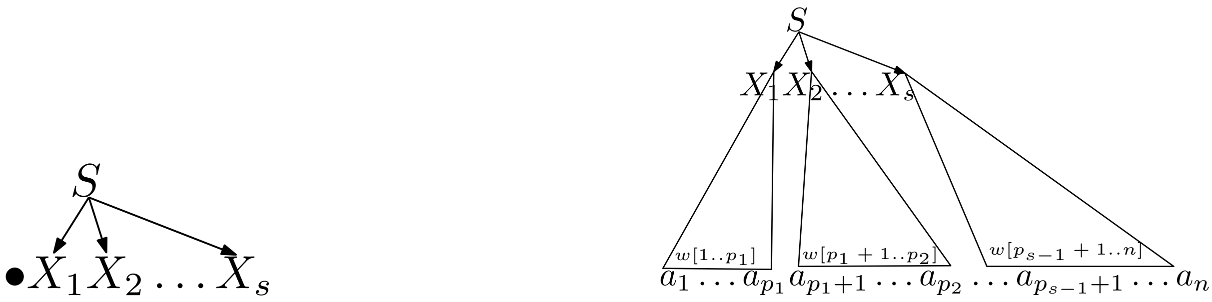


Фигура 1: Вляво, първото правило. Вдясно, един *(не)желан?* резултат.

Разглеждаме въпроса за принадлежност на дума към език, зададен с контекстносвободна граматика:

`Вход:`$G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S \rangle$ `к.св. граматика,` $w \in \Sigma^*$.
`Въпрос:`$w \in \mathcal{L}(G)$?

Оттук нататък ще предполагаме, че $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S \rangle$ е фиксирана, а $\bullet \notin \Sigma \cup \mathcal{N}$ е специален символ. Също така ще предполагаме, че $w = a_1 a_2 \dots a_n$ е дадената дума w с букви $a_i \in \Sigma$. С $w[j..i] = a_j \dots a_i$ означаваме поддумата на w от позиция $j \leq i+1$ до позиция i. В частност $w[j+1..j] = \varepsilon$ и $w[1..n] = w$.

Въпросът, разбира се, е еквивалентен на това дали:

$$S \Rightarrow^* w$$

и тъй като S е нетерминал, а w е съставена само от терминали, то е приложено поне едно правило:

$$S \Rightarrow \beta \Rightarrow^* w.$$

Ако това правило е $S \to \beta = X_1 \dots X_s$, вж. фиг. 1, то това правило съответства на дърво (храстче) на извод с корен S и листа $X_1, \dots, X_s$. Ако това правило наистина извежда $w = w[1..n]$, то ще има позиции:

$$0 = p_0 \leq p_1 \leq p_2 \dots \leq p_s = n, \text{ така че } X_i \Rightarrow^* w[p_{i-1}+1..p_i],$$

което визуално може да бъде изобразено като на фиг. 1, дясно. За съжаление, не знаем кои са (*правилните*?) позиции p_i, ако такива изобщо има. Ако *знаехме* кои са те бихме могли да определим извода $S \Rightarrow^* w[1..n]$ рекурсивно така:

`for` $i = 1$ `to` s `do`
    $X_i \Rightarrow^* w[p_{i-1}+1..p_i]$

Дори в този опростен вариант, виждаме, че картинката на фиг. 1 не възниква наведнъж, а дърветата с корен X_i се появяват едно по едно от ляво надясно, което съответства на стъпките на цикъла for.

Това, до коя итерация на този цикъл е достигнало генерирането, ще бележим с точка – $\bullet$ и може да служи за мотивация за следната дефиниция:

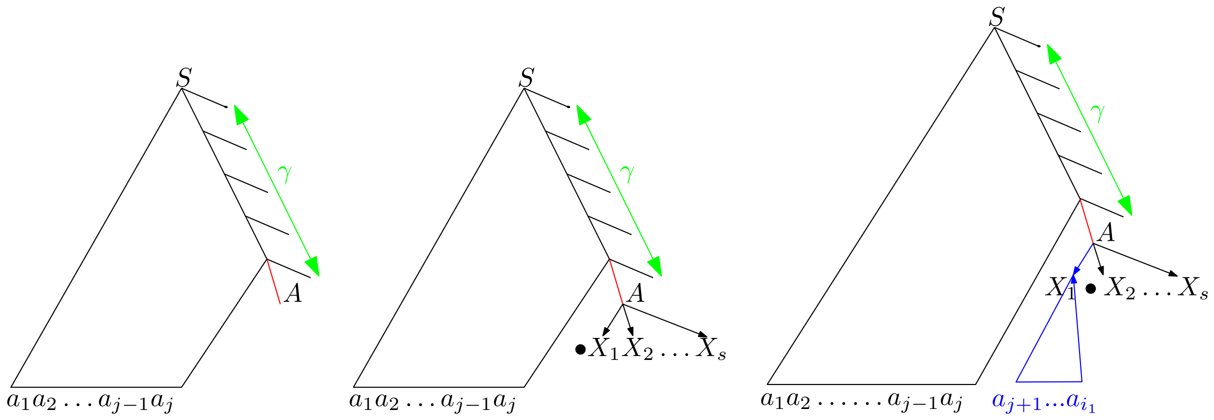
Дефиниция 0.1. Точкувано правило *за контекстносвободна граматика* $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S \rangle$ *наричаме* $(A \to \alpha \bullet \beta, j)$, *където* $A \to \alpha\beta \in P$, *а* $j \in \mathbb{N}$.

Вж. фиг 2, ляво. Ако искаме да прилагаме горния подход наистина рекурсивно, трябва да си представим не само корена — аксиомата S, но и произволен вътрешен връх в това дърво, който ще изведе поддума на w. Това, което ще видим тогава е цял изведен префикс на w, $w[1..j] = a_1 \dots a_j$, който е вляво от A. Това е смисълът на втория аргумент в точкуваното правило $(A \to \alpha \bullet \beta, j)$. Съответно в началото на рекурсивното извикване, A ще разгледа правилата си $A \to \beta \in P$ едно по едно и ще изпадне в ситуация, подобна на тази на фигура 2 по средата, $(A \to \bullet\beta, j)$. След това, целта ще бъде точката да започне да се движи надясно, както е показано на фигура 2, вдясно.

Параметърът j указва началната позиция на поддумата $w[j+1..]$, която се интересуваме дали извежда A. Това, което не може и не виждаме как да опишем удобно и точно е: *Коя/и са крайните позиции* i*:* $A \Rightarrow^* w[j+1..i]$*?*

Често, когато възникват такива (неудобни) въпроси, вместо да им отговаряме, може да ги обърнем и да питаме: *Кои са онези* A*, за които:* $A \Rightarrow^* w[j+1..i]$*?* Така всъщност се оказваме в ситуация, в която може да си мислим, че $i \leq n$ е дадено – именно това, което липсваше като информация по-горе.

Ако вместо нетерминала A, пишем точкуваното правило $(A \to \beta_1 \bullet \beta_2, j)$, което кодира откъде е започнал да работи нетерминала A и докъде е стигнал с правилото си $A \to \beta_1\beta_2$ в своя for-цикъл, получаваме достатъчно предпоставки за следната:

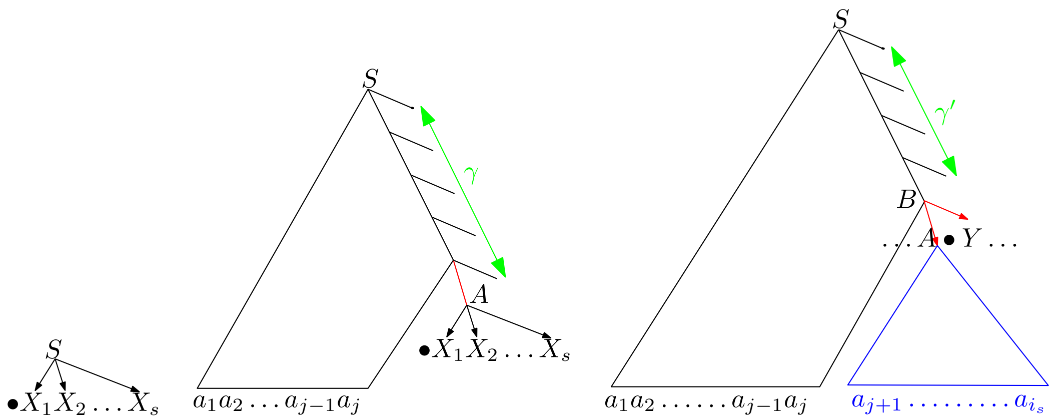


Фигура 2: Ляво: общата ситуация пред нетерминала A. По средата: A избира правило и то е преди първата итерация на цикъла for. Дясно: след първата итерация на for-цикъла.

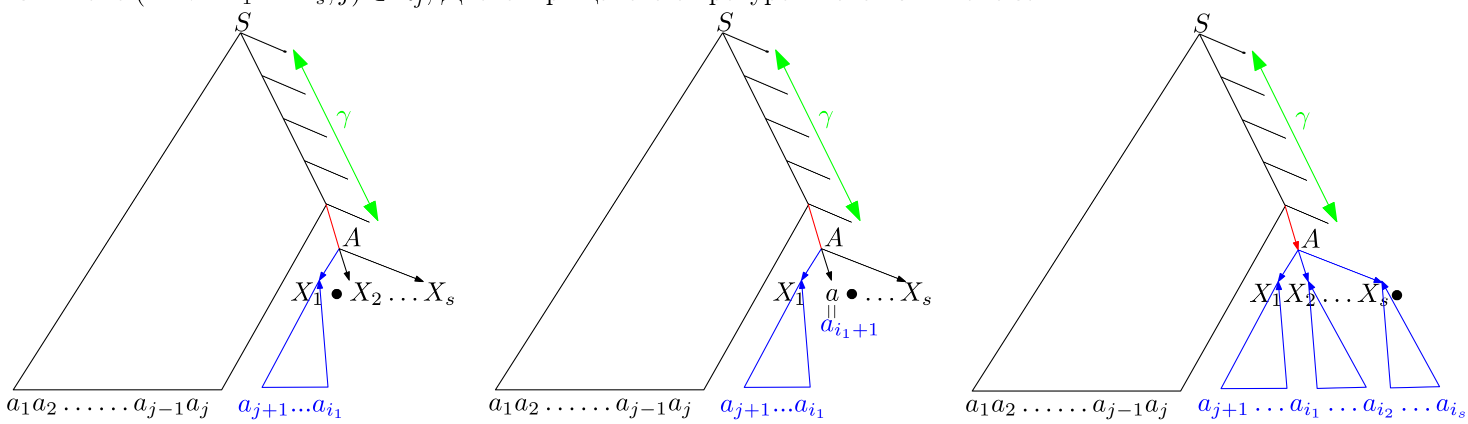
Дефиниция 0.2. *За естествено число i между 0 и n с R_i означаваме следното множество от точкувани правила за G:*

$$R_i = \{(A \to \beta_1 \bullet \beta_2, j) \,|\, \exists\gamma(S \Rightarrow^* w[1..j]A\gamma) \text{ и } \beta_1 \Rightarrow^* w[j+1..i]\}.$$

Оттук нататък методът/алгоритъмът на Earley може да се разглежда като итеративно изчисляване на множествата R_i. Визуално те съответстват на следните конфигурации, вж. фигури 3 и 4. Това, което е съществено е, че



Фигура 3: Ляво:инициализация. Среда: обобщената ситуация на инициализация, която съответства на рекурсивно извикване $(A \to \bullet X_1 \dots X_s, j) \in R_j$; Дясно: връщането от рекурсивното извикване за A.



Фигура 4: Ляво: стъпка във for-цикъла (общо); Среда: стъпка във for-цикъла, когато има терминал a; Дясно: цикълът е завършил, връщане от рекурсията, вж. и горе вдясно.

