Афинни подпространства

Линейни подпространства – припомняне

Твърдение 1
1. *Множеството V от решенията на хомогенна линейна система $Ax = 0$ с n неизвестни е $(n-r)$-мерно линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$, където r е рангът на A.*

2. *Ако V е k-мерно линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$, то съществува хомогенна линейна система $Ax = 0$ с n неизвестни, такава че V е множеството от решенията ѝ. При това системата може да се вземе с $n - k$ уравнения (това е минималният възможен брой).*

Твърдение 2 *Нека $Ax = b$ е съвместима линейна система с n неизвестни и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ е едно нейно решение. Тогава $x \in \mathbb{R}^n$ е решение на системата тогава и само тогава, когато $x = x_0 + v$ за някое решение v на съответната хомогенна система $Ax = 0$, тоест, в означенията от Определение 2 по-долу, множеството от решенията на $Ax = b$ е $x_0 + V$, където V е линейното подпространство на $\mathbb{R}^n$ от решенията на $Ax = 0$.*

Твърдение 3 *Произволно сечение на линейни подпространства е линейно подпространство.*

Афинни подпространства

Нека $\mathcal{A}$ е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U.

Определение 1 Подмножеството B на $\mathcal{A}$ се нарича *афинно подпространство на* $\mathcal{A}$, ако $B = \left\{Q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0Q} \in V\right\}$, където V е линейно подпространство на U и $P_0 \in \mathcal{A}$, тоест ако за някое линейно подпространство V на U и някоя точка $P_0 \in \mathcal{A}$ е изпълнено $Q \in B \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0Q} \in V$.

Твърдение 4 *Нека B е афинното подпространство на $\mathcal{A}$, зададено с линейното подпространство V на U и точката $P_0 \in \mathcal{A}$, тоест $B = \left\{Q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0Q} \in V\right\}$. Тогава:*

1. *$P_0 \in B$. В частност, B не е празно множество.*

2. *За всяка точка $P \in B$ имаме $B = \left\{Q \in \mathcal{A} : \overrightarrow{PQ} \in V\right\}$.*

3. *$V = \left\{\overrightarrow{PQ} : P, Q \in B\right\}$ и дори за всяка точка $P \in B$ имаме $V = \left\{\overrightarrow{PQ} : Q \in B\right\}$.*

4. *Линейното подпространство V се определя еднозначно от B.*

5. *B е афинно пространство, моделирано върху линейното подпространство V.*

Твърдение 5 *0-мерните афинни подпространства са едноточковите подмножества.*

Твърдение 6 *$\mathcal{A}$ е афинно подпространство на себе си. При това, ако $\dim \mathcal{A} = n$ е крайна, то $\mathcal{A}$ е единственото n-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$.*

Определение 2 Нека U е линейно пространство, V е линейно подпространство на U и $u_0 \in U$. Означаваме $u_0 + V = \{u_0 + v : v \in V\}$.

Твърдение 7 *Афинните подпространства на линейното пространство U са точно подмножествата от вида $u_0 + V$, където V е линейно подпространство на U и $u_0 \in U$, като при това $u_0 + V$ е афинното подпространство през u_0 с направляващо пространство V. В частност, афинните подпространства на U през 0 са точно линейните подпространства на U.*

Твърдение 8

1. *Множеството B от решенията на съвместима линейна система $Ax = b$ с n неизвестни е $(n-r)$-мерно афинно подпространство на $\mathbb{R}^n$, моделирано върху линейното подпространство V от решенията на съответната хомогенна система $Ax = 0$, където r е рангът на A.*

2. *Ако B е k-мерно афинно подпространство на $\mathbb{R}^n$, то съществува линейна система $Ax = b$ с n неизвестни, такава че B е множеството от решенията ѝ. При това системата може да се вземе с $n - k$ уравнения (това е минималният възможен брой).*

Твърдение 9 *Нека B и B' са афинни подпространства на $\mathcal{A}$, моделирани съответно върху линейните подпространства V и V' на U. Тогава:*

1. *Ако $B \subset B'$, то $V \subset V'$.*
2. *Ако $V \subset V'$ и $B \cap B' \neq \emptyset$, то $B \subset B'$.*
3. *Ако $B \subset B'$, то $\dim B \leq \dim B'$.*
4. *Ако $B \subset B'$ и $\dim B = \dim B'$ е крайна, то $B = B'$.*

Определение 3 Нека B е афинно подпространство на $\mathcal{A}$, моделирано върху V. Векторите $v \in V$ наричаме *успоредни на B* и пишем $v \parallel B$.

