СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

# Изпъкнали обвивки

ТЕМА №15

# Съдържание

## Тема 15: Изпъкнали обвивки

- Изпъкнали многоъгълници
- Изпъкнали многостени
- Изпъкнала обвивка

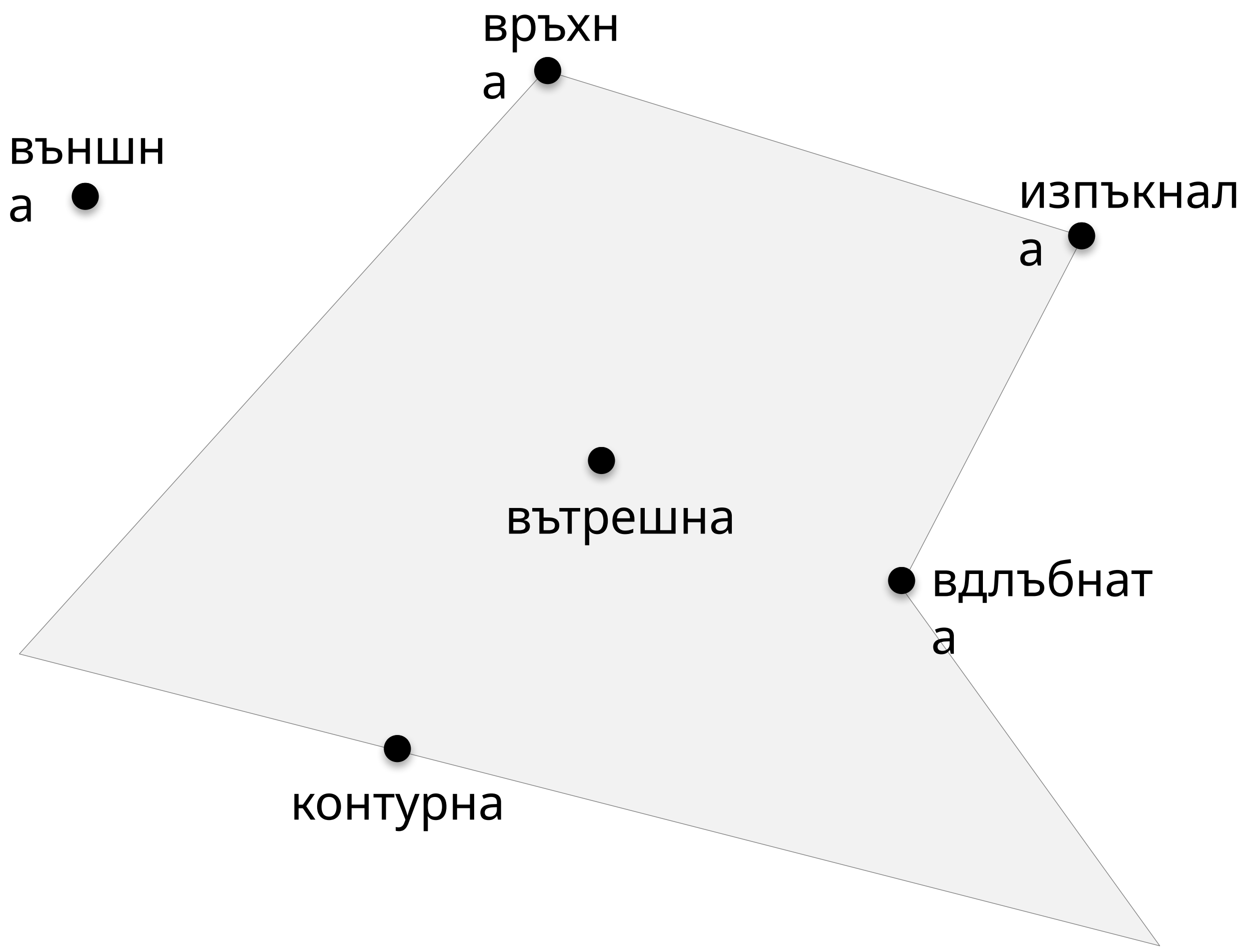
# Изпъкнали многоъгълници

# Малко терминология

## Вътре и вън

- Разглеждат се само прости многоъгълници (не се самопресичат)
- Те разделят равнината на две условни зони: вътрешност и външност

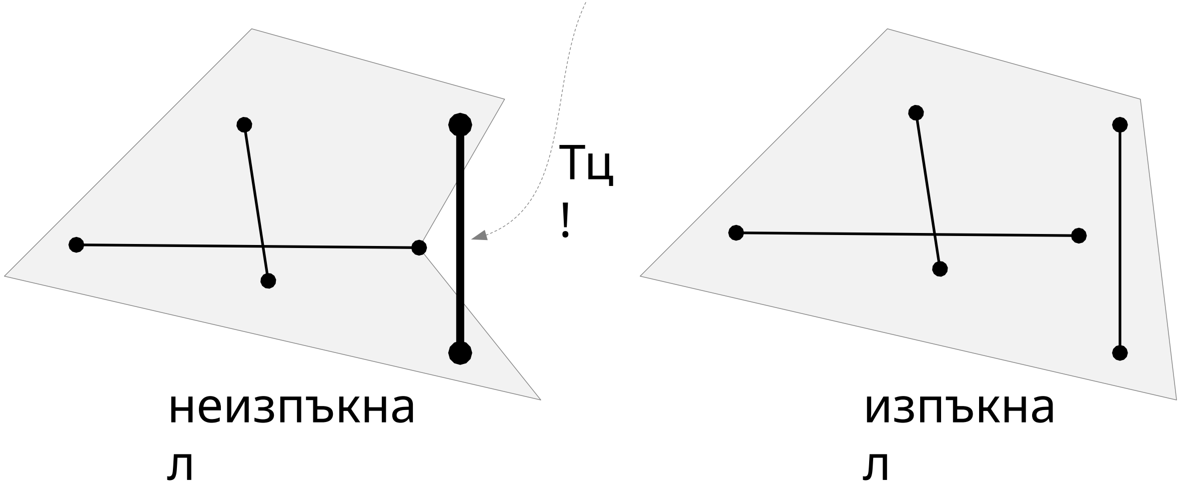
– Видове точки според положението им спрямо многоъгълника


връхн
а
външн
а
изпъкнал
а
вътрешна
вдлъбнат
а
контурна

# Изпъкнали многоъгълници

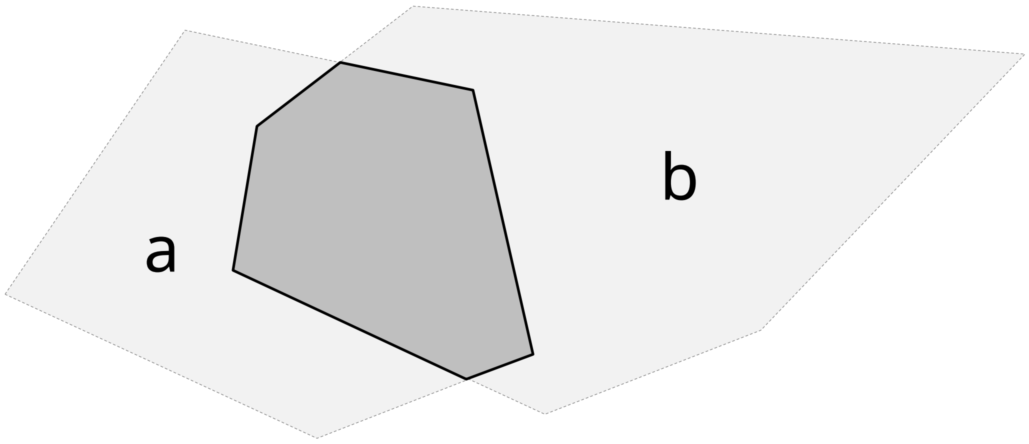
## Изпъкнали многоъгълници

- Нямат вдлъбнати върхове
- Отсечка между всеки две невъншни точки е само от невъншни точки



# Едно основно свойство

- Непразното сечение на изпъкнали многоъгълници е изпъкнал многоъгълник



# Доказателство ($\text{⌂}(x) \equiv$ „$x$ е изпъкнал“)

– Предположение: $!\,\text{⌂}(a \cap b) \Rightarrow$

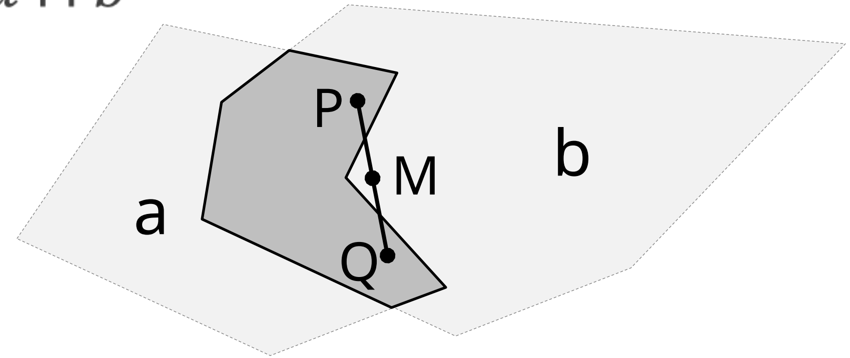
$$\exists PQ\colon P, Q \in a \cap b \text{ и } \exists M \in PQ\colon M \notin a \cap b$$

$$\left.\begin{array}{l} \{P, Q \in a, \text{⌂}(a)\} \Rightarrow M \in a \\ \{P, Q \in b, \text{⌂}(b)\} \Rightarrow M \in b \end{array}\right\} \Rightarrow M \in a \cap b$$

– Това противоречи с $M \notin a \cap b$

$$\Rightarrow !\,!\,\text{⌂}(a \cap b)$$

$$\Rightarrow \text{⌂}(a \cap b)$$



# Същото нещо, но на човешки:

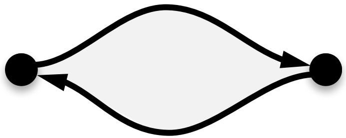
- Предполага се, че сечението не е изпъкнало
  - Значи може да се намери отсечка, чиито краища са в сечението
  - А някаква вътрешна нейна точка е извън сечението.
- Но двата края принадлежат на единия многоъгълник
  - Т.е. и някаквата точка също, понеже той е изпъкнал
  - По същата причина точката е и в другия многоъгълник
- Щом тя е в двата, значи е и в сечението им
- Оказва се, че предположението е грешно
  - Затова сечението е не е неизпъкнало, което значи, че е изпъкнало

# Друго основно свойство: $V - E = 0$

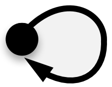
- Където $V$ е броят върхове, а $E$ е броят страни
- За нормалните хора $V \geq 3$

# За ненормалните съществуват

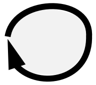
- Двуъгълник V=2
  (не е отсечка)



- Едноъгълник V=1
  (не е точка)



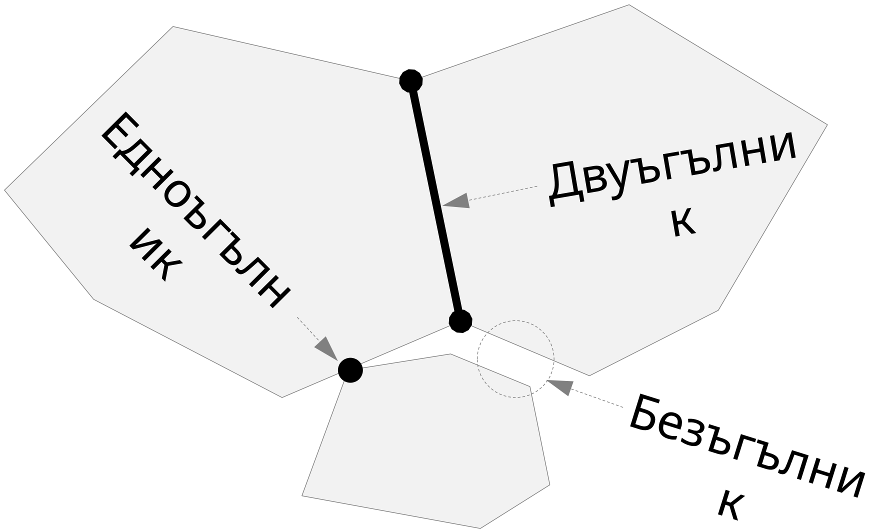
- Безъгълник V=0
  (не е нищо)



# Чрез изродените случаи

## Два изпъкнали многоъгълника

- Винаги имат сечение-многоъгълник



# Изпъкнали многостени

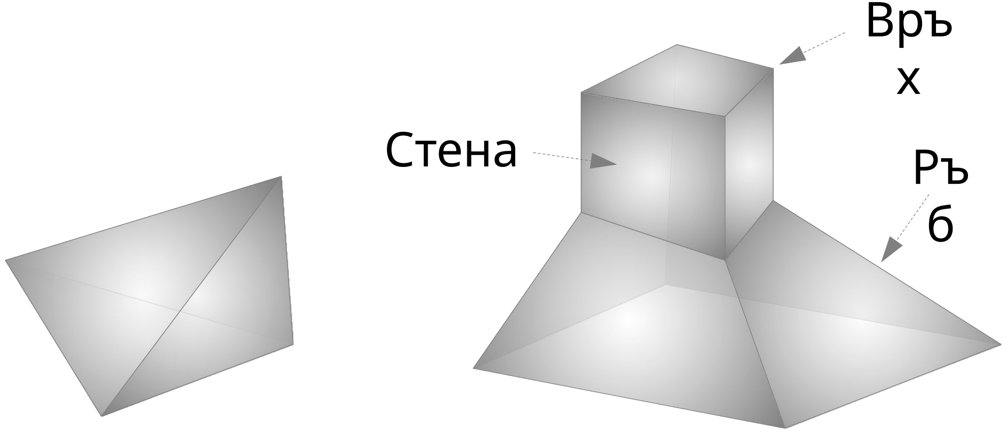
# Дефиниция

## Многостен

- 3D тяло, ограничено от равнинни многоъгълници
- Всяко ребро на многостена е страна на точно два от тези многоъгълника
- Всеки многоъгълник е стена на многостена

# История

- Изследвани още от древна Гърция
- Ползвани в математиката, астрономията, изкуствата



## Изпъкнали многостени

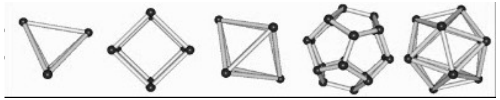
- През всеки връх на многостена съществува равнина, такава че всички точки от многостена са само
  в едното полупространство

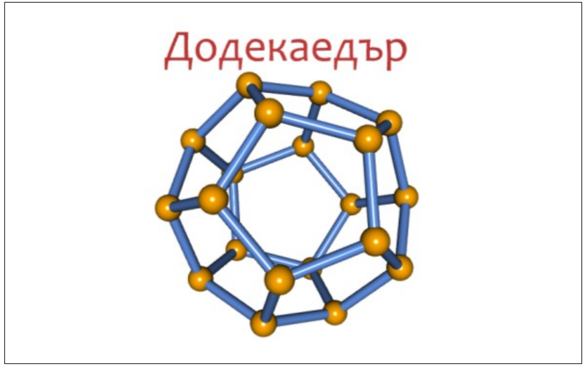
## Правилни многостени

- Трябва да са от еднакви правилни многоъгълници, сключващи еднакви стенни ъгли

# Платонови тела

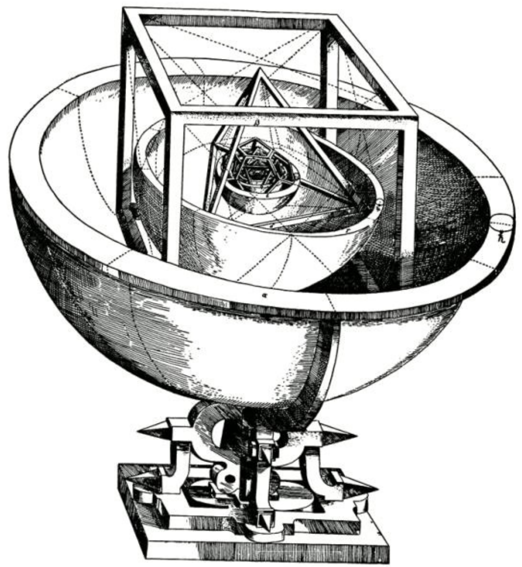
- Правилни многостени
- От еднакви правилни многоъгълници
- Сключващи еднакви стенни ъгли
- Само 5 са





# Използване на Платонови тела

- Да се търси истината
- Смисълът на съществуването на света



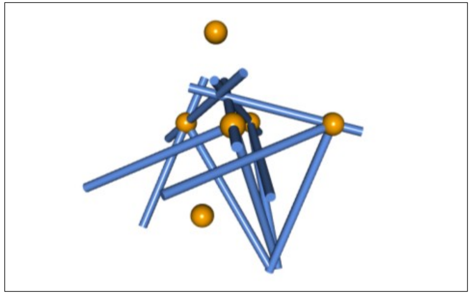
# Формула на Ойлер

## Прост многостен

- Многостен, който не се самопресича
- Може да бъде „издут“ до сфера
- Ако $V$ е броят върхове, $E$ – ръбове, а $F$ – стени, тогава $V - E + F = 2$

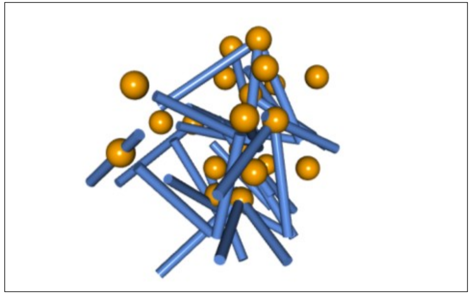
## Проверка с октаедър

- Върхове $V = 6$
- Ръбове $E = 12$
- Стени $F = 8$
- Ойлер е прав: $6 - 12 + 8 = 2$



## Проверка с додекаедър

- Върхове $V = 20$
- Ръбове $E = 30$
- Стени $F = 12$
- Пак е прав: $20 - 30 + 12 = 2$



## Още за $V - E + F = 2$

- Важи за само за някои многостени

## Условия когато важи

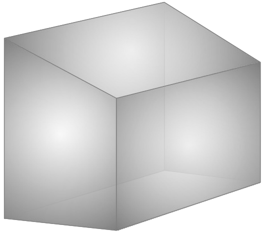
- Всяка стена е обкръжена от единичен пръстен от ръбове
- Всеки ръб се споделя от точно две стени
- Всеки ръб се простира между точно два върха
- Във всеки връх се срещат поне 3 ръба
- В многостена няма дупки и тунели

# Тримерни тела в КГ

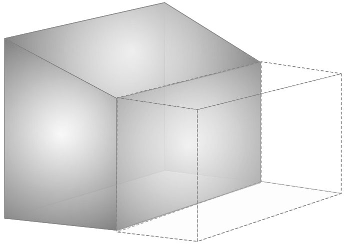
- Спазват формулата и отговарят на условията
- Удобни за представяне на тримерни обекти с мрежа

$$V = 8, E = 12, F = 6$$
$$8 - 12 + 6 = 2$$

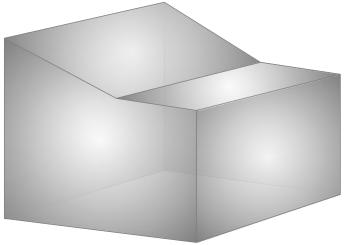
$$V = 10, E = 15, F = 7$$
$$10 - 15 + 7 = 2$$



Апартамент



Незаконен балкон



Узаконен балкон

# По-сложни тела

## Топологични сфери

- За формулата на Ойлер се иска „да няма тунели“
- Такива тела са топологично еквивалентни на сфера

## Какво се прави с другите обекти

- Има доста такива обекти – халба за бира, очила, геврек-осморка със захар или без захар и т.н.

## 3D обект с $T$ тунела

- Формулата е: $V - E + F = 2 - 2T$

## Примери

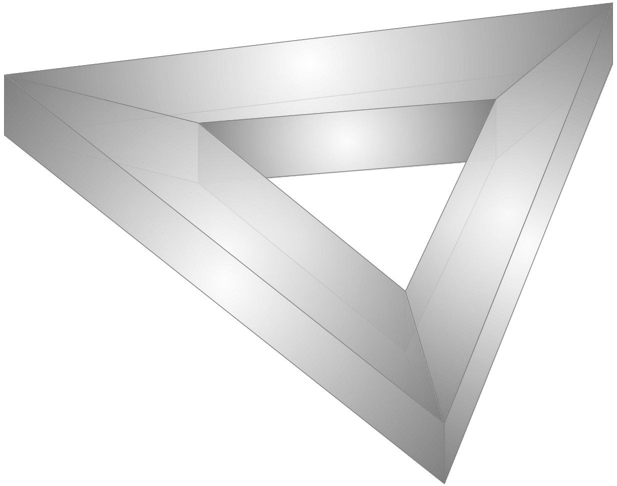
- Модел на поничка: $T = 1$, а $V - E + F = 0$
- 3D модел на рамка за очила: $T = 2$, а $V - E + F = -2$
- Модел на език с 3 пиърсинга: $T = 3$, а $V - E + F = -4$

## Още за формулата $V - E + F = 2 - 2T$

- Не зависи колко детайлна е 3D мрежата на обекта

## Проверка с поничка

- Ама много груба, тоблеронска поничка



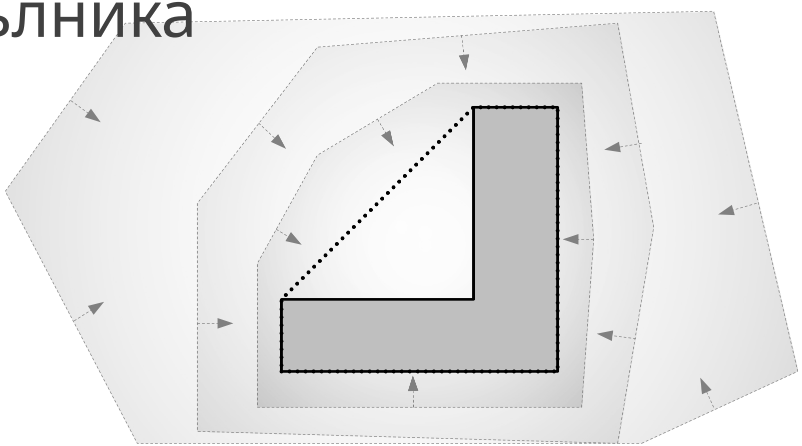
- $V = 12$
- $E = 24$
- $F = 12$ $\quad V - E + F = 2 - 2T$
- $T = 1$ $\quad 12 - 24 + 12 = 2 - 2.1$

