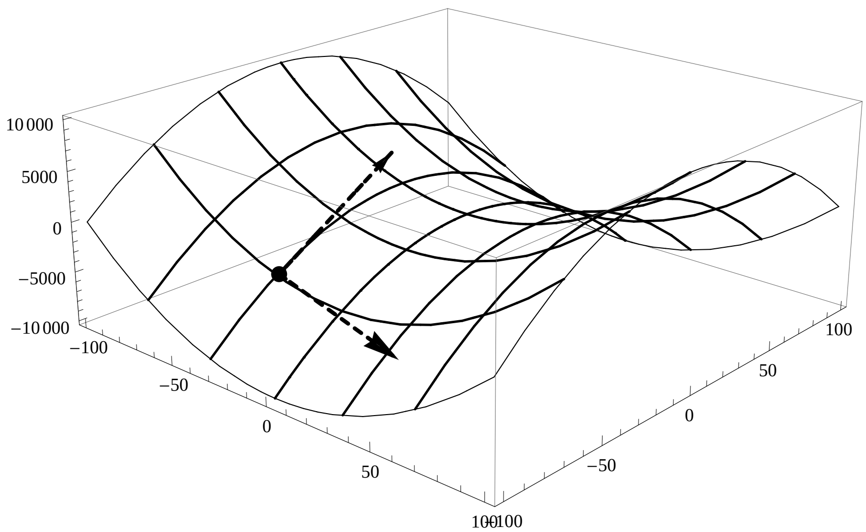
1.4 Диференцируемост на функции и изображения. Диференциране на съставни функции



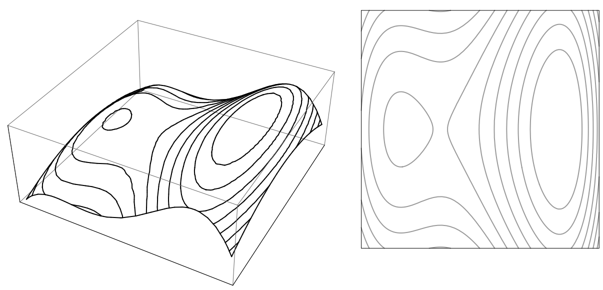
Графика на функцията $f(x, y) = x^2 - y^2$
и допирателни вектори към графиката.

Нека $f(x_1, \ldots, x_n)$ е функция, дефинирана в отвореното подмножество D на $\mathbb{R}^n$. Най-често е трудно да си представим нагледно поведението на тази функция; за тази цел можем да разгледаме зависимостта на функцията f от всяка една променлива поотделно. Нека фиксираме точка $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ от D, и да въведем следните (n на брой) функции на една променлива:

$$\varphi_i(t) = f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0\right),$$

като функцията $\varphi_i(t)$ е дефинирана в околност на точката x_i^0. Функциите $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ще наричаме частични функции, съответстващи на функцията на много променливи $f(x)$. На чертежа е дадена графиката на функцията $f(x,y) = x^2 - y^2$, т.е. множеството от точки $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, за които $z = f(x,y)$, и лежащите върху нея графики на някои от частичните и функции.

Възможен е и друг начин за онагледяване на поведението на една функция на две променливи – чрез така наречените линии на ниво, ("хоризонтали") т.е. линиите, зададени с уравнението $f(x,y) = a$ при различните стойности на a. Този начин се използва например за представяне на релефа на местността върху физическите карти. В графиката по-долу са представени хоризонталите върху графиката на дадена функция (отляво), и хоризонталите за същата функция в равнината Oxy (отдясно).



Хоризонтали върху графиката на функцията и в равнината Oxy.

Частни производни на функция. Можем да разгледаме производните на написаните по-горе частични функции (стига те да съществуват). С други думи, можем да диференцираме функцията $f(x)$ по една от променливите $x_1, \ldots, x_n$, като останалите променливи са фиксирани. Така стигаме до следната дефиниция:

Дефиниция. *Под частна производна на функцията $f(x_1, \ldots, x_n)$ по променливата x_i в точката $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ ще разбираме (ако* *съществува) границата*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right) = \varphi_i'(x_i^0) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,x_i^0+h,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0\right)-f\left(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,x_i^0,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0\right)}{h}.$$

Частната производна на $f(x)$ по x_i се означава още и с f'_{x_i}.

За нагледност ще повторим тази дефиниция за функция на две променливи $f(x,y)$:

$$f'_x\left(x_0,y_0\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h},$$

$$f'_y\left(x_0,y_0\right) = \lim_{k\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{k}.$$

Забележка. Трябва да се отбележи, че (за разлика от случая на една променлива) наличието на частни производни, по всички променливи и във всяка точка, още не означава, че функцията е "добра". Да си припомним функцията, разгледана в примера в §3: $f(x,y) = \frac{x\ y}{x^2+y^2}$ при $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$. Лесно се вижда, че $f(x,y)$ притежава навсякъде частни производни по x и y; от друга страна, както беше показано там, функцията не е непрекъсната в $(0,0)$.

Формула за нарастването на функция на много променливи. За да обясним смисъла на изведеното по-долу равенство, отначало ще си припомним случая на функция на една променлива. Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в околност на точката $x_0\in\mathbb{R}$ и диференцируема в тази точка. Знаем, че $f'\left(x_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Ако означим

$$\alpha(h) = \frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h} - f'\left(x_0\right),$$

то ще получим, че $\lim_{h\to 0}\alpha(h)=0$, и

$$f\left(x_0+h\right) = f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)h+\alpha(h)h.$$

Това равенство лесно се интерпретира геометрически: ако заместим h с $x - x_0$, първите две събираеми отдясно дават уравнението

$$y \; = \; f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$$

на допирателната права към графиката на f в точката x_0. Третото събираемо е "остатък", намаляващ по-бързо от величината h.

Ще изведем подобна формула за функция на няколко променливи.

Теорема 1 (формула за нарастването за функция на много променливи, I форма.) *Нека $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ е функция, дефинирана в околност на точката $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$, и нека всички частни производни f'_{x_i}, $i = 1, \ldots, n$, съществуват и са непрекъснати в тази околност. Тогава за достатъчно малки по норма вектори $h = \left(h_1, \ldots, h_n\right)$ е в сила равенството:*

$$(*) \qquad f(x+h) \; = \; f(x) \; + \; \sum_{i=1}^{n} \; f'_{x_i}(x) \; h_i \; + \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(h) \; h_i,$$

където $\alpha_i(h)$ са функции, клонящи към нула при $h \to 0$.

