Параметрични уравнения на афинно подпространство

Нека $\mathcal{A}$ е n-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$ и $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ е координатното изображение, съответно на K, а $r : \mathcal{A} \to U$ е изображението радиус-вектор, съответно на K.

Теорема 1 *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$, а векторите $v_1, \dots, v_k \in U$ са линейно независими. Означаваме $r_0 = r(P_0)$. Тогава k-мерното афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, което минава през P_0 и е успоредно на $v_1, \dots, v_k$, има спрямо K векторно параметрично уравнение*

$$B : r = r_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k, \qquad \begin{array}{c} \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \\ (\textit{или } (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k). \end{array} \tag{1}$$

При това за различни набори параметри се получават радиус-вектори на различни точки.

Теорема 2 *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и линейно независимите вектори $v_1, \dots, v_k \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_{10}, \dots, x_{n0})$, $v_j(\xi_{1j}, \dots, \xi_{nj})$, $j = 1, \dots, k$. Тогава k-мерното афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, което минава през P_0 и е успоредно на $v_1, \dots, v_k$, има спрямо K скаларни параметрични уравнения*

$$B : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 &=& x_{10} + \lambda_1 \xi_{11} + \dots + \lambda_k \xi_{1k} \\ & \vdots & \\ x_i &=& x_{i0} + \lambda_1 \xi_{i1} + \dots + \lambda_k \xi_{ik} \\ & \vdots & \\ x_n &=& x_{n0} + \lambda_1 \xi_{n1} + \dots + \lambda_k \xi_{nk} \end{array} \right. , \qquad \begin{array}{c} \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \\ (\textit{или } (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k) \end{array}, \tag{2}$$

тоест

$$B : x = x_0 + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \quad (\textit{или } (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k),$$

където $x_0, \xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ са координатните вектори на $P_0, v_1, \dots, v_k$. При това за различни набори параметри се получават координатни вектори на различни точки.

Забележка 1 Ако в Теорема 1 и Теорема 2 векторите $v_1, \dots, v_k$ са линейно зависими, то афинното подпространство определено от P_0 и $l(v_1, \dots, v_k)$ пак има същите параметрични уравнения (1) и (2), но $\dim B < k$ и една точка се получава за много набори на параметрите.

Теорема 3 *Нека $k \le n$ и нележащите в $(k-1)$-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ точки $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x_{1j}, \dots, x_{nj})$, $j = 0, \dots, k$. Тогава k-мерното афинно подпространство B на $\mathcal{A}$, което минава през $P_0, \dots, P_k$, има спрямо K скаларни параметрични уравнения*

$$(3) \qquad B : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & x_{10} + \lambda_1(x_{11} - x_{10}) + \cdots + \lambda_k(x_{1k} - x_{10}) \\ & \vdots & \\ x_i & = & x_{i0} + \lambda_1(x_{i1} - x_{i0}) + \cdots + \lambda_k(x_{ik} - x_{i0}) \\ & \vdots & \\ x_n & = & x_{n0} + \lambda_1(x_{n1} - x_{n0}) + \cdots + \lambda_k(x_{nk} - x_{n0}) \end{array} \right. , \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

тоест

$$B : x = x^0 + \lambda_1(x^1 - x^0) + \cdots + \lambda_k(x^k - x^0), \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

където $x^0, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ са координатните вектори на $P_0, \dots, P_k$,
или еквивалентно

$$(4) \qquad B : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & (1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_k)x_{10} + \lambda_1 x_{11} + \cdots + \lambda_k x_{1k} \\ & \vdots & \\ x_i & = & (1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_k)x_{i0} + \lambda_1 x_{i1} + \cdots + \lambda_k x_{ik} \\ & \vdots & \\ x_n & = & (1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_k)x_{n0} + \lambda_1 x_{n1} + \cdots + \lambda_k x_{nk} \end{array} \right. , \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

тоест

$$B : x = (1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_k)x^0 + \lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_k x^k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

или еквивалентно

$$(5) \qquad B : \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda_0 x_{10} + \lambda_1 x_{11} + \cdots + \lambda_k x_{1k} \\ & \vdots & \\ x_i & = & \lambda_0 x_{i0} + \lambda_1 x_{i1} + \cdots + \lambda_k x_{ik} \\ & \vdots & \\ x_n & = & \lambda_0 x_{n0} + \lambda_1 x_{n1} + \cdots + \lambda_k x_{nk} \end{array} \right. , \quad \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \sum_{j=0}^{k} \lambda_j = 1,$$

тоест

$$B : x = \lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_k x^k, \quad \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1.$$

Забележка 2 В Теорема 3 изискването $k \le n$ и точките $P_0, \dots, P_k \in \mathcal{A}$ да не лежат в $(k-1)$-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A}$ може да се замени с изискването точките $P_0, \dots, P_k$ да не лежат в афинно подпространство на $\mathcal{A}$ с размерност строго по-малка от k.