# Изпъкнала обвивка

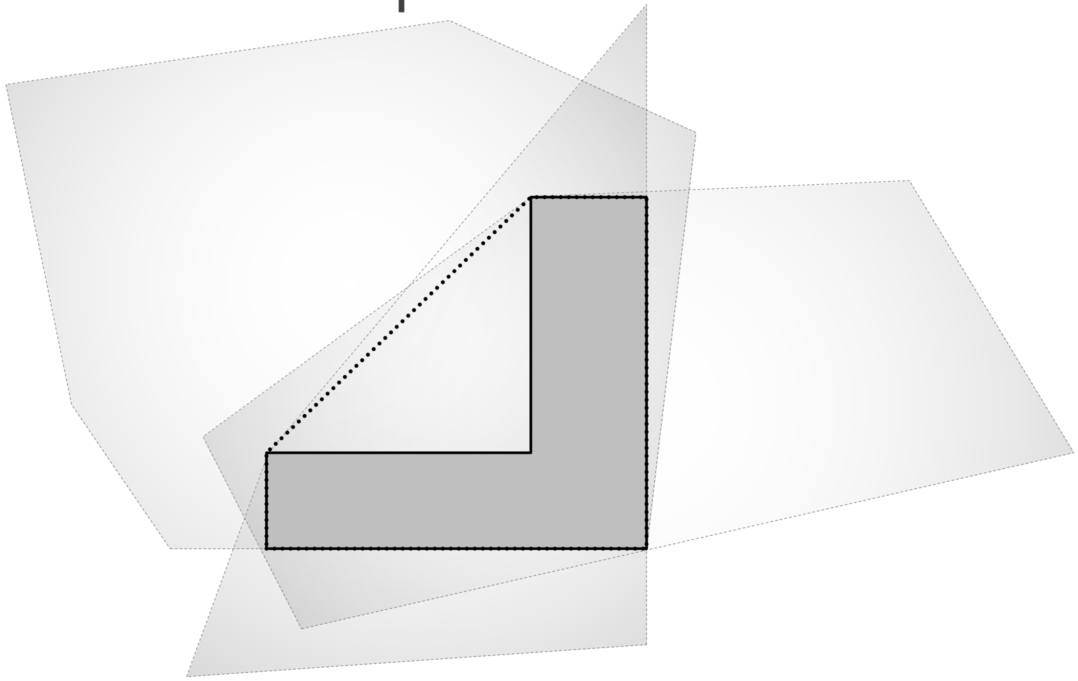
# Изпъкнала обвивка в 2D

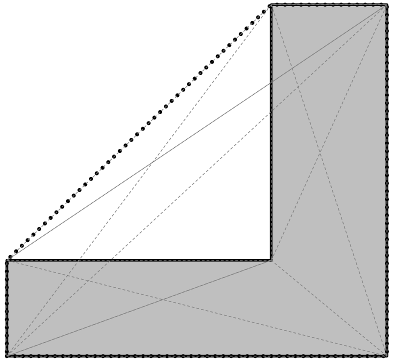
## Няколко еквивалентни дефиниции

- Това е най-малкият по площ изпъкнал многоъгълник включващ всички върхове от многоъгълника



- Сечението на всички изпъкнали многоъгълници, които включват върховете на многоъгълника
- Обединението на всички триъгълници определени от върховете на многоъгълник

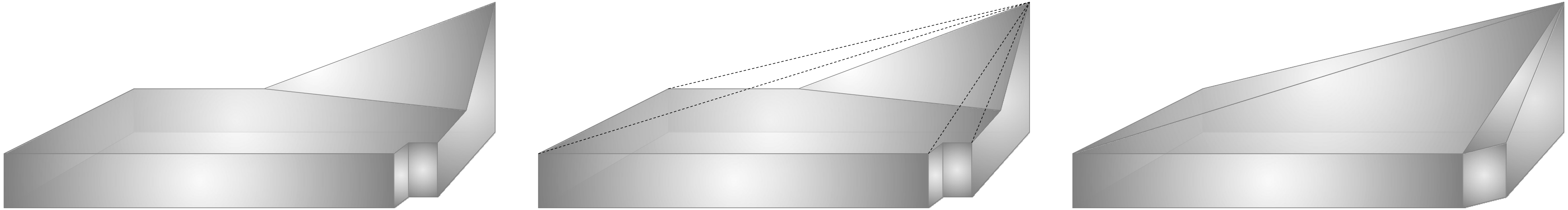




# Изпъкнала обвивка в 3D

## Изпъкнала обвивка на многостен

- Минималният изпъкнал многостен, включващ всички точки от многостена
- Или: сечението на всички многостени, включващи всички точки от многостена



# Намиране на обвивка

## Намиране на изпъкнала обвивка

- Разглеждаме само в 2D
- Алгоритъм „Добавяне на точки“
- Алгоритъм „Опаковане на подарък“
- Алгоритъм „Сканиране на Греъм“

# Алгоритъм
# “Добавяне на точки”

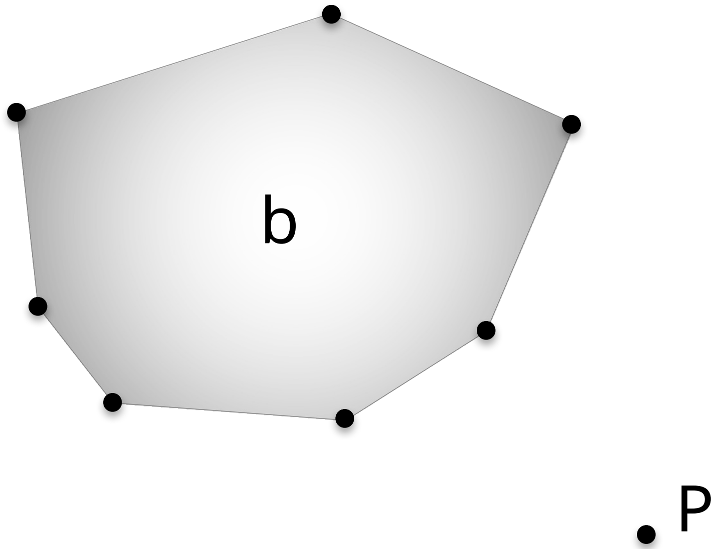
# Основна идея

**Алгоритъм**

- Начален многоъгълник $a$
- Създава се безъгълник $b$
- Един по един всеки връх от $a$ се включва в $b$ като $b$ се поддържа винаги изпъкнал с цената на триене на върхове

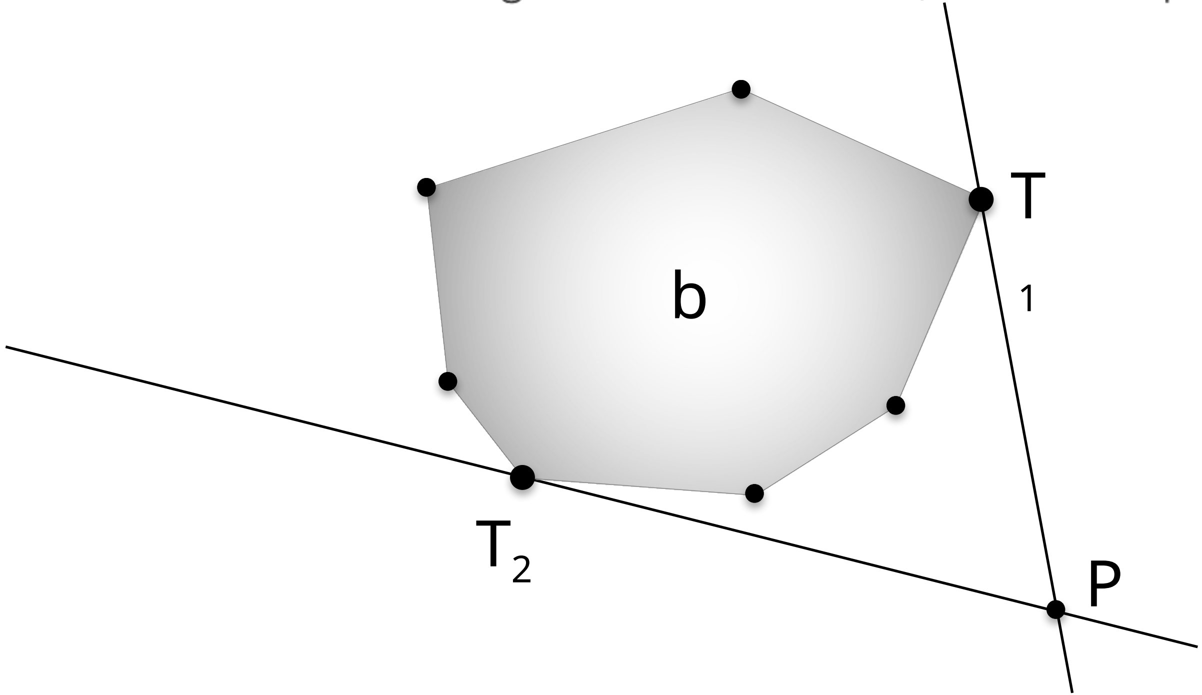
# Стъпка от алгоритъма

- От $a$ е взета поредната точка $P$
- Ако $P \in b$, няма нужда да се добавя $P$ към $b$
- Ако $P \notin b$, добавянето на $P$ ще промени $b$



