Задачи по теория — функционални редици и редове
КН, 1 к., I п.

Някои задачи от посочените тук или подобни на тях се падат на изпита по теория. Задачите обозначени със $*$ са по-сложни или имат по-дълги решения. Такива **не** се падат на изпита.

1. Докажете, че редица $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ от функции, дефинирани в $D \subseteq \mathbb{R}$, е равномерно сходяща към функцията $f(x)$ в D тогава и само тогава, когато
$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Определете дали редиците със следните общи членове са равномерно сходящи върху посочените множества:

   (а) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$ върху $[0,1]$,

   (б) $f_n(x) = \operatorname{acrtg} \dfrac{2x}{x^2+n^3}$ върху $\mathbb{R}$,

   (в) * $f_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$ върху $[1,2]$.

3. Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $f_n(x) = \dfrac{[nf(x)]}{n}$, $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}_+$, където $[a]$ означава най-голямото цяло число, което не надминава a (т.нар. „долна цяла част“ на a). Докажете, че $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ в $[a,b]$.

4. Докажете, че ако $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ и $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} g(x)$ в $D \subseteq \mathbb{R}$, то $f_n(x) + g_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x) + g(x)$ в D.

5. Нека функционалният ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ в $D \subseteq \mathbb{R}$ и $v : D \to \mathbb{R}$ е ограничена. Докажете, че редът $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v(x)u_n(x)$ е също равномерно сходящ в D.

6. Нека функционалният ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно и абсолютно сходящ в $D \subseteq \mathbb{R}$ и $v_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, са такива, че съществува $C > 0$ с $|v_n(x)| \le C$, $x \in D$ и $n \in \mathbb{N}_0$. Докажете, че редът $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)u_n(x)$ е също равномерно и абсолютно сходящ в D. Вярно ли е, че ако $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно, но не непременно абсолютно сходящ в $D \subseteq \mathbb{R}$, а

$\{v_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ е както по-горе, редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n(x)u_n(x)$ е равномерно сходящ в D?

7. Нека функциите $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$, са диференцируеми и $f_n'(x)$ са непрекъснати в $[a,b]$. Нека числовата редица $\{f_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, а функционалната редица $\{f_n'(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща в $[a,b]$. Докажете, че $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща в $[a,b]$ и ако положим $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in [a,b]$, то $f(x)$ е диференцируема в $[a,b]$ и $f'(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$, при това $f_n'(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f'(x)$ в $[a,b]$.

8. * Нека функциите $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_+$, притежават непрекъснати производни до ред $r \in \mathbb{N}_+$ включително в $[a,b]$. Нека редицата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща в r различни точки от интервала $[a,b]$, а редицата $\{f_n^{(r)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща в $[a,b]$. Докажете, че $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща в $[a,b]$ и ако положим $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in [a,b]$, то $f(x)$ притежава непрекъснати производни до ред r включително в $[a,b]$, при това $f_n^{(i)}(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f^{(i)}(x)$ в $[a,b]$ за $i = 1,\dots,r$.

9. Докажете, че ако радиусите на сходимост на степенните редове $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ са съответно R_1 и R_2, като $R_1 \neq R_2$, то радиусът на сходимост на $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n$ е $\min\{R_1, R_2\}$. Остава ли твърдението е сила, ако $R_1 = R_2$.

10. * Докажете, че степенният ред
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$
и полученият от него степенен ред чрез почленно диференциране
$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$
имат един и същи радиус на сходимост.