# Нормални вектори на афинно подпространство. Разстояние между афинни подпространства

Нека $A$ е евклидово афинно пространство, моделирано върху линейното пространство $U$.

**Определение 1** Нека $B$ е афинно подпространство на $A$, моделирано върху линейното пространство $V$. Тогава ортогоналното на $V$ линейно пространство $V^\perp$ се нарича *нормално* или *ортогонално*, или *перпендикулярно на* $B$ *пространство*, а векторите от $V^\perp$ се наричат *нормални* или *ортогонални*, или *перпендикулярни на* $B$ *вектори*.

**Оттук нататък $A$ е $n$-мерно и $K = Oe_1 \dots e_n$ е ортонормирана координатна система в $A$.**

**Твърдение 1** *Нека афинното подпространство $B$ на $A$ има спрямо $K$ уравнения*

$$B : a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + b_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{1}$$

*Тогава:*

1. *Векторите $N_1, \dots, N_m$, чиито координати спрямо $K$ са $N_i(a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, m$, са нормални на $B$ и нормалното пространство на $B$ е тяхната линейна обвивка.*

2. *(1) е общо уравнение на $B \Leftrightarrow N_1, \dots, N_m$ са линейно независими, тоест когато $(N_1, \dots, N_m)$ е базис на нормалното пространство на $B$.*

**Твърдение 2** *Нека $P_0 \in A$, $W$ е линейно подпространство на $U$ и $W = l(N_1, \dots, N_m)$. Нека спрямо $K$ координатите на $P_0$ и $N_1, \dots, N_m$ са $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, $N_i(a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, m$. Тогава съществува единствено афинно подпространство $B$ на $A$, за което $P_0 \in B$ и $W$ е нормалното пространство на $B$, и спрямо $K$ то има уравнения*

$$B : a_{i1}(x_1 - x_1^0) + \dots + a_{in}(x_n - x_n^0) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{2}$$

*В частност, ако $(N_1, \dots, N_m)$ е базис на $W$, то (2) е общо уравнение на $B$.*

**Частни случаи:**

1. Хиперравнина:

   **Твърдение 1′** *Нека хиперравнината $B$ в $A$ има спрямо $K$ общо уравнение $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$. Тогава векторът $N$, чиито координати спрямо $K$ са $(a_1, \dots, a_n)$, е нормален на $B$ и образува базис на нормалното пространство на $B$, тоест нормалните вектори на $B$ са векторите от вида $\lambda N$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

   **Твърдение 2′** *Нека точката $P_0 \in A$ и ненулевият вектор $N \in U$ имат спрямо $K$ координати $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, $N(a_1, \dots, a_n)$. Тогава съществува единствена хиперравнина $B$ в $A$ през $P_0$, за която $N$ е нормален вектор, и спрямо $K$ тя има общо уравнение $a_1(x_1 - x_1^0) + \dots + a_n(x_n - x_n^0) = 0$.*

2. Права в 2-мерно евклидово афинно пространство (в частност, в геометричната равнина):
   В Твърдение $1'$ и Твърдение $2'$ $n = 2$ и „хиперравнина“ се заменя с „права“.

3. Равнина в 3-мерно евклидово афинно пространство (в частност, в геометричното пространство):
   В Твърдение $1'$ и Твърдение $2'$ $n = 3$ и „хиперравнина“ се заменя с „равнина“.

4. Права в 3-мерно евклидово афинно пространство (в частност, в геометричното пространство):
   Нека координатите са $(x, y, z)$ вместо $(x_1, x_2, x_3)$.

   **Твърдение $1'^{\text{v}}$** *Нека правата $l$ в $A$ има спрямо $K$ общо уравнение*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

   *Тогава векторите $N_1$ и $N_2$, чиито координати спрямо $K$ са $N_i(A_i, B_i, C_i)$, $i = 1, 2$, са нормални на $l$ и образуват базис на нормалното пространство на $l$.*

   **Твърдение $2'^{\text{v}}$** *Нека точката $P_0 \in A$ и линейно независимите вектори $N_1, N_2 \in U$ имат спрямо $K$ координати $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $N_i(A_i, B_i, C_i)$, $i = 1, 2$. Тогава съществува единствена права $l$ в $A$ през $P_0$, за която $N_1$ и $N_2$ са нормални вектори, и спрямо $K$ тя има общо уравнение*

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0 \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) + C_2(z - z_0) = 0 \end{cases}.$$

**Твърдение 3** *Нека $B$ е афинно подпространство на $A$ и $P_0 \in A$. Тогава:*

1. *Съществува единствена точка $P_0' \in B$, за която векторът $\overrightarrow{P_0'P_0}$ е перпендикулярен на $B$.*

2. *Ако $P \in B$, то $|PP_0| \geq |P_0'P_0|$ и $= \Leftrightarrow P = P_0'$.*

**Определение 2** Нека $B$ е афинно подпространство на $A$ и $P_0 \in A$. Тогава единствената точка $P_0' \in B$, за която векторът $\overrightarrow{P_0'P_0}$ е перпендикулярен на $B$, се нарича *ортогонална проекция на $P_0$ върху $B$*, а $|P_0'P_0|$ се нарича *разстояние от $P_0$ до $B$* и се означава с $d(P_0, B)$.

**Пример 1** Нека $P_0 \in B$. Тогава $\overrightarrow{P_0P_0} = 0$ е перпендикулярен на $B$ и следователно $P_0' = P_0$ и $d(P_0, B) = |P_0P_0'| = 0$.

Използвайки въведената в Определение 2 терминология, от Твърдение 3 директно получаваме:

**Твърдение 4** *Ако $B$ е афинно подпространство на $A$ и $P_0 \in A$, то $\min\{|PP_0| : P \in B\}$ съществува, достига се за ортогоналната проекция $P_0'$ на $P_0$ върху $B$ и е равен на разстоянието от $P_0$ до $B$.*

**Твърдение 5** *Нека спрямо $K$ хиперравнината $B$ в $A$ има общо уравнение $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$, а точката $P_0 \in A$ има координатен вектор $x^0$. Означаваме $F(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$. Тогава $d(P_0, B) = \frac{|F(x^0)|}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}$, а ортогоналната проекция $P_0'$ на $P_0$ върху $B$ има спрямо $K$ координатен вектор $x' = x^0 - \frac{F(x^0)}{a_1^2+\cdots+a_n^2}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.*

**Забележка 1** Тъй като за дължината на нормалния вектор $N(a_1, \ldots, a_n)$ на $B$ имаме $|N| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$, то $\overrightarrow{P_0'P_0} = \frac{F(x^0)}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}\frac{N}{|N|}$. Числото $\delta(P_0, B) = \frac{F(x^0)}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}$ се нарича *ориентирано разстояние от $P_0$ до $B$*. Имаме $d(P_0, B) = |\delta(P_0, B)|$. Също, отворените полупространства относно $B$ са $\{P_0(x^0) \in A : F(x^0) > 0\}$ и $\{P_0(x^0) \in A : F(x^0) < 0\}$ и следователно те могат да се напишат и като
$\{P_0 \in A : \delta(P_0, B) > 0\}$ (тоест отвореното полупространство, в което „сочи“ $N$)
и
$\{P_0 \in A : \delta(P_0, B) < 0\}$ (тоест отвореното полупространство, в което „сочи“ $-N$).

**Определение 3** Общо уравнение на хиперравнината $B$ спрямо $K$, в което нормалният вектор, чиито координати спрямо $K$ са коефициентите пред неизвестните, е единичен, се нарича *нормално уравнение на $B$ спрямо $K$*.
(Тоест, ако $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ е общо уравннение на $B$ спрямо $K$, то то е нормално уравнение на $B$ спрямо $K \Leftrightarrow a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$.)

