Афинни пространства

Опр.: V - реално линейно пространство

A – непразно множество

A се нарича афинно пространство, моделирано върху V, ако е зададено изображение

$$A \times A \longrightarrow V$$
$$(P, Q) \longrightarrow \overrightarrow{PQ}$$, което има свойствата:

1. За $\forall P \in A$ и $\forall \vec{u} \in V$ $\exists! Q \in A : \overrightarrow{PQ} = \vec{u}$;

2. За $\forall P, Q, R \in A$ е в сила $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

Елементите на A се наричат точки.

Размерност на A се нарича размерността на V.

* * *

/Пример 1: Едноточково множество $A = \{т. O\}$ е афинно пространство, моделирано над $V = \{\vec{o}\}$.

Изображението $A \times A \to V$ е $(O, O) \to \vec{o}$.

Едноточковото множество е нуламерно АП.

Пример 2: Всяко реално линейно пространство

V е афинно простр., моделирано върху себе си,

с изображението: $V \times V \longrightarrow V$

$$\underset{\vec{a}}{\overset{\shortparallel}{(P}}, \underset{\vec{b}}{\overset{\shortparallel}{Q)}} \longrightarrow \overrightarrow{PQ} = Q - P = \vec{b} - \vec{a}$$

Проверка на свойствата 1. и 2.

1. Нека $P \in V$ и $\vec{u} \in V$

Дали съществува ! елемент $Q \in V : Q - P \in V$?

Ако $Q : Q - P = \vec{u}$, то $Q = P + \vec{u}$. Тогава търсеното

Q е точно $P + \vec{u}$.

Извод: $\forall P \in V$ и $\forall \vec{u} \in V$ $\exists ! \; Q = P + \vec{u} : \overrightarrow{PQ} = Q - P = \vec{u}$

2. Нека P, Q и $R \in V$, тогава

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = Q - P + R - Q = R - P = \overrightarrow{PR} \Rightarrow$ 2. е изпълнено

* * *

$\mathbb{R}^n$ е афинно пространство, моделирано върху себе си.

Пример 3: Нека $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$

Разглеждаме системите линейни уравнения:

(1) $A.X = 0$

(2) $A.X = b$

Тогава:

1. Множеството V от решенията на ХСЛУ (1) е линейно пространство.

2. Множеството B от решенията на (2) е афинно пространство, моделирано над V, чрез изображението: $B \times B \longrightarrow V$
$(X, Y) \longrightarrow \vec{XY} := Y - X$.

Доказателство:

Ще докажем 2.

I Дали $\vec{XY} = Y - X \in V$?

$X, Y \in B \Rightarrow \begin{cases} A.X = b \\ A.Y = b \end{cases} \Rightarrow A.(Y-X) = A.Y - A.X = b - b = 0$

Извод: $(Y-X) \in B$.

II Проверка на свойствата 1. и 2. от определението.

1. Нека $X \in B$, $\vec{u} \in V$. Търсим такова ! $Y \in B$, за което $Y - X = \vec{u}$

Взимаме $Y = X + \vec{u}$. $A.Y = A.(X + \vec{u}) = A.X + A.u = b \Rightarrow$
$\Rightarrow Y \in B$

$\vec{XY} = Y - X = X + \vec{u} - X = \vec{u} \Rightarrow$ търсеното $\underline{Y = X + \vec{u}}$.

2. Нека $X, Y, Z \in B$

$\vec{XY} + \vec{YZ} = Y - X + Z - Y = Z - X = \vec{XZ} \Rightarrow$ 2. е изпълнено.

Пример 4: Нека $X \neq \emptyset$ е множество

U - линейно пространство над $\mathbb{R}$

A - афинно пространство, моделирано над U

Тогава:

1. Множ. $V = \{f : X \to U\}$ е линейно простр. над $\mathbb{R}$

относно операциите $\left| \begin{array}{l} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (\lambda . f)(x) = \lambda . f(x) \end{array} \right.$

2. Множ. $B = \{F : X \to A\}$ е афинно пространство, моделирано над V с изображението:

$B \times B \to V$

$(F, G) \to \overrightarrow{FG}(x) := \overrightarrow{F(x)\,G(x)}$

Доказателство:

1. За упр. проверявате, че са изпълнени $8^{\text{те}}$ свойства за линейно пространство за множ. V.
2. Ще докажем, че B е АП над V

I Дали $\overrightarrow{FG}(x) \in V$?

$F(x) \in A$, $G(x) \in A$

A е афинно п-во над $U \Rightarrow \overrightarrow{F(x)G(x)} \in U \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{FG}(x) : X \to U$, т.е. $\overrightarrow{FG}(x) \in V$.

II Проверка на свойствата 1. и 2. от определението за АП

1. Нека $F \in B$, $f \in V$. Дали същ ! $G \in B : \overrightarrow{FG} = f$?

Ако $\overrightarrow{FG} = f$, то $\overrightarrow{FG}(x) = f(x)$ за $\forall x \in X$ $\iff$

$\overrightarrow{F(x)G(x)} = f(x)$ за $\forall x \in X$

! A е афинно п-во над U $\Rightarrow$ от 1.

За $\forall F(x) \in A$ и $\forall f(x) \in U$ $\exists ! \, G(x) \in A : \overrightarrow{F(x)G(x)} = f(x)$ за $\forall x \in X$

<u>Извод</u>: Същ. ! функция $G \in B : \overrightarrow{FG}(x) = f(x)$.

2. Нека $F, G, H \in B$. Разглеждаме:

$$(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH})(x) = \overrightarrow{F(x)G(x)} + \overrightarrow{G(x)H(x)} \underset{\text{от 2. за } A\text{-афинно}}{=} \overrightarrow{F(x)H(x)} = \overrightarrow{FH}(x)$$

<u>Извод</u>: B е афинно пространство над V.

* * *

<u>1 задача</u>: Нека A е афинно пространство, моделирано над лин. п-во V.

$K = Oe_1 \cdots e_n$ е АКС в A

$\varkappa : A \to \mathbb{R}^n$ е координатното изображение съотв. на K

$\{$т. $P \in A$, то $\varkappa(P) = (x_1^P, \dots, x_n^P)\}$

Да се докаже, че A е афинно п-во над $\mathbb{R}^n$ с изображението:

$$A \times A \to \mathbb{R}^n$$

$$(P, Q) \to (\overrightarrow{PQ})' := \varkappa(Q) - \varkappa(P).$$

Проверка на свойствата 1. и 2.

1. Нека $P \in A$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. Дали $\exists!\, Q \in A : (\vec{PQ})' = \vec{u}$

Ако $(\vec{PQ})' = \vec{u}$, то $\varkappa(Q) - \varkappa(P) = \vec{u} \Rightarrow \varkappa(Q) = \varkappa(P) + \vec{u}$.

$\exists!\, Q \in A$ с координати $\varkappa(Q) = \varkappa(P) + \vec{u}$, за което

$(\vec{PQ})' = \varkappa(Q) - \varkappa(P) = \varkappa(P) + \vec{u} - \varkappa(P) = \vec{u} \Rightarrow$ 1. е изпълн.

2. Нека P, Q и $R \in A$. Пресмятаме

$$(\vec{PQ})' + (\vec{QR})' = \varkappa(Q) - \varkappa(P) + \varkappa(R) - \varkappa(Q) =$$
$$= \varkappa(R) - \varkappa(P) = (\vec{PR})' \Rightarrow \text{2. е изпълнено}$$

* * *

2 зад. Нека A е афинно пространство, моделирано върху лин. п-во V. Нека $(e_1, \dots, e_n)$ е базис на V и $\varkappa : V \to \mathbb{R}^n$ е съотв. на базиса координатно изображение $\{\vec{u} \in V$, то $\varkappa(\vec{u}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\}$.

Да се док., че A е афинно п-во над $\mathbb{R}^n$ с изображението: $A \times A \to \mathbb{R}^n$
$$(P, Q) \to (\vec{PQ})' = \varkappa(\vec{PQ}).$$

Доказателство:

1. Нека $P \in A$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists!\, \vec{u} \in V$:

$\vec{u} = \alpha_1 . \vec{e_1} + \dots + \alpha_n . \vec{e_n} \Leftrightarrow \varkappa(\vec{u}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

От A – афинно п-во над $V \Rightarrow$ за $P \in A$ и $\vec{u} \in V$ $\exists!\, Q \in A$

$\vec{PQ} = \vec{u}$. Този елемент $Q \in A$ е !, за който

$(\overrightarrow{PQ})' = \varkappa(\overrightarrow{PQ}) = \varkappa(\vec{u}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \Rightarrow$ 1. е изпълнено.

2. $P, Q, R \in A$. Пресмятаме $(\overrightarrow{PQ})' + (\overrightarrow{QR})' =$

$$= \varkappa(\overrightarrow{PQ}) + \varkappa(\overrightarrow{QR}) = \varkappa(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = \varkappa(\overrightarrow{PR}) = (\overrightarrow{PR})'$$

от A-афинно над V

$\Rightarrow$ 2. е изпълнено.

* * *

Афинни подпространства

Опр. Нека A е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U. Нека V е линейно подпространство на U. Подмножеството B на A се нарича афинно подпространство, ако: $B = \{\forall Q \in A : \overrightarrow{P_0Q} \in \underline{\underline{V}}\}$ за фиксирана т. $\underline{\underline{P_0 \in A}}$.

Отново: т. $P_0 \in A$, $V \subset U \Rightarrow B = \{\forall Q \in A : \overrightarrow{P_0Q} \in V\}$ е афинно подпространство на A.

Свойства (Тв. 4):

1. $P_0 \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$;

2. за $\forall P \in B$ {не само за P_0} е вярно, че $B = \{Q \in A : \vec{PQ} \in V\}$;

3. Обратно $V = \{\vec{PQ} : P, Q \in B\}$ и дори за $\forall$ т. $P \in B$ $V = \{\vec{PQ} : Q \in B\}$;

4. Линейното подпространство V се определя еднозн. от B;

5. B е афинно п-во, ~~моделн~~ моделирано върху лин. подпростр. V.

* Размерност на афинното подпростр. B е размерността на лин. подпростр. V.

* 0-мерните афинни подпространства са едноточковите подмножества.

* Всяко АП A е афинно подпростр. на себе си. Ако $\dim A = n$ е крайна, то A е ! n-мерно афинно подпростр. на A.

* В геометричната равнина и геометр. пространство 1-мерните афинни подпростр. са правите.

* В геометр. простр. 2 - мерните афинни подпространства са равнините.

* Нека A е афинно пространство, $\dim A = n$.
$(n-1)$ - мерните афинни подпратранства на A се наричат хиперравнини.
- при $n=1$ това са точки;
- при $n=2$ това са прави;
- при $n=3$ това са равнини.

* * *

1 зад. Нека O и P_0 са точки в геометричното пространство A_3, а $\vec{v}$ е вектор.
Да се докаже, че множеството $B = \{P \in A_3 : \vec{OP} \times \vec{v} = \vec{OP_0} \times \vec{v}\}$ е афинно подпространство на A_3 и да се определи размерността му.

Решение:

$\vec{OP} \times \vec{v} = \vec{OP_0} \times \vec{v}$

$\vec{OP} \times \vec{v} - \vec{OP_0} \times \vec{v} = \vec{o}$

$(\vec{OP} - \vec{OP_0}) \times \vec{v} = \vec{o}$

$\vec{P_0P} \times \vec{v} = \vec{o}$

1 сл. $B = \{P_0\}$, тогава
$\vec{P_0P_0} \times \vec{v} = \vec{o}$ за $\forall \vec{v}$
В този случай B се състои от 1 точка =>
B е нуламерно афинно подпространство на A_3;