условието $(X \to \beta\bullet, j) \in R_i$ означава $\beta \Rightarrow^* w[j+1..i]$ и следователно $X \Rightarrow^* w[j+1..i]$.

Свойство 0.1. *Следните са еквивалентни:*

1. $w \in \mathcal{L}(G)$.

2. има правило $S \to \beta \in P$*, за което* $(S \to \beta\bullet, 0) \in R_n$.

Доказателство. Ако $w \in \mathcal{L}(G)$, то има извод $S \Rightarrow_G \beta \Rightarrow_G^* w$ за някое правило $S \to \beta \in P$. Но тогава $\beta \Rightarrow^* w[0+1..n] = w[1..n] = w$ и тъй като $S \Rightarrow^* S = \varepsilon S = w[1..0]S$, то по дефиниция:

$$(S \to \beta\bullet, 0) \in R_n.$$

Обратно, ако $(S \to \beta\bullet, 0) \in R_n$, то $\beta \Rightarrow^* w[0+1..n] = w$ и тъй като $S \to \beta \in P$, то $S \Rightarrow \beta \Rightarrow^* w$, тоест $w \in \mathcal{L}(G)$. $\square$

Свойство 0.2. *Ако* $S \to \beta \in P$ *е правило, то* $(S \to \bullet\beta, 0) \in R_0$.

Доказателство. Тъй като $S \Rightarrow^* S = w[1..0]S$ и $\varepsilon \Rightarrow^* \varepsilon = w[0+1..0]$, то по дефиниция $(S \to \bullet\beta, 0) \in R_0$. $\square$

Свойство 0.3 (scan)**.** *Ако* $(A \to \beta_1 \bullet a\beta_2, j) \in R_i$ *и* $a = a_{i+1}$*, то* $(A \to \beta_1 a \bullet \beta_2, j) \in R_{i+1}$.

Доказателство. Тъй като $(A \to \beta_1 \bullet a\beta_2, j) \in R_i$, то по дефиниция има дума $\gamma \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^*$:

$$S \Rightarrow^* w[1..j]A\gamma \text{ и } \beta_1 \Rightarrow^* w[j+1..i].$$

Тъй като $a = a_{i+1}$, то $\beta_1 a \Rightarrow^* w[j+1..i]a = w[j+1..i]a_{i+1} = w[j+1..i+1]$. Следователно:

$$S \Rightarrow^* w[1..j]A\gamma \text{ и } \beta_1 a \Rightarrow^* w[j+1..i+1],$$

което по дефиниция означава, че $(A \to \beta_1 a \bullet \beta_2, j) \in R_{i+1}$. $\square$

Свойство 0.4 (call)**.** *Ако* $(A \to \beta_1 \bullet X\beta_2, j) \in R_i$ *и* $X \to \beta \in P$*, то* $(X \to \bullet\beta, i) \in R_i$.

Доказателство. Тъй като $X \to \beta$ е правило, то $(X \to \bullet\beta, i)$ е точкувано правило. От това, че $(A \to \beta_1 \bullet X\beta_2, j) \in R_i$, по дефиниция има дума $\gamma \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^*$:

$$S \Rightarrow^* w[1..j]A\gamma \text{ и } \beta_1 \Rightarrow^* w[j+1..i].$$

Освен това, $A \to \beta_1 X \beta_2$ е правило, следователно:

$$S \Rightarrow^* w[1..j]A\gamma \Rightarrow w[1..j]\beta_1 X\beta_2\gamma \Rightarrow^* w[1..j]w[j+1..i]X\beta_2\gamma = w[1..i]X\beta_2\gamma.$$

Сега $\gamma' = \beta_2\gamma$ свидетелства за това, че $S \Rightarrow^* w[1..i]X\gamma'$ и тъй като очевидно $\varepsilon \Rightarrow^* \varepsilon = w[i+1..i]$, то по дефиниция:

$$(X \to \bullet\beta, i) \in R_i.$$

$\square$

Свойство 0.5 (backtrack)**.** *Ако* $(A \to \beta_1 \bullet X\beta_2, j) \in R_k$ *и* $(X \to \beta\bullet, k) \in R_i$*, то* $(A \to \beta_1 X \bullet \beta_2) \in R_i$.

Доказателство. Тъй като $(X \Rightarrow \beta\bullet, k) \in R_i$, то $\beta \Rightarrow^* w[k+1..i]$. Тъй като $(A \to \beta_1 \bullet X\beta_2, j) \in R_k$, то има дума $\gamma \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^*$, за която:

$$S \Rightarrow^* w[1..j]A\gamma \text{ и } \beta_1 \Rightarrow^* w[j+1..k].$$

Тъй като $X \Rightarrow \beta \Rightarrow^* w[k+1..i]$, то получаваме, че:

$$\beta_1 X \Rightarrow^* w[j+1..k]w[k+1..i] = w[j+1..i].$$

Сега е ясно, че $(A \to \beta_1 X \bullet \beta_2, j) \in R_i$. $\square$

Конструкция 0.1 (Метод/алгоритъм на Earley)**.** *При вход* $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S \rangle$ *и дума* $w = a_1 \dots a_n$*, итеративно строи множества от точкувани правила* $\widetilde{R}_i$ *като прилага свойства 2, 3, 4 и 5 докато това е възможно. Връща истина, ако* $\widetilde{R}_n$ *има свойството 1.*

1. $\widetilde{R}'_0 \stackrel{init}{=} \{(S \to \bullet\beta, 0) \mid S \to \beta \in P\}$.

2. $\widetilde{R}_0 = C_\varepsilon(\widetilde{R}, \widetilde{R}'_0, 0)$.

3. за i *от* 0 *до* $n-1$ *направи:*

   (а) $\widetilde{R}'_{i+1} \stackrel{scan}{=} \{(A \to \beta_1 a \bullet \beta_2, j) \mid (A \to \beta_1 \bullet a\beta_2, j) \in \widetilde{R}_i \text{ и } a = a_{i+1}\}$.

   (б) $\widetilde{R}_{i+1} = C_\varepsilon(\widetilde{R}, \widetilde{R}'_{i+1}, i+1)$.

4. върни $\widetilde{R}_n \cap \{(S \to \beta\bullet, 0) \mid S \to \beta \in P\} \neq \emptyset$.

Тук $C_\varepsilon(\widetilde{R}, \widetilde{R}'_i, i)$ скрива прилагането на свойства 4 и 5, започвайки от $\widetilde{R}'_i$ и използвайки $\widetilde{R}_j$ за $j < i$ вместо R_j. По-точно $C_\varepsilon(\widetilde{R}, \widetilde{R}'_i, i)$ се дефинира така:

1. $C^{(-1)} = \emptyset$, $C^{(0)} = \widetilde{R}'_i$, $s = 0$.
2. *докато* $C^{(s)} \neq C^{(s-1)}$, *направи:*

   (а)

$$\begin{aligned} C^{(s+1)} &= C^{(s)} \cup \underbrace{\{(X \to \bullet\beta, i) \mid \text{ има } (A \to \beta_1 \bullet X\beta_2, j) \in C^{(s)} \text{ и } X \to \beta \in P\}}_{call\ 0.4} \\ &\cup \underbrace{\{(A \to \beta_1 X \bullet \beta_2, j) \mid (A \to \beta_1 \bullet X\beta_2, j) \in C^{(s)} \text{ и има } (X \to \beta\bullet, i) \in C^{(s)}\}}_{backtrack\ 0.5: k=i,} \\ &\cup \underbrace{\{(A \to \beta_1 X \bullet \beta_2, j) \mid \text{ има } \beta \text{ и } k < i : ((A \to \beta_1 \bullet X\beta_2, j) \in \widetilde{R}_k \text{ и } (X \to \beta\bullet, k) \in C^{(s)})\}}_{backtack\ 0.5: k<i}. \end{aligned}$$

   (б) $s \leftarrow s + 1$.
3. *върни* $C^{(s)}$.

Забележка 0.1. Да забележим, че при дефиницията на $C^{(s)}$ в $C_\varepsilon(\widetilde{R}, \widetilde{R}'_i, i)$, е в сила, че

$$C^{(s)} \subseteq C^{(s+1)} \subseteq \{(A \to \beta_1 \bullet \beta_2, j) \mid j \leq i \text{ и } A \to \beta_1\beta_2 \in P\}.$$

Тъй като последното множество е крайно, то може да има само краен брой строги включвания $C^{(s)} \subsetneq C^{(s+1)}$ в тази процедура. Следователно тя завършва, тоест стъпка 3: върни $C^{(s)}$ на стъпва.

Твърдение 0.1. *След изпълнението на метода на Earley, $\widetilde{R}_i \subseteq R_i$ за всяко $i \leq n$.*

Идея. От свойство 2, $\widetilde{R}'_0 \subseteq R_0$. Също така, от свойство 3, ако $\widetilde{R}_i \subseteq R_i$, то $\widetilde{R}'_{i+1} \subseteq R_{i+1}$. Накрая, ако $\widetilde{R}_j \subseteq R_j$ за всяко $j < i$, то $C^{(0)} = \widetilde{R}'_i \subseteq R_i$. Да допуснем сега, че $C^{(s)} \subseteq R_i$. Тогава $C^{(s+1)}$ се получава от правила в $C^{(s)}$ и $\widetilde{R}_j \subseteq R_j$ за $j < i$, за които се прилагат свойства 4 и 5. Но тогава всички новодобавени правила в $C^{(s+1)}$ ще бъдат и от R_i. Така $C^{(s)} \subseteq R_i$ за всяко i, а следователно и резултатът от $C_\varepsilon(\widetilde{R}, \widetilde{R}'_i, i)$ е подмножество на R_i. Следователно, $\widetilde{R}_i \subseteq R_i$, ако $\widetilde{R}_j \subseteq R_j$ за $j < i$. Сега с индукция по i заключаваме, че $\widetilde{R}_i \subseteq R_i$ за всяко i. □

Твърдение 0.2. *Нека за някои $j \leq k \leq i$ е изпълнено, че $(A \to \beta_1 \bullet \beta_2\beta_3, j) \in \widetilde{R}_k$ и $\beta_2 \Rightarrow^* w[k+1..i]$. Тогава $(A \to \beta_1\beta_2 \bullet \beta_3, j) \in \widetilde{R}_i$.*

Доказателство. Нека $\prec$ е лексикографската наредба в $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. С индукция $(n, |\beta_2|)$ в $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \prec)$ ще покажем, че за всеки $j \leq k \leq i$ и правило $A \to \beta_1\beta_2\beta_3 \in P$, за които:

$$(A \to \beta_1 \bullet \beta_2\beta_3, j) \in \widetilde{R}_k \text{ и } \beta_2 \Rightarrow^{(n)} w[k+1..i],$$

е изпълнено, че $(A \to \beta_1\beta_2 \bullet \beta_3, j) \in \widetilde{R}_i$.

Да допуснем, че това твърдение е вярно за всички двойки $(n', m') \prec (n, |\beta_2|)$. Нека още е изпълнена предпоставката:

$$(A \to \beta_1 \bullet \beta_2\beta_3, j) \in \widetilde{R}_k \text{ и } \beta_2 \Rightarrow^{(n)} w[k+1..i].$$

Ще покажем, че $(A \to \beta_1\beta_2 \bullet \beta_3, j) \in \widetilde{R}_i$.

1. $\beta_2 = a\beta'_2$ и $a \in \Sigma$. Тогава $a = w[k+1]$. Тъй като $(A \to \beta_1 \bullet a\beta'_2\beta_3, j) \in \widetilde{R}_k$, то $(A \to \beta_1 a \bullet \beta'_2\beta_3, j) \in \widetilde{R}'_{k+1} \subseteq \widetilde{R}_{k+1}$. Сега:

   $$a\beta'_2 \Rightarrow^{(n)} w[k+1..i] \text{ и } a = w[k+1], \text{ влекат, че } \beta'_2 \Rightarrow^{(n)} w[k+2..i].$$

   Но тогава, $(n, |\beta'_2|) = (n, |\beta_2| - 1) \prec (n, |\beta_2|)$ и от индуктивното предположение, $(A \to \beta_1 a\beta'_2 \bullet \beta_3 \in \widetilde{R}_i$, тоест $(A \to \beta_1\beta_2 \bullet \beta_3 \in \widetilde{R}_i$.

2. Нека сега $\beta_2 = X\beta'_2$ за някой нетерминал $X \in \mathcal{N}$. Тогава от $X\beta'_2 \Rightarrow^{(n)} w[k+1..i]$ следва, че има $i' \leq i$ и $1 \leq n_1 \leq n$, за които:

   $$X \Rightarrow^{(n_1)} w[k+1..i'] \text{ и } \beta'_2 \Rightarrow^{(n-n_1)} w[i'+1..i].$$

   Следователно има правило $X \to \beta \in P$, за което:

   $$X \Rightarrow \beta \Rightarrow^{(n_1-1)} w[k+1..i'].$$

Тъй като $(A \to \beta_1 \bullet X\beta_2'\beta_3, j) \in \widetilde{R}_k$, то това точкувано правило е попаднало в някое от множествата $C^{(s)}$, които определят $\widetilde{R}_k$. Но тогава, от правилото (call) 0.4, $(X \to \bullet\beta, k)$ ще бъде добавено към $C^{(s+1)}$ и следователно:

$$(X \to \bullet\beta, k) \in \widetilde{R}_k.$$

Сега от индкутивното предположение за $(n_1 - 1, |\beta|) \prec (n_1, |\beta|) \preceq (n, |\beta_2|)$ и тъй като:

$$(X \to \bullet\beta, k) \in \widetilde{R}_k \text{ и } \beta \Rightarrow^{(n_1-1)} w[k+1..i'],$$

получаваме, че $(X \to \beta\bullet, k) \in \widetilde{R}_{i'}$. Следователно $(X \to \beta\bullet, k) \in C^{(s)}$ за някое s, участва в пресмятането на $\widetilde{R}_{i'}$. Тъй като $(A \to \beta_1 \bullet X\beta_2'\beta_3, j) \in \widetilde{R}_k$, то правилото (backtrack) 0.5, $(A \to \beta_1 X \bullet \beta_2'\beta_3, j)$ ще бъде добавено към $C^{(s')}$ за някое s'. Следователно $(A \to \beta_1 X \bullet \beta_2'\beta_3, j) \in \widetilde{R}_{i'}$.

Накрая, тъй като:

$$(A \to \beta_1 X \bullet \beta_2'\beta_3, j) \in \widetilde{R}_{i'} \text{ и } \beta_2' \Rightarrow^{(n-n_1)} w[i'+1..i]$$

и $n - n_1 \leq n - 1 < n$, индуктивната хипотеза, приложена за $(n - n_1, |\beta_2'|) \prec (n, |\beta_2|)$, дава, че:

$$(A \to \beta_1 X\beta_2' \bullet \beta_3, j) \in \widetilde{R}_i.$$

Това завършва доказателството.

□

Твърдение 0.3. *За всяко $i \leq n$, $\widetilde{R}_i = R_i$.*

Доказателство. Знаем, че $\widetilde{R}_i \subseteq R_i$ за всяко $i \leq n$. Остава да докажем обратното вклчване:

$$R_i \subseteq \widetilde{R}_i.$$

За целта е достатъчно да покажем, че винаги когато $(A \to \beta_1 \bullet \beta_2, j) \in R_i$ е в сила, че $(A \to \beta_1 \bullet \beta_2, j) \in \widetilde{R}_i$.

Това ще направим отново по индукция в $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \prec)$. На всяко правило $\rho = (A \to \beta_1 \bullet \beta_2, j) \in R_i$ ще съпоставим двойка $(i, d(\rho))$ от естествени числа. i е номерът на множеството R_i, на което принадлежи ρ. Втората величиниа, $d(\rho)$ ще използва информацията:

$$S \Rightarrow^* w[1..j]A\gamma \text{ за някоя дума } \gamma \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^*.$$

По-точно, от това, че $S \Rightarrow^* w[1..j]A\gamma$ следва, че има дърво на извод T с корен S и $word(T) = w[1..j]A\gamma$. В частност $A = T(\alpha_A)$ е етикетът на първото листо етикет терминал α_A в T и то си има дълбочина в T.

