СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Фрактали

ТЕМА №22

Съдържание

Тема 22: Фрактали

- Увод във фракталите
- Геометрични методи
- Алгебрични методи

Увод във фракталите

Какво са фракталите?

Обикновени обекти в геометрията

- Точка (0D), отсечка (1D), квадрат (2D)
- Куб (3D), тесеракт (4D), …

Фракталът има дробна размерност

- Множество на Кантор (≈0.63D)
- Крива на Кох (≈1.26D)
- Драконова крива (≈1.52D)
- Гъба на Менгер (≈2.73D)

Кошмарът за интуицията

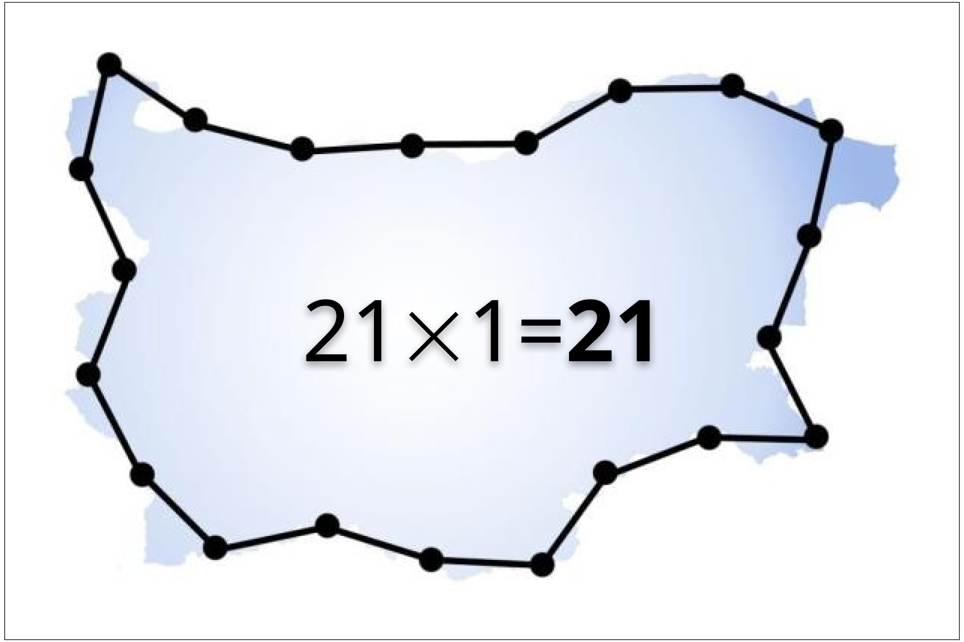
- Фракталите успешно предизвикват интуицията

Обиколка на Великобритания

- Беноà Манделброт (Benoît Mandelbrot) описва парадокса
  на крайбрежната ивица
- Интуицията казва, че колкото с по-малка мярка се мери, толкова по-точен е резултатът
- Фракталите казват: Цъ!
  (и са прави)

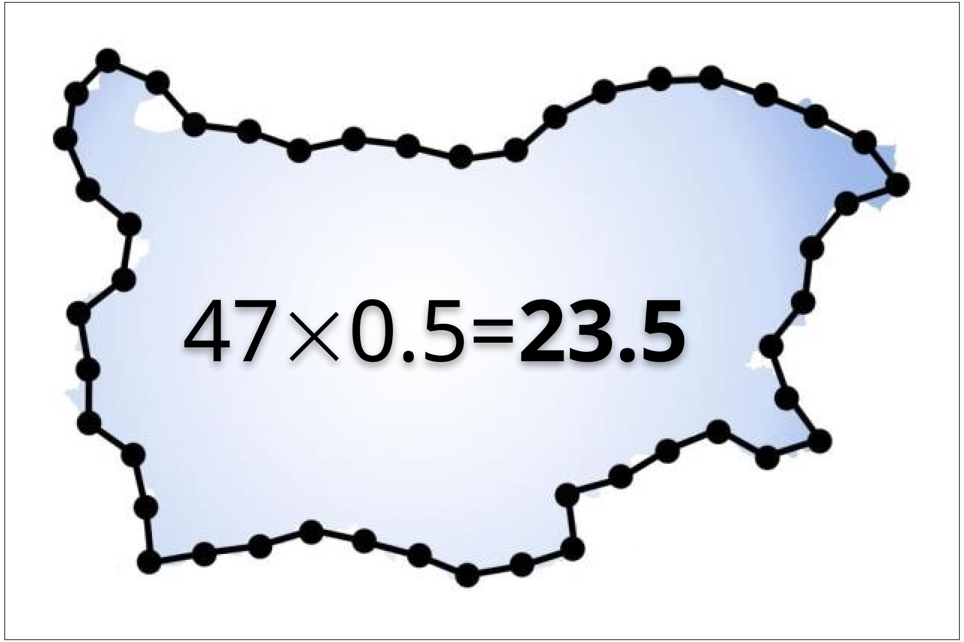
Проверка

– Започва се с разкрач 1



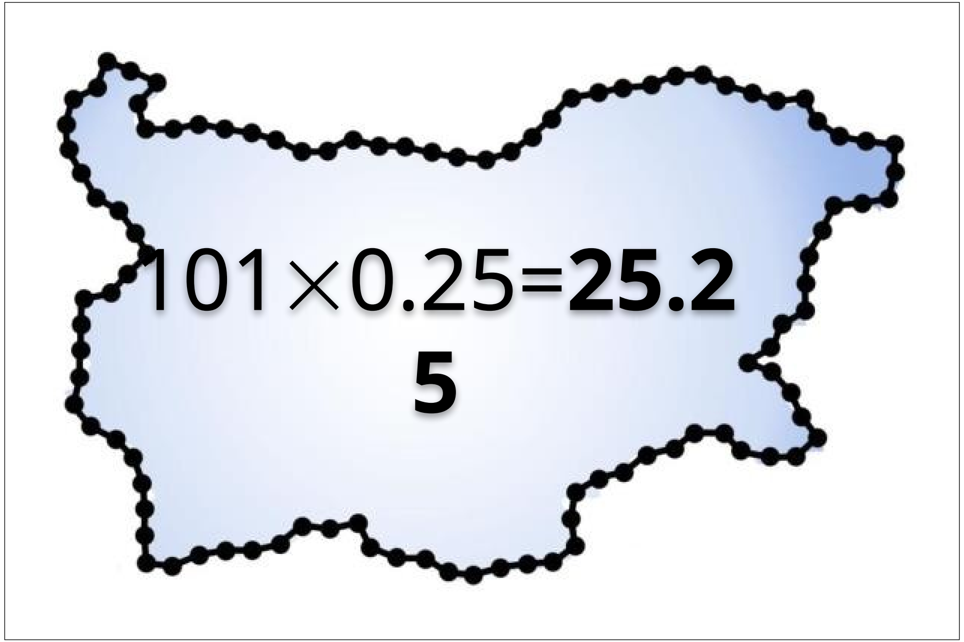
Пресмятане с разкрач 1/2

- Очаква се измерването да е по-точно



Сега с разкрач 1/4

- Трето измерване, трети резултат,
- Дали изобщо е сходящ?



А с разкрач 1/8?

