Задача 0.1. *Нека* $\mathcal{A} = \langle \Sigma, \Gamma, Q, s, \Delta, Z\rangle$ *е стеков автомат, за който всеки преход на* $\langle (p, a, A), (q, \gamma)\rangle \in \Delta$ *има свойството, че* $|\gamma| \leq 2$*. Със* $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ *означаваме множеството от всички думи над* Σ *с дължина по-малка от* 2*. Нека* $E = \{(p, A, q) \,|\, \exists u \in \Sigma^*((p, u, A) \Rightarrow^* (q, \varepsilon, \varepsilon))\}$.

Да разгледаме конструкцията:

1. $E_0 = \{(p, A, q) \,|\, \exists a \in \Sigma_\varepsilon(\langle (p, a, A), (q, \varepsilon)\rangle \in \Delta)\}$.
2. *ако* $k \in \mathbb{N}$*, то:*

$$\begin{aligned} E_{k+1} &= E_k \cup \{(p, A, r) \,|\, \langle (p, a, A), (q, B)\rangle \in \Delta \& (q, B, r) \in E_k \text{ за някои } q, a \text{ и } B \in \Gamma\} \\ &\cup \{(p, A, r) \,|\, \langle (p, a, A), (q, CB)\rangle \in \Delta \& (q, C, t) \in E_k \& (t, B, r) \in E_k \text{ за някои } q, t, a \text{ и } B, C \in \Gamma\}. \end{aligned}$$

Да се докаже, че:

1. $E_0 \subseteq E$
2. $E_k \subseteq E_{k+1}$ *за всяко* k.
3. $E_k \subseteq Q \times \Gamma \times Q$ *за всяко* k.
4. *има* $k \leq |Q|^2|\Gamma|$*, за което* $E_k = E_{k+1}$.
5. *ако* $E_k = E_{k+1}$*, то* $E_k = E_j$ *за всяко* $j \geq k$ *и* $E_k = \bigcup_{j=0}^{\infty} E_j$.
6. $E_k \subseteq E$ *за всяко* k.
7. $\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k \subseteq E$.
8. $E \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$.
9. *има* $k \leq |Q|^2|\Gamma|$*, за което* $|E_k| = |E_{k+1}|$ *и за първото такова* k, $E_k = E$.

Задача 0.2. *Да се докаже, че за всяка дума* $u \in \Sigma^*$*, следните функции се представят от* 1*-управляващи граматики:*

1. $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$, $f(v) = u \cdot v$,
2. $g : \Sigma^* \to \Sigma^*$, $g(v) = u^{-1}v$.

Задача 0.3. *Нека* $G_i = \langle \Sigma, \mathcal{N}_i, P_i, S_i, F_i, \#\rangle$ *за* $i = 1, 2$ *са* 1*-управляващи граматики, които представят функциите* $f_i : \Sigma_0^* \to \Sigma_1^*$ *за* $i = 1, 2$*. Нека* $\Sigma', \Sigma'' \subseteq \Sigma_0$ *са непресичащи се множества. Да се докаже, че* $g : \Sigma_0^* \to \Sigma_1^*$ *се представя от* 1*-управляваща граматика във всеки от случаите:*

1. $g(w) = \begin{cases} f_1(w) & \text{ако } w[1] \in \Sigma' \\ f_2(w) & \text{ако } w[1] \in \Sigma''. \end{cases}$
2. $g(w) = \begin{cases} f_1(w) & \text{ако } w[1] \in \Sigma' \text{ или } w = \varepsilon \\ f_2(w) & \text{ако } w[1] \in \Sigma''. \end{cases}$
3. $g(w) = \begin{cases} f_1(w[2..n]) & \text{ако } w[1] \in \Sigma' \\ f_2(w[2..n]) & \text{ако } w[1] \in \Sigma'', \end{cases}$ *където* $n = |w|$.

Упътване 0.1. 1. Приложете дефиницията за едностъпков преход в стеков автомат.

2. Разгледайте израза, който дефинира E_{k+1}.

3. Разгледайте израза, който дефинира E_{k+1}.

4. От 2 и крайността на E_k, покажете, че ако $|E_k| = |E_{k+1}|$, то $E_k = E_{k+1}$. От 3 и принципа на Дирихле, че заключете, че има $k \leq |Q|^2|\Gamma|$, за което $|E_k| = |E_{k+1}|$.

5. Използвайте индукция по k и синтактичния вид на дефиницията на E_{k+1}.

6. Използвайте индукция по k и задача 2 за стекови автомати.

