Задача 0.1. *Нека L_1 и L_2 са регулярни езици над азбука Σ, $L_1^c = \Sigma^* \setminus L_1$.*
Да се докаже, че:

1. $ind(\equiv_{L_1^c}) = ind(\equiv_{L_1})$.
2. $ind(\equiv_{L_1 \cap L_2}) \leq ind(\equiv_{L_1}) ind(\equiv_{L_2})$.
3. $ind(\equiv_{L_1 \cup L_2}) \leq ind(\equiv_{L_1}) ind(\equiv_{L_2})$.
4. $ind(\equiv_{L_1^*}) \leq 2^{ind(L_1)}$.
5. $ind(\equiv_{L_1 L_2}) \leq 2^{ind(L_1)+ind(L_2)}$.

Задача 0.2. *За краен детерминиран автомат $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$ разглеждаме следната конструкция:*

1. $Q^{(0)} = \{s\}$, $L_0 = \{s\}$.
2. *Ако $L_i \neq \emptyset$, дефинираме:*

$$\begin{array}{rcl} L_{(i+1)} & = & \{\delta(p,a) \in Q \setminus Q^{(i)} \,|\, p \in L_i, a \in \Sigma\} \\ Q^{(i+1)} & = & Q^{(i)} \cup L_{i+1}. \end{array}$$

1. *Да се докаже, че има $i \leq |Q|$, за което $L_i = \emptyset$ и за всяко такова i,*

$$Q^{(i)} = \{p \,|\, \exists w \in \Sigma^* (s \overset{w}{\rightarrow}{}^*_{\mathcal{A}_1} p\}.$$

2. *Да се докаже, че ако $L_i = \emptyset$, то $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ точно когато $Q^{(i)} \cap F \neq \emptyset$.*
3. *Да се докаже, че ако $\mathcal{L} \neq \emptyset$ е регулярен, то има дума $w \in \mathcal{L}$ с дължина $|w| \leq ind(\mathcal{L}))$.*
4. *Да се докаже, че ако L_1 и L_2 са регулярни езици над азбука Σ, то следните са еквивалентни:*

1. $L_1 \subseteq L_2$
2. *за всяка дума $w \in \Sigma^*$ с $|w| \leq ind(\equiv_{L_1}) ind(\equiv_{L_2})$, за която $w \in L_1$ е изпълнено, че $w \in L_2$.*

Задача 0.3. *Да се докаже, че $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ са регулярни езици, то следните са еквивалентни:*

1. $L_1 = L_2$.
2. *за всяка дума $w \in \Sigma^*$ с дължина $|w| \leq ind(L_1) + ind(L_2)$ е в сила, че:*

$$w \in L_1 \iff w \in L_2.$$

Задача 0.4. *Нека $\mathcal{A}_i = \langle \Sigma, Q_i, I_i, \Delta_i, F_i \rangle$ са крайни автомати за $i = 1, 2$. Нека $\phi : Q_1 \rightarrow Q_2$ е биекция, за която:*

1. $I_2 = \{\phi(s) \,|\, s \in I_1\}$,
2. $F_2 = \{\phi(f) \,|\, f \in F_1\}$,

3. *за всяко* $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ *и* $p, q \in Q_1$ *следните са еквивалентни:*

$$\langle p, a, q \rangle \in \Delta_1 \text{ тогава и само тогава, когато } \langle \phi(p), a, \phi(q) \rangle \in \Delta_2.$$

Да се докаже, че:

1. *ако* $\mathcal{A}_1$ *е детерминиран, то и* $\mathcal{A}_2$ *е детерминиран.*

2. *за всеки* $p, q \in Q_1$ *и дума* $w \in \Sigma^*$ *и* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$p \xrightarrow{w}{}^{(n)}_{\mathcal{A}_1} q \text{ влече } \phi(p) \xrightarrow{w}{}^{(n)}_{\mathcal{A}_2} \phi(q).$$

3. $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$.

4. ϕ^{-1} *е биекция от* Q_2 *в* Q_1*, която има трите дадени свойства с разменени индекси* $1 \leftrightarrow 2$.

5. $\mathcal{A}_1$ *е детерминиран тогава и само тогава, когато* $\mathcal{A}_2$*.*

6. $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$

Забележка 0.1. Биекция ϕ с горните свойства се нарича *изоморфизъм* на крайни автомати. Съответно, когато такава функция съществува за автоматите $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, казваме, че са изоморфни.

Задача 0.5. *Нека* $\mathcal{A}_i = \langle \Sigma, Q_i, s_i, \delta_i, F_i \rangle$ *са тотални крайни детерминирани автомати, за които* $ind(\equiv_{\mathcal{L}} (\mathcal{A}_i)) = |Q_i|$ *за* $i = 1, 2$*. Да се докаже, че:*

1. *ако* $\sim_{\mathcal{A}_1} \subseteq Q_1 \times Q_1$ *е релацията* $p \sim_{\mathcal{A}_1} q$ *точно тогава, когато* $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}(p) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}(q)$*, то всеки клас на еквивалентност на* $\sim_{\mathcal{A}_1}$ *е синглетон.*

2. *всяко състояние* $p \in Q_1$ *е достижимо от* s_1 *в* $\mathcal{A}_1$*.*

3. *ако* $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$*, то* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ *са изоморфни.*

Упътване 0.1. Приложете Теоремата на Myhill-Nerode и разгледайте минимални тотални крайни детерминирани автомати за L_1 и L_2. Разгледайте конструкциите върху автомати, които съответстват на операциите – допълнение, сечение, конкатенация и итерация – за да оцените броя на състоянията в (не)детерминиран автомат за съответния език (L_1^c, $L_1 \cap L_2$, L_1^*, $L_1 L_2$). Ако автомата не е детерминиран, приложете конструкцията за детерминизация. Оценете състоянията на получения тотален краен детерминиран автомат за съответния език. Приложете Теоремата на Myhill-Nerode.

Упътване 0.2.

1. Приложете разсъжденията за обхождане в широчина към съответната ситуация.

2. Използвайте първата част и дефиницията за език на краен автомат.

3. Разгледайте минимален тотален краен детерминиран автомат с език $\mathcal{L}$. Приложете 1 и 2.

4. Това, че от 1 следва 2 е ясно. В обратната посока, от 2 към 1, съобразете, че $L_1 \subseteq L_2$ е еквивалентно на $L_1 \cap L_2^c = \emptyset$, където $L_2^c = \Sigma^* \setminus L_2$. Приложете подточка 3 към $L_1 \cap L_2^c$ заедно с неравенството от предишната задача $\mathrm{ind}(\equiv_{L_1 \cap L_2}) \leq \mathrm{ind}(\equiv_{L_1})\mathrm{ind}(\equiv_{L_2})$.

Упътване 0.3. Разгледайте тотални крайни детерминирани автомати $\mathcal{A}_i = \langle \Sigma, Q_i, s_i, \delta_i, F_i \rangle$ с езици $\mathcal{L}(\mathcal{A}_i) = L_i$ за $i = 1, 2$.

При предположение, че $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ разгледайте алгоритъма за минимизация върху $\langle Q_1 \cup Q_2, ., \delta_1 \cup \delta_2, F_1 \cup F_2 \rangle$. Какво намира той? Какво означава това за състоянията s_1 и s_2?

Упътване 0.4.

1. Забележете, че ако ϕ е биекция, то първото условие влече ϕ, ограничена до I_1 е биекция от I_1 в I_2. Заключете, че $|I_2| = |I_1| = 1$. Аналогично покажете, че ако δ_1 е функция, то δ_2 също е функция.

2. Използвайте индукция по n.

3. Използвайте доказаното в 2 и това, че $\phi(I_1) \subseteq I_2$ и $\phi(F_1) \subseteq F_2$.

4. Това, че ϕ^{-1} е биекция би трябвало да е ясно. Тогава $Q_1 = \{\phi^{-1}(p) \,|\, p \in Q_2\}$. Това означава, че когато искаме да изчерпим елементите на Q_1, може да го направим като изброяваме елементите на $p \in Q_2$ и прилагаме $\phi^{-1}(p)$. Оттук и равенството $\phi(\phi^{-1}(p)) = p$ задачата става синтактична.

5. Приложете 1 и 4.

6. Приложете 3 и 4.

Упътване 0.5.

1. Ако $k = ind(\equiv_{\mathcal{L}} (\mathcal{A}_i))$, разгледайте $u_1, u_2, \ldots, u_k \in \Sigma^*$, които са несравними, тоест $u_i \not\equiv u_j$ за $i \neq j$. Разгледайте състоянията p_i, за които $s_1 \overset{u_i}{\rightarrow}^* p_i$. Използвайте, че $\mathcal{L}(p_i) = u_i^{-1}\mathcal{L}(\mathcal{A}_1)$, за да покажете, че $p_1, \ldots, p_k$ са различни и от равенството $|Q_1| = k$ довършете.

2. Продължете от 1.

3. Ако $q_1, \ldots, q_k$ са състоянията в $\mathcal{A}_2$, за които $s_2 \overset{u_i}{\rightarrow}^* q_i$, от 1 и 2 следва, че $Q_2 = \{q_i \,|\, i \leq k\}$. Съответно $\phi : Q_1 \to Q_2$ с $\phi(p_i) = q_i$ е биекция. Проверете останалите свойства на изоморфизъм като използвате, че:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}(p_i) = u_i^{-1}\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}(p_i), \text{ където } \mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_2).$$