СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Прави и многоъгълници

ТЕМА №5

Съдържание

Тема 5: Прави и многоъгълници

- Прави
- Многоъгълници

Прави

Дефиниции

Различни дефиниции

- Някои са приложими за 2D и за 3D
- Някои не могат да опишат всяка права

При конструиране

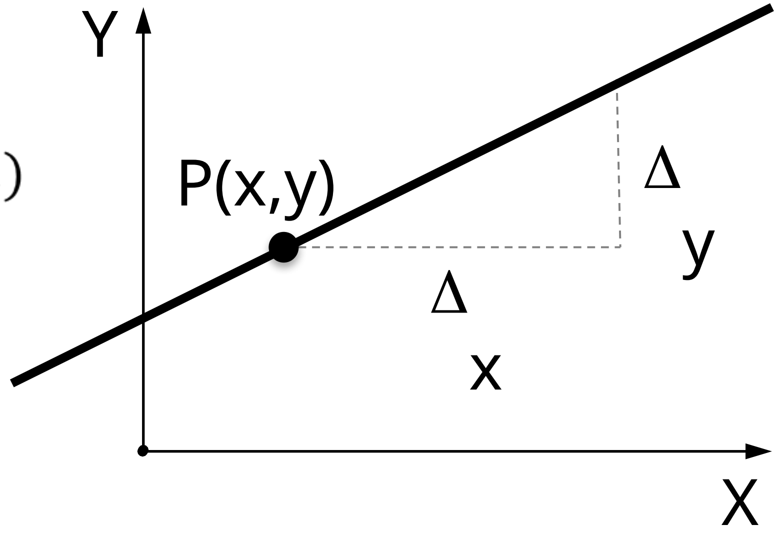
- Избор на най-леката и най-удобната
- Спрямо наличните параметри

Прави в 2D

Прави в 2D чрез точка и наклон

- Проблем при вертикални прави

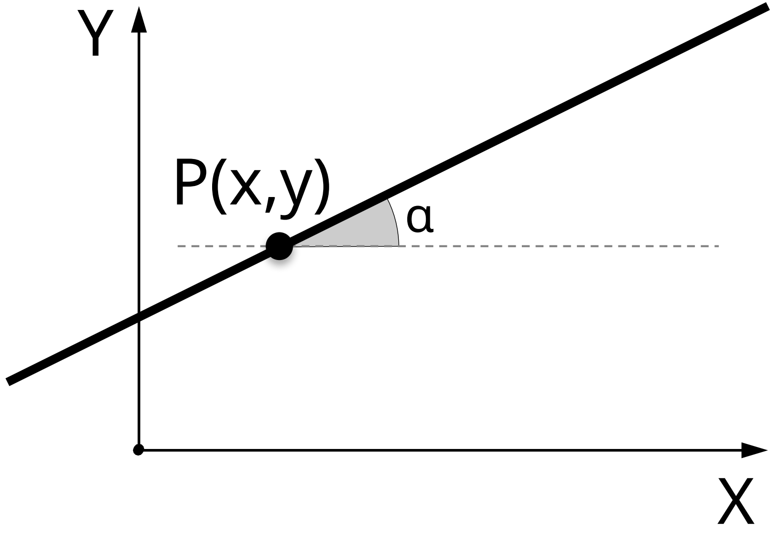
$$y - p_y = m(x - p_x)$$
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Права в 2D чрез точка и ъгъл

- Полярни координати + транслация

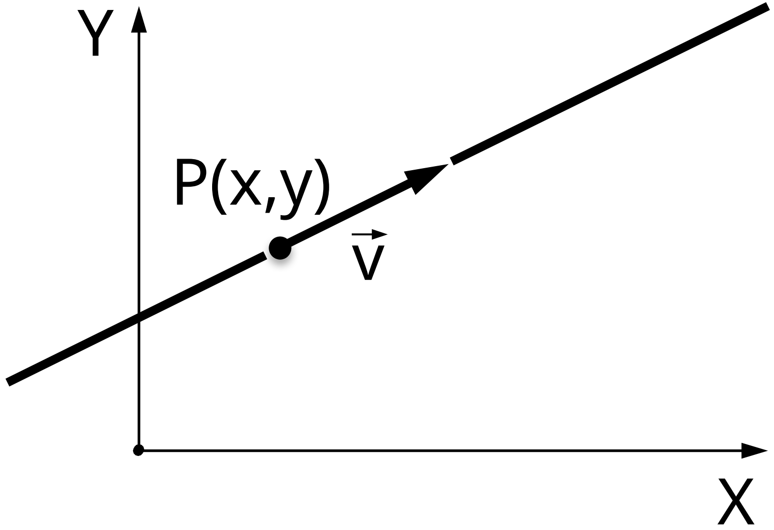
$$x(t) = p_x + t\cos\alpha$$
$$y(t) = p_y + t\sin\alpha$$
$$t \in (-\infty, +\infty)$$



Права в 2D чрез точка и вектор

- Елементарно

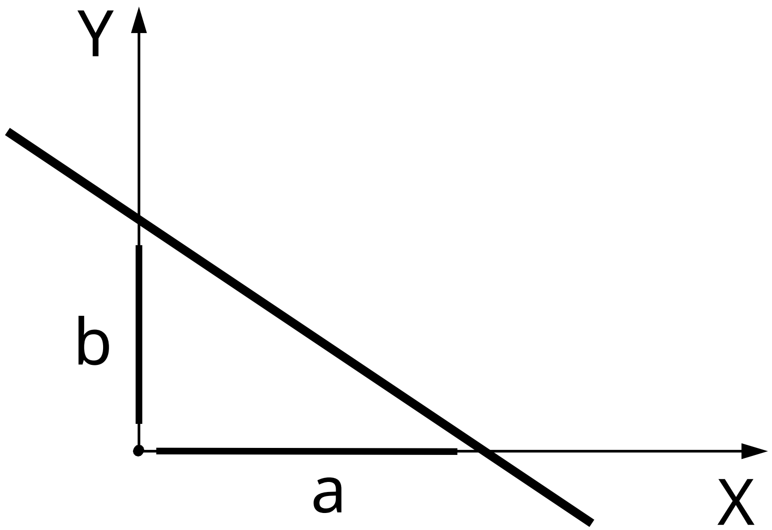
$$p(t) = P + t\vec{v}$$



Права в 2D чрез отрязъци

– Проблем при радиални прави $ab = 0$

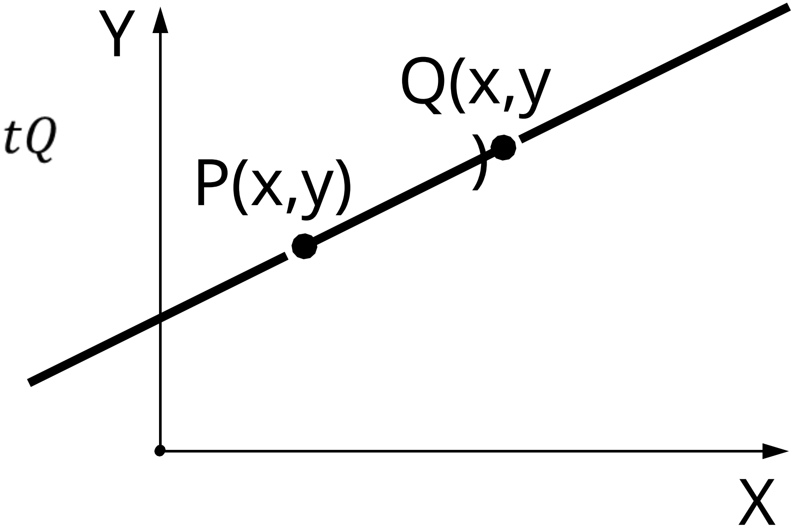
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Права в 2D чрез две точки

– Линейна комбинация, $P(t = 0)$, $Q(t = 1)$

$p(t) = (1 - t)P + tQ$
$t \in (-\infty, +\infty)$



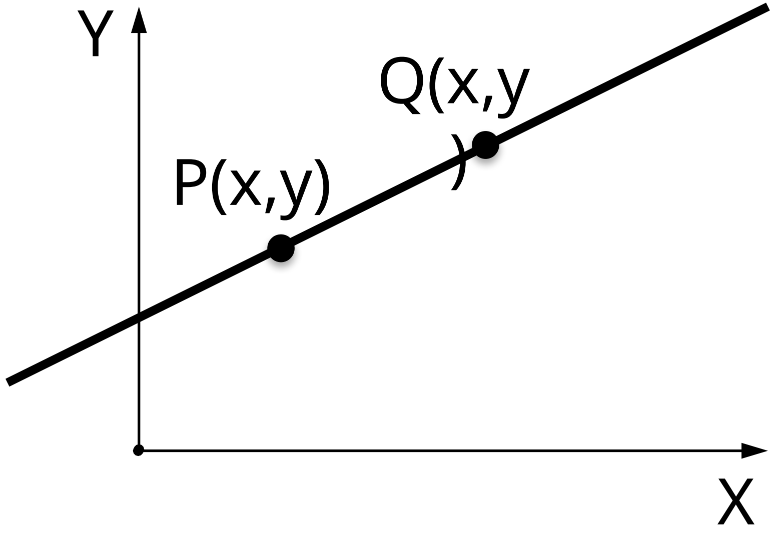
Права в 2D чрез две точки

- Бижу!

$$ax + by + c = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \begin{aligned} a p_x + b p_y + c = 0 \\ a q_x + b q_y + c = 0 \end{aligned} \right.$$



За хората с много време

- Традиционно решение
  (1): $ap_x + bp_y + c = 0$
  (2) :$aq_x + bq_y + c = 0$

  $(1)q_x - (2)p_x = 0$
  $ap_xq_x + bp_yq_x + cq_x - ap_xq_x - bp_xq_y - cp_x = 0$
  $bp_yq_x + cq_x - bp_xq_y - cp_x = 0$

  $$(3)\ b = -c\frac{p_x - q_x}{p_xq_y - p_yq_x}$$

- Аналогично от $(1)q_y - (2)p_y$ се получава
  $$(4)\ a = c\frac{p_y - q_y}{p_xq_y - p_yq_x}$$

- От (3) и (4) и $ax + by + c = 0$ и $c \neq 0$ става

  $$c\frac{p_y - q_y}{p_xq_y - p_yq_x}x - c\frac{p_x - q_x}{p_xq_y - p_yq_x}y + c = 0$$

  $$(p_y - q_y)x - (p_x - q_x)y + (p_xq_y - p_yq_x) = 0$$

- А сега за $c = 0$
  (1) $ap_x + bp_y = 0$
  (2) $aq_x + bq_y = 0$

  $(1) - (2)$: $a(p_x - q_x) + b(p_y - q_y) = 0$
  $$\Rightarrow b = -a\frac{p_x - q_x}{p_y - q_y}$$

- И се получава
  $$ax - a\frac{p_x - q_x}{p_y - q_y}y = 0$$

  при $a \neq 0$:
  $(p_y - q_y)x - (p_x - q_x)y = 0$

- При $a = 0$ и $c = 0$ става $by = 0$, което при $b \neq 0$ си е правата $y = 0$

- А ако $a = b = c = 0$ – няма права

- Но защо е цялата тази мъка !!!

За хората с малко време

- От линейната алгебра – търси се детерминанта 0

$$\begin{vmatrix} ax & + by & + c = 0 \\ ap_x & + bp_y & + c = 0 \\ aq_x & + bq_y & + c = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p_x & p_y & 1 \\ q_x & q_y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Или разписано на два реда:

$$x \begin{vmatrix} p_y & 1 \\ q_y & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} p_x & 1 \\ q_x & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{vmatrix} = 0$$

- И накрая на един ред:

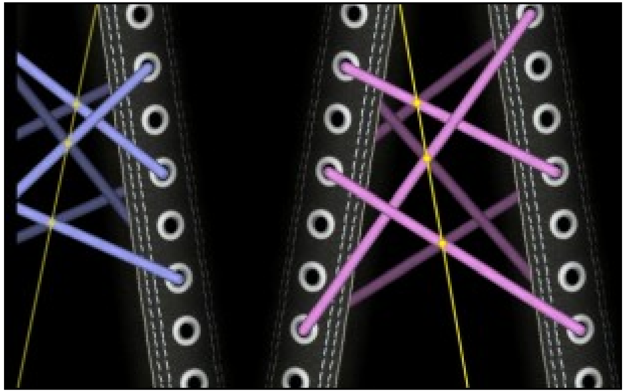
$$(p_y - q_y)x - (p_x - q_x)y + (p_x q_y - p_y q_x) = 0$$

Използване на уравнението на права

Използване на прави

Освен намиране на пресечна точка

- Разделяне на равнина на полуравнини
- Разстояние от точка до права

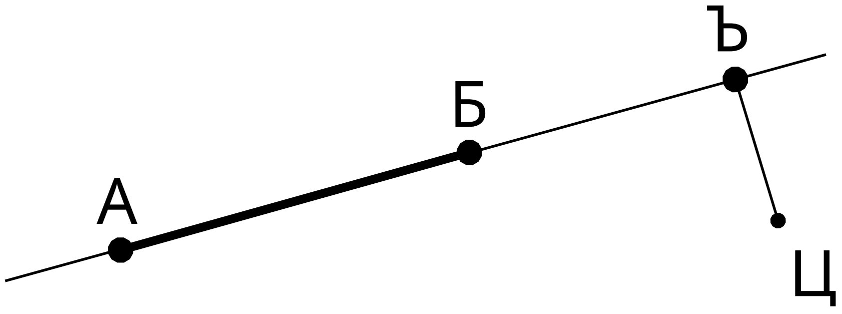


“Tying Shoelaces”
http://youtu.be/MbRSm6vxgYg

Разстояние до права

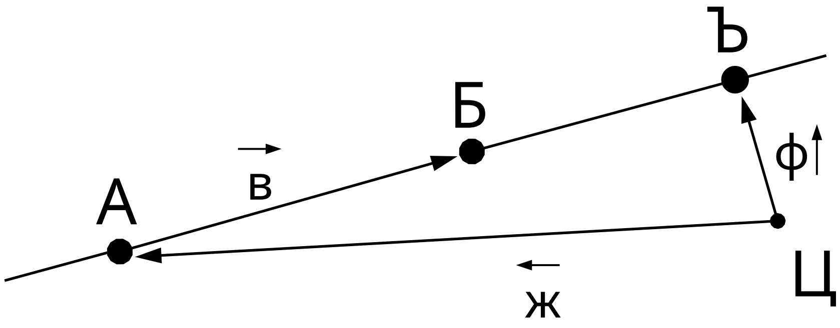
Чрез скаларно произведение

- Права през точки А и Б. Също и точка Ц
- Търсим точка Ъ на правата и най-близо до Ц
- Търсеното разстояние е |ЦЪ|



– Въвеждат се помощни вектори:

$$\vec{ф} = \vec{ж} + t\vec{в}$$
$$\vec{в} \perp \vec{ф} \Rightarrow \vec{в} \cdot \vec{ф} = 0$$



– След заместване:

$$\vec{в} \cdot (\vec{ж} + t\vec{в}) = 0$$
$$\vec{в} \cdot \vec{ж} + t\vec{в} \cdot \vec{в} = 0$$

– И се получава

$$t = -\frac{\vec{в} \cdot \vec{ж}}{\vec{в} \cdot \vec{в}} = -\frac{(Б - А)(А - Ц)}{(Б - А)(Б - А)}$$
$$t = -\frac{(Б_x - А_x)(А_x - Ц_x) + \left(Б_y - А_y\right)\left(А_y - Ц_y\right)}{(Б_x - А_x)^2 + \left(Б_y - А_y\right)^2}$$

- Но се помни, че $\mathbf{Ъ} = \mathbf{А} + t\vec{\mathbf{в}}$
- Те така се намира $\mathbf{Ъ}$ по координати:

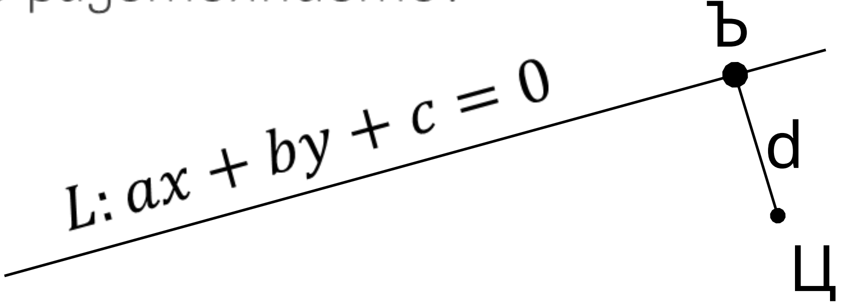
$$Ъ_x = А_x - (Б_x - А_x)\frac{(Б_x - А_x)(А_x - Ц_x) + \left(Б_y - А_y\right)\left(А_y - Ц_y\right)}{(Б_x - А_x)^2 + \left(Б_y - А_y\right)^2}$$

$$Ъ_y = А_y - \left(Б_y - А_y\right)\frac{(Б_x - А_x)(А_x - