Задаване на множество с уравнения и с параметрични уравнения

Нека $\mathcal{A}$ е n-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ е координатното изображение, съответно на K, и B е подмножество на $\mathcal{A}$.

Определение 1 Нека S е някакво множество и $f, g : \mathbb{R}^n \to S$. Ако

$$P \in B \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1(P), \dots, x_n(P)) = g(x_1(P), \dots, x_n(P)),$$

тоест ако

$$B = \{P \in \mathcal{A} : \ f(x_1(P), \dots, x_n(P)) = g(x_1(P), \dots, x_n(P))\},$$

то казваме, че B *има спрямо* K *уравнение* $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$ и пишем

$$B : f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n).$$

Забележка 1 Често S е $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^m$ и g е 0 или друга константа. В случая $S = \mathbb{R}^m$ се казва също и че B се задава със система от m (скаларни) уравнения (вместо с едно $\mathbb{R}^m$-значно уравнение).

Забележка 2 Всяко подмножество $B \subset \mathcal{A}$ може да се зададе с уравнение по следния тавтологичен начин:
Дефинираме $f : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$: $f(a) = \begin{cases} 1, & \text{ако } P(a) \in B \\ 0, & \text{ако } P(a) \notin B \end{cases}$.
Тогава $B : f(x) = 1$.

Пример 1 Нека K^0 е стандартната координатна система в $\mathbb{R}^n$ и нека B е афинно подпространство на $\mathbb{R}^n$. Знаем, че B е множеството от решенията на някоя линейна система $Ax = b$. Също знаем, че координатният вектор спрямо K^0 на точката $a \in \mathbb{R}^n$ си е a. Следователно $B : Ax = b$ спрямо K^0.

Пример 2 По-късно ще видим, че афинно подпространство $B \subset \mathcal{A}$ също се задава с линейна система: $B : Ax = b$ спрямо K.

Пример 3 Нека f е полином от степен d на n променливи. Тогава множеството $B : f(x_1, \dots, x_n) = 0$ се нарича *алгебрична (хипер)повърхнина от степен* d (при $n = 2$ – *алгебрична крива от степен* d, а при $n = 3$ – *алгебрична повърхнина от степен* d).

Пример 4 Нека $f_1, \dots, f_m$ са полиноми на n променливи съответно от степени $d_1, \dots, d_m$. Тогава множеството

$$B : \begin{cases} f_1(x) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_m(x) & = & 0 \end{cases}$$

се нарича *алгебрично множество от степен* $d = \max(d_1, \dots, d_m)$.
В частност, Пример 2 показва, че афинните подпространства са алгебрични множества от степен 1.

Пример 5 Нека $B_i : f_i(x) = g_i(x)$, $i = 1, \dots, m$. Тогава $B = \bigcap_{i=1}^{m} B_i$ има уравнения

$$B : \begin{cases} f_1(x) & = & g_1(x) \\ & \vdots & \\ f_m(x) & = & g_m(x) \end{cases} .$$

Следователно алгебричните множества са сечения на алгебрични хиперповърхнини.

Определение 2 Нека Λ е някакво множество и $h = (h_1, \dots, h_n) : \Lambda \to \mathbb{R}^n$. Ако

$$P \in B \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \Lambda : \ x_i(P) = h_i(\lambda), \ i = 1, \dots, n,$$

тоест ако

$$B = \{P \in \mathcal{A} : \ \exists \lambda \in \Lambda : \ x_i(P) = h_i(\lambda), \ i = 1, \dots, n\},$$

то казваме, че $x_i = h_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, n$, *са (скаларни) параметрични уравнения на* B *спрямо* K и пишем

$$B : \begin{cases} x_1 & = & h_1(\lambda) \\ & \vdots & \\ x_n & = & h_n(\lambda) \end{cases}, \ \lambda \in \Lambda,$$

или накратко във векторна форма $B : x = h(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$.

Определение 3 Изображението

$$r : \mathcal{A} \to U, \quad P \mapsto \overrightarrow{OP},$$

се нарича *изображение (или функция) радиус-вектор, съответно на* K

Забележка 3 Очевидно r зависи само от началото O на K, но не и от координатния базис $(e_1, \dots, e_n)$, така че всъщност е изображение радиус-вектор по отношение на точката O.

Определение 4 Нека Λ е някакво множество и $\widetilde{h} : \Lambda \to U$. Ако

$$P \in B \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \Lambda : \ r(P) = \widetilde{h}(\lambda),$$

тоест ако

$$B = \{P \in \mathcal{A} : \ \exists \lambda \in \Lambda : \ r(P) = \widetilde{h}(\lambda)\},$$

то казваме, че $r = \widetilde{h}(\lambda)$ *е векторно параметрично уравнение на B спрямо K* и пишем $B : r = \widetilde{h}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$.

Забележка 4 Очевидно векторното параметрично уравнение зависи само от началото O на K, но не и от координатния базис $(e_1, \dots, e_n)$.

Твърдение 1 *Ако векторно параметрично уравнение на B се напише покоординатно, се получават скаларни параметрични уравнения на B. Всички системи скаларни параметрични уравнения на B се получават по тоя начин.*

Твърдение 2

1. *B има спрямо K уравнение $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x(B)$ има спрямо K^0 уравнение $f(x) = g(x)$.*
2. *B има спрямо K параметрично уравнение $x = h(\lambda) \Leftrightarrow x(B)$ има спрямо K^0 параметрично уравнение $x = h(\lambda)$.*

(С други думи, уравненията на B спрямо K и на координатния му образ $x(B)$ спрямо стандартната координатна система K^0 в $\mathbb{R}^n$ са едни и същи и аналогично за параметричните уравнения.)

Забележка 5 В горните неща никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че всичко важи без промяна и ако вместо $\mathbb{R}$ се вземе произволно поле F, тоест ако U е линейно пространство над произволно поле.