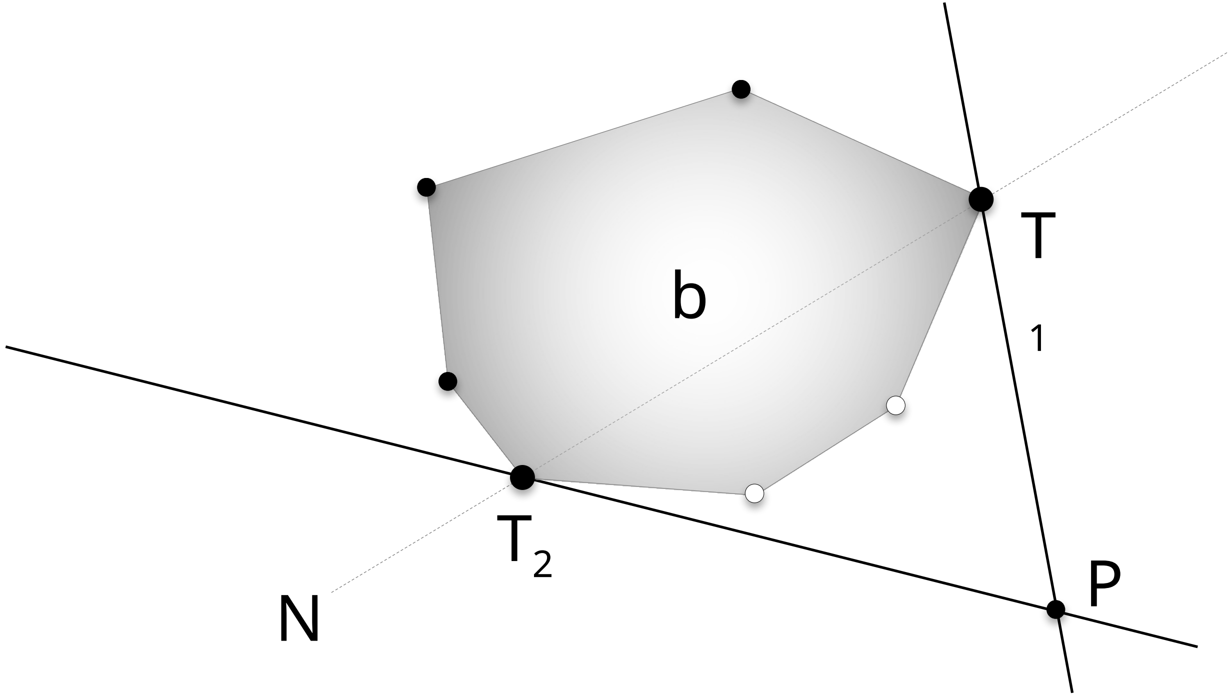
# Построяват се тангентите през $P$ към $b$

- Това са прави, свързващи $\boldsymbol{P}$ с връх на $\boldsymbol{b}$ така, че $\boldsymbol{b}$ да е само от едната страна
- Запомнят се двата тангенциални върха $\boldsymbol{T_1}$ и $\boldsymbol{T_2}$



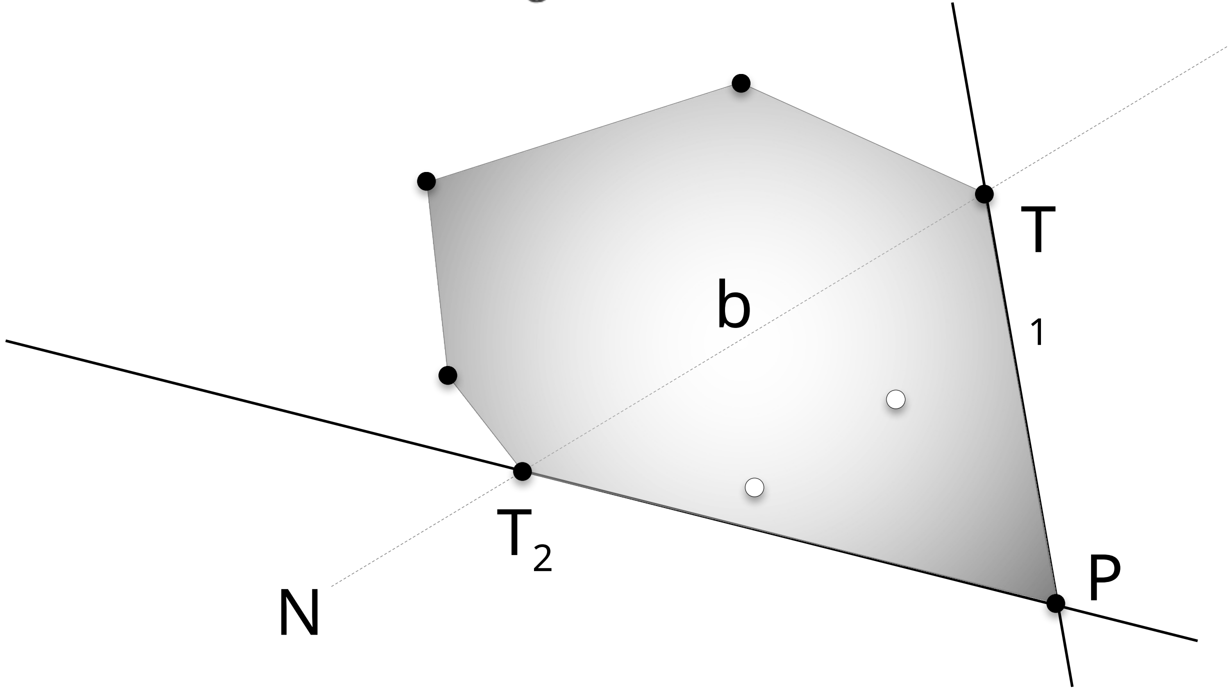
# Премахват се по-близките върхове

- Това са върховете между запомнените два, които са откъм $P$ спрямо правата $N$, която минава през тях