**Твърдение 6** *Всяка хиперравнина $B$ в $A$ има спрямо $K$ точно две нормални уравнения. При това, ако $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ е едно общо уравнение на $B$ спрямо $K$, то нормалните уравнения са $\pm\frac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}} = 0$.*

От Твърдение 5 директно следва

**Следствие 1** *Ако уравнението на $B$ в Твърдение 5 е нормално, то $d(P_0, B) = |F(x^0)|$ и $\delta(P_0, B) = F(x^0)$.*

**Частни случаи:**

1. Права в 2-мерно евклидово афинно пространство (в частност, в геометричната равнина):
   В Твърдение 5 и нещата след него $n = 2$ и „хиперравнина“ се заменя с „права“, а „полупространство“ с „полуравнина“.

2. Равнина в 3-мерно евклидово афинно пространство (в частност, в геометричното пространство):
   В Твърдение 5 и нещата след него $n = 3$ и „хиперравнина“ се заменя с „равнина“.

**Твърдение 7** *Нека $B_1$ и $B_2$ са афинни подпространства на $A$, моделирани съответно върху линейните пространства $V_1$ и $V_2$. Тогава:*

1. *Съществуват точки $P_1 \in B_1$, $P_2 \in B_2$, за които векторът $\overrightarrow{P_1P_2}$ е перпендикулярен на $B_1$ и $B_2$.*
2. *Векторът $\overrightarrow{P_1P_2}$ в 1. е единствен, тоест ако $Q_1 \in B_1$, $Q_2 \in B_2$ са такива, че $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ е перпендикулярен на $B_1$ и $B_2$, то $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{P_1P_2}$.*
3. *Точките $P_1$ и $P_2$ в 1. са единствени $\Leftrightarrow V_1 \bigcap V_2 = \{0\}$.*
4. *Ако $Q_1 \in B_1$, $Q_2 \in B_2$, то $|Q_1Q_2| \geq |P_1P_2|$ и $= \Leftrightarrow \overrightarrow{Q_1Q_2}$ е перпендикулярен на $B_1$ и $B_2$, тоест когато $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{P_1P_2}$ (поради 2.).*

**Определение 4** Нека $B_1$ и $B_2$ са афинни подпространства на $A$. Тогава $|P_1P_2|$, където $P_1 \in B_1$, $P_2 \in B_2$ и $\overrightarrow{P_1P_2}$ е перпендикулярен на $B_1$ и $B_2$, се нарича *разстояние между $B_1$ и $B_2$* и се означава с $d(B_1, B_2)$.
(Дефиницията е коректна: Точки $P_1$ и $P_2$ с нужните свойства съществуват по 1. на Твърдение 7, а независимостта от избора на $P_1$ и $P_2$ следва от 2. на Твърдение 7.)

**Пример 2** Нека $B_1 \bigcap B_2 \neq \emptyset$. Тогава, ако $P_0 \in B_1 \bigcap B_2$, то $\overrightarrow{P_0P_0} = 0$ е перпендикулярен на $B_1$ и $B_2$ и следователно $d(B_1, B_2) = |P_0P_0| = 0$.

Използвайки въведената в Определение 4 терминология, от Твърдение 7 директно получаваме:

**Твърдение 8** *Ако $B_1$ и $B_2$ са афинни подпространства на $A$, то*
$\min\{|P_1P_2| : P_1 \in B_1, P_2 \in B_2\}$ *съществува и е равен на разстоянието между $B_1$ и $B_2$.*

**Забележка 2** Нещата за разстояние от точка до афинно подпространство са частен случай на нещата за разстояние между афинни подпространства: В Твърдение 7, Определение 4 и Твърдение 8 взимаме $B_1 = B$, $B_2 = \{P_0\}$ и получаваме съответно Твърдение 3, Определение 2 и Твърдение 4.