2 сл. Ако $\vec{v} = \vec{o}$, тогава $\overrightarrow{P_oP} \times \vec{v} = \overrightarrow{P_oP} \times \vec{o} = \vec{o}$ за

$\forall P \in A_3 \Rightarrow B \equiv A_3 \Rightarrow B$ е тримерно афинно подпространство на A_3;

3 сл. Нека $\vec{v} \neq \vec{o}$, тогава от $\overrightarrow{P_oP} \times \vec{v} = \vec{o} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_oP} \parallel \vec{v}$

$\Rightarrow B = \{P \in A_3 : \overrightarrow{P_oP} \parallel \vec{v}\} \Rightarrow B$ е едномерно афинно подпространство на A_3, породено от линейното подпространство $V = \ell(\vec{v})$.

* * *

2 зад. Нека O и P_o са точки в A_3, а $\vec{u}$ и $\vec{v}$ са вектори. Да се докаже, че $B = \{P \in A_3 : \langle \overrightarrow{OP}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \overrightarrow{OP_o}, \vec{u}, \vec{v} \rangle\}$ е афинно подпространство на A_3 и да се определи размерността му.

Решение:

$$\langle \overrightarrow{OP}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \overrightarrow{OP_o}, \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

$$\langle \overrightarrow{OP}, \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \overrightarrow{OP_o}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{o}$$

$$\langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_o}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{o}$$

$$\langle \overrightarrow{P_oP}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{o}$$

1 сл $B = \{P_o\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{P_oP_o} = \vec{o} \Rightarrow$

$\langle \vec{o}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{o} \Rightarrow$

B е нулямерно афинно подпростр. на A_3;

2 сл. Нека $\vec{u}$ и $\vec{v}$ са линейно зависими, което включва възможностите: 2.1 $\vec{u}=\vec{o}$
2.2 $\vec{v}=\vec{o}$
2.3 $\vec{u} \parallel \vec{v}$, тогава

$\langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{o}$ за $\forall$ т. $P \in A_3$, т.е. $B \equiv A_3$ $\Rightarrow$

B е тримерно афинно подпространство на A_3.

3 сл. Нека $\vec{u}$ и $\vec{v}$ са ЛНЗ и $V = \ell(\vec{u}, \vec{v})$, тогава

$\langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{o} \Leftarrow\!\Rightarrow$ $\overrightarrow{P_0P}$, $\vec{u}$ и $\vec{v}$ са компланарни,
т.е. $\overrightarrow{P_0P} \in V = \ell(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow$

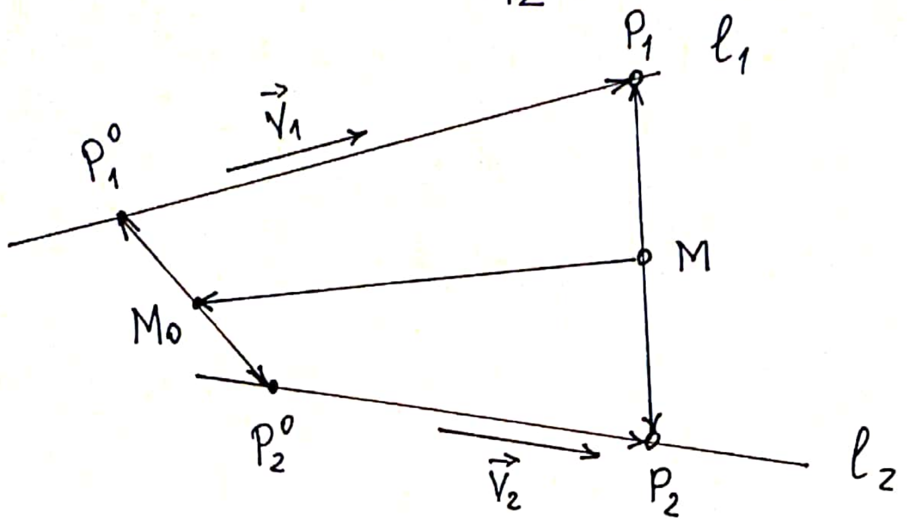
$B = \{ P \in A_3 : \overrightarrow{P_0P} \in V = \ell(\vec{u}, \vec{v}) \} \Rightarrow B$ е двумерно афинно подпространство на A_3.

