1.8 Теорема за неявната функция

Първата теорема, разглеждана в този параграф, се отнася до решаване на уравнения от вида $F(x, y) = 0$ спрямо една от променливите, например y. Другата променлива - x - се разглежда като параметър, и очевидно решението трябва да зависи от нея. Да запишем това решение във вида $y = f(x)$. За да проверим дали така дефинираното y е решение на търсеното уравнение, трябва да го заместим в уравнението. Стигаме до равенството

$$F\left(x, f(x)\right) \equiv 0.$$

Дефиниция. *Ако функцията $f(x)$ удовлетворява тъждествено горното равенство за всяко x от дефиниционната си област, ще казваме, че тя е неявна функция, определена от уравнението $F(x, y) = 0$.*

Геометрически това може да се каже така: множеството от точки в равнината, чиито координати удовлетворяват равенството $F(x, y) = 0$, да се представи като графика на функцията $f(x)$.

По-долу ние разглеждаме въпроса за съществуване и единственост на неявната функция. Разбира се, ние ще се интересуваме от неявни функции с хубави свойства, в частност диференцируеми. Ако $f(x)$ е такава функция, то, диференцирайки горното равенство по x и използвайки теоремата за диференциране на съставни функции, получаваме

$$F'_x\left(x, f(x)\right) + f'(x) F'_y\left(x, f(x)\right) \equiv 0,$$

откъдето

$$f'(x) = -\frac{F'_x\left(x, f(x)\right)}{F'_y\left(x, f(x)\right)}.$$

Оттук се вижда. че е естествено да наложим на функцията F условието $F'_y(x, y) \neq 0$.

Ще дадем един прост пример. Да разгледаме уравнението

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

определящо окръжност с център в началото и радиус R в равнината $\mathbb{R}^2$. Ясно е, че за да има уравнението решение, трябва $x \in [-R, R]$. В крайните точки $x = \pm R$ се нарушава условието $F'_y(x, y) \neq 0$. Лесно се вижда, че в тези точки окръжността не може да бъде представена като графика на диференцируема функция (тангентата ѝ става вертикална).

За всяко x от отворения интервал $(-R, R)$ това уравнение има точно две решения относно y:

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Следователно всяка неявна функция, определена от горното уравнение, има вида

$$f(x) = \varepsilon(x)\sqrt{R^2 - x^2},$$

където $\varepsilon(x)$ е произволна функция, вземаща стойности плюс или минус единица. Такива функции има безбройно много.

Ако се интересуваме само от непрекъснати функции, получаваме само две неявни функции: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, т.е. отново няма еднозначност. За да се избегне нееднозначността, нещата трябва да се разглеждат локално – да се фиксира едно решение в дадена точка (тя може да лежи върху горната или долната полуокръжност), и да се разгледа непрекъснатата функция, вземаща съответната стойност в тази точка. Тогава, в зависимост от избраното решение в началната точка, ще получим уравнението на горната или долната полуокръжност.

Сега вече сме подготвени да дадем точната формулировка на теоремата:

Теорема 1. (Теорема за неявната функция, случай на едно уравнение). *Нека $F(x, y)$ е непрекъсната функция в $\mathbb{R}^2$, притежаваща непрекъсната производна по y. Нека (x_0, y_0) е точка от дефиниционното ѝ множество, удовлетворяваща условията*

$$F(x_0, y_0) = 0\,,\; F'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Тогава за достатъчно малки положинелни δ имаме:

а/ Съществува функция $f(x)$, дефинирана и непрекъсната в интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, която удовлетворява условията:

1/ $f(x_0) = y_0$, и

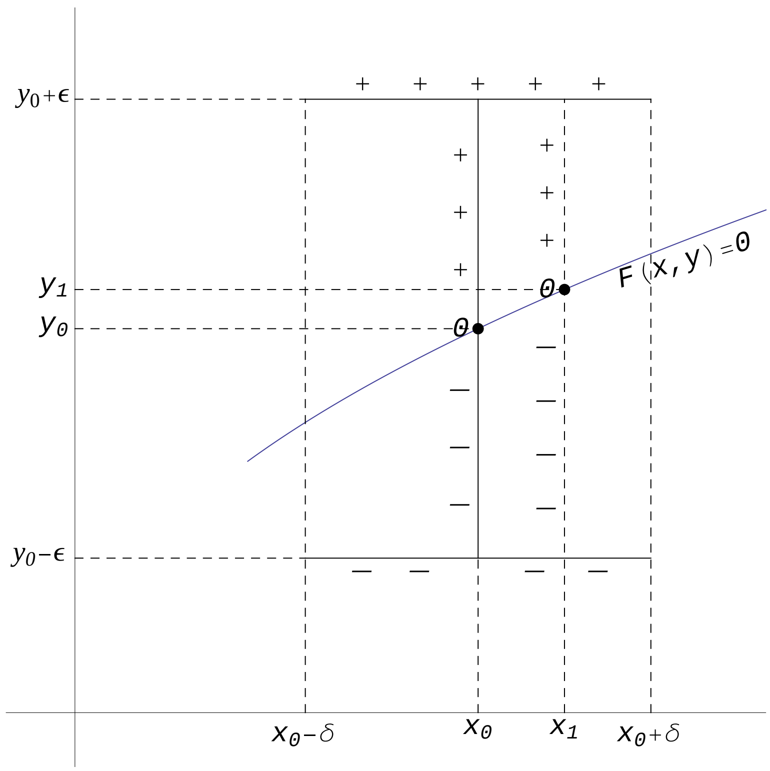
2/ $F(x, f(x)) \equiv 0$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

б/ $f(x)$ е единствената непрекъсната функция в интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, удовлетворяваща условията 1/ и 2/.

в/ Ако $F(x,y)$ е диференцируема в точката (x_0,y_0), то $f(x)$ е диференцируема в x_0, като

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}.$$

Ако $F(x,y)$ е k-кратно гладка в околност на точката (x_0,y_0), то същото е вярно и за $f(x)$ в околност на x_0.



Доказателство на теоремата за неявната функция.

Доказателство. За определеност можем да предположим, че $F'_y(x_0,y_0) > 0$. Тогава неравенството $F'_y(x,y) > 0$ е вярно и в някаква околност $\mathbf{U}$ на (x_0,y_0) в $\mathbb{R}^2$.

Да разгледаме $F(x_0, y)$ като функция на y; от горното следва, че тя е строго монотонно растяща в някаква околност на y_0. Тъй като $F(x_0, y_0) = 0$, то при достатъчно малки стойности на $\varepsilon > 0$ ще имаме

$$F(x_0, y) > 0 \text{ при } y \in (y_0, y_0 + \varepsilon], \text{ и } \quad F(x_0, y) < 0 \text{ при } y \in [y_0 - \varepsilon, y_0).$$

Да прекараме през точките $(x_0, y_0 - \varepsilon)$ и $(x_0, y_0 + \varepsilon)$ хоризонтални отсечки: тогава знакът на $F(x, y)$ се запазва в някаква околност на тези точки (виж чертежа, на който са означени знаците на $F(x, y)$ в съответните точки).

Тогава можем да изберем (достатъчно малко) $\delta > 0$, така че

– за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имаме $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$, $F(x, y_0 + \varepsilon) > 0$.

– правоъгълникът $\Delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ се съдържа в околността $\mathbf{U}$ (т.е. в него $F'_y > 0$).

Да фиксираме $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; тогава функцията $F(x_1, y)$ е строго монотонно растяща и непрекъсната в интервала $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, взема отрицателна стойност в левия му край и положителна - в десния. Следователно съществува *единствено* $y_1 \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ такова, че $F(x_1, y_1) = 0$. Полагайки $f(x_1) = y_1$, получаваме функция, дефинирана в интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и удовлетворяваща условията 1/ и 2/ от точка а/.

Ще отбележим едно следствие от горната конструкция: ако (x, y) е произволна точка от Δ такава, че $F(x, y) = 0$, то $y = f(x)$.

Ще докажем непрекъснатостта на така дефинираната функция. Най-напред ще докажем непрекъснатостта в точката x_0. Горната конструкция може да се изложи по следния начин: за всяко достатъчно малко $\varepsilon > 0$ ние намерихме $\delta > 0$, така че за всяко x, за което $|x - x_0| < \delta$, ще имаме $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; това е точно дефиницията на Коши за непрекъснатост.

Да вземем сега произволно $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, и нека $y_1 = f(x_1)$; тогава ние можем да повторим горната конструкция, избирайки достатъчно малко $\varepsilon_1 > 0$ и зависеща от него $\delta_1 > 0$, и конструирайки неявната функция $\tilde{f}(x)$ за $x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$. Както доказахме, функцията $\tilde{f}(x)$ е непрекъсната в x_1.

Ние можем да изберем ε_1 и δ_1 толкова малки, че правоъгълникът $\Delta_1 = [x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1] \times [y_1 - \varepsilon_1, y_1 + \varepsilon_1]$ да се съдържа в Δ. Тогава, поради отбелязаната по-горе единственост, имаме $\tilde{f}(x) = f(x)$ за $x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$, и следователно $f(x)$ е непрекъсната в x_1. С това подточка а/ е доказана.

Подточка б/: Нека $\tilde{f}(x)$ е непрекъсната функция, дефинирана в околност на x_0 и удовлетворяваща условията 1/ и 2/. Тогава за стойности на x, достатъчно близки до x_0, точката с координати $\left(x, \tilde{f}(x)\right)$ ще принадлежи на правоъгълника Δ. От гореказаното се вижда, че тогава $\left(x, \tilde{f}(x)\right) = (x, f(x))$, т.е. $\tilde{f}(x)$ и $f(x)$ ще съвпадат в някаква околност на точката x_0.

Да означим сега с x_1 точната горна граница на точките, за които $\tilde{f}(x) = f(x)$; ако допуснем, че x_1 е в дефиниционната област на $\tilde{f}(x)$ и $f(x)$, то повтаряйки същите разсъждения за x_1 вместо за x_0, получаваме, че $\tilde{f}(x)$ и $f(x)$ съвпадат в околност на x_1, т.е. противоречие. С това б/ е доказано.

Доказателство на в/: Ако ни е известно, че неявната функция $f(x)$ е диференцируема, то, както беше показано в началото на параграфа, формулата за $f'(x_0)$ се получава чрез диференциране на равенството $F(x, f(x)) \equiv 0$.

За да докажем диференцируемостта на $f(x)$, ще използваме формулата за нарастването за диференцируемата функция $F(x,y)$. Нека x е достатъчно близко до x_0, $y = f(x)$, $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$. Тогава

$$\Delta F = F(x,y) - F(x_0, y_0) = 0 - 0 = 0,$$

и формулата за нарастването дава

$$0 = \Delta F = F'_x(x_0, y_0)\,\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y,$$

където $\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$. Тогава

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y)}{F'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y)} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Оттук следва диференцируемостта на $f(x)$ в x_0, както и формулата за производната и; разбира се, същата формула е валидна за всяко x от дефиниционния интервал.

Да допуснем, че $F(x, y)$ притежава производни до ред k: тогава, диференцирайки доказаната формула за $f'(x)$, получаваме k-кратната диференцируемост на $f(x)$. ■

Геометрична интерпретация. Нека $F(x, y)$ е еднократно гладка функция в $\mathbb{R}^2$. Да означим с $\mathbf{M}$ множеството на нулите на $F(x, y)$, т.е. от точките (x, y) в равнината, за които $F(x, y) = 0$. Ще предположим, че в нито една точка от $\mathbf{M}$ двете първи частни производни $F_x(x, y)$ и $F_y(x, y)$ не се анулират едновременно. Тогава доказаната по-горе теорема допуска следната геометрична интерпретация:

Теорема 2. *При горното условие множеството* $\mathbf{M}$ *локално (т.е. в някаква околност на всяка своя точка) се представя като графика на гладка функция.*

Наистина, да фиксираме някаква точка $(x_0, y_0) \in \mathbf{M}$. Ако имаме $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, и $f(x)$ е съответната неявна функция, от горното доказателство се вижда, че в някаква околност на (x_0, y_0) равенствата $F(x, y) = 0$ и $y = f(x)$ са еквивалентни. Аналогично, ако $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$, то около (x_0, y_0) множеството $\mathbf{M}$ се представя с уравнението $x = f(y)$.■

Забележка 1. Както показва примерът с окръжността, даден погоре, представянето на $\mathbf{M}$ като графика на функция може да не е възможно глобално.

Забележка 2. Графиките на гладките функции са частен случай на регулярни параметрично зададени криви (виж част I, §2.12). Следователно локално множеството $\mathbf{M}$ притежава регулярна параметризация. Това вече е вярно и глобално - може да се докаже, че в такъв случай локалните параметризации могат да бъдат "слепени" и да се получи регулярна параметризация на цялата крива.

В крайна сметка геометричният смисъл на теорема 2 може да се формулира по следния начин:

Нека $F(x, y)$ е еднократно гладка функция на две променливи, като за всички (x, y) имаме $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F(x, y) \neq \vec{0}$. Тогава множеството $\mathbf{M}$, определено с уравнението $F(x, y) = 0$, представлява регулярна еднократно гладка крива в равнината.

Доказателство на теорема 2 от §5. Сега ние можем да докажем теорема 2 от §5, която твърди, че градиентът на функция на две променливи в дадена точка е перпендикулярен на линията на ниво, минаваща през тази точка.

Да уточним формулировката: Нека $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ е регулярна параметрично зададена крива, $(x_0, y_0) \in \Gamma$, и $\vec{v}$ е вектор с начало в точката (x_0, y_0). Ще казваме, че $\vec{v}$ *е перпендикулярен на* Γ, ако $\vec{v}$ е перпендикулярен на допирателната права към Γ в (x_0, y_0).

Нека е дадена еднократно гладката функция $F(x, y)$ на две променливи и (x_0, y_0) е точка от дефиниционната и област. Теоремата има смисъл, ако $\overrightarrow{\operatorname{grad}} F(x_0, y_0) \neq \vec{0}$. Да предположим, че $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Нека $F(x_0, y_0) = a$; тогава линията на ниво $\mathbf{L}_a$, минаваща през (x_0, y_0), се представя с уравнението $F(x, y) - a = 0$. Очевидно производната по y на лявата страна на това равенство съвпада с $F'_y(x_0, y_0)$ и е различна от нула. Ако означим с $f(x)$ неявната функция, определена от това равенство, то в околност на (x_0, y_0) множеството $\mathbf{L}_a$ съвпада с графиката на $f(x)$. Допирателната към тази графика в (x_0, y_0) е колинеарна с вектора $\vec{l}(x_0) = (1, f'(x_0))$. Така ортогоналността на векторите $\vec{l}(x_0)$ и $\overrightarrow{\operatorname{grad}} F(x_0, y_0)$ се свежда до равенството

$$F'_x(x_0, y_0) + f'(x_0)\, F'_y(x_0, y_0) = 0,$$

което беше получено по-горе чрез диференциране на тъждеството $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Лесно се доказва и аналогичната теорема за линиите на ниво на функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ на n променливи в пространството $\mathbb{R}^n$.

Следствие. *Допирателната към линията на ниво на* $F(x, y)$*, минаваща през точката* (x_0, y_0)*, има уравнение*

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Аналогично, допирателната равнина към линията на ниво на функцията $F(x, y, z)$ *в* $\mathbb{R}^3$ *се дава с уравнението*

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Теорема за неявната функция за едно уравнение и няколко параметъра. В следващия по сложност случай, който ще разгледаме, отново имаме едно уравнение $F(x, y) = 0$, което трябва да бъде решено относно променливата y, но в този случай параметъра x е вече векторна - n-мерна - променлива, т.е. $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Формулировката и доказателството в този случай почти напълно съвпадат с дадените по-горе, и ние само ще формулираме теоремата.

Теорема 3. (Теорема за неявната функция, случай на едно уравнение и няколко параметъра). *Нека $F(x,y) = F(x_1, \ldots, x_n, y)$ е непрекъсната функция в $\mathbb{R}^{n+1}$, притежаваща непрекъсната частна производна по y. Нека $(x^0, y_0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0)$ е точка от дефиниционното и множество, удовлетворяваща условията*

$$F\left(x^0, y_0\right) = 0\,,\; F_y'\left(x^0, y_0\right) \neq 0.$$

Тогава:

а/ За достатъчно малко $\delta > 0$ съществува функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, дефинирана и непрекъсната в кълбото $\mathbf{B}(x^0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ с център x^0 и радиус δ, и удовлетворяваща условията:

1/ $f(x^0) = y_0$, и

2/ $F(x, f(x)) \equiv 0$ за всяко $x \in \mathbf{B}(x^0, \delta)$.

б/ $f(x)$ е единствената непрекъсната функция в кълбото $B(x^0, \delta)$, удовлетворяваща условията 1/ и 2/.

в/ Ако $F(x,y)$ е диференцируема в точката (x^0, y_0), то $f(x)$ е диференцируема в x^0, като

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)},\; i = 1, \ldots, n.$$

Теорема за неявната функция (общ случай). Тук ще формулираме и докажем теорема, аналогична на дадената по-горе, за случая на n уравнения с n неизвестни и произволен брой параметри. Като начало ще разгледаме случая $n = 2$. Нека имаме уравненията

$$F(x, y, u, v) = 0,$$

$$G(x, y, u, v) = 0,$$

където F и G са еднократно гладки функции на четири променливи, и нека нашата цел е да ги разрешим относно променливите u и v, т.е. да изразим u и v чрез параметрите x и y. По-точно, ние искаме да намерим функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ такива, че при заместването им в уравненията да получим тъждества относно x и y:

$$F(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0,$$

$$G(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0.$$

Да предположим, че диференцируемите функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ са вече намерени, да се опитаме да пресметнем техните производни, например, по x. Диференцирайки по x горните тъждества, получаваме

$$F'_x + u'_x F'_u + v'_x F'_v \equiv 0,$$

$$G'_x + u'_x G'_u + v'_x G'_v \equiv 0.$$

Тези равенства могат да се разглеждат като система от линейни уравнения относно неизвестните u'_x, v'_x. Както знаем от линейната алгебра, ако детерминантата от коефициентите пред неизвестните не се анулира, те имат единствено решение, зададено с формулите на Крамер. С други думи, ако предположим, че

$$\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} = \frac{D(F,G)}{D(u,v)} \neq 0,$$

то частните производни на $u(x,y)$ и $v(x,y)$ относно x ще се задават с формулите

$$u'_x = -\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_v \\ G'_x & G'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}}, \; v'_x = -\frac{\begin{vmatrix} F'_u & F'_x \\ G'_u & G'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}}.$$

Ако се опитаме да намерим u'_y, v'_y, отново ще стигнем до условието $\dfrac{D(F,G)}{D(u,v)} \neq 0$; ясно е, че това условие замества условието $F'_y \neq 0$, налагано в случая на едно уравнение. Имайки това предвид, вече можем да формулираме общия вид на теоремата - случая на n уравнения с n неизвестни и m параметъра:

Теорема 4. (Теорема за неявната функция - общ случай.) *Нека*

$$F_1\left(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n\right),\ldots,F_n\left(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n\right)$$

са n еднократно гладки функции, дефинирани в отворено подмножество на $\mathbb{R}^{n+m}$. Нека $(x^0,y^0)=(x_1^0,\ldots,x_m^0,y_1^0,\ldots,y_n^0)$ е точка от дефиниционното им множество, така че

$$F_1\left(x^0,y^0\right)=\ldots=F_n\left(x^0,y^0\right)=0,\quad \frac{D\left(F_1,\ldots,F_n\right)}{D\left(y_1,\ldots,y_n\right)}\left(x^0,y^0\right)\neq 0.$$

Тогава:

а/ За достатъчно малко $\delta>0$ съществуват функции $f_1(x)=f_1\left(x_1,\ldots,x_m\right),\ldots,f_n(x)=f_n\left(x_1,\ldots,x_m\right)$, дефинирани и непрекъснати в кълбото $\mathbf{B}\left(x^0,\delta\right)\subset\mathbb{R}^m$ с център x^0 и радиус δ, и удовлетворяващи условията:

1/ $f_1\left(x^0\right)=y_1^0,\ldots,f_n\left(x^0\right)=y_n^0$, и

2/ $F_j\left(x_1,\ldots,x_m,f_1(x),\ldots,f_n(x)\right)\equiv 0$ за $j=1,2,\ldots,n$ и за всяко $x=\left(x_1,\ldots,x_m\right)\in\mathbf{B}\left(x^0,\delta\right)$.

б/ $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ е единствената система от n функции в кълбото $\mathbf{B}\left(x^0,\delta\right)$, удовлетворяваща условията 1/ и 2/.

в/ Функциите $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ са диференцируеми в точката x^0.

Доказателството на теоремата се извършва чрез индукция по броя на уравненията n. За да обясним обаче идеята по-добре, ще изложим отделно доказателството на частния случай, разгледан по-горе.

Доказателство в случая $n=2$. Трябва да решим уравненията $F(x,y,u,v)=0$, $G(x,y,u,v)=0$ относно u и v в околност на точката (x_0,y_0,u_0,v_0) при условие, че $F\left(x_0,y_0,u_0,v_0\right)=G\left(x_0,y_0,u_0,v_0\right)=0$ и $\frac{D(F,G)}{D(u,v)}\neq 0$. Ще следваме обичайния метод на решаване на системи от две уравнения - ще определим едната от неизвестните величини от едното уравнение и ще я заместим в другото, като получим в резултат едно уравнение с едно неизвестно.

Да отбележим най-напред, че от условието на теоремата следва, че поне една от частните производни F'_u,F'_v,G'_u,G'_v не се анулира в точката