Преди да докажем тази формула. ще обясним нейния смисъл, като я напишем по друг начин. Първите две събираеми отдясно се наричат <u>линейна част</u> на нарастването, а третото – остатък. Линейната част на функцията представлява приблизителен израз за стойностите на функцията близо до x, лесен за пресмятане и опериране. Остатъкът ни дава представа за точността на това приближение. Ако означим с $r(h)$ остатъка в горната формула:

$$r(h) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(h) \; h_i,$$

то очевидно имаме $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{||h||} = 0$, и получаваме:

II форма на формулата за нарастването:

$$(**) \qquad f(x+h) \; = \; f(x) \; + \; \sum_{i=1}^{n} \; f'_{x_i}(x) \; h_i \; + \; r(h),$$

където $r(h) = o\,(||h||)$. [*]

Понякога е удобно горната формула да се записва по друг начин: ако означим $\Delta f = f(x+h) - f(x)$, и вместо h_i напишем Δx_i (нарастването на променливата x_i), имаме

$$\Delta f \;=\; \sum_{i=1}^{n} \; f'_{x_i}(x)\;\Delta x_i \;+\; o\,(||h||)\,.$$

Доказателство на формулата за нарастването: Ще използваме теоремата за крайните нараствания (виж I, §2.3): Ако функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в интервала $[x_0, x_0+h]$ и диференцируема във вътрешността му, то съществува число $\theta \in (0,1)$ такова, че
$\varphi\,(x_0+h) - \varphi\,(x_0) = h\varphi'\,(x_0+\theta h)$.

За яснота най-напред ще дадем доказателството за функция на две променливи. Имаме:

$$f\,(x+h, y+k) - f(x,y) \;=$$
$$=\;(f(x+h,y+k) - f(x,y+k)) \;+\; (f(x,y+k) - f(x,y)) \;=$$
$$=\; h\; f'_x(x+\theta_1 h, y+k) \;+\; k\; f'_y(x, y+\theta_2 k),$$

за подходящи $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$. Да означим

$$\alpha(h,k) = f'_x(x+\theta_1 h, y+k) - f'_x(x, y+\cancel{k}),\ \beta(h,k) = f'_y(x, y+\theta_2 k) - f'_y(x,y).$$

От непрекъснатостта на частните производни на f следва, че функциите $\alpha(h,k), \beta(h,k)$ клонят към нула при $h, k \to 0$. Като направим заместване, горното равенство добива търсения вид

$$f\,(x+h, y+k) - f(x,y) \;=\; h\,f'_x(x,y) + k\,f'_y(x,y) + h\,\alpha(h,k) + k\,\beta(h,k).$$

В общия случай на функция на n променливи $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ доказателството се провежда по същия начин. Нека $h = (h_1, \ldots, h_n)$ е достатъчно малко по норма. Да означим $\Delta f = f(x+h) - f(x)$, и нека

$$\Delta_i f = f\,(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_n + h_n)\; -$$

[*] Двете форми на формулата за нарастването очевидно са равносилни; наистина, ако имаме формулата $(**)$, и означим $\alpha_i(h) = \frac{h_i}{||h||^2}\; r(h)$, то от нея се получава формулата $(*)$.

$$- f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_n + h_n).$$

Очевидно имаме

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i f.$$

Разглеждайки $f(x_1, \ldots, x_n)$ като функция само на променливата x_i (т.е. фиксирайки всички останали променливи), и прилагайки към тази функция теоремата за крайните нараствания, имаме

$$\Delta_i f = h_i f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \theta_i h_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_n + h_n), \; \theta_i \in (0,1).$$

Ако означим

$$\alpha_i(h) = f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_i + \theta_i h_i, x_{i+1} + h_{i+1}, \ldots, x_n + h_n) - f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n),$$

то, поради непрекъснатостта на частните производни, имаме $\alpha_i(h) \to 0$ при $h \to 0$.

От друга страна, лесно се проверява, че $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i f$, откъдето

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left(f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) + \alpha_i(h)\right) h_i = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x) h_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(h)\, h_i. \blacksquare$$

Забележка 1. Само съществуването на частните производни (без тяхната непрекъснатост) не е достатъчно за валидността на доказаната формула; наистина, лесно се вижда, че ако една функция удовлетворява формулата за нарастването, то тя е непрекъсната. По-горе обаче ние видяхме пример на функция, притежаваща частни производни, която не е непрекъсната.

Следващите две забележки ще бъдат използвани при доказателството на лемата на Сард в края на §2.6.

Забележка 2. Функциите $\alpha_i(h)$, $r(h)$ зависят от избора на точката x. Ако обаче дефиниционната област $\mathbf{D}$ е компактно множество, то по теоремата на Кантор производните f'_{x_i} са равномерно непрекъснати върху $\mathbf{D}$, и следователно функциите $\alpha_i(h)$ във формулата $(*)$ могат да бъдат избрани независимо от x. Следователно, ако означим с $r_x(h)$ остатъка във формулата $(**)$, то съществува функция $\alpha(h)$, не зависеща от x и клоняща към нула при $h \to 0$, така че

$$|r_x(h)| \leq \alpha(h)\, ||h||$$

за всяко x в компактното множество $\mathbf{D}$.

Забележка 3. В много случаи е по-удобно функцията $\alpha(h)$ да е функция на скаларен, а не на векторен аргумент. Да положим

$$\overline{\alpha}(t) = \sup_{||h||=t} \alpha(h),$$

и ние получаваме оценката

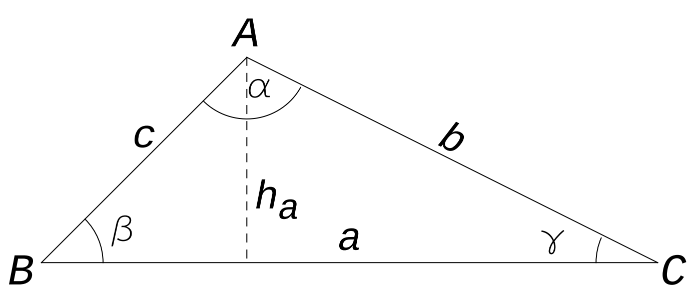
$$|r_x(h)| \leq \overline{\alpha}(||h||)\,||h||\,.$$

Лесно се доказва (чрез допускане на противното) че $\lim_{t\to 0} \overline{\alpha}(t) = 0$.

Практически приложения на формулата за нарастването. Нека величината f е зададена като функция $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ на независимите величини $x_1, \ldots, x_n$. Ако се знае, че всяка от величините x_i се измерва със съответна точност Δx_i, то каква ще бъде точността Δf, с която получаваме величината f? За отговор на този въпрос обикновено се използва линейната част на формулата за нарастването:

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\Delta x_i.$$

Пример. Следната задача често възниква в геодезията: от точката A се наблюдават недостъпните точки B и C. Известни са разстоянията $AC = b$ и $AB = c$, както и ъгълът α между $\vec{AC}$ и $\vec{BC}$. Да се намери разстоянието $a = |BC|$ между точките B и C. (виж чертежа).



Чертеж към примера.

Въпросното разстояние $a = a(b, c, \alpha)$ може да бъде изчислено по косинусовата теорема:

$$a(b,c,\alpha) = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha}.$$

Тогава линейната част на формулата за нарастването ни дава:

$$\Delta a \approx \frac{b - c.\cos\alpha}{a}\,\Delta b + \frac{c - b.\cos\alpha}{a}\,\Delta c + \frac{bc\sin\alpha}{a}\,\Delta\alpha.$$

Като вземем пред вид очевидните геометрични равенства

$$b - c.\cos\alpha = a\cos\gamma,\; c - b.\cos\alpha = a\cos\beta,\; bc\sin\alpha = a\,h_a,$$

получаваме удобната за използване формула

$$\Delta a \approx \cos\gamma.\Delta b + \cos\beta.\Delta c + h_a.\Delta\alpha.$$

Друг подобен пример е даден в задача 3.

Дефиниция на диференцируема функция. Както често се случва в математиката, за определение на даден клас от обекти се приема това тяхно свойство, което се използва при работата с тях. В случая това е формулата за нарастването. Така, (макар че това може да изглежда изкуствено), диференцируеми функции на няколко променливи се наричат тези функции, за които тя е удовлетворена. По-точно, имаме:

Дефиниция. *Нека $f\,(x_1,\ldots,x_n)$ е функция на n променливи, определена в околност на точката $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Казваме, че функцията f е диференцируема в точката x, ако съществуват константи $A_1,\ldots,A_n$, както и функции $\alpha_1(h),\ldots,\alpha_n(h)$, клонящи към нула при $h \to 0$, така че за достатъчно малки по норма вектори $h = (h_1,\ldots,h_n)$ е в сила равенството*

$$f(x+h) \;=\; f(x) \;+\; \sum_{i=1}^{n} A_i\; h_i \;+\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(h)\; h_i$$

В частност, веднага се вижда, че ако функцията е диференцируема в една точка, то тя е непрекъсната в тази точка.

Горната дефиниция се пренася и за изображения:

Дефиниция. *Изображението*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)),$$

дефинирано в $\mathbb{R}^n$ *и със стойности в* $\mathbb{R}^k$*, се нарича диференцируемо в точката* x*, ако всичките му координатни функции* f_i*,* $i = 1, \ldots, k$*, са диференцируеми в тази точка.*

С други думи, диференцируеми изображения са тези, които добре се приближават с линейни изображения около дадената точка.

Забележка. По-горе беше показано, че ако една функция на една променлива притежава производна в дадена точка, то тя удовлетворява в тази точка формулата за нарастването. Следователно, за функции на една променлива горната дефиниция съвпада с обичайната.

Сега теорема 1 може да се формулира така:

Теорема $1'$**.** *Ако функцията* f *притежава непрекъснати частни производни в околност на точката* x*, то тя е диференцируема в тази точка.*

Обратното твърдение не е вярно, но може да се докаже нещо послабо:

Теорема 2. *Ако функцията* f *е диференцируема в точката* x*, то тя притежава частни производни в тази точка, и са в сила равенствата*

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказателство. Да вземем вектор h, който има само една ненулева координата с номер i: $h = t\vec{e_i} = (0, \ldots 0, t, 0, \ldots, 0)$ (тук и по-долу с $\vec{e_i}$ означаваме вектор с дължина единица, насочен по оста x_i). Тогава равенството от дефиницията добива вида:

$$f(x + t\vec{e_i}) = f(x) + t\, A_i + t\, \alpha_i(t\vec{e_i}),$$

и според определението на частна производна имаме

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\vec{e_i}) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} (A_i + \alpha_i(t\vec{e_i})) = A_i\ . \blacksquare$$

В частност, оттук се вижда, че константите A_i в дефиницията за диференцируема функция са определени еднозначно.

Разбира се, от диференцируемостта в дадена точка не следват нито съществуването на частни производни в околност на точката, нито – още повече – тяхната непрекъснатост. Читателят сам може да намери съответните примери дори за функции на една променлива.

Допирателна равнина към графиката на функция на няколко променливи. Нека $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ е функция на n променливи, дефинирана и диференцируема в областта $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$. Както знаем, нейната графика $\mathbf{G}_f$ е подмножеството на $\mathbb{R}^{n+1}$, определено с условията

$$\mathbf{G}_f = \left\{\left(x_1, \ldots, x_{n+1}\right) \in \mathbb{R}^{n+1} : \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in \mathbf{D}, x_{n+1} = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right\}.$$

Дефиниция. *Нека $x^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ е точка от $\mathbf{D}$, и $\left(x^0, f\left(x^0\right)\right)$ е съответната точка от $\mathbf{G}_f$. Под допирателна равнина към графиката $\mathbf{G}_f$ в точката $\left(x^0, f\left(x^0\right)\right)$ ще разбираме равнината в $\mathbb{R}^{n+1}$ с уравнение $y = l\left(x_1, \ldots, x_n\right)$, където*

$$l\left(x_1, \ldots, x_n\right) = f\left(x^0\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\left(x_i - x_i^0\right).$$

От формулата за нарастване на диференцируема функция следва следната характеризация на допирателната равнина:

Функцията $l(x)$ е единствената линейна функция, удовлетворяваща условието

$$f(x) - l(x) = o\left(\left|\left|x - x^0\right|\right|\right).$$

С други думи, измежду всички равнини в $\mathbb{R}^{n+1}$, минаващи през точката $\left(x^0, f\left(x^0\right)\right)$, допирателната равнина е разположена най-близко до графиката на $f(x)$.

Дефиниция. *Под допирателен вектор към $\mathbf{G}_f$ в точката $\left(x^0, f\left(x^0\right)\right)$ разбираме всеки (свободен) вектор, колинеарен с допирателната равнина в тази точка.*

Очевидно допирателните вектори в точката $\left(x^0, f\left(x^0\right)\right)$ образуват n-мерно линейно подпространство на $\mathbb{R}^{n+1}$, наричано допирателно подпространство $\mathbf{T}_{x^0}\mathbf{G}_f$ към графиката $\mathbf{G}_f$ в тази точка. Лесно можем да посочим един базис в това пространство: той се състои от допирателните вектори към графиките на частичните функции в тази точка (ще напомним, че под i-та частична функция разбираме функцията на променливата x_i, получена от $f(x_1, \dots, x_n)$ чрез замразяване на всички останали променливи).

Така получаваме $n+1$-мерните вектори

$$l_i = \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\right),$$

като единицата в дясната част е поставена на i-то място. Така написаните n на брой вектори са линейно независими и колинеарни с допирателната равнина (проверете!), и следователно образуват базис в допирателното пространство.