Частни случаи:

1. $n = 2$, $k = 1$, тоест права в 2-мерно афинно пространство (в частност, в геометричната равнина).
   Нека координатите са (x, y) вместо (x_1, x_2).

   Теорема 2′ *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и ненулевият вектор $v \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0)$, $v(\xi, \eta)$. Тогава правата l, която минава през P_0 и е колинеарна с v, има спрямо K скаларни параметрични уравнения*

   $$l : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda\xi \\ y & = & y_0 + \lambda\eta \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Теорема 3′ *Нека различните точки $P_0, P_1 \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x_j, y_j)$, $j = 0, 1$. Тогава правата l, определена от P_0 и P_1, има спрямо K скаларни параметрични уравнения*

   $$l : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y & = & y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

   или еквивалентно

   $$l : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \\ y & = & (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1 \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

   или еквивалентно

   $$l : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \\ y & = & \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 \end{array} \right. , \quad \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R} : \lambda_0 + \lambda_1 = 1.$$

2. $n = 3$, $k = 1$, тоест права в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство).
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 2″ *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и ненулевият вектор $v \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $v(\xi, \eta, \zeta)$. Тогава правата l, която минава през P_0 и е колинеарна с v, има спрямо K скаларни параметрични уравнения*

   $$l : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda\xi \\ y & = & y_0 + \lambda\eta \\ z & = & z_0 + \lambda\zeta \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Теорема 3″ *Нека различните точки $P_0, P_1 \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x_j, y_j, z_j)$, $j = 0, 1$. Тогава правата l, определена от P_0 и P_1, има спрямо K скаларни параметрични уравнения*

$$l : \begin{cases} x &= x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y &= y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z &= z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

или еквивалентно

$$l : \begin{cases} x &= (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \\ y &= (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1 \\ z &= (1-\lambda)z_0 + \lambda z_1 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

или еквивалентно

$$l : \begin{cases} x &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \\ y &= \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 \\ z &= \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 \end{cases}, \quad \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R} : \lambda_0 + \lambda_1 = 1.$$

3. $n = 3$, $k = 2$, тоест равнина в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство).
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 2‴ *Нека точката $P_0 \in \mathcal{A}$ и неколинеарните (тоест линейно независими) вектори $v_1, v_2 \in U$ имат спрямо K координати $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $v_j(\xi_j, \eta_j, \zeta_j)$, $j = 1, 2$. Тогава равнината π, която минава през P_0 и е компланарна с v_1 и v_2, има спрямо K скаларни параметрични уравнения*

$$\pi : \begin{cases} x &= x_0 + \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 \\ y &= y_0 + \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 \\ z &= z_0 + \lambda_1 \zeta_1 + \lambda_2 \zeta_2 \end{cases}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

   Теорема 3‴ *Нека нележащите на една права точки $P_0, P_1, P_2 \in \mathcal{A}$ имат спрямо K координати $P_j(x_j, y_j, z_j)$, $j = 0, 1, 2$. Тогава равнината π, определена от P_0, P_1, P_2, има спрямо K скаларни параметрични уравнения*

$$\pi : \begin{cases} x &= x_0 + \lambda_1(x_1 - x_0) + \lambda_2(x_2 - x_0) \\ y &= y_0 + \lambda_1(y_1 - y_0) + \lambda_2(y_2 - y_0) \\ z &= z_0 + \lambda_1(z_1 - z_0) + \lambda_2(z_2 - z_0) \end{cases}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

или еквивалентно

$$\pi : \begin{cases} x &= (1 - \lambda_1 - \lambda_2)x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y &= (1 - \lambda_1 - \lambda_2)y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ z &= (1 - \lambda_1 - \lambda_2)z_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{cases}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

или еквивалентно

$$\pi : \begin{cases} x &= \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y &= \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ z &= \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{cases}, \quad \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

4. $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ със стандартната координатна система K^0.

   Теорема 2$'^{\text{v}}$ *Нека $x_0 \in \mathbb{R}^n$, а векторите $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ са линейно независими. Тогава k-мерното афинно подпространство B на $\mathbb{R}^n$, което минава през x_0 и е успоредно на $\xi_1, \dots, \xi_k$, има спрямо K^0 скаларни параметрични уравнения*

$$B : x = x_0 + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_k \xi_k, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

   .

Следствие 1 *B е k-мерно афинно подпространство на $\mathcal{A} \Leftrightarrow x(B)$ е k-мерно афинно подпространство на $\mathbb{R}^n$.*
При това, ако V е направляващото пространство на B, то направляващото пространство на $x(B)$ е $x(V)$.

Забележка 3 В горните неща никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че всичко важи без промяна и ако вместо $\mathbb{R}$ се вземе произволно поле F, тоест ако U е линейно пространство над произволно поле.