7. Допуснете противното и разгледайте най-малко n, за което има $(p, A, q) \in E \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$, за което има дума $u \in \Sigma^*$ и изпълнение:

$$\langle p, u, A \rangle \Rightarrow^{(n)} \langle q, \varepsilon, \varepsilon \rangle .$$

   Отхвърлете случая $n = 1$ като сравните с дефиницията на E_0. При $n \geq 2$, разгледайте случаи по първия преход $(p, u, A) \Rightarrow (r, u', \gamma) \Rightarrow^{(n-1)} (q, \varepsilon, \varepsilon)$. Използвайте условието, за да заключите, че $|\gamma| \leq 2$ и отхвърлете $|\gamma| = 0$. При $|\gamma| = 1$ съобразете, че $\gamma = B \in \Gamma$ и $u = au'$ за някое $a \in \Sigma_\varepsilon$. Заключете, че $(r, B, q) \in E$ и от минималността на n, обосновете, че има k, за което $(r, B, q) \in E_k$. Докажете, че тогава $(p, A, q) \in E_{k+1}$ като използвате второто множество от обединението, което дефинира E_{k+1}.

   При $|\gamma| = 2$, съобразете, че $\gamma = CB$. Използвайте, че по време на изпълнението стековата дума намалява с най-много 1 на всяка стъпка. Заключете, че ако в началото $|CB| = 2$, а в края стековата дума има дължина $|\varepsilon| = 0$, то има междинен момент, в който стековата дума е с дължина точно 1. Разгледайте първият такъв момент n_1 и нека той разделя изпълнението $(r, u', \gamma) \Rightarrow^{(n-1)} (q, \varepsilon, \varepsilon)$ на:

$$(r, u', \gamma) \Rightarrow^{(n_1)} (t, u'', \gamma') \Rightarrow^{(n-n_1-1)} (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

   Знаейки, че $|\gamma'| = 1$ и в първата част на изчислението всички останали стекови думи са с дължина поне 2, приложете задача 2 за стекови автомати, за да заключите, че $u' = v'u''$ и:

$$(r, v', C) \Rightarrow^{(n_1)} (t, \varepsilon, \varepsilon) \text{ и } \gamma' = B.$$

   От минималността на n и $n_1 < n$, $n - n_1 - 1 < n$, заключете, че $(r, C, t) \in E_k$ и $(t, B, q) \in E_j$ за някои $k, j \in \mathbb{N}$. Покажете, че тогава $(p, A, q) \in E_{\max(k,j)+1}$.

8. Приложете предишните 5 подточки.

Упътване 0.2. Разгледайте граматики с $\mathcal{N} = \{S, F\}$ и:

1. за подточка 1: $P = \{S \to Fu\}$,

2. за подточка 2: $P = \{Su \to F\}$.

Упътване 0.3. Без ограничение на общността, $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$.

1. Разгледайте конструкцията, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \{S, F\}$, където $S, F \notin \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2 \cup \Sigma_\#$,

$$\begin{aligned} P &= P_1 \cup P_2 \cup \{Sa \to S_1 a \,|\, a \in \Sigma'\} \cup \{Sa \to S_2 a \,|\, a \in \Sigma''\} \cup \{F_1 \to F, F_2 \to F\} \\ G &= \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S, F, \# \rangle \end{aligned}$$

Обосновете, че ако $w \in \Sigma_0^+$, $w[1] \in \Sigma'$, то $S_1 w\# \Rightarrow_G^* F_1 f_1(w)\#$. Използвайте, че:

$$Sw[1] \to S_1 w[1] \text{ и } F_1 \to F \text{ са в } P,$$

за да заключите, че $Sw\# \Rightarrow S_1 w\# \Rightarrow F_1 f_1(w)\# \Rightarrow F f_1(w)\#$. Аналогично, покажете, че ако $w[1] \in \Sigma''$, то $Sw\# \Rightarrow F f_2(w)\#$.

В обратната посока, ако $Sw\# \Rightarrow_G^* Fv\#$, покажете, че първото правило е от вида $Sw\# \Rightarrow S_i w\#$, а последното $F_j v\# \Rightarrow Fv \Rightarrow \#$. Като използвате, че $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \emptyset$, аргументирайте, че правила приложени към $\mathcal{N}_i$, различни от $F_1 \to F$ и $F_2 \to F$, дават нетерминал от $\mathcal{N}_i$. Заключете, че $i = j$ и:

$$S_i w\# \Rightarrow_G^* F_i v\# \text{ всъщност е извод в } G_i : S_i w\# \Rightarrow_{G_i}^* F_i v\#.$$

Аргументирайте, че $i = 1$, ако $w[1] \in \Sigma'$ и $i = 2$, ако $w[1] \in \Sigma''$.

2. Модифицирайте горната конструкция като добавите $S\# \Rightarrow S_1\#$. Проведете разсъждението отново.

3. Забележете, че $h(w) = w[2..n]$ е представима чрез:

$$G = \langle \Sigma, \{S, F\}, \{Sa \to F \mid a \in \Sigma\}, S, F, \#\rangle$$

и заключете, че $\widetilde{f_i} = f_i \circ h$ е представима. Приложете подточка 1 към $\widetilde{f_1}$ и $\widetilde{f_2}$.