Графика на функция на две променливи. Да разгледаме, в частност, графиката на функцията на две променливи $f(x, y)$, зададена в околност $\mathbf{D}$ на точката (x_0, y_0). Тогава графиката на функцията се определя в $\mathbb{R}^3$ с равенството

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbf{D},$$

и допирателното подпространство в точката от графиката, лежаща над (x_0, y_0), се поражда от векторите

$$\left(1, 0, f'_x(x_0, y_0)\right) \text{ и } \left(0, 1, f'_y(x_0, y_0)\right).$$

(виж чертежа в началото на параграфа.)

Допирателната равнина в тази точка има уравнението $z = l(x, y)$, където

$$l(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Допирателна равнина към графиката на изображение. Ще въведем аналогични на горните понятия и за векторно-значна функция, т.е. за изображение от $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$. Нека $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n))$ е диференцируемо изображение, дефинирано в подмножество $\mathbf{D}$ на $\mathbb{R}^n$ и вземащо стойности в $\mathbb{R}^k$. Ще означаваме точките на пространството $\mathbb{R}^{n+k}$ чрез (x, y), където $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_k)$ са точки в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$ съответно. Под графика $\mathbf{G}_f$ на изображението f ще разбираме подмножеството на $\mathbb{R}^{n+k}$, определено с условията

$$\mathbf{G}_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+k} : x \in \mathbf{D}, y = f(x)\right\}.$$

Дефиниция. *Нека $x^0 \in \mathbf{D}$. Под допирателна равнина към $\mathbf{G}_f$ в точката $(x^0, f(x^0))$ ще разбираме n-мерната равнина в $\mathbb{R}^{n+k}$, определена с равенствата*

$$y_j = f_j\left(x^0\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\left(x^0\right)\left(x_i - x_i^0\right), \quad j = 1, \ldots, k.$$

Ако отново въведем понятията допирателен вектор и допирателно подпространство по същия начин, както по-горе, ще получим базис от n на брой допирателни вектори от вида

$$l_i = \left(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\left(x^0\right), \ldots, \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\left(x^0\right)\right), \ i = 1, \ldots, n,$$

като отново единицата в дясната част е поставена на i-то място. Породеното от тези вектори n-мерно линейно подпространство на $\mathbb{R}^{n+k}$ се нарича допирателно подпространство към графиката G_f на изображението f.

Аритметични операции с диференцируеми функции.

Както и в случая на функции на една променлива, при аритметични операции с диференцируеми функции резултатът отново е диференцируема функция:

Теорема 3. *Ако функциите на n променливи $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в точката $x^0 \in \mathbb{R}^n$, то тяхната сума $f(x) + g(x)$, произведение $f(x).g(x)$, и, ако $g\left(x^0\right) \neq 0$, тяхното частно $\frac{f(x)}{g(x)}$, са също диференцируеми в тази точка.*

Доказателство. Нека h е достатъчно малък по норма вектор от $\mathbb{R}^n$. Да напишем формулата за нарастването в точката x^0 за функциите $f(x)$ и $g(x)$:

$$f\left(x^0 + h\right) \ = \ f\left(x^0\right) + \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + r_f(h),$$

$$g\left(x^0+h\right) \;=\; g\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n} B_i h_i + r_g(h),$$

където $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n$ са частните производни на $f(x)$ и $g(x)$ в x^0, и $r_f(h), r_g(h) = o\left(||h||\right)$. Като съберем двете равенства, получаваме

$$(f+g)\left(x^0+h\right) \;=\; (f+g)\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(A_i+B_i\right)h_i + r_f(h)+r_g(h).$$

Тъй като за остатъка в горната формула имаме $r(h) = r_f(h) + r_g(h) = o\left(||h||\right)$, то полученото равенство изразява диференцируемостта на $(f+g)(x)$ в x^0.

За да получим формулата за нарастването за $f(x)g(x)$, да умножим двете равенства. Получаваме:

$$f\left(x^0+h\right)g\left(x^0+h\right) = f\left(x^0\right)g\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n} C_i h_i + r(h),$$

където $C_i = g\left(x^0\right)A_i + f\left(x^0\right)B_i$, и

$$r(h)=\left(f\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n}A_ih_i\right)r_g(h)+\left(g\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n}B_ih_i\right)r_f(h)+r_f(h)r_g(h).$$

Имаме

$$\frac{r(h)}{||h||}=\left(f\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n}A_ih_i\right)\frac{r_g(h)}{||h||}+\left(g\left(x^0\right)+\sum_{i=1}^{n}B_ih_i\right)\frac{r_f(h)}{||h||}+r_f(h)\frac{r_g(h)}{||h||},$$

и следователно $\frac{r(h)}{||h||}\to 0$ при $h\to 0$.

Накрая, нека $g\left(x^0\right)\neq 0$. За да докажем, че $\frac{f(x)}{g(x)}$ е диференцируема в x^0, е достатъчно да видим, че $\frac{1}{g(x)}$ е диференцируема в тази точка. Наистина, тъй като $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x).\frac{1}{g(x)}$, диференцируемостта на частното ще следва от доказаната по-горе диференцируемост на произведение на диференцируеми функции.

За да докажем, че $\frac{1}{g(x)}$ е диференцируема в x^0, да означим

$$\Delta\left(\frac{1}{g}\right)=\frac{1}{g\left(x^0+h\right)}-\frac{1}{g\left(x^0\right)}.$$

Тъй като $g(x)$ е непрекъсната в x^0, то същото е вярно и за $\frac{1}{g(x)}$, т.е. $\Delta\left(\frac{1}{g}\right) \to 0$ при $h \to 0$. Имаме

$$\Delta\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{g\left(x^0\right) - g\left(x^0+h\right)}{g\left(x^0\right) g\left(x^0+h\right)} = -\frac{1}{g\left(x^0\right)}\ \Delta g \left(\frac{1}{g\left(x^0\right)} + \Delta\left(\frac{1}{g}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{g^2\left(x^0\right)}\ \Delta g\ -\ \frac{1}{g\left(x^0\right)}\ \Delta g\ \Delta\left(\frac{1}{g}\right)\ =\ \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{B_i}{g^2\left(x^0\right)}\right) h_i + r(h),$$

където

$$r(h) = -\frac{1}{g^2\left(x^0\right)}\ r_g(h)\ -\ \frac{1}{g\left(x^0\right)}\ \Delta g\ \Delta\left(\frac{1}{g}\right).$$

Тогава

$$\frac{r(h)}{||h||}\ =\ -\frac{1}{g^2\left(x^0\right)}\ \frac{r_g(h)}{||h||}\ -\ \frac{1}{g\left(x^0\right)}\ \frac{\Delta g}{||h||}\ \Delta\left(\frac{1}{g}\right).$$

От диференцируемостта на $g(x)$ следва, че $\frac{\Delta g}{||h||}$ е ограничена при достатъчно малки h (докажете!), и следователно $\frac{r(h)}{||h||} \to 0$ при $h \to 0$. ■

Диференциране на съставни функции.

При намиране на частни производни на сума, произведение и т.н. на функции на няколко променливи не е необходимо да се знае нищо повече от известните формули за производна на аритметични операции с функции на една променлива*. Един въпрос, при който положението е различно, е диференцирането на сложни, или съставни, функции. Ще напомним формулата за случая на една променлива: при дадени функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ (външна и вътрешна функция), производната на съставната функция $F(t) = f(\varphi(t))$ се дава с формулата

$$F'(t)\ =\ f'(\varphi(t)).\varphi'(t),$$

т.е. производната на съставната функция е равна на произведението на производните на външната и вътрешната функция. Ще докажем, че подобна формула съществува и за съставна функция на няколко променливи. Ще започнем с по-простия вариант на теоремата:

*Всъщност горните изчисления доказват още веднъж тези формули.

Теорема 4. *Нека $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ е функция, дефинирана в околност на точката $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, и нека функциите на едно променливо $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ са дефинирани и диференцируеми в околност на точката $t^0 \in \mathbb{R}$, при което $x_i^0 = \varphi_i(t^0)$, $i = 1, \ldots, n$. Да предположим, че $f(x)$ е диференцируема (в смисъл на горното определение) в x^0, а $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ - в t^0. Тогава съставната функция*

$$F(t) \;=\; f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

е диференцируема в точката t^0, като нейната производна се дава с формулата

$$F'\left(t^0\right) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right)\varphi_1'\left(t^0\right) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x^0\right)\varphi_n'\left(t^0\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\varphi_i'\left(t^0\right).$$

С други думи, формулата за производната на съставната функция се състои от толкова събираеми, колкото са променливите, като всяко от тях наподобява по форма израза за производна на съставна функция на една променлива.

Доказателство на теоремата. Грубо казано, доказателството се състои в заменяне на функцията с нейната линейна част. Нека t е точка достатъчно близка до t^0. Да означим $\Delta t = t - t^0$, $\Delta x_i = \varphi_i(t) - \varphi_i(t^0)$, $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$. Имаме

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x_i}{\Delta t} = \varphi_i'\left(t^0\right).$$

Нека $\Delta F = F(t) - F(t^0) = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0)$. Тогава от формулата за нарастването имаме

$$\Delta F \;=\; \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\left(x^0\right)\Delta x_i \;+\; \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\Delta x)\,\Delta x_i,$$

като $\alpha_i(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следователно,

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\frac{\Delta x_i}{\Delta t} \;+\; \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\Delta x)\frac{\Delta x_i}{\Delta t} \to \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\varphi_i'\left(t^0\right). \blacksquare$$

Пример. Нека $f(u,v) = u^v$, $u > 0, v > 0$, и нека $\varphi(t), \psi(t)$ са диференцируеми функции с положителни стойности. Ако положим $F(t) = \varphi(t)^{\psi(t)} = f(\varphi(t), \psi(t))$, то от горната теорема получаваме

$$F'(t) = \psi(t).\varphi(t)^{\psi(t)-1}.\varphi'(t) + \ln\varphi(t).\varphi(t)^{\psi(t)}.\psi'(t).$$

Тази формула е известна от първата част на курса, където тя се извежда чрез предварително логаритмуване.

Ще докажем аналогичната теорема за векторни функции (изображения):

Теорема 4$'$. *Нека $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ е функция, дефинирана и диференцируема в околност на точката $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, а векторната функция $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, зависеща от аргумента $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$, е дефинирана в околност на точката $t^0 = (t_1^0, \ldots, t_k^0)$, при което $\varphi(t^0) = x^0$. Да предположим, че функцията на n променливи $f(x)$ е диференцируема в x^0, а изображението $\varphi(t)$ (т.е. неговите компоненти $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$) - в точката t^0. Тогава съставната функция $F(t) = f(\varphi(t))$ е диференцируема в t^0, и са в сила равенствата:*

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}\left(t^0\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(t^0\right), \quad j = 1, \ldots, k.$$

Забележка. Тук новото в сравнение с теорема 4 се състои единствено във факта, че функцията $F(t)$ е диференцируема като функция на k променливи според определението на настоящия параграф, а не само по всяка променлива поотделно.

Доказателство. Нека, както по-горе, $\Delta t = t - t^0$, $\Delta t_j = t_j - t_j^0$, $\Delta x_i = \varphi_i(t) - \varphi_i(t^0)$, $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$. Формулата за нарастванията, приложена към функциите $f, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, ни дава равенствата

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right) \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left(\Delta x\right) \Delta x_i,$$

$$\Delta \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(t^0\right) \Delta t_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j}\left(\Delta t\right) \Delta t_j,$$

където функциите $\alpha_i(\Delta x)$, $\beta_{i,j}(\Delta t)$ клонят към нула при Δx, респ. Δt клонящи към нула. Преминавайки в първото от равенствата към променливите t, заместваме Δx_i с $\Delta\varphi_i$, и вместо Δf пишем ΔF. Ще отделим в отделно събираемо членовете, съдържащи някоя от безкрайно малките функции $\alpha_i(\Delta x)$, $\beta_{i,j}(\Delta t)$. Разместваайки реда на сумиране, получаваме:

$$\Delta F = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(t^0\right)\right)\Delta t_j + r(\Delta t),$$

където остатъкът $r(\Delta t)$ се дава с формулите

$$r(\Delta t) = \sum_{j=1}^{k}\gamma_j(\Delta t)\,\Delta t_j,$$

като

$$\gamma_j(\Delta t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)\beta_{i,j}(\Delta t) + \alpha_i(\Delta\varphi)\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(t^0\right) + \alpha_i(\Delta\varphi)\,\beta_{i,j}(\Delta t)\right).$$

Очевидно имаме $\gamma_j(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$, и следователно за функцията $F(t)$ в точката t^0 е изпълнена формулата за нарастването, т.е. тя е диференцируема в тази точка. Попътно равенството за ΔF ни дава още веднаж формули за частните производни на $F(t)$ в t^0. ■

Матрична производна на изображение.

Нека $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ и изображението

$$f(x) : \mathbf{D} \to \mathbb{R}^m, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{D}$$

има компоненти $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, където $f_1(x), \dots, f_m(x)$ са диференцируеми функции в $\mathbf{D}$. Ако разгледаме всички първи частни производни $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ на координатните функции, получаваме $n.m$ на брой различни производни, и картината изглежда доста сложна. Ситуацията става значително по-обозрима, ако подредим тези производни в една $n \times m$ - матрица. Така стигаме до следната дефиниция:

Дефиниция. *Под матрична производна на изображението $f(x)$ в точката x^0 ще разбираме матрицата*

$$Df\left(x^0\right) = \left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(x^0\right)\right\}_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j1}\left(x^0\right) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(x^0\right) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(x^0\right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(x^0\right) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(x^0\right) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\left(x^0\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\left(x^0\right) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}\left(x^0\right) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\left(x^0\right) \end{pmatrix}.$$

В частност, матричната производна на една скаларна функция на n променливи съвпада с n-мерния вектор, съставен от нейните частни производни.

Използването на операциите с матрици позволява да се даде прост вид на формулата за нарастването и формулата за производна на съставна функция за изображения. Ще напомним, че всяка $n \times m$ – матрица може да се разглежда като линеен оператор от $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Нека, както по-горе, $f(x) : \mathbf{D} \to \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{D}$ е m – мерна вектор-функция, и $h = (h_1, \dots, h_n)$ е вектор на нарастването на аргумента. Да напишем за всяка от компонентите $f_1(x), \dots, f_m(x)$ на изображението $f(x)$ формулата за нарастването във формата $(**)$ за точката x^0 и нарастването h. Написвайки получените m на брой скаларни равенства като равенство между m-мерни вектори, получаваме:

Формула за нарастването за вектор-функции. При горните условия имаме

$$f\left(x^0 + h\right) \; = \; f\left(x^0\right) \; + \; Df\left(x^0\right) \circ h \; + \; r(h),$$

където $r(h)$ е m – мерна вектор-функция, удовлетворяваща условието:

$$||r(h)|| \; = \; o\left(||h||\right).$$

Матрицата $Df\left(x^0\right)$, разглеждана като оператор от $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, се нарича диференциал на изображението $f(x)$ в точката x^0.

Ще покажем, че при горния подход и теоремата за диференциране на съставно изображение добива съвсем прост вид, аналогичен на този при функции на една променлива. Ще напомним, че на всяка двойка матрици A, B с размерност съотв. $n \times m$ и $k \times n$ се съпоставя матрицата $A \circ B$ с размерност $k \times m$: ако $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{pq}\}$, то $A \circ B = \{c_{ls}\}$ с $c_{ls} = \sum_{i=1}^n b_{li}.a_{is}$.

Нека сега вектор-функцията $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ е определена в околност на точката $t^0 = (t_1^0, \dots, t_k^0) \in \mathbb{R}^k$, а вектор-функцията $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ - в околност на точката $x^0 = \varphi(t^0) \in \mathbb{R}^n$. Тогава съставната функция $F(t) = f(\varphi(t))$ е определена в околност на точката t^0 и взема стойности в пространството $\mathbb{R}^k$.

Теорема 4. *Да предположим, че функциите $f(x)$ и $\varphi(t)$ са диференцируеми съответно в точките t^0 и $x^0 = \varphi(t^0)$. Тогава съставната функция $F(t) = f(\varphi(t))$ е диференцируема в точката t^0, и е в сила равенството*

$$DF\left(t^0\right) \;=\; Df\left(x^0\right) \circ D\varphi\left(t^0\right).$$

Доказателство. В същност твърдението представлява само друга формулировка на резултата на теорема $4'$. Наистина, то се получава непосредствено от даденото по-горе определение на произведение на матрици и от доказаните по-горе равенства

$$\frac{\partial F_l}{\partial t_j}\left(t^0\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial x_i}\left(x^0\right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(t^0\right).$$

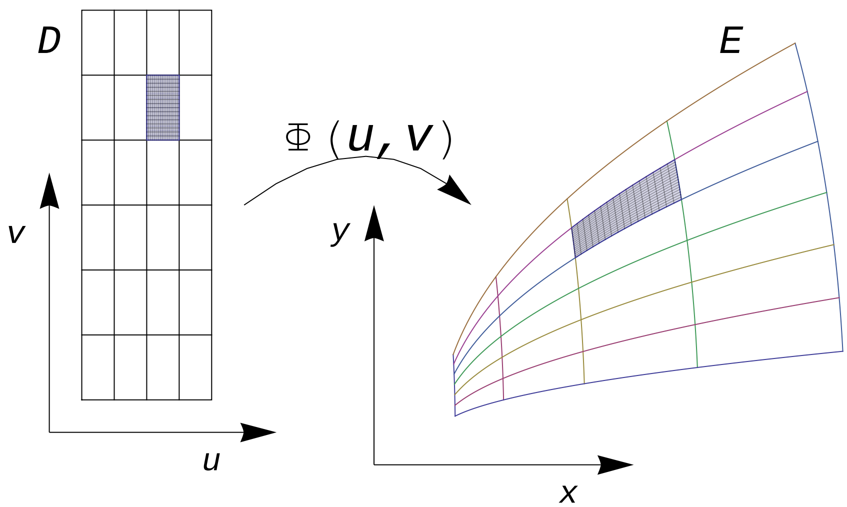
■

Функционална детерминанта на изображение.

По-нататък често ще се налага да разглеждаме изображения, които действат от $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, или, по-точно, са дефинирани в подмножество на $\mathbb{R}^n$ и вземат стойности в $\mathbb{R}^n$. Тогава тяхната матрична производна представлява квадратна матрица, и ние може да разгледаме нейната детерминанта, която играе много важна роля в по-нататъшните разглеждания.

Дефиниция. *Нека вектор-функцията $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, вземаща стойности в $\mathbb{R}^n$, е дефинирана в околност на точката $x^0 = \varphi(t^0) \in \mathbb{R}^n$. Под функционална детерминанта, или якобиан, на $f(x)$ в точката x^0, ще разбираме числото*

$$\frac{D\left(f_1, \dots, f_n\right)}{D\left(x_1, \dots, x_n\right)}\left(x^0\right) \;=\; \det\left(Df\left(x^0\right)\right).$$



Изображение на $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$

Теорема 5.(основно свойство на функционалните детерминанти). *Функционалната детерминанта на произведението на две изображения е равна на произведението на тяхните функционални детерминанти.*

Доказателство. Нека $F(t) = f(\varphi(t))$. Тъй като детерминанта на произведение на две квадратни матрици е равна на произведението на тяхните детерминанти, то твърдението непосредствено следва от теорема 4. ■

Доказаното равенство се записва във вида

$$\frac{D\left(F_1, \ldots, F_n\right)}{D\left(t_1, \ldots, t_n\right)}\left(t^0\right) = \frac{D\left(f_1, \ldots, f_n\right)}{D\left(x_1, \ldots, x_n\right)}\left(x^0\right) \cdot \frac{D\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\right)}{D\left(t_1, \ldots, t_n\right)}\left(t^0\right).$$

Вижда се, че начинът на записване е така съставен, че да подсеща читателя за правилната формула: горното равенство може да се тълкува като "съкращаване" на $D\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ с "равното му" $D\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n\right)$.

Производна на обратното изображение. Както знаем, изображението $f : X \to Y$ от множеството X в множеството Y е биективно (взаимно еднозначно), ако за всяка точка $y \in Y$ съществува точно един прообраз в X, т.е. такова $x \in X$, че $f(x) = y$. Полагайки $x = g(y)$, получаваме обратното изображение $g = f^{-1} : Y \to X$. Лесно се вижда, че са изпълнени равенствата $g \circ f = I_X$, $f \circ g = I_Y$, където I_X и I_Y са идентичните изображения на пространствата X и Y в себе си.

