разлика между афинните пространства, между които има афинен изоморфизъм, а в евклидовата геометрия (тоест теорията на евклидовите афинни пространства) може да не се прави разлика между евклидовите афинни пространства, между които има еднаквост. Така че от гледна точка на афинната геометрия има по същество единствено n-мерно афинно пространство, а именно $\mathbb{R}^n$, а от гледна точка на евклидовата геометрия има по същество единствено n-мерно евклидово афинно пространство, а именно $\mathbb{R}^n$.