– Четвърто измерване

Нямам нерви за него

Оказва се, че

- Колкото по-точно се измерва, толкова по-голям резултат ще се получава
- Практически нито един от резултатите не е верен
- Ако се подбере подходящ разкрач може да се получи каквато и да е обиколка

Пак за кошмара

За 2D фракталите е нормално

- Да имат крайно лице
- Безкраен периметър

Аналогично за 3D фракталите

- Да имат краен обем
- С безкрайно лице на повърхнината

Не може да се боядиса фрактално яйце

- Но може да се изяде

Тръбата на Архангел Гавраил

- Изследвана от Торичели – ученик на Галилео
- Ротационно тяло с профил на хипербола $y(x) = \frac{1}{x}$
- Има краен обем, но… има и безкрайно лице

Всичко около нас е фрактали

- Всъщност приближения на фрактали, доколкото позволява физическата структура
- Облаци, земя, дървета, светкавица
- Рояк мушици около гнила кайсия (или смокиня)
- Броколи (2.66D), човешки бял дроб (2.97D) и разклонения
  на кръвоносната система

Характеристики

Характеристики на фракталите

- Безкрайна вложеност на детайли
  (ама наистина безкрайна)
- Самоподобие на всички нива
- Силна връзка между класическата геометрия
  и теорията на хаоса
- Използват се за генериране на „естествени“ обекти
  и за компресиране на изображения

Два основни подхода за генериране

- Геометрични методи с рекурсивни форми и безкрайно вложени деформации
- Алгебрични методи с многократни итерации на комплексни числа
- И двата се базират на идеи от динамичните системи

Динамични системи

- Краен брой примитивни обекти, най-често един
- Прости правила, повтарящи се многократно

