

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ  
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“



# Трасиране на лъчи

ТЕМА №18

# Съдържание

## Тема 18: Трасиране на лъчи

- Основни идеи
- Пресичане на лъчи
- Отражение и пречупване

# Основни идеи

# Трасиране на лъчи

## Какво е това?

- Всеки алгоритъм, който обхожда траекторията на светлинни лъчи в права или обратна посока

## Посоки на обхождане

- Права посока – от източника към наблюдателя
- Обратна посока – от наблюдателя към източника

# Използване

## Определяне на видимост

- При сложни обекти, за които другите алгоритми не работят добре

## Отчитане материала на обект

- Отразяване на светлината – гладък / матов материал
- Пречупване на светлината – полупрозрачен материал с различни оптична плътност

## **Сенки и засенчване**

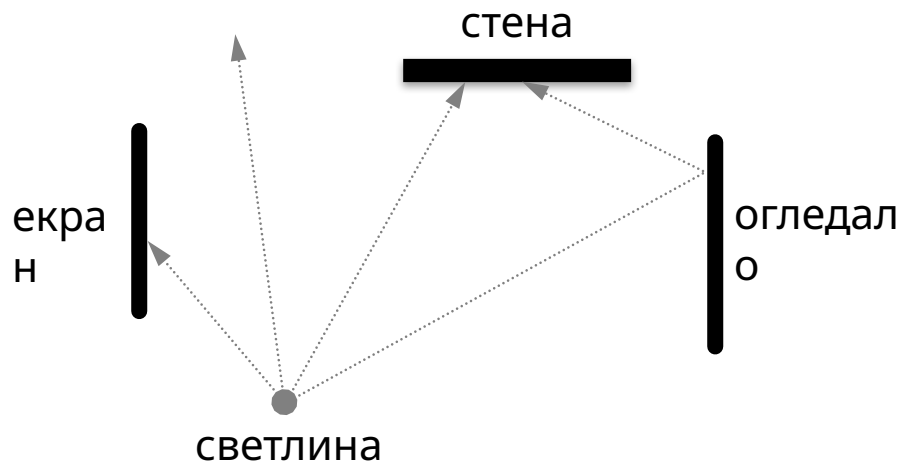
- Определяне на сянката на обект
- Сянка на обект върху други обекти

## **Определяне на сблъсък**

- Сблъсък между обекти с нерегулярни форми

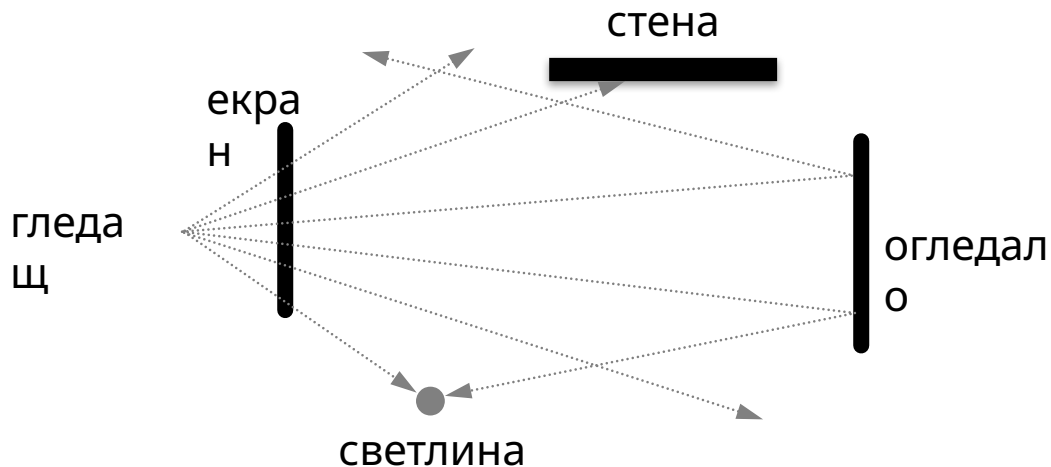
# Права посока

- Лъчът излиза от източника
- Следи се попадане върху други обекти
- Понякога може да се трасират ненужно много лъчи



# Обратна посока

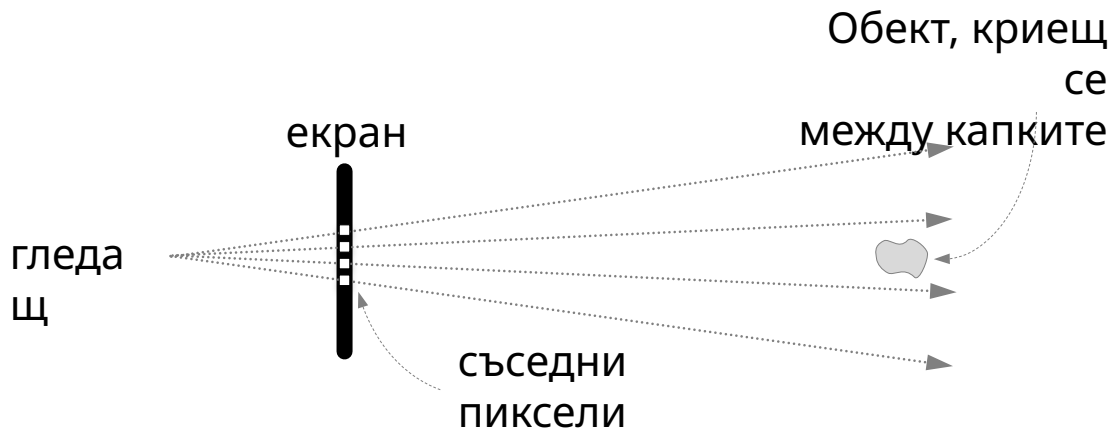
- Лъчът излиза от гледащия
- Следи се кога и как лъчът попада на обекти и светлинни източници





# Проблеми на обратната връзка

- Ограничение за максимален брой отражения
- Не се вижда обект, който е „между“ два пиксела



# Основни трудности

## Изчисляване на пресичане

- Пресичането на лъч със сложен обект е трудоемко

## Отражения и пречупвания

- Наслагване на множество отражения и пречупвания

## Различни материи

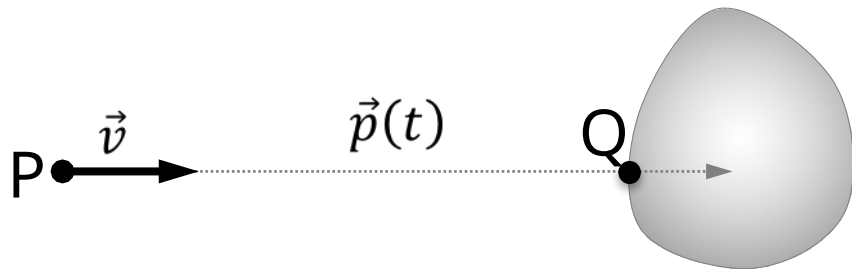
- Гладки, матови, прозрачни, фосфоресциращи

Пресичане на лъчи

# Пресичане

## Основна задача

- Намиране сечението  $Q$  на лъч и обект
- Задаване на лъч чрез параметър  $\vec{p}(t) = P + t\vec{v}$



- Сечението може да намери аналитично и числено

## **Аналитичен метод за сечение**

- Приложим при обекти, зададени чрез полиноми от достатъчно ниска степен
- Много графични обекти могат да се представят така

## **Ще бъде разгледано**

- Сечение с равнина
- Сечение с квадратична повърхност

# Сечение с равнина

## Сечение на лъч с равнина

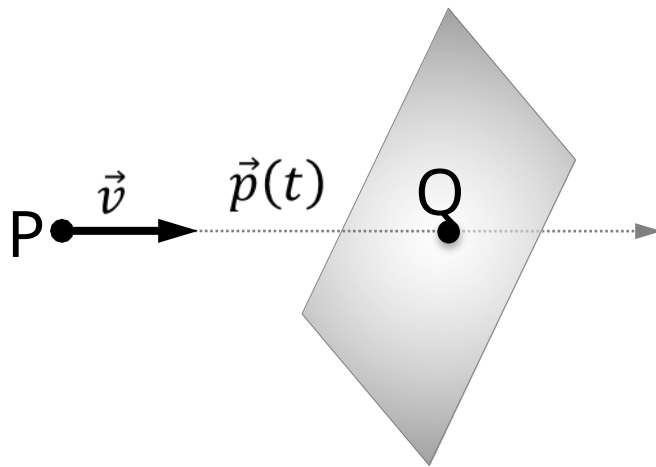
– Точка  $Q$  е на лъча и на равнината

$$aQ_x + bQ_y + cQ_z + d = 0$$

$$Q_x = P_x + tv_x$$

$$Q_y = P_y + tv_y$$

$$Q_z = P_z + tv_z$$



## Получава се

$$a(P_x + tv_x) + b(P_y + tv_y) + c(P_z + tv_z) + d = 0$$

$$\text{т.е. } t = \frac{aP_x + bP_y + cP_z + d}{av_x + bv_y + cv_z}$$

## Математическо отклонение

- В хомогенни координати  $P$ ,  $\vec{v}$  и  $S$  имат вида  $P(P_x, P_y, P_z, 1)$ ,  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z, 0)$  и  $S(a, b, c, d)$
- Тогава става красивото  $t = -\frac{S(P)}{S(\vec{v})} = -\frac{S \cdot P}{S \cdot \vec{v}}$

## Получен е резултат $t$

- Отнася се за сечение на линия с равнина
- За лъч — разглежда се  $0 \leq t < \infty$ 
  - Ако  $t < 0$ , лъчът сочи в обратна посока
  - Ако  $t = \infty$ , лъчът е успореден

## После какво?

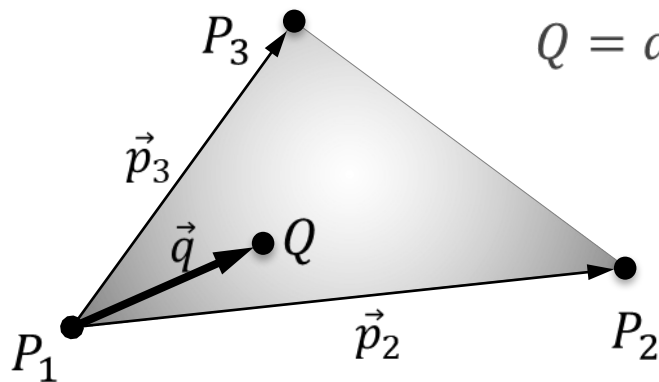
- В реалност сечението е със стена, а не с равнина
- Стената е многоъгълник, т.е. задачата се свежда до проверка дали точка е вътрешна за многоъгълник



# Лъч и триъгълник

## Сечение на лъч и триъгълник

- Обект е дефиниран с триъгълна мрежа
- Всяка стена дефинира равнина



$$Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 : \alpha_i \in [0,1]; \sum \alpha_i = 1$$

$$\begin{aligned} Q &= (1 - \alpha_2 - \alpha_3)P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 \\ Q - P_1 &= \alpha_2(P_2 - P_1) + \alpha_3(P_3 - P_1) \\ \vec{q} &= \alpha_2 \vec{p}_2 + \alpha_3 \vec{p}_3 \end{aligned}$$

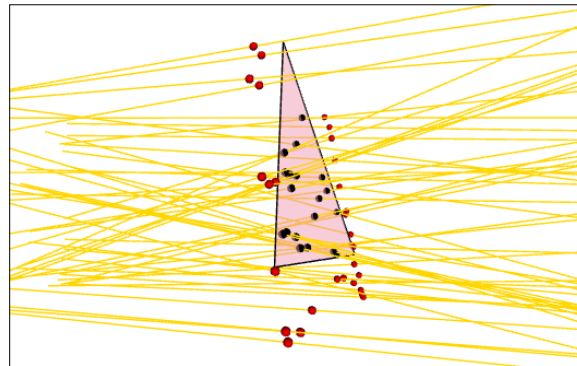
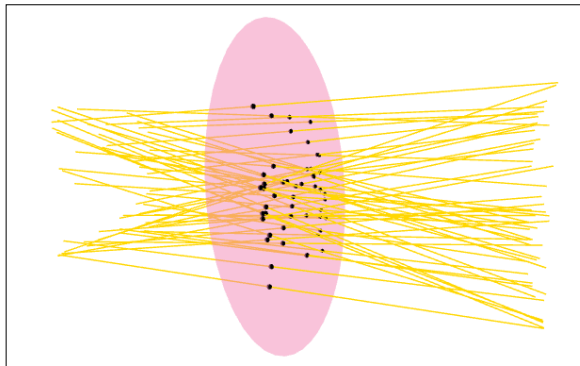
- Умножава се  $\vec{q}$  скаларно с  $\vec{p}_2$  и  $\vec{p}_3$
- Система от две линейни уравнения с две неизвестни