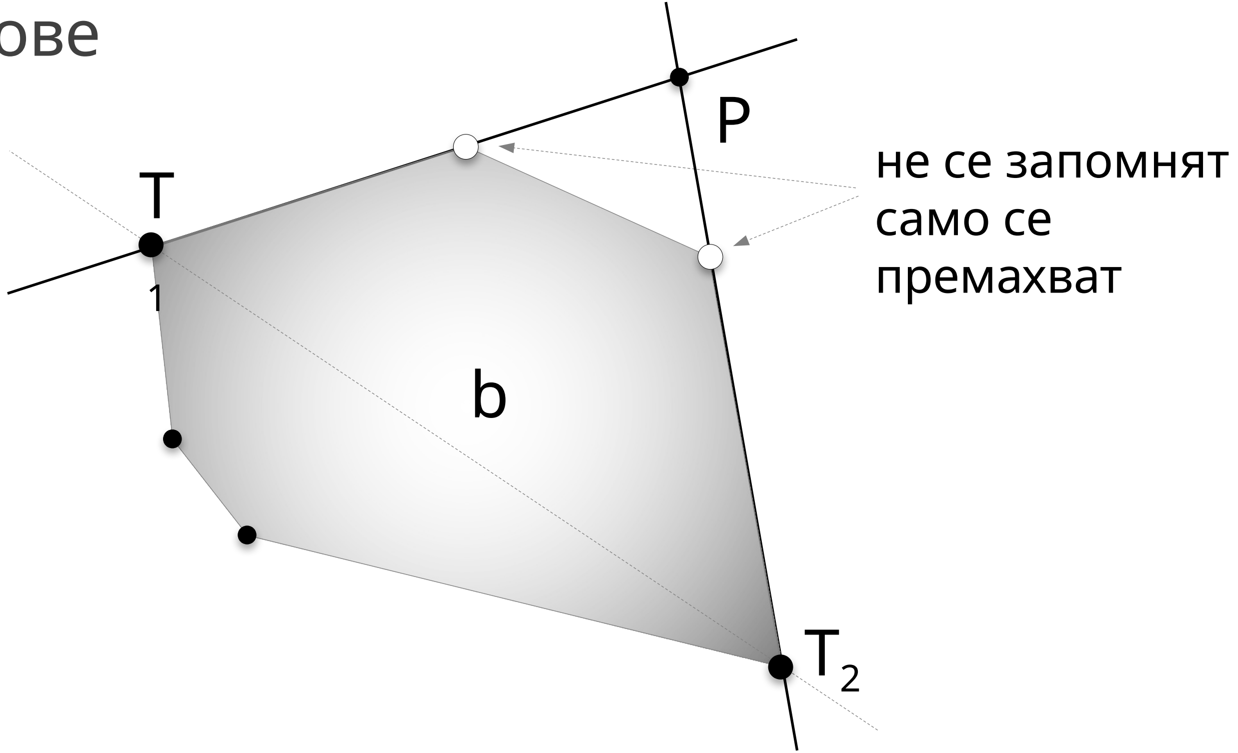
# Шпакловка

- Свързва се $P$ с двата върхове $T_1$ и $T_2$
- Вече новият изпъкнал $b$ е готов



# Да се внимава

- При тангенциални страни от многоъгълника се запомнят само по-далечните от двете двойки върхове



# Алгоритъм „Опаковане на подарък“

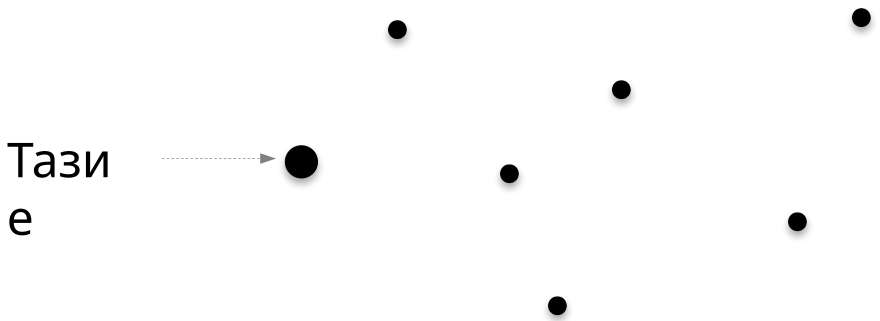
# Опаковане на подарък

**Алгоритъм**

- Избира се точка, която със сигурност принадлежи към изпъкналата обвивка
  (Коя да е тя? Ами ... най-лявата, тази с най-малка $x$ координата, е OK.)
- Завърта се по часовниковата стрелка вертикален лъч от тази точка, докато опре до друга точка
- После се завърта от другата до следващата и т.н.