Нека тогава $d(\rho)$ е най-малката дълбочина на листото α_A измежду всички дървета на извод T, за които:

$$T(\varepsilon) = S \text{ и } word(T) = w[1..j]A\gamma \text{ за някоя дума } \gamma.$$

Да допуснем сега, че $\rho = (A \to \beta_1 \bullet \beta_2, j) \in R_i$ и нека за всички точкувани правила $\rho' \in R_j$, за които $(j, d(\rho')) \prec (i, d(\rho))$ е в сила, че $\rho' \in \widetilde{R}_j$. Тъй като $(A \to \beta_1 \bullet \beta_2, j) \in R_i$, то по дефиниция:

$$S \Rightarrow^* w[1..j]A\gamma \text{ и } A \to \beta_1\beta_2 \in P.$$

Следователно $\rho' = (A \to \bullet\beta_1\beta_2, j) \in R_j$. От предишното твърдение, ако $\rho' \in \widetilde{R}_j$, следва, че $\rho = (A \to \beta_1 \bullet \beta_2, j) \in \widetilde{R}_i$. Следователно е достатъчно да докажем, че $\rho' \in \widetilde{R}_j$:

1. $j < i$. Тогава $(j, d(\rho')) \prec (i, d(\rho))$ и от индуктивната хипотеза, $\rho' = (A \to \bullet\beta_1\beta_2, j) \in \widetilde{R}_j$.
2. $i = j$, $d(\rho') > 0$. Тогава $d(\rho') = d(\rho)$. Нека T е дърво на извод с дума $word(T) = w[1..j]A\gamma$, в което $|\alpha_A| = d(\rho)$. Тъй като $d(\rho) > 0$, то $\alpha_A = \alpha_B \cdot s$ е s-ти син на баща си α_B в T. Нека $B = T(\alpha_B)$. Тогава е ясно, че думата на дървото на извод $T - T_{\alpha_B}$ (T, от което сме махнали всички наследници на α_B) ще има дума:

   $$word(T - T_{\alpha_B}) = w[1..j']B\gamma' \text{ където } j' \leq j, \gamma' \text{ е суфикс на } \gamma \text{ и } B = T(\alpha_B).$$

   Следователно ако правилото, което определя α_B в T е $\rho'' = B \to \beta_1' A\beta_2'$, където $|\beta_1'| = s$, има свойството, че:

   $$\beta_1' \Rightarrow^* w[j'+1..j] \text{ и } S \Rightarrow^* w[1..j']B\gamma'.$$

   Това означава, че $(B \to \beta_1' \bullet A\beta_2', j') \in R_j$ и тъй като $j' \leq j$ и $d(\rho'') \leq |\alpha_B| < |\alpha_A| = d(\rho')$, то $(j', d(\rho'')) \prec (j, d(\rho'))$ и от индуктивната хипотеза, $\rho'' \in \widetilde{R}_j$. Следователно от правило (call) 0.4, ε-затварянето на $\widetilde{R}_j'$ ще добави:

   $$\rho' = (A \to \bullet\beta_1\beta_2, j) \in \widetilde{R}_j.$$

3. $i = j$, $d(\rho') = 0$. Тогава има дърво на извод T с $T(\varepsilon) = S$, $word(T) = w[1..j]A\gamma$, в което $|\alpha_A| = 0$. Но това означава, че $\alpha_A = \varepsilon$ и следователно $A = T(\varepsilon) = S$ и тъй като α_A е листо, то $word(T) = S$, в частност $j = 0$. Но сега правилото $\rho' = (S \to \bullet\beta_1\beta_2, 0)$ и по дефиниция то е в $\widetilde{R}_0' = \widetilde{R}_i'$.

□