Теорема 6. *Нека $f(x)$ е биективно изображение на множеството $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ в множеството $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}^n$ и $g(y)$ е неговото обратно изображение. Нека изображението $f(x)$ е диференцируемо в точката $x^0 \in \mathbf{D}$, а изображението $g(y)$ - в точката $y^0 = f\left(x^0\right)$. Тогава са в сила равенствата:*

$$Dg\left(y^0\right) = Df\left(x^0\right)^{-1}\ , \ \frac{D\left(g_1, \ldots, g_n\right)}{D\left(y_1, \ldots, y_n\right)}\left(y^0\right) = \left(\frac{D\left(f_1, \ldots, f_n\right)}{D\left(x_1, \ldots, x_n\right)}\left(x^0\right)\right)^{-1}.$$

Доказателство. От равенството $g(f(x)) = x$ и теоремата за производна на съставно изображение следва матричното равенство $Dg\left(y^0\right) \circ Df\left(x^0\right) = I$, където I е единичната $n \times n$ матрица, което е първото от горните равенства. Второто равенство следва от цитираното по-горе свойство на детерминантата. ■

В частност, от тук се вижда, че при условията на теоремата имаме $\frac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}\left(x^0\right) \neq 0$.

Забележка. В параграф 1.8, теорема 7, ние ще покажем, че е вярно и обратното твърдение: ако функционалната детерминанта на едно диференцируемо биективно изображение е различна от нула, то обратното му изображение също е диференцируемо.

Упражнения.

1. Функцията $f\left(\vec{x}\right) = f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ се нарича *хомогенна от степен* k, ако за всяко число t е изпълнено равенството

$$f\left(t\vec{x}\right) \ = \ t^k f\left(\vec{x}\right).$$

Докажете, че за функциите, хомогенни от степен k, е в сила равенството на Ойлер:

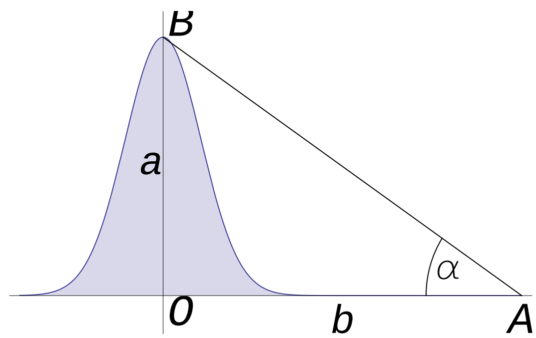
$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\vec{x}\right) + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(\vec{x}\right) = k\ f\left(t\vec{x}\right).$$

2. Докажете, че функцията $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ не е диференцируема в точката $(0,0)$, а функцията $g(x,y)=\cos\sqrt[3]{xy}$ е диференцируема в тази точка.

3. Височината $a=|OB|$ на планински връх може да се определи по формулата

$$a(b,\alpha)=b\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

където $b=|OA|$ е разстоянието по хоризонталата между върха и наблюдателя, а α е ъгълът, под който се вижда върха (виж чертежа).



Чертеж към задача 3.

Използвайки линейната част на формулата за нарастването, докажете, че е валидна следната формула за грешката:

$$\Delta a \approx \mathrm{tg}\,\alpha.\Delta b+\frac{b}{\cos^2\alpha}.\Delta\alpha.$$

4. Напишете формулата за нарастването за функциите:

а/ $f(x,y)=\frac{1}{\sin(xy)}$ около точката $(\pi/3,1/2)$.

б/ $f(x,y)=x^y$ около точката $(2,2)$.

в/ Използвайки б/, пресметнете $2.01^{2.01}$ с точност до 0.01.

1.5 Производна по направление и градиент

За функции на една променлива първата производна в дадена точка има прост геометричен смисъл - тя е равна на ъгловия коефициент на допирателната към графиката на функцията в тази точка. С други думи, тя изразява "стръмността" на графиката в тази точка (ако функцията нараства, производната е положителна, и т.н.). За функции на n променливи първите производни са n на брой, и тяхната интерпретация не е толкова очевидна.

За да си изясним геометричния смисъл на първите производни, ще си послужим с аналогията, която споменахме в началото на предния параграф: ще разгледаме графиката на дадена функция на две променливи като релеф на част от земната повърхност. Така, да си представим, че се намираме на склона на някакъв хълм (виж чертежа). Тогава стръмността на пътеката, по която вървим, зависи от нейната посока: ние може да тръгнем право нагоре (голям положителен наклон), право надолу (голям отрицателен), или да поемем по хоризонталата - тогава пътеката е хоризонтална и наклонът е нулев. Тези съображения водят до понятието производна по направление, което ще изложим по-долу.

Производна по направление. Нека $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ е функция на n променливи, диференцируема в точката x^0, и нека $\vec{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ е n-мерен вектор с норма единица (т.е. $||e|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n e_i^2} = 1$.)*

Дефиниция. *Под производна на функцията $f(x)$ по направление $\vec{e}$ в точката x^0 ще разбираме границата*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\left(x^0\right) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(x^0 + t\vec{e}\right) - f\left(x^0\right)}{t}.$$

Ще изразим $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\left(x^0\right)$ чрез частните производни на $f(x)$. Правата, минаваща през точката x^0 и колинеарна на вектора $\vec{e}$, може да се параметризира с уравненията

$$x(t) = \left(x_1^0 + te_1, \ldots, x_n^0 + te_n\right).$$

*Компонентите $e_1, \ldots, e_n$ на единичния вектор $\vec{e}$ се наричат негови директорни косинуси. Ако означим с $\vec{x_i}$ единичния координатен вектор по оста x_i, то компонентата e_i е равна на скаларното произведение $\langle \vec{e}, \vec{x_i} \rangle$ и следователно на косинуса на ъгъла между $\vec{e}$ и оста x_i.

(Тъй като $||e|| = 1$, параметърът t съвпада с ориентираното разстояние от текущата точка $x(t)$ до началната точка x^0.)