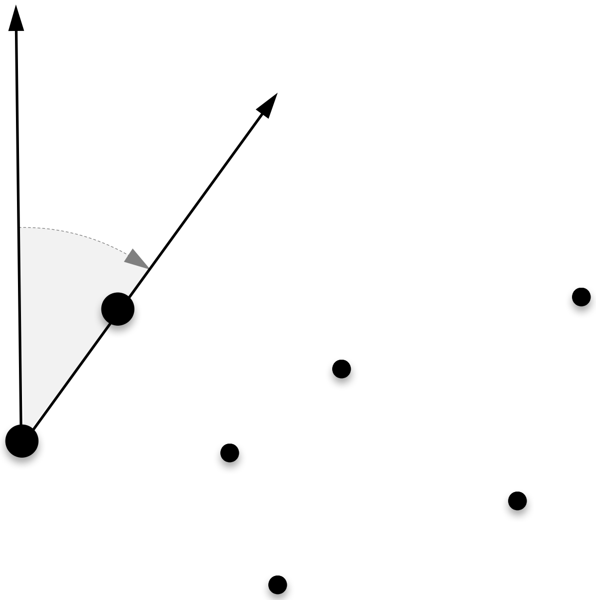
# Избира се най-лявата точка

– Ако са няколко, избираме най-горната



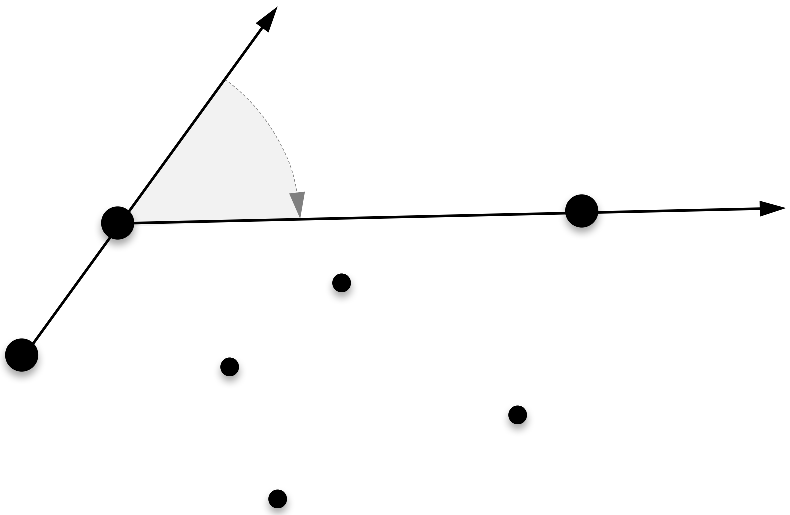
# Завърта се вертикален лъч

- Докато опре до друга точка
- Тази точка е следващата от обвивката



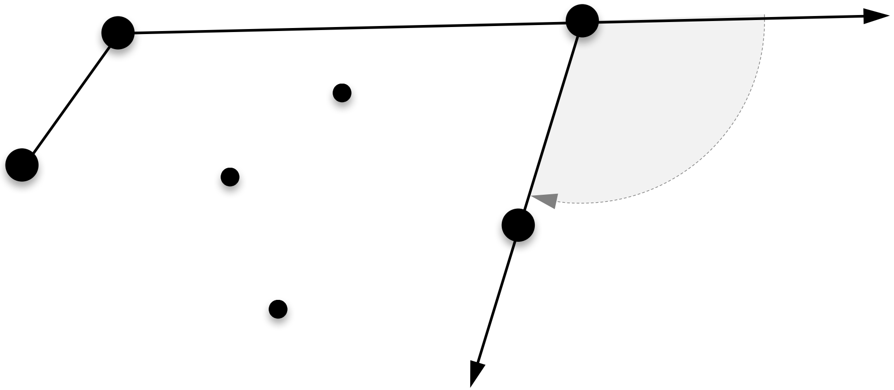
# Завърта се остатъка от лъч

- Около новата точка
- Така се намира поредната точка

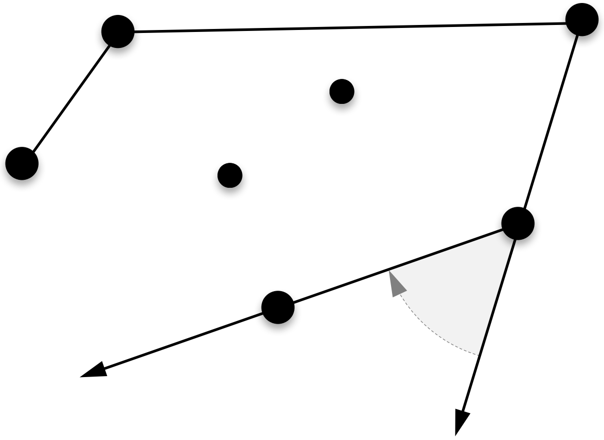


# Продължава се в този дух

- Около още по-нова точка
- Така се намира още по-поредна точка

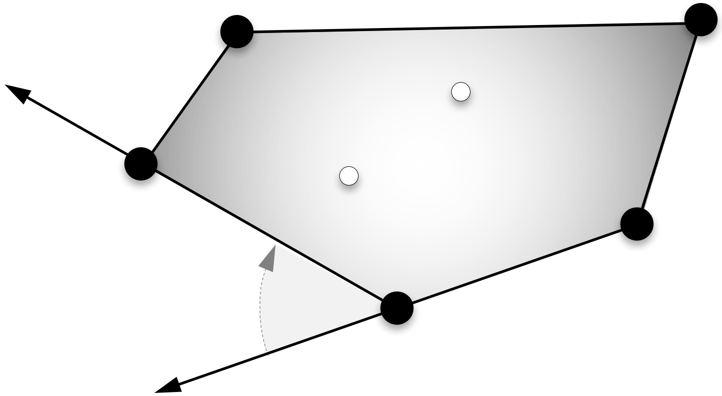


# И още веднъж



# И за последно

- Рано или късно се стига до първия връх
  (Забележка: догодина да ползвам по-къс пример)



# Какво би станало?

**Ако се избере друга начална точка?**

- Най-долната, най-дясната, най-горната
- Без проблеми, стига първият лъч да е тангенциален

**Ако се избере обратна посока на въртене?**

- Завива се свят, но подаръкът пак ще се опакова

# Алгоритъм „Сканиране на Греъм“

# Сканиране на Греъм

## Алгоритъм

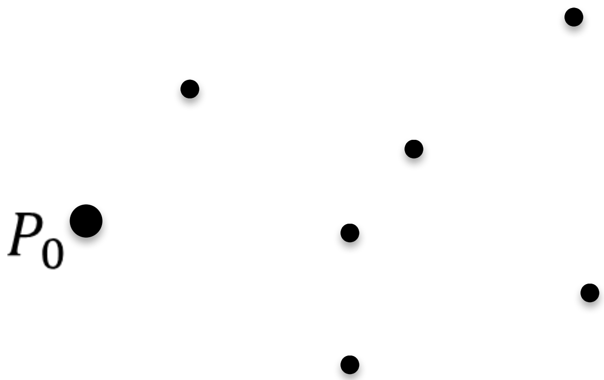
- Избира се точка $P_0$, която със сигурност принадлежи към изпъкналата обвивка, примерно пак най-лявата
- Сортират се всички останали точки според ъгъла им в полярни координати спрямо $P_0$
- Избират се втора и трета точки: $P_1$ и $P_2$
- Работи се с последните 3 избрани точки

**Ето как се работи**

- Ако към третата се прави завой надясно, изтрива се втората и пак се гледат последните три избрани точки

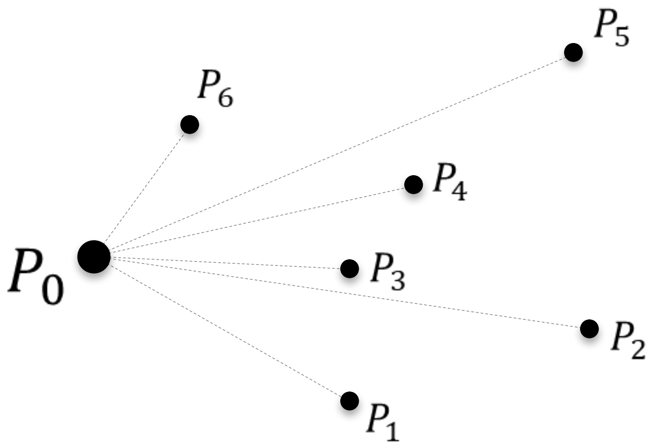
**Пример**

- Избира се най-лявата точка



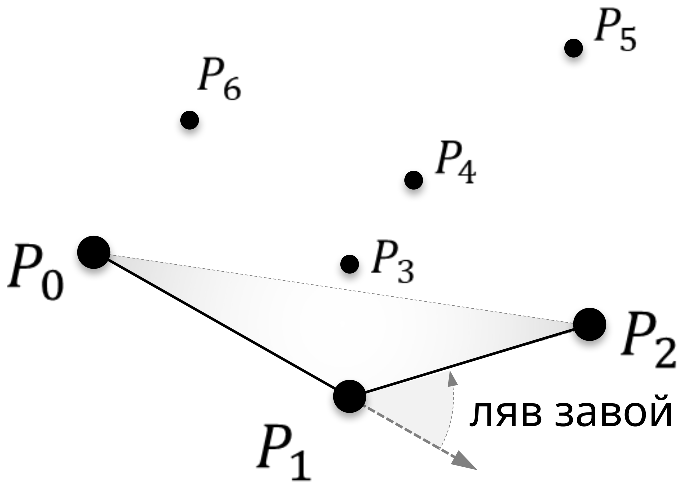
# Сортиране според ъгъла

- Ползват се полярни координати
- Точката $(0,0)$ е в $P_0$
- Сортират (преномерират) се точките за удобство



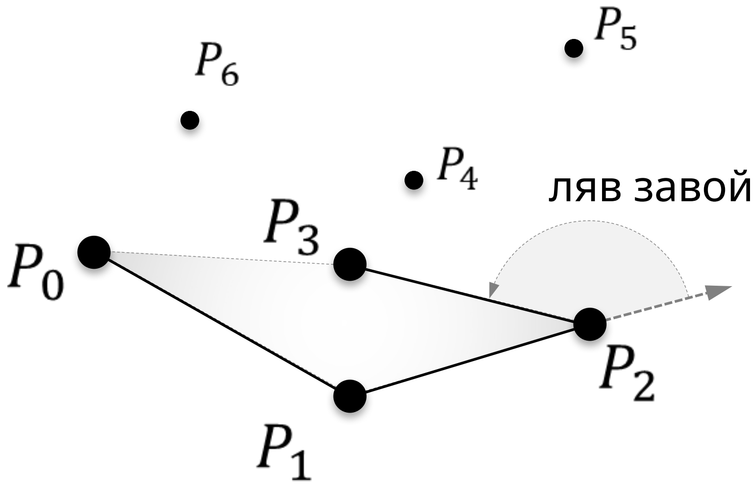
# Избират се втора и трета точки

- Ползват се $P_1$ и $P_2$
- $P_0P_1P_2$ е текущият изпъкнал многоъгълник
- От $P_0P_1$ се завива наляво за $P_2$ – това е добре



# Избира се нова точка

- Това ще да е следващата $P_3$
- Последните три избрани точки вече са $P_1$, $P_2$ и $P_3$
- Забелязва се, че от $P_1P_2$ се завива наляво за $P_3$
  (направо не вярваме на късмета си)