$$\begin{cases} \vec{q} \cdot \vec{p}_2 = \alpha_2 \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_2 + \alpha_3 \vec{p}_3 \cdot \vec{p}_2 \\ \vec{q} \cdot \vec{p}_3 = \alpha_2 \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3 + \alpha_3 \vec{p}_3 \cdot \vec{p}_3 \end{cases}$$

- Решаването ѝ дава  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$
- Ако  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ , то  $Q$  е вътрешна

# Примерни сечения

- Сечение на спагети с равнина
- Сечение на спагети с триъгълник



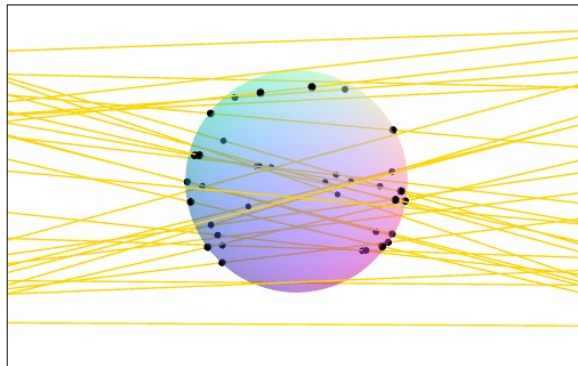
# Квадратични обекти

## Сечение на лъч с квадратични обекти

- Такива обекти са сферата, цилиндъра,...
- Свеждат се до решаване на квадратни уравнения
- А тук всеки знае да решава квадратни уравнения (дори щорите и дограмата)

# Сечение на спаге... лъчи със сфера

– Подвижна сфера



# Числен метод

## Числен метод за сечение

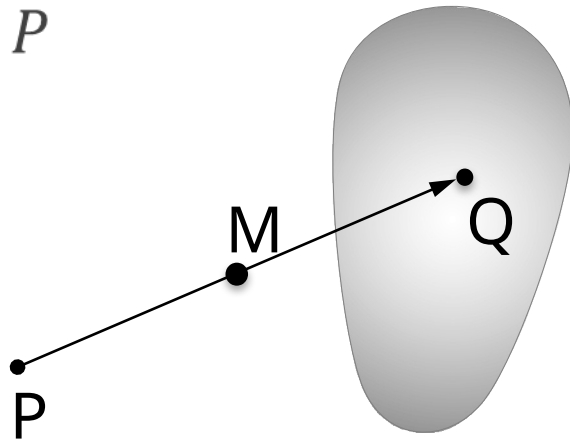
- Получава сечението с приближение
- Да се внимава при подбора на първоначална апроксимация

## Методи

- Метод на Нютон чрез допирателна
- Метод на двоичното търсене

# Двоично търсене

- С магия се намира външна точка  $P$  и вътрешна  $Q$
- Намира се средата  $M = \frac{(P+Q)}{2}$
- Ако  $M$  е външна, продължава се с  $M$  и  $Q$
- Ако  $M$  не е външна – с  $M$  и  $P$
- Повтаря се до достигане на желаната точност



## Пример чрез трасиране на лъчи

- Да се генерира обектът с повърхност

$$f(x, y, z) = (2x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 - \frac{x^2 z^3}{10} - y^2 z^3 = 0$$

- Точка  $(0,0,0)$  е вътрешна, а  $(1,0,0)$  е външна  
(или обратното (всъщност няма значение кое кое е))

$$f(0,0,0) = -1 < 0$$

$$f(1,0,0) = +1 > 0$$



## Това дава следната идея

- Ако се тръгне от  $(0,0,0)$  в някаква посока, след време ще се пресече обекта
- После с двоично търсене се намира приближена граница

## Внимание

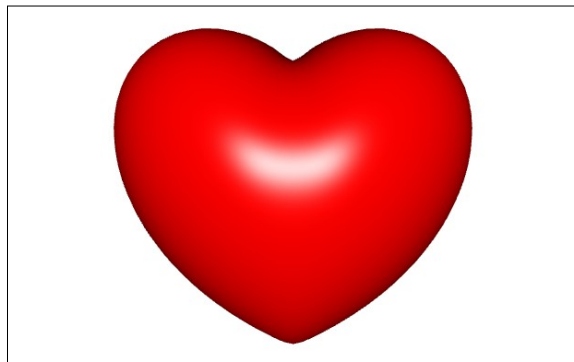
- С тази идея се надява обектът да е затворена повърхност и точка  $(0,0,0)$  е вътрешна
- Едва след построение на обекта се вижда дали е така

# Тука следва упорито писане на код с фоновата мисъл:

- Ако се пусне двоичното търсене паралелно по всички направления, би изглеждало като балон, който се раздува, докато не заеме дадена форма ...
- Като балон от дъвка, който се пука и приема лицевия релеф на дъвчещия ... или на този срещу него

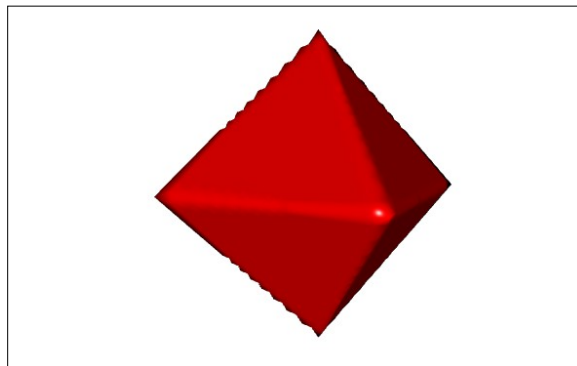
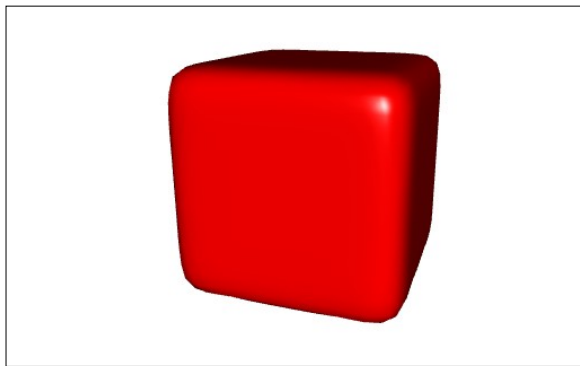
## Ето резултата

$$- \text{Само } (2x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 - \frac{x^2 z^3}{10} - y^2 z^3 = 0$$



## Две други повърхнини

- Заоблен куб  $x^{10} + y^{10} + z^{10} = 1$
- Настръхнал октаедър  $|x| + |y| + |z| = 1$



Отражение и пречупване

# Какво е това

## Отражение

- Лъч достига до повърхност и се отразява от нея
- На английски reflection

## Пречупване

- Лъч достига до повърхност и навлиза в нея, променяйки посоката си
- На английски refraction

## **Общото**

- Изискват трасиране на лъчи
- Случват се едновременно
- Светлинният лъч променя посоката си

## **Различното**

- Дали преминава или не отвъд границата на обекта

# Отражение

## Основна употреба

- Постигане на по-голяма реалистичност
- Огледални и гладки повърхности
- Дори и матовите могат да отразяват

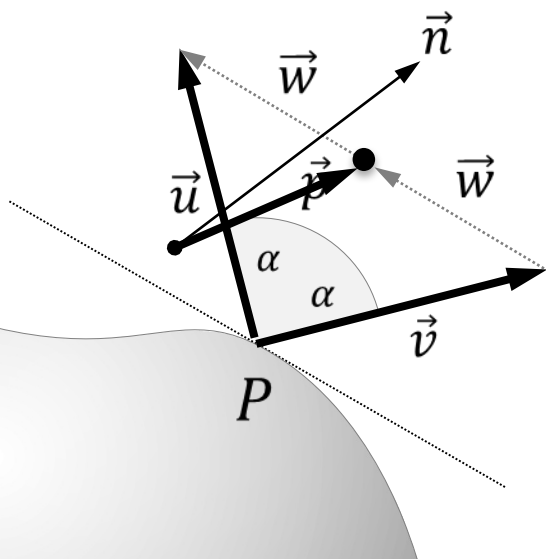
## Основен закон

- Лъч се отразява под същия ъгъл, под който пада към повърхността



# Изчисляване без ъгъл

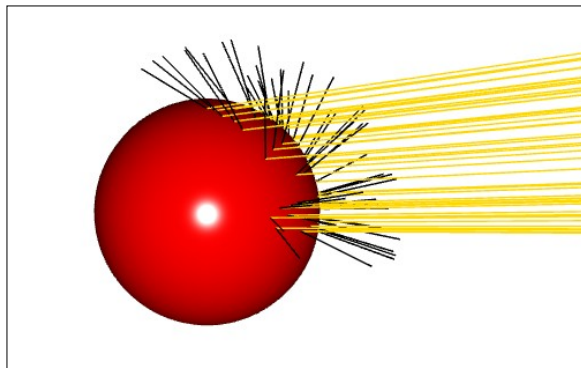
- Падащ лъч  $\vec{v}$ , отразен  $\vec{u}$ , нормала  $\vec{n}$
- И трите вектора са нормирани, т.е.  $|\dots| = 1$



$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{v} + 2\vec{w} = \vec{v} + 2(\vec{p} - \vec{v}) = \\ &= 2\vec{p} - \vec{v} = 2|\vec{p}|\vec{n} - \vec{v} = \\ &= 2(\cos \alpha)\vec{n} - \vec{v} = \\ &= 2(|\vec{n}||\vec{v}| \cos \alpha)\vec{n} - \vec{v} = \\ &= 2(\vec{n} \cdot \vec{v})\vec{n} - \vec{v}\end{aligned}$$


# Отразяване на лъч от сфера

– Пак подвижна сфера



# Любопитно

Няма връзка с  
Йохан Щраус




## 1950 Ъ. Щраус се зачудил

- Може ли огледална стая да се освети с клечка кибрит от произволно място?

## 1995 Дж. Токарски отговаря

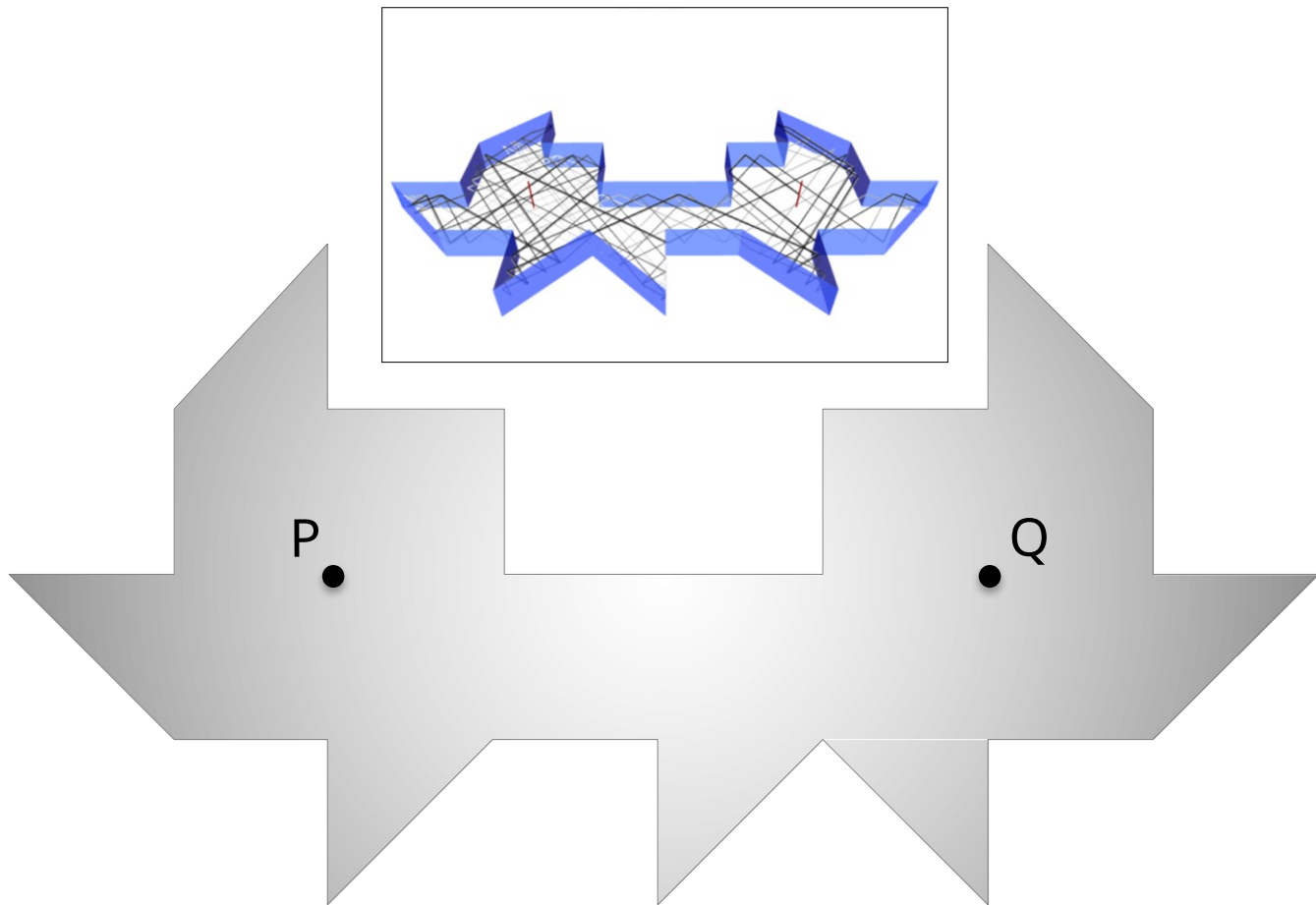
- Има 26-ъгълна стая, която не може

Няма връзка с  
Фидел Кастро



## 1997 Д. Кастро допълва

- Може и с 24-ъгълна стая да не може



Внимание

Задача за 5т бонус

# Бонус за 5 точки

## Условие

- Идеята за решението трябва да бъде поместено във форума на курса в Moodle
- Бонус получава първият с правилна идея (важи timestampът на сървера)

# Билярдна маса с някакви размери

- Две топки са на някакви координати
- На рикошет от дълга стена зрителите реагират с въздишка ой, а на къса с въздишка ля
- Да се намерят лесно посоките на удар, така че да се удари другата топка, а зрителите да въздишнат някакъв брой ой и някакъв ля, без значение от реда

(напр. 2/2 броя: ойля-ойля или ойляля-ой или ...)



# Пречупване

## Физическа основа

- Лъч преминава от една среда в друга
- Наблюдава се пречупване на лъча

## Фактори

- Оптичните плътности на двете среди
- Ъгълът на лъча спрямо границата
- Честотата на лъча

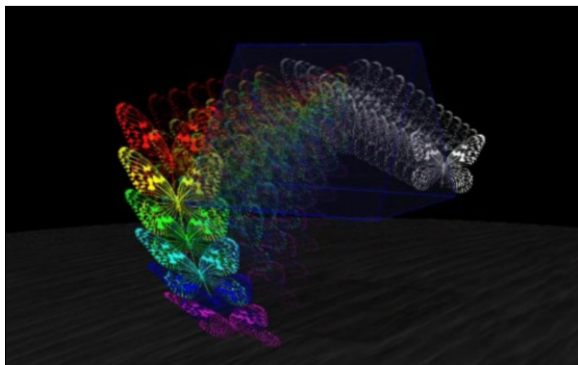
# В природата

- Дъгата е причинена от пречупване  
За да сме честни – и от отражение



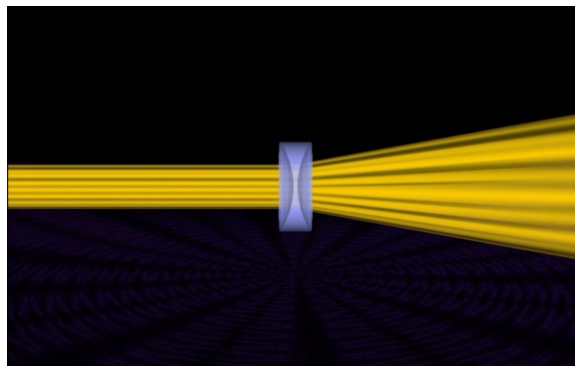
# Пречупване с призма или лещи

- При призма става разлагане на светлината
- При оптични лещи – префокусиране  
(човешкото око, очни лещи, очила, лупи, някои телескопи ...)



"Spectrum"

<http://youtu.be/Zit6HTFWmRc>



"Optical Lens"

<http://youtu.be/jeXIA0JIClk>

# Пречупване дори и в заведение

– Сламка в чаша

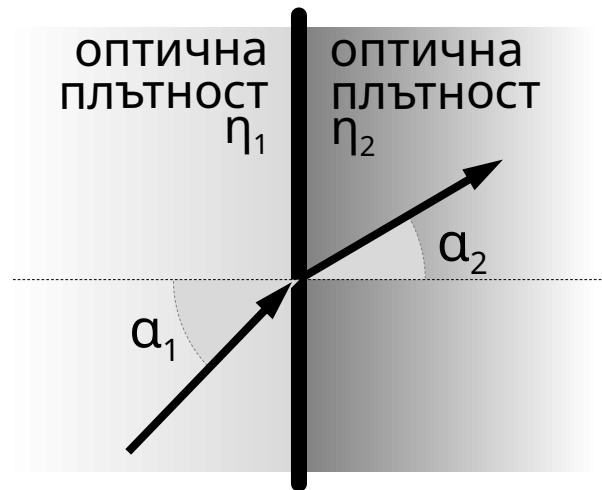


# Закон на Снел (Snell)

## Лъч през границата на две среди

- Те са с различни оптични плътности (наричани още индекси на рефракция)

$$\eta_1 \sin \alpha_1 = \eta_2 \sin \alpha_2$$



# Индекси на някои вещества

– Вакуум	1.000000
– Въздух	1.000293 при 0°C и 1 atm
– CO <sub>2</sub>	1.00045
– Лед	1.31
– Вода	1.33 при 20°C
– Диамант	2.42
– Силиций	3.96

## Двойно пречупване

- При преминаване през леща лъч се пречупва както при влизане, така и при излизане

## Критичен ъгъл

- Лъч, скосен повече от критичния ъгъл, се отразява
- Например, има проблем при  $\frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \alpha_1 > 1$ , защото

$$\alpha_2 = \arcsin \left( \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \alpha_1 \right)$$

# Любопитно

## Метаматериали

- Конструирани са метаматериали с отрицателна оптична плътност (negative index metamaterials)
- В природата не съществуват естествени материали с такива свойства
- Предсказани през 1967, създадени едва през 2000



Въпроси?

# Повече информация

<b>AGO2</b>	стр. 338-350
<b>BAGL</b>	стр. 86-88
<b>KLAW</b>	стр. 207-208
<b>LENG</b>	стр. 133-157
<b>MORT</b>	стр. 192

## А също и:

- Ray Tracing: Graphics for the Masses  
<http://www.cs.unc.edu/~rademach/xroads-RT/RTarticle.html>
- A raytracer in C++  
<http://www.codermind.com/articles/Raytracer-in-C++-Introduction-What-is-ray-tracing.html>

Край