Задача 0.1. *Нека* $\Sigma = \{x\}$ *е еднобуквена азбука. За естествени числа* $a, d \in \mathbb{N}$ *дефинираме:*

$$\mathcal{L}_{a,d} = \{x^{a+nd} \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

1. *Да се докаже, че* $\mathcal{L}_{a,d}$ *е регулярен за всеки две* $a, d \in \mathbb{N}$.

2. *Да се формулира свойство* $P = P(L, n)$ *на език* L *и естетвено число* n *така, че твърдението:*

   $$L \text{ е регулярен } \Rightarrow \exists n P(L, n)$$

   да е (тавтологично) еквивалентно на лемата за разрастване за регулярни езици.

3. *Нека* $L \subseteq \{x\}^*$ *и* $P(L, n)$ *е вярно. За естествено число* $i \leq n$ *дефинираме:*

   $$K_i^+ = \{k \in \mathbb{N} \,|\, \forall d \geq 0(x^{k+id} \in L)\}, \text{ а } K_i = \{k \in \mathbb{N} \,|\, \forall d \geq -1(x^{k+id} \in L)\}.$$

   Да се докаже, че $K_i^+ \setminus K_i$ *е крайно за всяко* $i \leq n$.

4. *Да се докаже, че ако* $P(L, n)$ *е вярно за някое* n*, то* L *е обединение от краен брой езици* $L_{a,d}$.

5. *Да се докаже, че ако* $P(L, n)$ *е вярно за някое* n*, то* L *е регулярен.*

6. *Заключете, че език* $L \subseteq \{x\}^*$ *е регулярен точно тогава, когато е обединение на краен брой езици от вида* $L_{a,d}$*, точно тогава, когато* L *удовлетворява заключението на лемата за разрастване* $\exists n P(L, n)$.

Задача 0.2. [1] *Нека* $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^n$ *е дума.*

1. *Да се построи минимален краен детерминиран автомат* $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, \{s\}, \delta, F \rangle$ *с език* $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{w\}$*. Колко състояния има той? Колко от тях са достижими и колко са ко-достижими? Колко са финалните състояния на* $\mathcal{A}$*?*

2. *Нека* $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{0, 1, \dots, n-1\}$ *е функцията, за която* $f(i) < i$ *е възможно най-голямо, че* $a_1 a_2 \dots a_{f(i)}$ *е суфикс на* $a_1 a_2 \dots a_i$*. Да се докаже, че:*

   $$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ f(f(i)) &< f(i) \\ f(i+1) &= f(i) + 1 \text{ ако } a_{f(i)+1} = a_{i+1}. \end{aligned}$$

3. *Нека* $q_i = \delta^*(s, a_1 \dots a_i)$ *за* $i = 0, 1, \dots, n$*. Дефинираме* $Q' = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ *и* $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$ *и* $fail : Q' \to Q'$ *индуктивно по* i*:*

   $$\delta'(q_0, a) = \begin{cases} q_0, & \text{ако } a \neq a_1 \\ q_1, & \text{иначе} \end{cases} \quad , \quad fail(q_1) = q_0$$

   $$\delta'(q_i, a) = \begin{cases} \delta'(fail(q_i, a)), & \text{ако } a \neq a_{i+1} \\ q_{i+1}, & \text{иначе} \end{cases} \qquad fail(q_{i+1}) = \delta'(fail(q_i), a_{i+1})$$

   Да се докаже, че δ' *е тотална и за всяко* $1 \leq i \leq n$ *е изпълнено, че* $fail(q_i) = q_{f(i)}$.

4. *Кой е езикът, който разпознава автоматът* $\mathcal{A}' = \langle \Sigma, Q', \{q_0\}, \delta', \{q_n\} \rangle$*?*

[1] По същество това е алгоритъмът на Knuth-Morris-Pratt.

5. *Да се докаже, че* $\mathcal{A}'$ *е минимален.*

Задача 0.3. [2] *Нека с* Det *бележим конструкцията за детерминизация на крайни автомати (без* ε*-преходи) от Задача 1, Детерминизация на крайни автомати, седмица 2.*

Нека с Rev *бележим конструкцията за обръщане на краен автомат от Задача 6, Езици и крайни автомати, седмица 1.*

Нека $A = \langle \Sigma, Q, S, \Delta, F \rangle$ *е краен автомат с* $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ *и език* $L(A) = L$*.*

$$\begin{array}{rcl} A' & = & \textsc{Rev}(A) \\ A'_D & = & \textsc{Det}(A') \\ A'' & = & \textsc{Rev}(A'_D) \\ A_D & = & \textsc{Det}(A''). \end{array}$$

1. *Да се докаже, че* $\mathcal{L}(A_D) = L$*.*

2. *Да се докаже, че за всеки две различни състояния* p, q *на* A'', $L_{A''}(p) \cap L_{A''}(q) = \emptyset$*.*

3. *Да се докаже, че* A_D *е минимален тотален краен детерминиран автомат с език* L*.*

[2] По същество това е алгоритъмът на Brzozowski за минимизация на крайни автомати.

Упътване 0.1. Относно крайността на $K_i \setminus K_i^+$ забележете, че ако $k_1, k_2 \in K_i^+$, $k_1 > k_2$ и $k_1 \equiv k_2 \pmod{i}$, то $k_1 \in K_i$. Заключете, че за всяко $0 \leq j < i$ има най-много едно $k \in K_i^+ \setminus K_i$, за което $k \equiv j \pmod{i}$.

Упътване 0.2. За точка 3 разсъждавайте индуктивно по i. За точка 4, индуктивно по i покажете, че ако $q_0 \overset{u}{\rightarrow}^* q_i$, то $u \in \Sigma^* a_1 \dots a_i$ и i е най-голямото с това свойство.

Упътване 0.3.

1. Приложете резултатите за Rev и Det.
2. Използвайте, че A'_D е детерминиран и свойството на Rev. Тогава, ако $u \in L_{A''}(p)$, съобразете, че в A'_D има път от началното състояние до p с етикет u.
3. Използвайте Задача 1 от Езици и крайни автомати, седмица 1, свойството на Det и точка 2, за да покажете, че за всеки две състояния $p \neq q$ на A_D, $\mathcal{L}_{A_D}(p) \neq \mathcal{L}_{A_D}(q)$.