Тогава ограничението на $f(x)$ върху тази права се представя с функцията на една променлива

$$\varphi(t) = f(x(t)) = f\left(x_1^0 + te_1, \ldots, x_n^0 + te_n\right).$$

Прилагайки за функцията $\varphi(t) = f\left(x_1^0 + te_1, \ldots, x_n^0 + te_n\right)$ правилото за диференциране на съставна функция, получаваме равенството

$$(*) \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\left(x^0\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right).$$

Дефиницията на производна по направление обобщава понятието частна производна, дефинирано в предния параграф. Наистина, ако в ролята на $\vec{e}$ вземем i-тият координатен вектор $\vec{e^i}$ (това е вектор с координата единица на i-тото място и нули на останалите места), то от формулата $(*)$ получаваме:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e^i}}\left(x^0\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right).$$

Забележка. По-нататък ние ще използваме дефиницията за производна по направление и формулата $(*)$ за произволен n-мерен вектор $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, без да изискваме условието $\left|\left|\vec{h}\right|\right| = 1$. Тогава определението губи директен геометричен смисъл, но основните му свойства остават в сила. За по-нататъшни цели ще въведем означението:

$$D_{\vec{h}} f(x) = \frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Ако означим с D_i операцията на диференциране по променливата x_i, е в сила равенството между оператори

$$D_{\vec{h}} = \sum_{i=1}^{n} h_i D_i.$$

Градиент на функция. Да разгледаме, при фиксирана точка x^0, зависимостта на производната по направление $f'_{\vec{e}}(x^0)$ от единичния вектор $\vec{e}$. С други думи, пита се по кое направление производната на функцията е най-голяма, респ. най-малка. За целта ще използваме понятието *скаларно произведение* на вектори от $\mathbb{R}^n$, което може да бъде дефинирано по аналитичен и геометричен път (виж §1). Ще напомним, че за два вектора $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ от $\mathbb{R}^n$ скаларното произведение се дефинира с формулата

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \ = \ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

В сила е равенството

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \ = \ ||\vec{a}|| \left|\left|\vec{b}\right|\right| \cos \sphericalangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right),$$

където $\sphericalangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ означава ъгъла между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Дефиниция. *Под* <u>*градиент*</u> *на функцията на n променливи $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ в точката x^0 ще разбираме n-мерен вектор с координати, равни на частните производни в тази точка:*

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0\right) \ = \ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^0\right), \frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x^0\right), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x^0\right)\right).$$

Тогава формулата $(*)$ може да се напише и така:

$$(**) \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\left(x^0\right) = \left\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0\right), \vec{e} \right\rangle = \left|\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0\right)\right|\right| \cos \angle \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0\right), \vec{e}\right),$$

тъй като $||\vec{e}|| = 1$.

Знаем, че най-голямата стойност на косинуса на един ъгъл е равна на единица и се достига за ъгъл, равен на нула. Оттук получаваме:

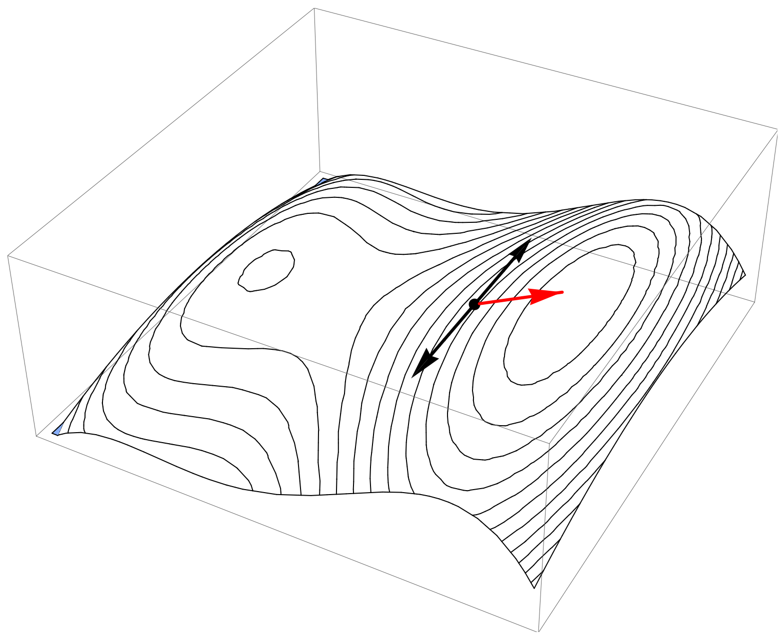
Теорема 1. *Производната по направление $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}\left(x^0\right)$ в точката $\left(x^0\right)$ взема най-голямата си стойност, когато вектора $\vec{e}$ е еднопосочен с вектора $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0\right)$, т.е.*

$$\vec{e} \ = \ \frac{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0\right)}{\left|\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0\right)\right|\right|}.$$

В този случай имаме

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\left(x^0\right) = \left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0\right)\right\|.$$

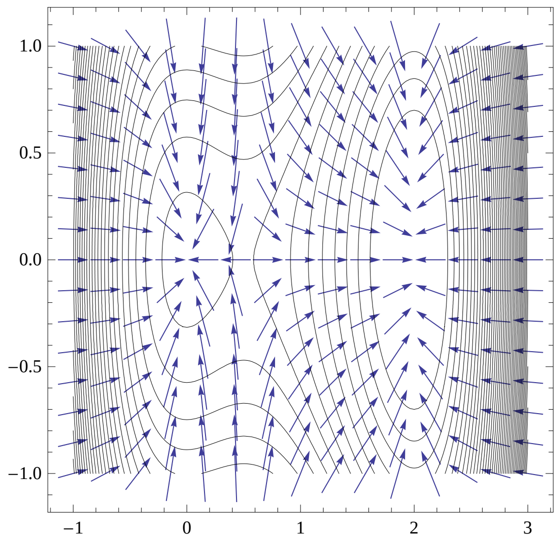
С други думи, имаме следната геометрична интерпретация на вектора $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0\right)$: посоката му съвпада с посоката, в която $f(x)$ расте най-бързо, а големината му е равна на наклона на графиката на функцията в тази посока.



Градиент на функцията в дадена точка и вектори,
допирателни към хоризонталата.

Ще посочим още една геометрична характеризация на вектора $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0\right)$. От формулата $(**)$ се вижда, че $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}\left(x^0\right) = 0$ точно тогава, когато $\vec{e}$ е перпендикулярен на $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\left(x^0\right)$. Иначе казано, ако се движим по "хоризонталата", направлението на движението във всеки момент ще бъде перпендикулярно на градиента в съответната точка. Така, засега на интуитивно ниво, стигаме до твърдението (виж чертежа).

Теорема 2. *Градиентът на една функция в дадена точка е перпендикулярен на линията на ниво на функцията, минаваща през тази точка.*



Градиент и линии на ниво на дадена функция.

Точната формулировка на това твърдение е следната: градиентът е перпендикулярен на допирателната към линията на ниво в точката. (За допирателна към параметрично зададена крива виж част I, §2.12.) Параметризирането на линията на ниво, както и доказателството на горната теорема, ще бъде направено в §8.

Забележка. Градиентът на дадена функция беше дефиниран при наличие на декартова координатна система в пространството $\mathbb{R}^n$. Теореми 1 и 2 обаче показват, че вектора $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x)$ има инвариантен геометричен смисъл, т.е не зависи от избора на координатната система, а само от скаларното произведение в $\mathbb{R}^n$.

Формула за крайните нараствания за функции на много променливи. Ще обобщим една от най-важните формули на дифе-