1. Полагаме $X.B = Y$

Имаме $A.Y = C$

$\Rightarrow (A|C) \rightsquigarrow (E|Y)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 39 & 63 & 66 \\ -1 & 1 & 4 & -58 & -102 & -122 \\ -1 & 3 & -1 & -6 & 8 & 22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 39 & 63 & 66 \\ 0 & -1 & +2 & -19 & -44 & -56 \\ 0 & 1 & -3 & 33 & 71 & 88 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & 77 & 151 & 178 \\ 0 & -1 & 2 & -19 & -44 & -56 \\ 0 & 0 & -1 & 14 & 27 & 32 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & -11 & -14 \\ 0 & -1 & 0 & 9 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 14 & 27 & 32 \end{array}\right) \sim \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{E} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} -7 & -11 & -14 \\ -9 & -10 & -8 \\ -14 & -27 & -32 \end{array}}_{Y}\right)$$

От пол.: $X.B = Y$

$\Rightarrow B^t . X^t = Y^t$

$\Rightarrow (B^t | Y^t) \rightsquigarrow (E | X^t)$

$X = (X^t)^t$

$$B^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}; \quad Y^t = \begin{pmatrix} -7 & -9 & -14 \\ -11 & -10 & -27 \\ -14 & -8 & -32 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -2 & -7 & -9 & -14 \\ -1 & -3 & -4 & -11 & -10 & -27 \\ -1 & -3 & -5 & -14 & -8 & -32 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -2 & -7 & -9 & -14 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -1 & -13 \\ 0 & -1 & -3 & -7 & 1 & -18 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -7 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & -5 \end{array}\right) \begin{matrix} 2 \\ (-2) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -5 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & \dots & 4 & 1 \end{vmatrix} \cdot(-1) =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot(-2) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 6.3.(-2)+1 \end{vmatrix}$$

От теоремата за детерминанта в триъгълен вид се получава:

$$\Delta = 2.\,1^6.\,(6.\,3.\,(-2)+1) =$$

$$= 2.\,1.\,(-35) = -70$$

3

a) $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

$\varphi(X)$ е линейно ако

1) $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$

2) $\varphi(\lambda A) = \lambda \varphi(A)$

1) $\varphi(A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}(A+B) + (A+B)\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} B + A \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} =$

$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} A + A \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} B + B \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}\right] =$

$= \varphi(A) + \varphi(B)$

2) $\varphi(\lambda A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}(\lambda A) + (\lambda A)\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} =$

$= \lambda \left[\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} A + A \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}\right] = \lambda \varphi(A)$

$\Rightarrow \varphi$ е линейно

$\varphi(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, -2, 1, 0)$

$$\varphi(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-2, -4, 0, 1)$$

$$\varphi(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (4, 0, 2, -2)$$

$$\varphi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = (0, 4, -2, -2)$$

Матрицата φ в базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{21}$ е:

$$= A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

б) $\varphi(X) = X\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

$\varphi(X)$ е линейно ако: 1) $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$
2) $\varphi(\lambda A) = \lambda \varphi(A)$

1) $\varphi(A+B) = (A+B)\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} =$

$= A\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

$= \left[A\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}\right] + B\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \varphi(A) + B\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \varphi(A+B) \neq \varphi(A) + \varphi(B)$

$\Rightarrow \varphi$ не е линейно

(4) V - лин. пр-во

e_1, e_2, e_3, e_4 - базис , A - лин. оператор

$A(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4) =$

$= e_1(2\xi_1 - \xi_2 + \xi_4) + e_2(\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3) +$

$+ e_3(-3\xi_1 + \xi_3 - 2\xi_4) + e_4(3\xi_1 - 6\xi_2 + 3\xi_3)$

Реш:

$\xi_1 = 1;\ \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0 : A(e_1) = 2e_1 + e_2 - 3e_1 + 3e_4$

$\xi_1 = 0;\ \xi_2 = 1;\ \xi_3 = \xi_4 = 0 : A(e_2) = -e_1 - 2e_2 + 0e_3 - 6e_4$

$\xi_1 = \xi_2 = 0;\ \xi_3 = 1;\ \xi_4 = 0 : A(e_3) = 0e_1 + e_2 + e_3 + 3e_4$

$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0;\ \xi_4 = 1 : A(e_4) = e_1 + 0e_2 - 2e_3 + 0e_4$

$$\text{Матрицата на } A = \begin{array}{cccc} A(e_1) & A(e_2) & A(e_3) & A(e_4) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Базис на Ker(A):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ \cdot 3 \\ \cdot(-3) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нек $x_2 = p,\ x_3 = q$. Тогава $x_4 = 2q - 3p$

$x_1 = 2p - q$

$\operatorname{Ker}(A) = \{ (2p-q, p, q, 2q-3p) \mid p, q \in F \}$

при $p=1; q=0$: $v_1 = (2, 1, 0, -3)$
при $p=0; q=1$: $v_2 = (-1, 0, 1, 2)$
} ФСР, т.е. базис на $\operatorname{Ker}(A)$

$d(A) = \dim \operatorname{Ker}(A) = 2$

Базис на $\operatorname{Im}(A)$

Всеки вектор от V е ЛК на e_1, e_2, e_3, e_4, то всеки вектор от $\operatorname{Im}(A)$ е ЛК на $A(e_1), \dots, A(e_4)$

Сл. $\operatorname{Im}(A) = \ell(A(e_1), A(e_2), A(e_3), A(e_4))$

$$\begin{array}{c} A(e_1) \\ A(e_2) \\ A(e_3) \\ A(e_4) \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot 1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Сл. $A(e_3), A(e_4)$ – базис на $\operatorname{Im}(A)$

$r(A) = \dim \operatorname{Im}(A) = 2$

От теоремата за ранга и дефекта:

$r(A) + d(A) = \dim(V)$

$\Rightarrow 2 + 2 = \dim(V) \Rightarrow \dim(V) = 4$ ✓

(5) V - лин. пр-во, e_1, e_2, e_3 - базис, A - лин. оператор с матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Да се намери базис, в който матр. на A е диагонална, както и матрицата на оператора в този базис.

Решение:

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 6 & -6 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ -4 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ \\ \cdot(-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -18+3\lambda & 0 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ 0 & -12+2\lambda & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (6-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Сарус}}{=\!=} (6-\lambda)^2 \left[8-\lambda-4-6 \right] =$$

$$= (6-\lambda)^2(-2-\lambda)$$

т.е. $\lambda_{1,2} = 6$, $\lambda_3 = -2$

Собствени вектори:

$\boxed{\lambda_{1,2} = 6}$

$$A - 6E = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -6 \\ -2 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Пол. $x_1 = p$, $x_3 = q$, тогава:

$$x_2 = p + q$$

$\{(p, p+q, q)\}$ $\left.\begin{array}{l} p=1, q=0: v_1 = (1, 1, 0) \\ p=0, q=1: v_2 = (0, 1, 1) \end{array}\right\}$ ФСР

$\boxed{\lambda_3 = -2}$

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -6 \\ -2 & 10 & -2 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot(+1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Пол. $x_2 = p$, тогава

$x_3 = 2p$; $x_1 = 3p$

$\{(3p, p, 2p)\}$ $p = 1: v_3 = (3, 1, 2)$ - ФСР

Следователно v_1, v_2, v_3 е базис от собствени вектори, на който матрицата е диагонална и тя е:

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$