Теорема 1 *Нека $P_0 \in \mathcal{A}$, а $v_1, \dots, v_k \in U$. Тогава най-малкото афинно подпространство на $\mathcal{A}$, което съдържа точката P_0 и на което векторите $v_1, \dots, v_k$ са успоредни, е афинното подпространство B, породено от P_0 и $V = l(v_1, \dots, v_k)$, тоест*

$$B = \{P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0P} \in l(v_1, \dots, v_k)\} = \{P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k\}.$$

(Че е най-малкото означава, че всяко афинно подпространство с тия свойства го съдържа.)
Ако освен това $v_1, \dots, v_k$ са линейно независими, то горното B е единственото k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$, което съдържа P_0 и на което $v_1, \dots, v_k$ са успоредни.

Забележка 1 Ако в горната теорема $v_1, \dots, v_k$ са линейно зависими, то $\dim B < k$.

Теорема 2 *Нека $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{A}$. Тогава най-малкото афинно подпространство на $\mathcal{A}$, което ги съдържа, е афинното подпространство породено от точката P_0 и $V = l(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k})$, тоест*

$$B = \{P \in \mathcal{A} : \overrightarrow{P_0P} \in l(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_k})\} = \left\{ P \in \mathcal{A} : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} \right\}.$$

Ако освен това $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{A}$ не лежат в афинно подпространство на $\mathcal{A}$ с размерност строго по-малка от k, то горното B е единственото k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$, което ги съдържа.

Забележка 2 Ако в горната теорема $P_0, \dots, P_k$ лежат в афинно подпространство на $\mathcal{A}$ с размерност строго по-малка от k, то $\dim B < k$.

Твърдение 10 *Нека B е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$. Тогава съществуват точки $P_0, \dots, P_k \in B$, които не лежат в афинно подпространство на $\mathcal{A}$ с размерност строго по-малка от k.*

Пример 1 $k = 1$.
$2 = k + 1$ точки лежат в афинно подпространство с размерност строго по-малка от $k = 1$, тоест в 0-мерно афинно подпространство, $\Leftrightarrow$ съвпадат, защото 0-мерните афинни подпространства са едноточковите подмножества.

Твърдение 11

1. *В геометричната равнина и в геометричното пространство* 1*-мерните афинни подпространства са правите.*
2. *В геометричното пространство* 2*-мерните афинни подпространства са равнините.*

Определение 4 1-мерните афинни подпространства на произволно афинно пространство $\mathcal{A}$ се наричат *прави*, 2-мерните – *равнини*, а ако $\dim \mathcal{A} = n$ е крайна, то $(n-1)$-мерните афинни подпространства се наричат *хиперравнини*.

Пример 2 Нека $\mathcal{A}$ е n-мерно. Тогава хиперравнините са:

1. при $n = 1$ точките.
2. при $n = 2$ правите.
3. при $n = 3$ равнините.

Частни случаи на Теорема 2:

1. $k = 1$: *През две различни точки в афинно пространство минава точно една права.*
2. $k = 2$: *През три различни точки в афинно пространство, които не лежат на една права, минава точно една равнина.*
3. $k = n - 1$: *През n точки в n-мерно афинно пространство, които не лежат в $(n-2)$-мерно афинно подпространство, минава точно една хиперравнина.*

Твърдение 12 *Ако B_i са афинни подпространства на $\mathcal{A}$, моделирани върху V_i, $i \in I$, и $B = \bigcap_{i \in I} B_i$ е непразно множество, то B е афинно подпространство на $\mathcal{A}$, моделирано върху $\bigcap_{i \in I} V_i$.*

Забележка 3 Всичко дотук очевидно остава в сила и ако вместо $\mathbb{R}$ се вземе произволно поле F, тоест ако U е линейно пространство над произволно поле.

Твърдение 13 *Нека $\mathcal{A}$ е евклидово афинно пространство (тоест U е евклидово линейно пространство) и B е афинно подпространство на $\mathcal{A}$, моделирано върху линейното подпространство V на U. Тогава знаем, че V е евклидово линейно пространство с наследеното от U скаларно произведение и следователно B е евклидово афинно пространство.*

Забележка 4 Винаги ще разглеждаме афинните подпространства на евклидово афинно пространство като евклидови афинни пространства по начина от горното твърдение, освен ако изрично не е казано друго.