* * *

3 зад. Нека ℓ_1 и ℓ_2 са прави в равнината, а m е множеството от точките M, които са среди на някоя отсечка P_1P_2 с краища $P_1 \in \ell_1$ и $P_2 \in \ell_2$ ($\overrightarrow{MP_1} + \overrightarrow{MP_2} = \vec{o}$).

Да се докаже, че m е афинно подпространство на A_2 и да се определи размерността му.

Решение:



1) Правите l_1 и l_2 са едномерни афинни подпространства на равнината. Ще дефинираме всяка от тях с фиксирана точка и колин. вектор

$$l_1 \begin{cases} \ni P_1^0 \\ \parallel \vec{v}_1 \end{cases}, \quad V_1 = \ell(\vec{v}_1) \text{ - едномерно линейно подпространство} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_1 \equiv B_1 = \{P \in A_2 : \overrightarrow{P_1^0 P} \in V_1\}$$

$$l_2 \begin{cases} \ni P_2^0 \\ \parallel \vec{v}_2 \end{cases}, \quad V_2 = \ell(\vec{v}_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_2 \equiv B_2 = \{P \in A_2 : \overrightarrow{P_2^0 P} \in V_2\}$$

2) Фиксираме т. M_0 – средата на $P_1^0 P_2^0$, т.е.

M_0 е точка от множ. m и

$$\overrightarrow{M_0 P_1^0} + \overrightarrow{M_0 P_2^0} = \vec{0}$$

Нека M е средата на P_1P_2, т.е. $\overrightarrow{MP_1} + \overrightarrow{MP_2} = \vec{o}$

Изразяваме

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{MP_1} &= \overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{M_0P_1^o} + \overrightarrow{P_1^oP_1} \\ \overrightarrow{MP_2} &= \overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{M_0P_2^o} + \overrightarrow{P_2^oP_2} \end{aligned}\right\} +$$

$$\overrightarrow{MP_1} + \overrightarrow{MP_2} = \vec{o} = 2.\overrightarrow{MM_0} + \underbrace{\overrightarrow{M_0P_1^o} + \overrightarrow{M_0P_2^o}}_{\parallel \atop \vec{o}} + \overrightarrow{P_1^oP_1} + \overrightarrow{P_2^oP_2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{P_1^oP_1} + \overrightarrow{P_2^oP_2}\right)$$

$$\overrightarrow{P_1^oP_1} = \alpha_1.\vec{v_1}, \quad \overrightarrow{P_2^oP_2} = \alpha_2.\vec{v_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = \frac{\alpha_1}{2}.\vec{v_1} + \frac{\alpha_2}{2}.\vec{v_2}, \text{ т.е. } \overrightarrow{M_0M} \in V = \ell(\vec{v_1}, \vec{v_2})$$

Извод: Множеството m от средите M се определя от фиксираната т. M_0 и $V = \ell(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

$$m = \{\forall M \in A_2 : \overrightarrow{M_0M} \in V = \ell(\vec{v_1}, \vec{v_2})\}$$

1 сл. Ако $P_1 \equiv P_2 = \ell_1 \cap \ell_2 \Rightarrow m = \{M_0\}$ - нулмерно афинно подпростр. на A_2;

2 сл. Ако $\vec{v_1} \parallel \vec{v_2}$, т.е. $\ell_1 \equiv \ell_2$ или $\ell_1 \parallel \ell_2 \Rightarrow$

$V = \ell(\vec{v_1})$ - едномерно $\Rightarrow m$ е едномерно афинно подпростр. на A_2, т.е. права;

3 сл. Ако $\vec{v_1}$ и $\vec{v_2}$ - ЛНЗ $\Rightarrow m \equiv A_2$, т.е. точките M описват цялата равнина. m е двумерно афинно подпростр. на A_2.