Задача 0.1. *Нека $\Sigma = \{0\}$ е еднобуквена азбука. Ще казваме, че език $L \subseteq \Sigma^*$ е* аритметична прогресия, *ако има $a, d \in \mathbb{N}$, така че $L = \{0^{a+nd} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Да се докаже, че:*

1. *ако L е аритметична прогресия, то L е регулярен.*
2. *ако $L_1, L_2, \ldots, L_m$ са аритметчини прогресии, то $\bigcup_{i=1}^m L_i$ е регулярен.*
3. *ако $L \subseteq \{0\}^*$ е регулярен, то има $m \in \mathbb{N}$ и аритметични прогресии $L_1, \ldots, L_m$, за които $L = \bigcup_{i=1}^m L_i$.*

Задача 0.2. *Нека $\mathcal{A}_i = \langle \Sigma, Q_i, s_i, \delta_i, F_i \rangle$ за $i = 1, 2$ са тотални крайни детерминирани автомати. Разглеждаме конструкцията:*

1. $Q^{(0)} = \{(s_1, s_2)\}$, $L_0 = Q^{(0)}$, $\delta^{(0)} = \emptyset$, $i = 0$.
2. *Ако $L_i \neq \emptyset$, направи:*
   (а) $L_{i+1} = \emptyset$.
   (б) $Q_{i+1} = Q_i$.
   (в) $\delta_{i+1} = \delta_i$.
   (г) *за всяко $(p_1, p_2) \in L_i$ и всяка буква $a \in \Sigma$, нека $(q_1, q_2) = (\delta_1(p_1, a), \delta_2(p_2, a))$:*

$$\begin{aligned}
\delta_{i+1} &= \delta_{i+1} \cup \{\langle (p_1, p_2), a, (q_1, q_2) \rangle\} \\
L_{i+1} &= \begin{cases} L_{i+1} \cup \{(q_1, q_2)\} & \text{ако } (q_1, q_2) \notin Q_{i+1} \\ L_{i+1}, & \text{иначе} \end{cases} \\
Q_{i+1} &= \begin{cases} Q_{i+1} \cup \{(q_1, q_2)\} & \text{ако } (q_1, q_2) \notin Q_{i+1} \\ Q_{i+1}, & \text{иначе} \end{cases}
\end{aligned}$$

   (д) *увеличи i на $i + 1$, премини на 2.*
3. *върни $\mathcal{A} = \left\langle \Sigma, Q^{(i)}, (s_1, s_2), \delta^{(i)}, F \right\rangle$, където $F = \{(p_1, p_2) \in Q_1 \times Q_2 \,|\, p_1 \in F_1$ или $p_2 \in F_2\}$*

Да се докаже, че:

1. *за всяко i, $Q^{(i+1)} = Q^{(i)} \cup L_{i+1}$ и $L_{i+1} \cap Q^{(i)} = \emptyset$.*
2. *за всяко i, $Q^{(i)} = \bigcup_{j=0}^i L_j \subseteq Q_1 \times Q_2$.*
3. *за всяко i, $\delta^{(i+1)}$ е графика на тотална функция $\delta^{(i+1)} : Q^{(i)} \to Q^{(i+1)}$.*
4. *има $i \leq |Q_1||Q_2$, за което $L_i = \emptyset$ и за това i, $\delta^{(i)}$ е тотална функция от $Q^{(i)}$ в $Q^{(i)}$.*
5. $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$.

Задача 0.3. *Нека $\mathcal{A}_i = \langle \Sigma, Q_i, I_i, \Delta_i, F_i \rangle$ за $i = 1, 2$ са крайни автомати с $\Delta_i \subseteq Q_i \times \Sigma \times Q_i$.*

1. *Ако $Q_1 \cap Q_2$, да се докаже, че $\mathcal{A}_\circ = \langle \Sigma, Q_1 \cup Q_2, I, \Delta, F_2 \rangle$ има език $\mathcal{L}(\mathcal{A}_\circ) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \circ \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$, където:*

$$\begin{aligned}
I &= \begin{cases} I_1, \text{ ако } I_1 \cap F_1 = \emptyset, I_1 \cup I_2, \text{ ако } I_1 \cap F_2 \neq \emptyset. \end{cases} \\
\Delta &= \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{\langle p, a, s_2 \rangle \mid s_2 \in I_2 \& \exists f_1 \in F_1 (\langle p, a, f_1 \rangle \in \Delta_1)\}.
\end{aligned}$$

2. *Да се докаже, че* $\mathcal{A}_* = \langle \Sigma, Q_1 \cup \{s_*\}, I_1 \cup \{s_*\}, \Delta, F \cup \{s_*\} \rangle$ *има език* $\mathcal{L}(\mathcal{A}_*) = \mathcal{L}(\mathcal{A})^*$, *където:*

$$\Delta \quad = \quad \Delta_1 \cup \{\langle p, a, s_1 \rangle \mid s_1 \in I_1 \& \exists f_1 \in F_1(\langle p, a, f_1 \rangle \in \Delta_1)\}.$$

Задача 0.4. *Нека* $L \subseteq \Sigma^*$ *е регулярен. Да се докаже, че:*

1. $Pref(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v(uv \in L)\}$,

2. $Suff(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v(vu \in L)\}$,

3. $Inf(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v, w(vuw \in L)\}$

са регулярни.

Задача 0.5. *Нека* $L, L_1 \subseteq \Sigma^*$ *са регулярни. Да се докаже, че:*

1. $L_1^{-1}L = \{u \in \Sigma^* \mid L_1\{u\} \cap L \neq \emptyset\}$,

2. $LL_1^{-1} = \{u \in \Sigma^* \mid \{u\}L_1 \cap L \neq \emptyset\}$.

са регулярни. Да се докаже, че регулярността на L_1 *не е съществена, тоест резултатът е в сила и без това условие.*

Задача 0.6. *Нека* $h : \Sigma^* \to \Omega^*$ *е хомоморфизъм. Да се докаже, че:*

1. *ако* $L \subseteq \Sigma^*$ *е регулярен, то и* $h(L) = \{h(u) \mid u \in L\}$ *е регулярен.*

2. *ако* $L \subseteq \Omega^*$ *е регулярен, то и* $h^{-1}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid h(u) \in L\}$ *е регулярен.*

Упътване 0.1.

Упътване 0.2. 1. Запишете $0^{a+nd} = 0^a(0^d)^n$, заключете $\{0^{a+nd} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0^a\}\{(0^d)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

2. Регулярните езици са затворени относно обединение.

3. Използвайте Теоремата на Kleene и Теоремата за детерминизация, за да обосновете, че L се разпознава от краен детерминиран автомат над $\{0\}$. Изследвайте структурата на краен детерминиран автомат над $\{0\}$.

Упътване 0.3. Обосновете, че тъй като в $\mathcal{A}_1$ няма ε-преходи, то $\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$ точно когато $I_1 \cap F_1 \neq \emptyset$.

Използвайте, че ако $w \neq \varepsilon$ и $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$, то $w = w'a$ и има успешен път в $\mathcal{A}_1$ от вида:

$$s \overset{w'}{\longrightarrow}^* p \overset{a}{\longrightarrow}^* f, \text{ където } s \in I_1, f \in F_1.$$

Обосновете, че ако в $\mathcal{A}_1$ няма ε-преходи, то $p \overset{a}{\longrightarrow}^* f$ е еквивалентно на $\langle p, a, f_1 \rangle \in \Delta_1$.

Упътване 0.4. Разгледайте краен автомат, който разпознава L и модифицирайте този автомат, така че да представя точно префиксите/суфиксите/инфиксите на L.

Упътване 0.5. 1. Разгледайте краен автомат, който разпознава L. Съобразете, че, за да получите краен автомат, който разпознава $L_1^{-1}L$ е достатъчно да, в кои състояние завършва път от начално с етикет от L_1. Колко са тези състояния?

1. Покажете, че $\{h(a)\}$ е регулярен за всяко $a \in \Sigma$ и след това използвайте, че:

$$h(L_1 \cup L_2) = h(L_1) \cup h(L_2); \quad h(L_1 \circ L_2) = h(L_1) \circ h(L_2); \quad h(L_1^*) = h(L_1)^*.$$

2. Покажете, че $h(\Sigma)^* \cap L$ е регулярен. Постройте краен автомат за $\{h(a)\}$ за $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ със състояния:

$$\{(a, i) \mid 0 \leq i \leq |h(a)| + 1\}.$$

От тези $|\Sigma|$ автомата приложете конструкцията за обединение и итерация, за да получите автомат за $h(\Sigma)^*$. Разгледайте конструкцията за сечение на $h(\Sigma)^* \cap L$ и в нея заменете преходите $\langle((a,0),p), \_, ((a,1),q)\rangle$ с $\langle((a,0),p), a, ((a,1),q)\rangle$, а останалите с $\langle((a,i),p), \varepsilon, ((a,i+1),q)\rangle$ за $i \geq 1$. Аргументирайте, че полученият автомат разпознава точно $h^{-1}(L)$.