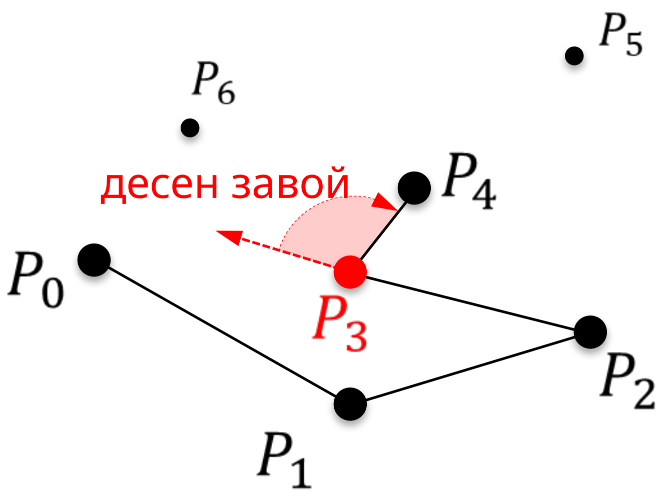


# Избира се нова точка – $P_4$

– Вече се работи с $P_2$, $P_3$ и $P_4$

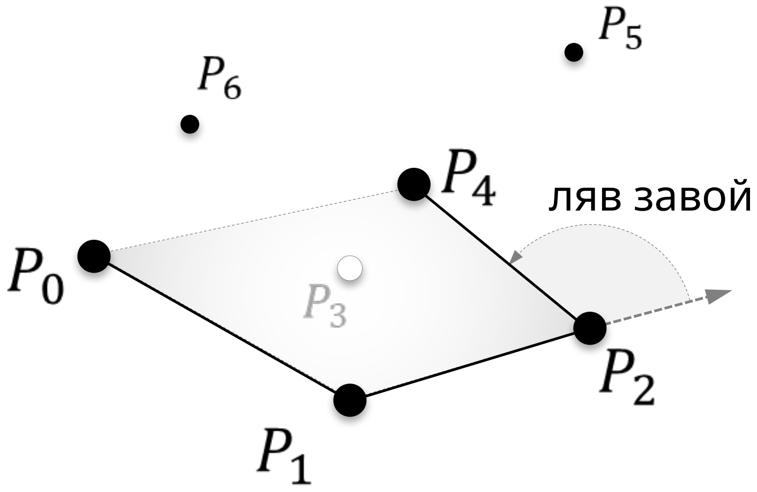
– От $P_2P_3$ се завива надясно за $P_4$, т.е. $P_3$ не може и не трябва да е в изпъкналата обвивка

– $P_3$ трябва да се прескочи



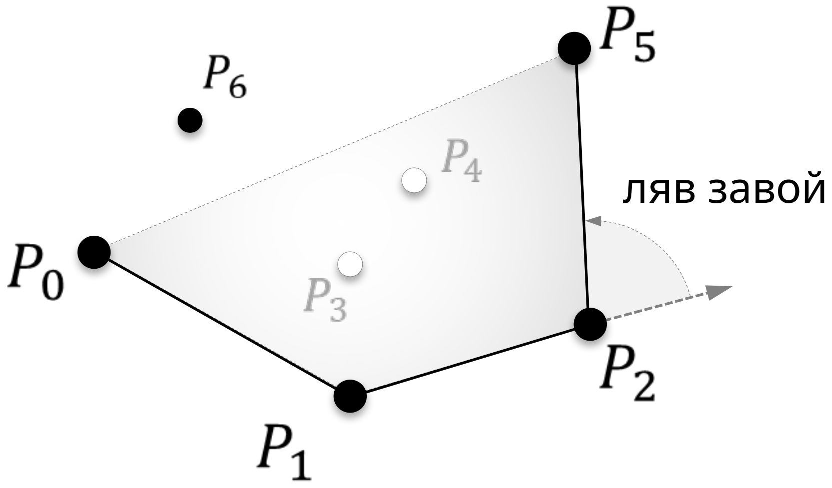
# След премахване на $P_3$

- Последните три точки вече са $P_1$, $P_2$ и $P_4$
- Завоят към $P_4$ е ляв, т.е. текущият многоъгълник $P_0P_1P_2P_4$ е изпъкнал



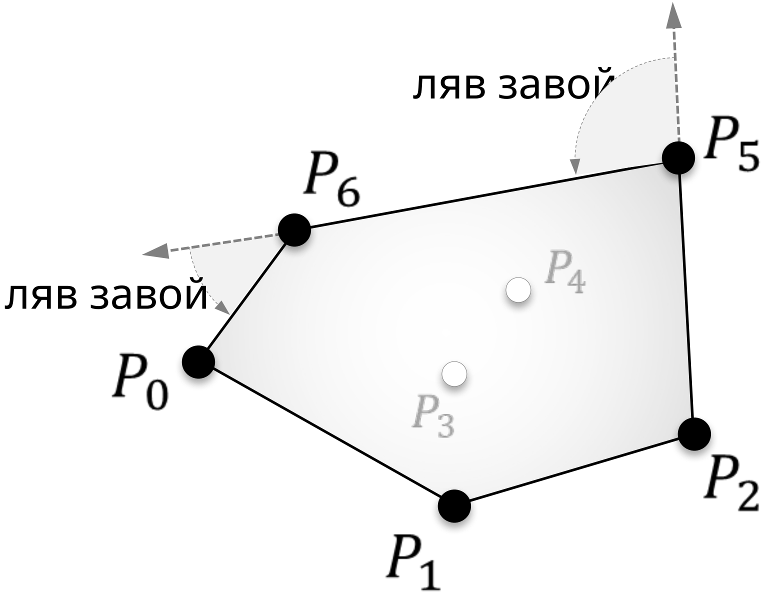
# Добавя се $P_5$

- Аналогично, добавянето на $P_5$, ще премахне $P_4$, защото завоят от $P_2P_4$ към $P_5$ е десен
- Текущият изпъкнал многоъгълник става $P_0P_1P_2P_5$



# Следващите две стъпки са ясни

- Добавя се $P_6$ без проблеми
- Стига се до първата точка $P_0$
- С това изпъкналата обвивка $P_0P_1P_2P_5P_6$ е готова

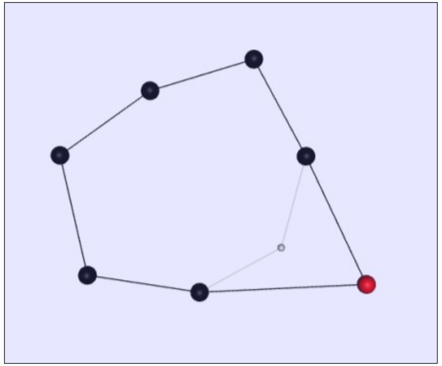


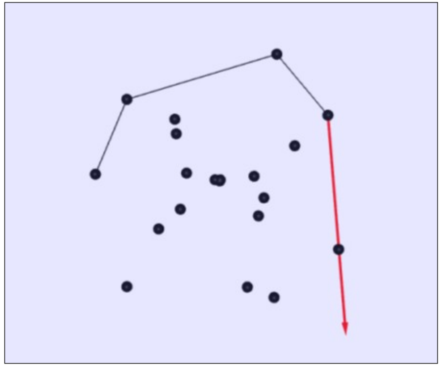
# Алгоритмите „на живо“

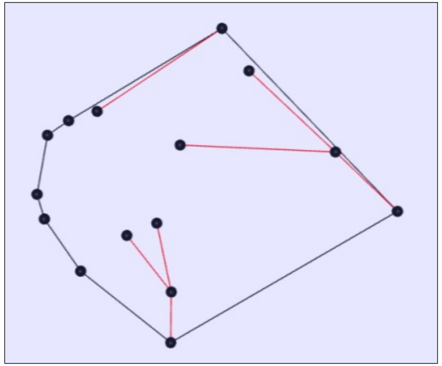
# Илюстрации

## Динамични илюстрации

- Алгоритъм „Добавяне на точки“
- Алгоритъм „Опаковане на подарък“
- Алгоритъм „Сканиране на Греъм“







# Въпроси и коментари

# Повече информация

**KLRO** стр. 25-26, 429-432
**LASZ** стр. 78-88, 112-116, 139-145, 182-183
**MORT** стр. 214-216

**А също и:**

- Graham's Scanning
  http://www.personal.kent.edu/~rmuhamma/Compgeometry/MyCG/ConvexHull/GrahamScan/grahamScan.htm
- The Convex Hull of a 2D Point Set or Polygon
  http://softsurfer.com/Archive/algorithm_0109/algorithm_0109.htm

# Край