8 зад. (Основна зад.)

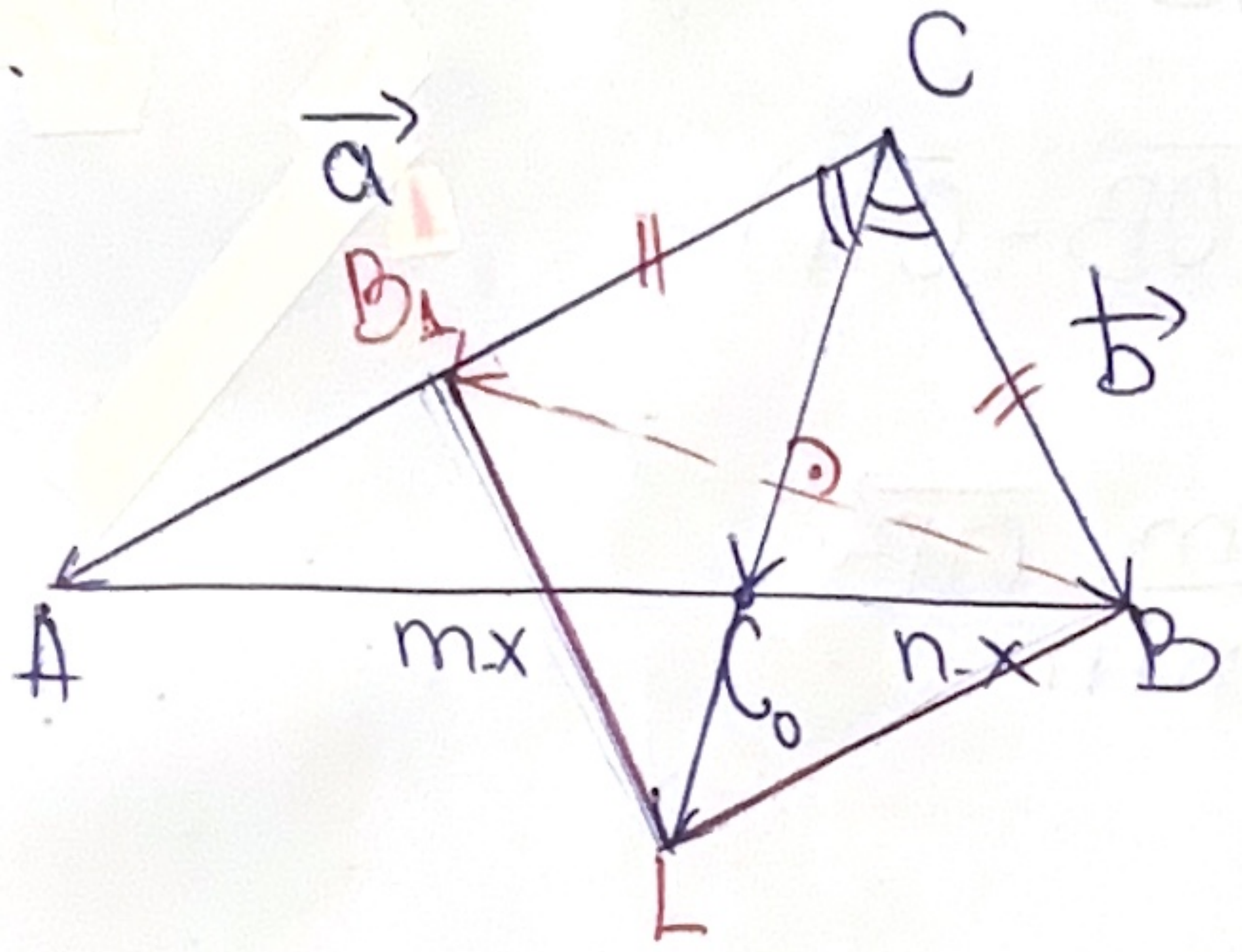
$\triangle ABC$, $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$ - лин. независими

AA_0, BB_0 и CC_0 - вътрешни ъглополовящи

а) да се изразят $\overrightarrow{AA_0}$, $\overrightarrow{BB_0}$ и $\overrightarrow{CC_0}$ чрез $\vec{a}$ и $\vec{b}$

б) да се док., че всяка ъглополовяща разделя срещуположната страна в отношение равно на отношението на прилежащите страни.

реш.: Ще решим задачата за CC_0. За AA_0 и BB_0 - аналогично.



$\overrightarrow{CC_0}=?$

1) Нека C_0 е такава точка, че $AC_0 : C_0B = m:n$ от осн. зад. $\Rightarrow$

$\overrightarrow{CC_0}=\frac{n}{n+m}\overrightarrow{CA}+\frac{m}{n+m}\overrightarrow{CB}$ (*)

2) построяваме т. $B_1 \in \overrightarrow{AC}$: $|\overrightarrow{CB_1}|=|\overrightarrow{CB}|=|\vec{b}|$. Нека $\overrightarrow{CB_1}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CA} \Rightarrow \exists!\, k\in\mathbb{R}^+ : \overrightarrow{CB_1}=k.\overrightarrow{CA} \Rightarrow |\overrightarrow{CB_1}|=k.|\overrightarrow{CA}| \Rightarrow |\vec{b}|=k.|\vec{a}|$

$\Rightarrow k=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \Rightarrow \overrightarrow{CB_1}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.\vec{a}$

3) Построяваме ромб CB_1LB, като $\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CL}$

$\overrightarrow{CL}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CC_0}$ (CB_1LB - ромб $\rightarrow$ диагоналите = ъглопол.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!\,\lambda\in\mathbb{R}^+ : \overrightarrow{CC_0}=\lambda\overrightarrow{CL}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CC_0}=\lambda(\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{CB})=\lambda\left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.\vec{a}+\vec{b}\right) \quad (**)$$

от (*) и (**) $\Rightarrow \frac{n}{n+m}\vec{a}+\frac{m}{n+m}\vec{b}=\frac{\lambda|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}+\lambda\vec{b}$

$\vec{a},\vec{b}$ - лин. независими $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{n}{n+m} = \dfrac{\lambda|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \\[2ex] \dfrac{m}{n+m} = \lambda \end{array}\right) : \quad \frac{n}{m} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \text{ или } \frac{m}{n} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|} \Rightarrow \overrightarrow{CC_0} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\cdot\vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\cdot\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AA_0} = -\vec{a} + \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}-\vec{a}|+|\vec{a}|}\cdot\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BB_0} = \frac{\vec{a}\cdot|\vec{b}|}{|\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|} - \vec{b}$$