Геометрични методи

Геометрични методи

Чрез „раздробяващи“ деформации

- Снежинка на Кох (Koch)
- Драконова крива
- Планински масив

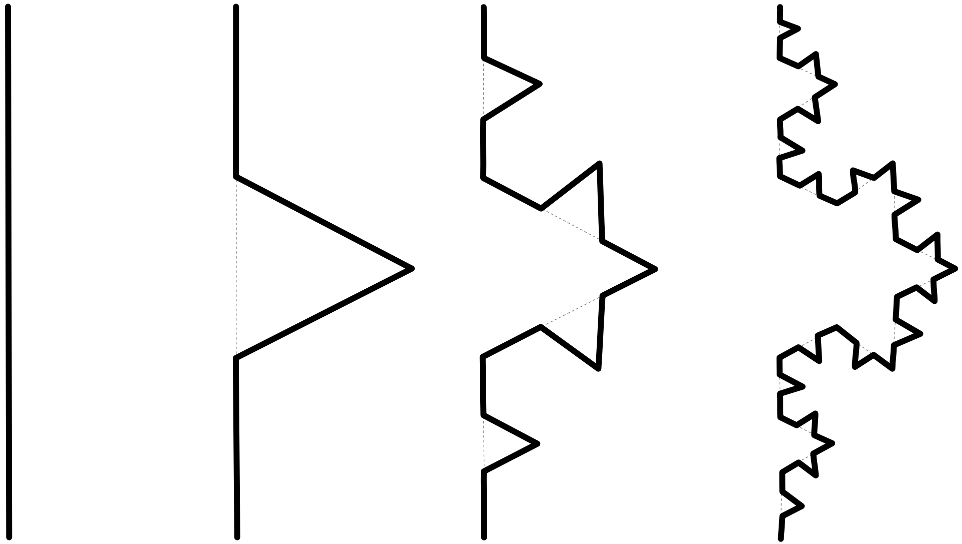
Чрез размножаване и наслагване

- Питагорово дърво
- Папратово листо

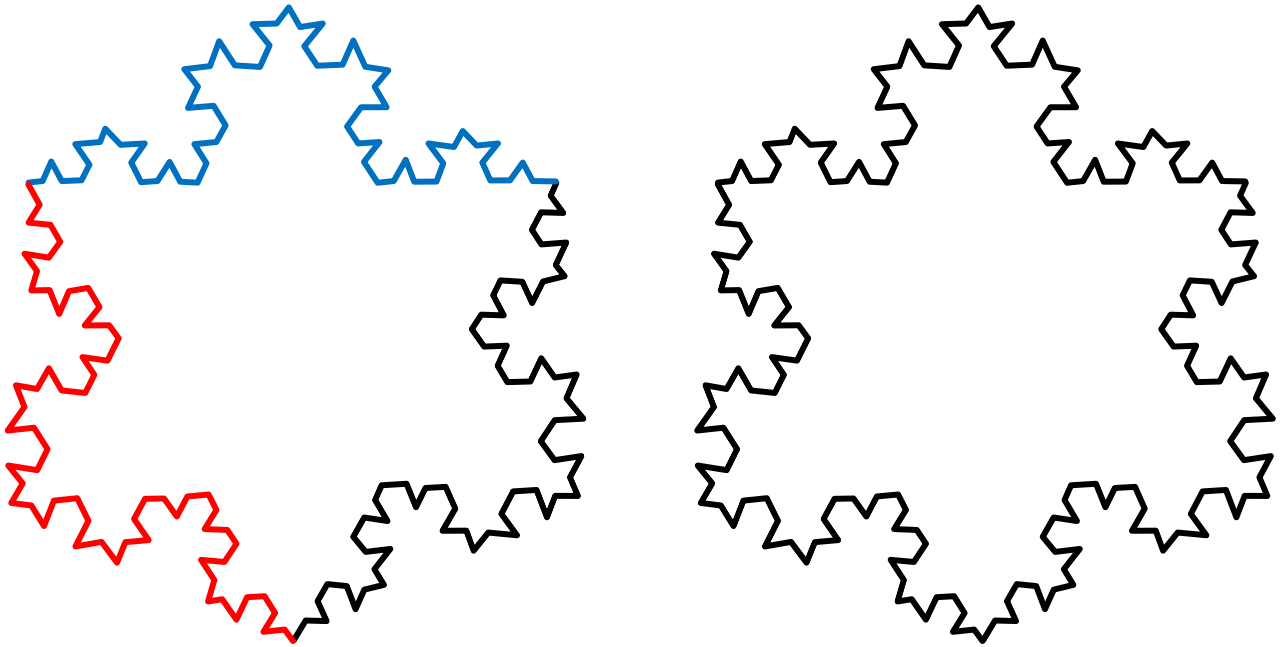
Снежинка на Кох

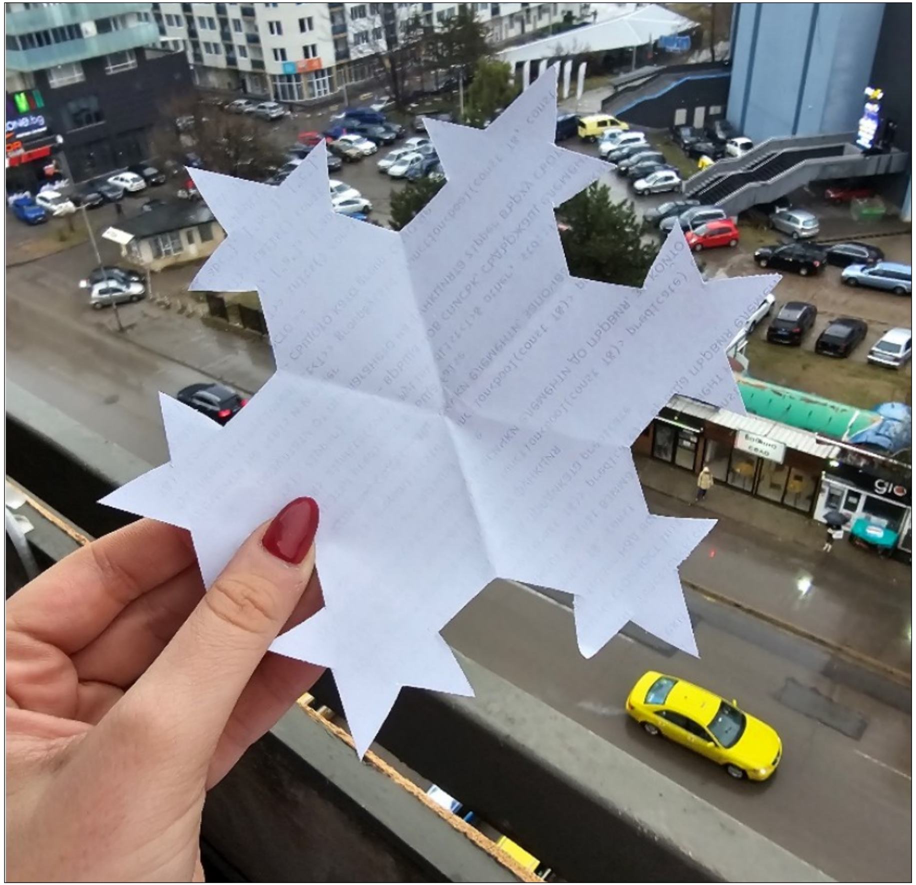
Процедура на получаване

- Крива на Кох



– Снежинка на Кох

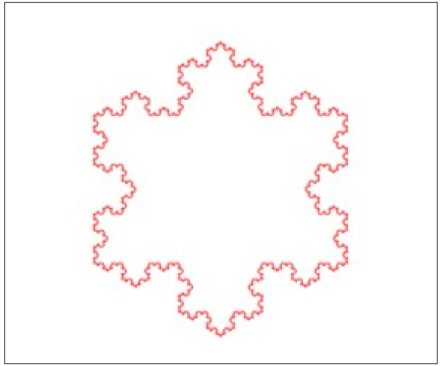
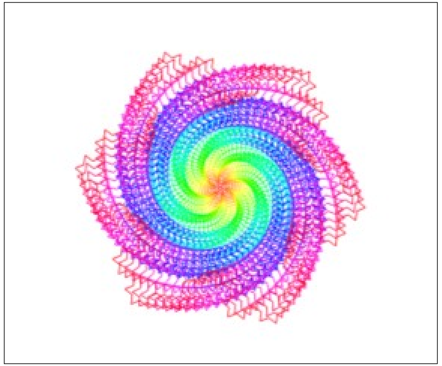
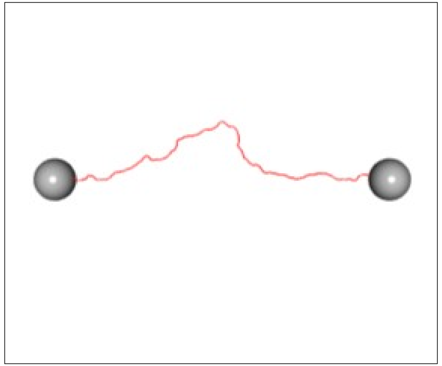




Снимка: Виолета Кастрева

Примери

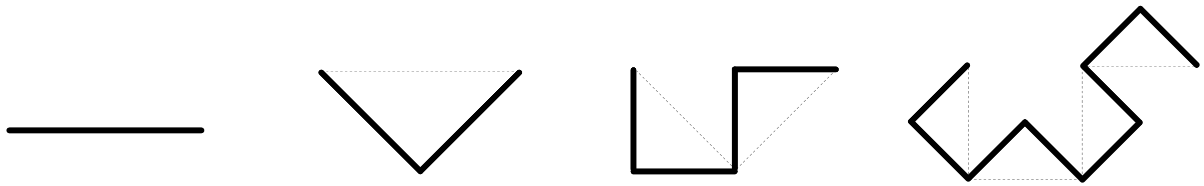
- Снежинка на Кох
- Анимация със снежинки на Кох
- Мълния на Кох

Драконова крива

Процедура на получаване

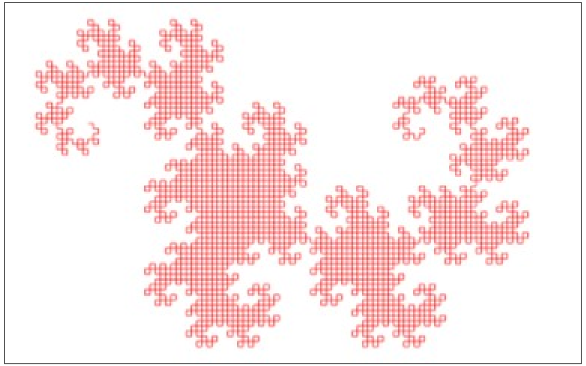
- Заменя се отсечка-хипотенуза с отсечки-катети

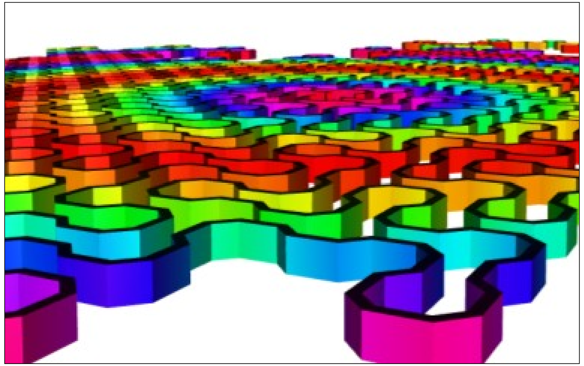


- Драконовата крива запълва 1/4 от равнината

Демонстрация

- Драконова крива
- Драконов лабиринт
  (правите ъгли са скосени леко, за да има проходимост)

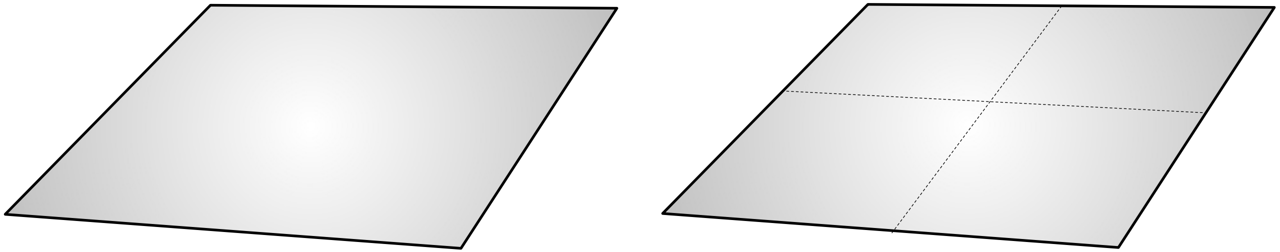




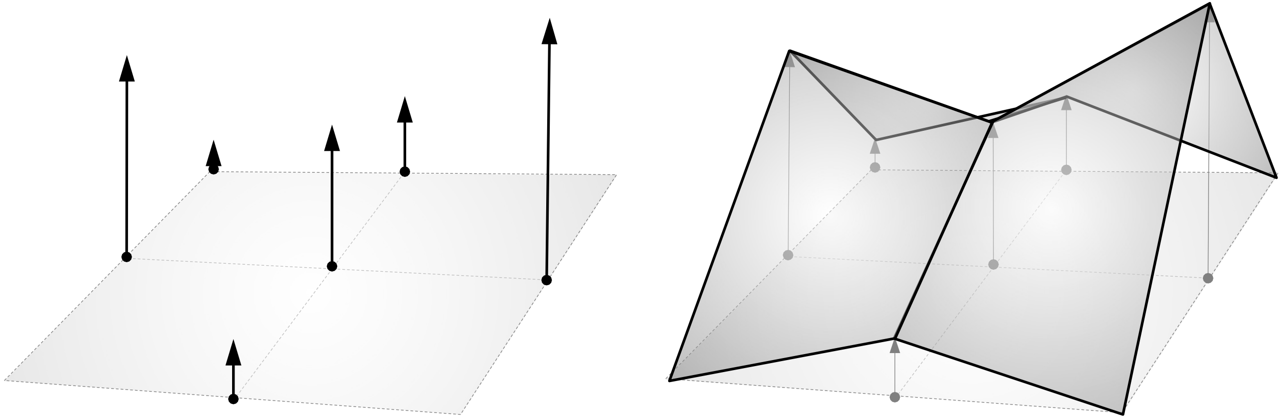
Планински масив

Генериране на случаен терен

- Планински терен, естествен на вид
- Четириъгълник за начален примитив
- Разделяме го на 4 четириъгълника

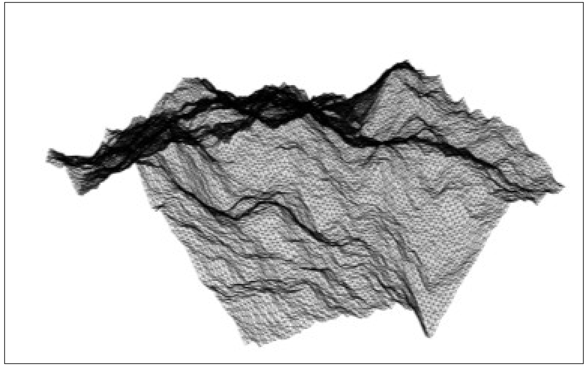


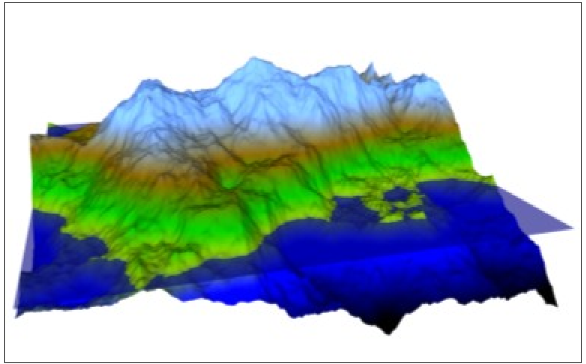
- Върховете се издигат (или спускат) на случайно разстояние
- Актуализират се новите „четириъгълници“
- Повтаря се същата процедура с тях



Пример с планина

- Раздробява се по квадрат
- Оцветява се според височината
- Осветява се според ориентацията

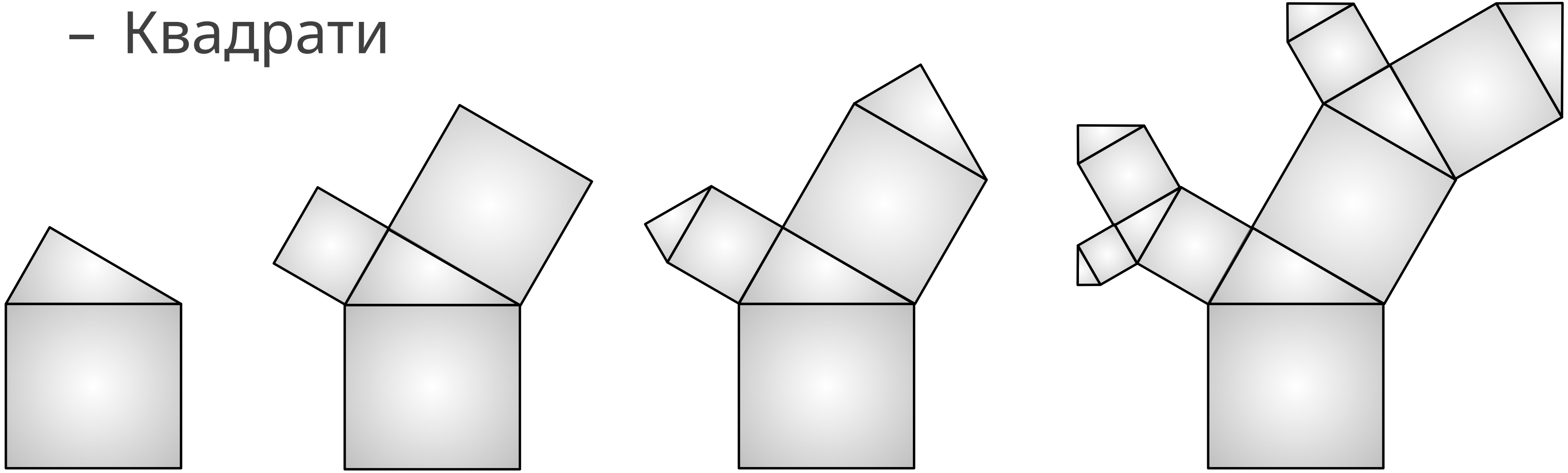




Питагорово дърво

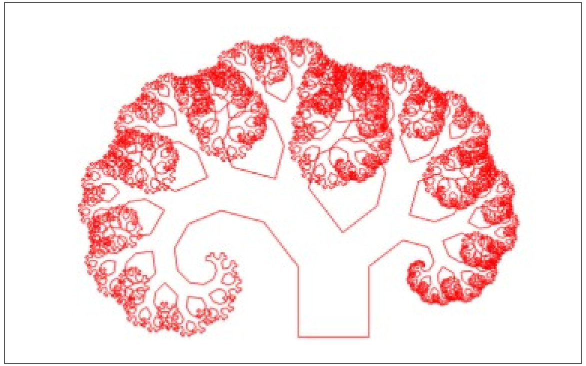
Основни елементи

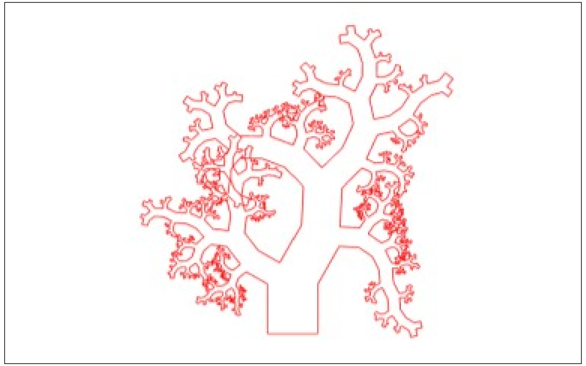
- Правоъгълни триъгълници
- Квадрати



Според ъгъла в триъгълника

- При константен ъгъл дървото е наклонено
- При случаен ъгъл то приема коралова структура

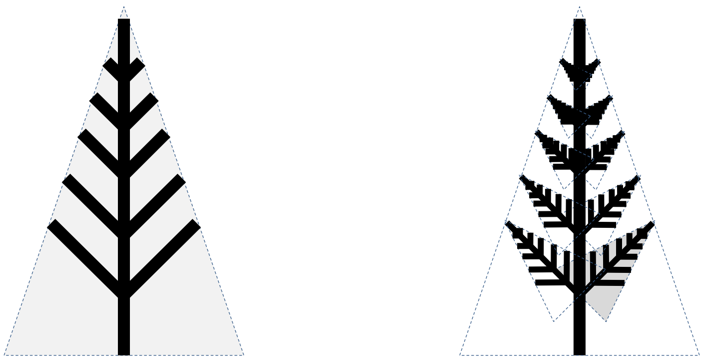




Папратово листо

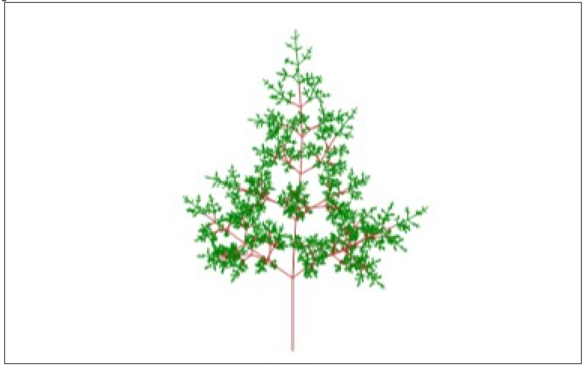
Рекурсивна фигура

- Частите на листото наподобяват цялото
- Огъване чрез ъгъл между два сегмента



Примери

- Папратово листо с еднакви междинни ъгли във възлите
- Широколистно дърво със случайни ъгли
  (иначе структурата си е на папратово листо)



Алгебрични методи

Алгебрични методи

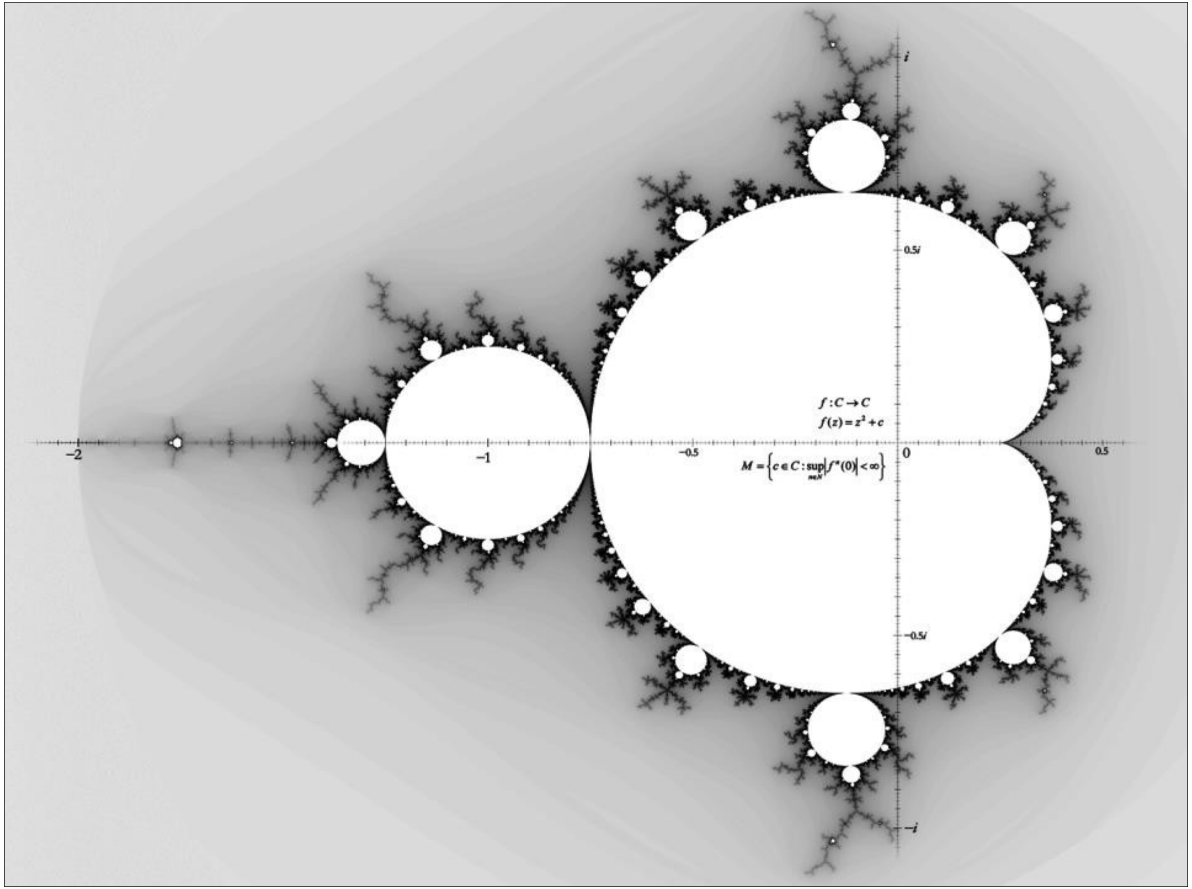
Основна идея

- Проста рекурентна връзка описваща някаква динамична система $z_i = f(z_{i-1})$
- Прилага се многократно $\{z_0, z_1, \ldots z_n, \ldots z_\infty, \ldots\}$
- Изследва се поведението ѝ
- Често резултатите са непредсказуеми

Беноа Манделброт

История

- За първи път в света използва компютър за визуализиране на поведението на динамична система
- Въвежда думата фрактал
  (от латински fractus – счупен)
- На него е кръстен фрактала Множество на Манделброт

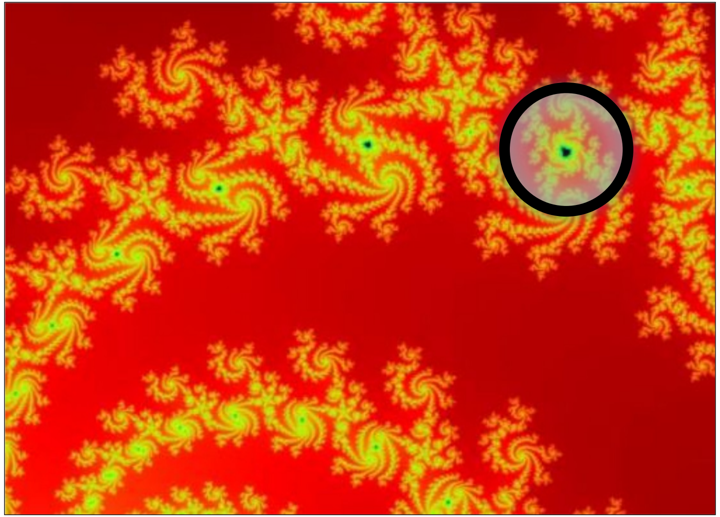


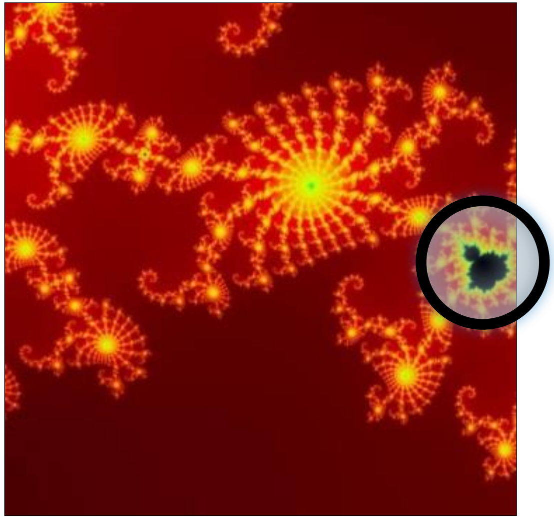
$f : C \to C$
$f(z) = z^2 + c$
$M = \left\{ c \in C : \sup_{n \in N} \left| f^n(0) \right| < \infty \right\}$
i
$0.5i$
$-0.5i$
$-i$
-2
-1
-0.5
0
0.5

Себеподобие

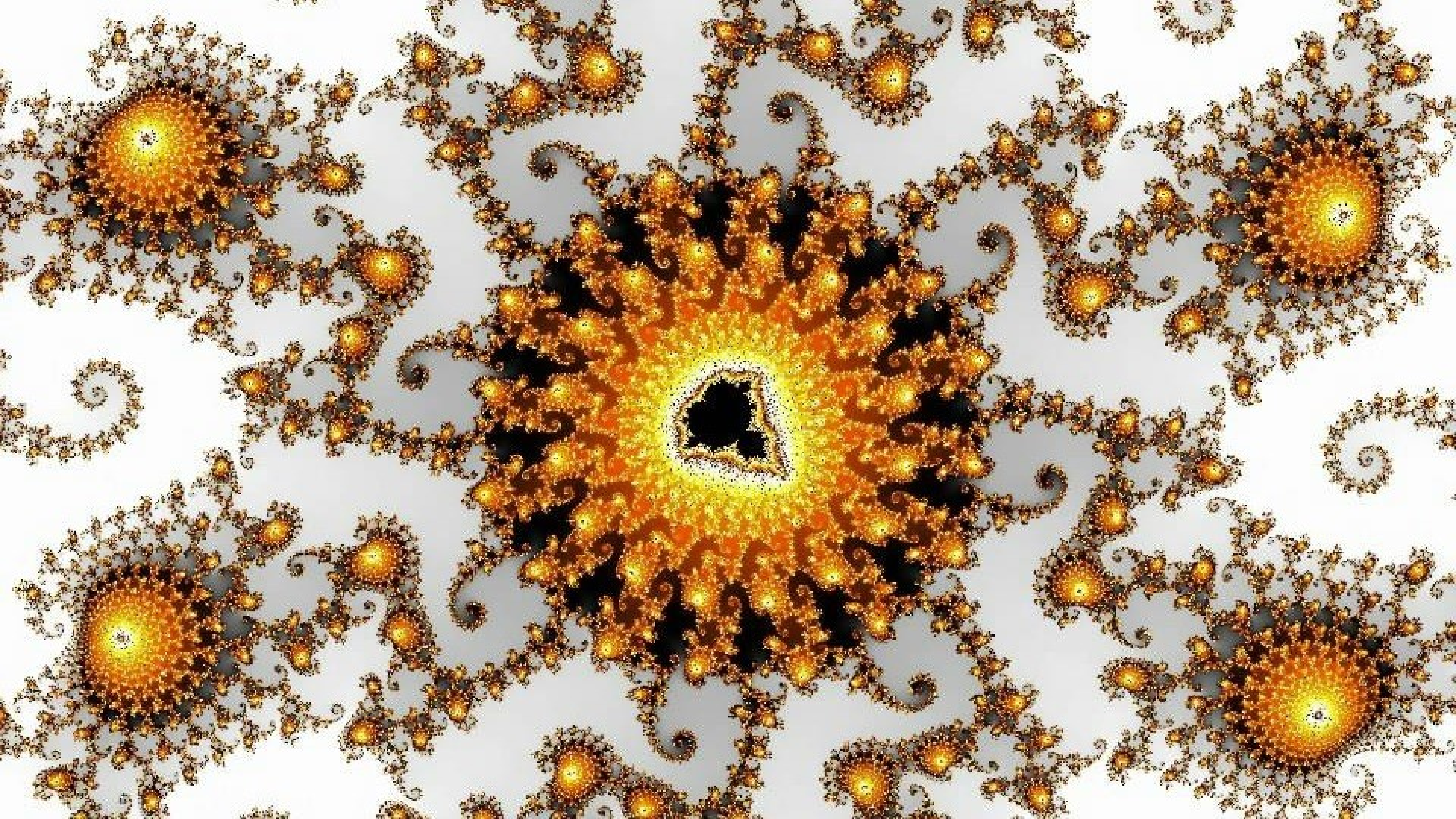
Фракталът се самосъдържа

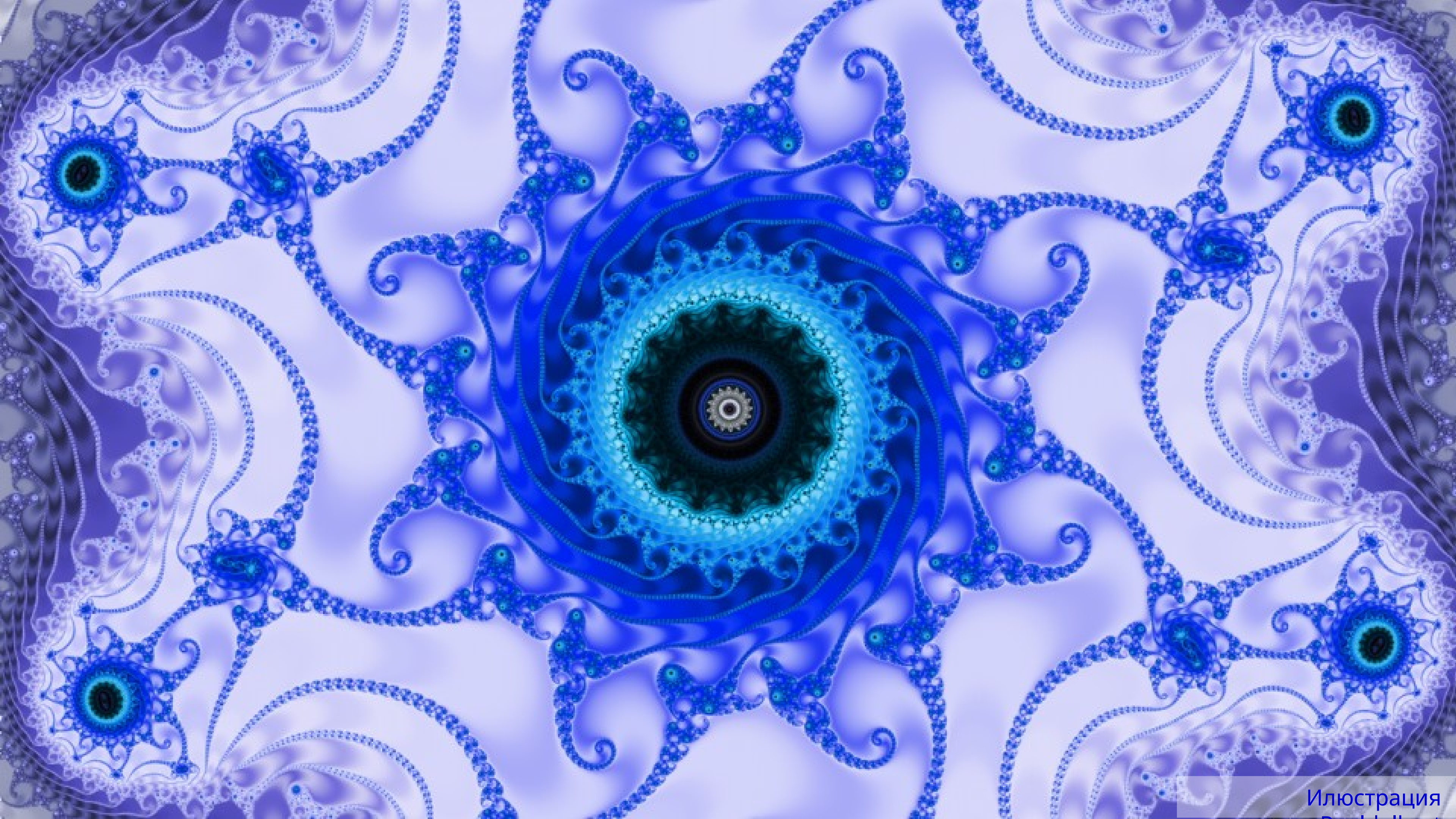
– Безкраен брой минибротчета



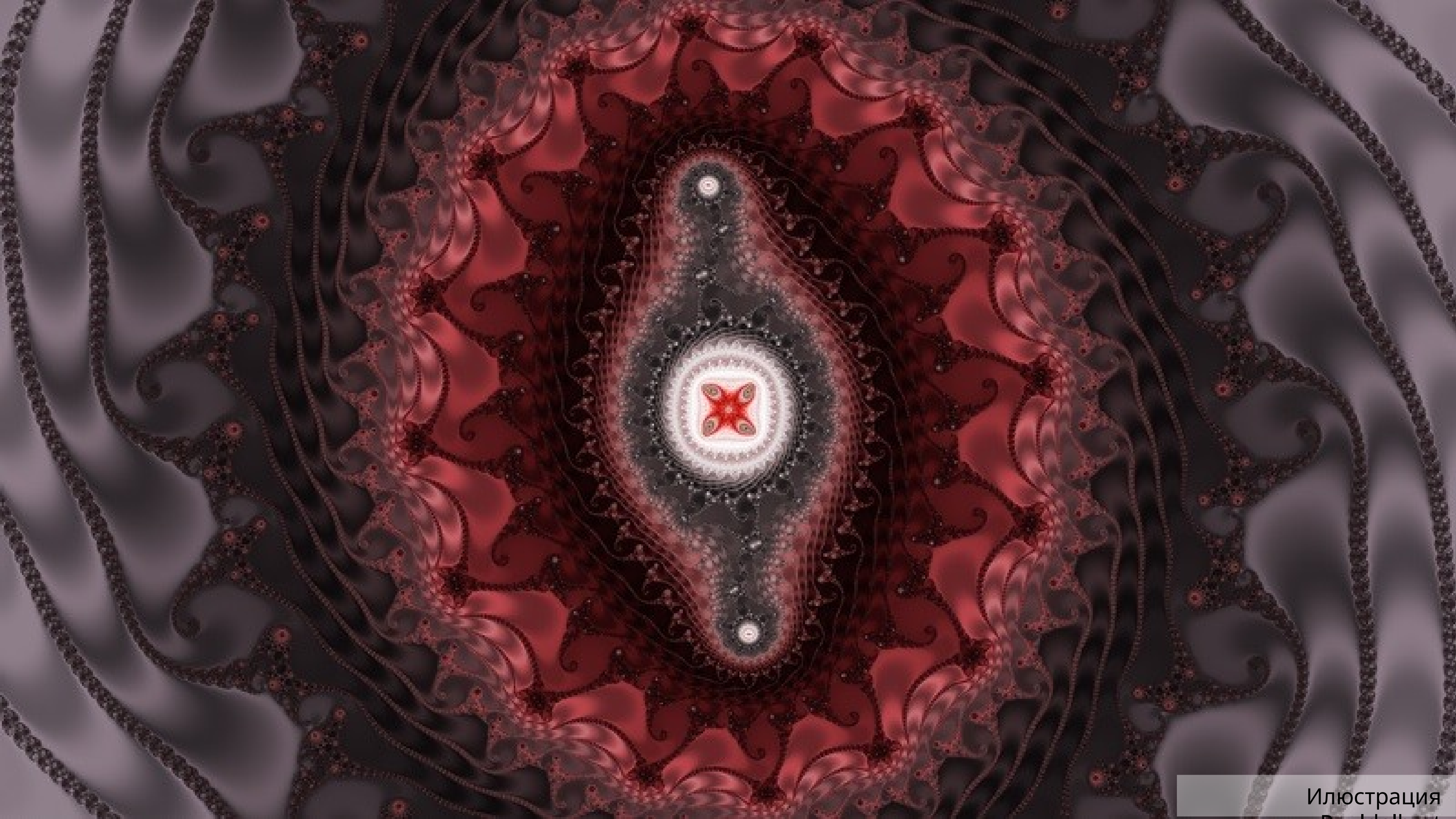


Илюстрация

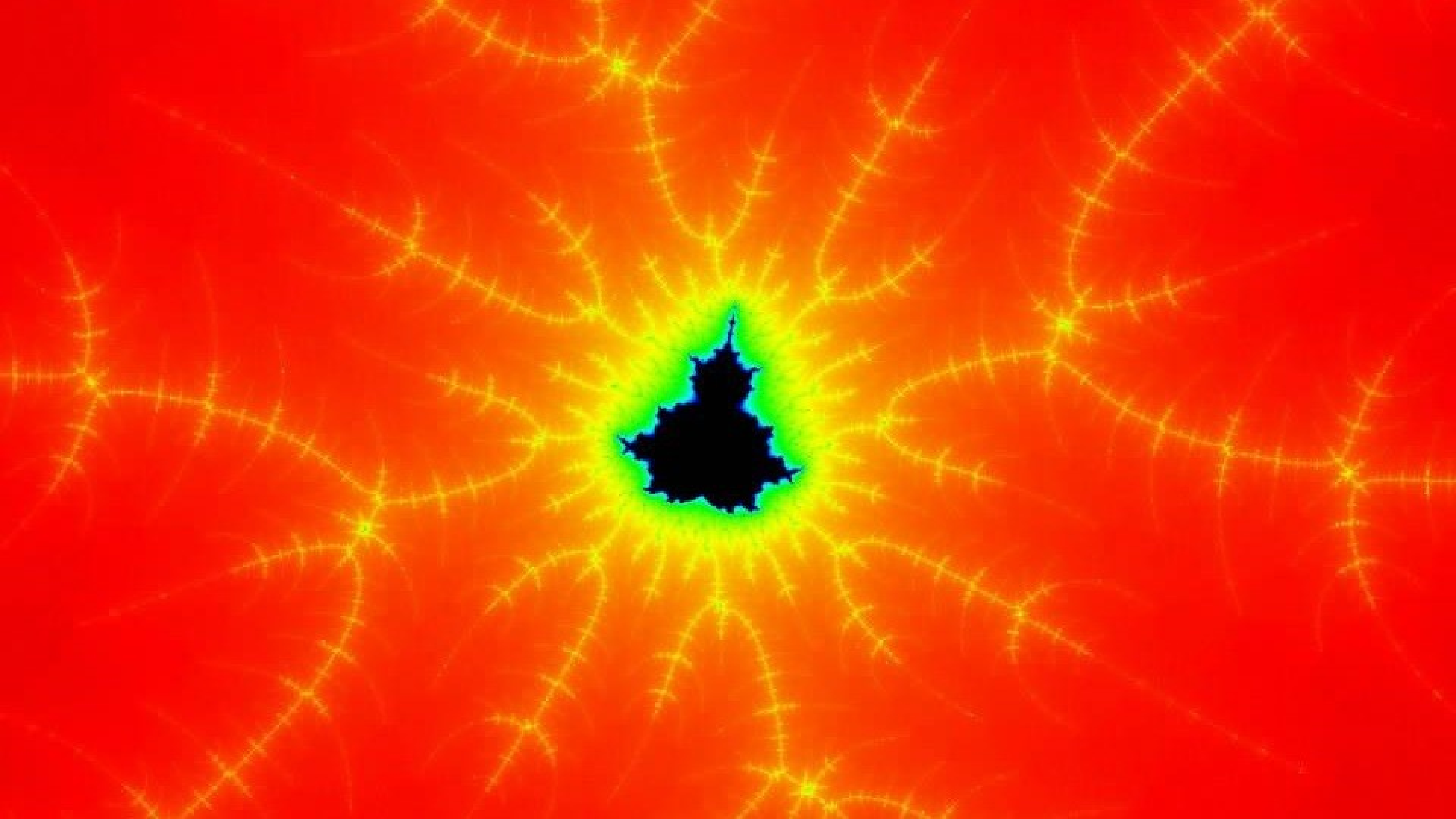




Илюстрация



Илюстрация



Генериране

Начална конфигурация

- Разглежда се комплексната равнина $\mathbb{C}$
- На всеки пиксел съответства някаква точка $c \in \mathbb{C}$
- Тя е с координати (x, y) и формула $c(x, y) = x + iy$
- Започва се от точка $z_0 \in \mathbb{C}$ като $z_0 = (0,0) = 0 + 0i$

Процес

- Повтаря се многократно стъпката $z_i = z_{i-1}^2 + c$

Наблюдава се поведението на z_i

- На пръв поглед z_i скача хаотично из $\mathbb{C}$
- На втори – може да гравитира около някоя точка
  (т.е. z_i е ограничена)
- Или да се отдалечава неустоимо и неутешимо
  (т.е. z_i е неограничена)

Накратко, пресмятат се

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 0 \\
z_1 &= z_0^2 + c = c \\
z_2 &= z_1^2 + c = c^2 + c \\
z_3 &= z_2^2 + c = \left(c^2 + c\right)^2 + c \\
z_4 &= z_3^2 + c = \left(\left(c^2 + c\right)^2 + c\right)^2 + c \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Множеството на Манделброт

- Това е множеството $\mathbb{M}$ от всички точки $c \in \mathbb{C}$, за които траекторията на $\mathbf{z_0}$ след безкрайната итерация $z \leftarrow z^2 + c$ е ограничена
- При $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \;\; f(z) = z^2 + c, \;\; f^n = f \cdot f^{n-1}$ може да се запише на един ред:

$$\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C}: sup\, |f^n(0)| < \infty\}$$

Доказано е, че

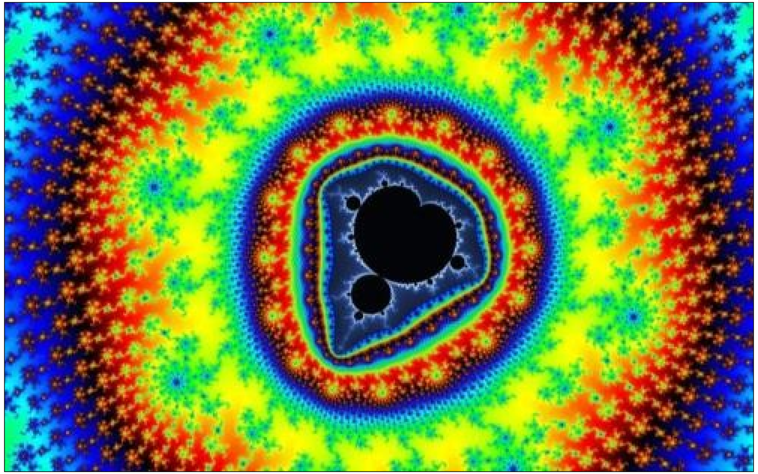
- Ако по някое време $|z_i| > 2$, точката z_i е разходяща
- Докато $|z_i| \leq 2$ нищо не може да се каже
- Понякога се налагат милиони и дори милиарди итерации, за да излезе z_i
- Понякога дори и след тях нищо не се знае

Определяне на цвета

- Зависи от скоростта, с която z_i избягва
- Слага се лимит от n итерации и се брои след колко итерации z_i излиза извън кръга с радиус 2
- Този брой определя цвета
- Ако се стигне n без да има излизане, приема се точката за ограничена

Голямата илюзия

- Множеството е това черното в средата
- Красивата цветна част е околността му

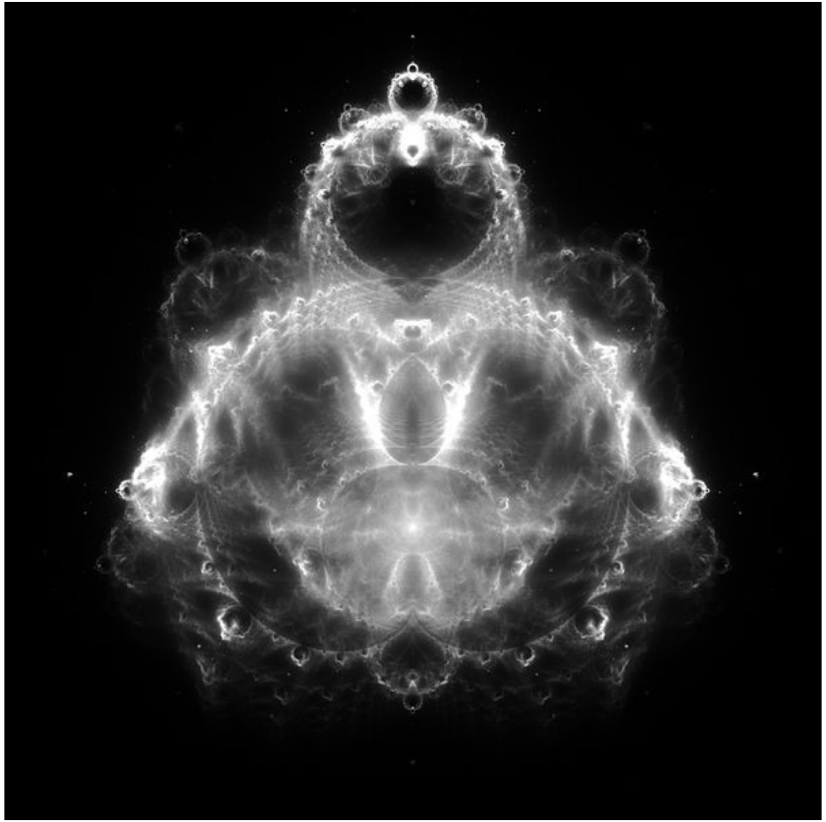


Фракталът в 3D

3D множеството на Манделброт

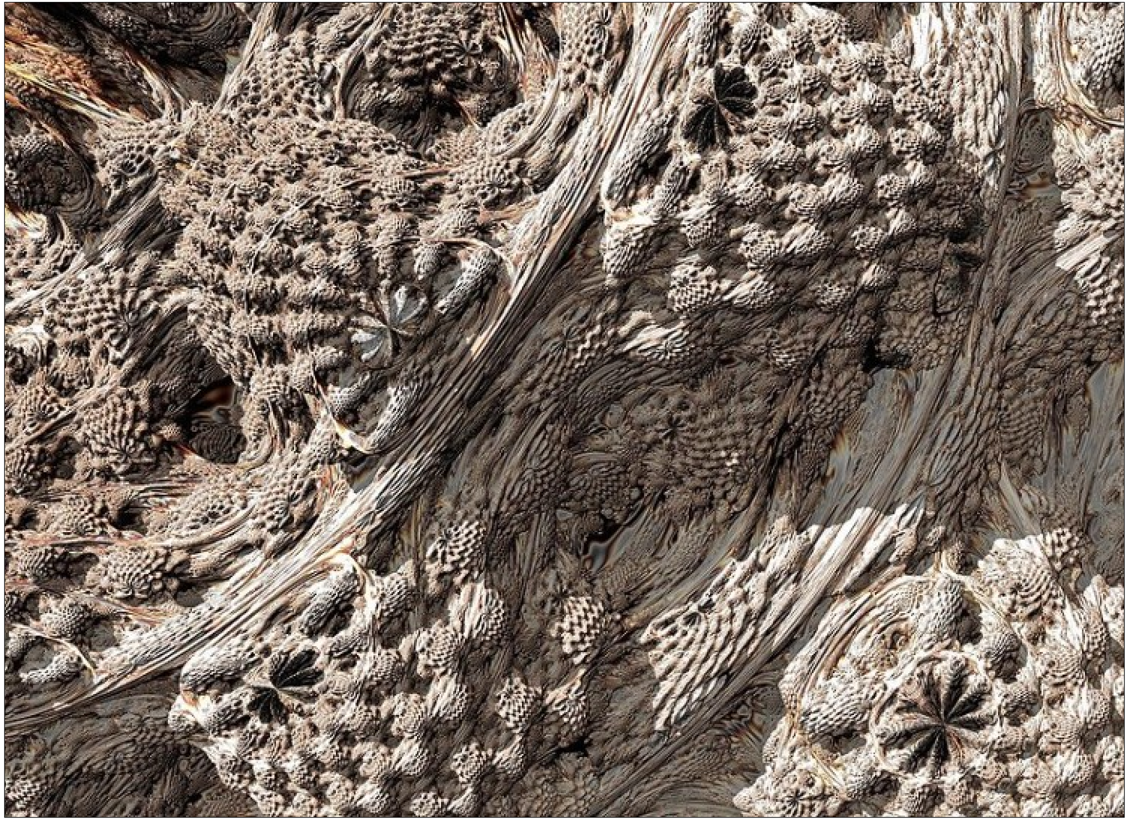
- Досега никой не е го е открил
- Много опити, различна степен на успешност
- Най-близки са постижения са Будаброт (Buddhabrot)
  и Манделбълб (Mandelbulb)

Будаброт



Илюстрация: UnreifeKirsche

Манделбълб



Илюстрация: Soler97

Самостоятелна работа

Самостоятелна работа

Намерете, вижте и разпознавайте

- Множество на Кантор
- Прах на Кантор
- Крива на Госпер
- Остров на Госпер
- Гъба на Менгер
- Крива на Кох

- Снежинка на Кох
- Триъгълник на Шерпински
- Килим на Шерпински
- Тетрахедрон на Шерпински
- Крива на Хилберт
- Крива на дракона
- Множество на Манделброт
- Дърво на Питагор
- Уплътнение на Аполон

Въпроси?

Повече информация

AGO2	стр. 188-190, 797-810	**ZHDA**	стр. 423-428
PARE	стр. 271-283	**ALZH**	гл. 8
LENG	стр. 499-503	**BAGL**	стр. 56-70
FALC	стр. xiii-xxii, 197-199, 204-205		

А също и:

– FractalForums
  http://www.fractalforums.com/ и http://www.fractalforums.org/

Край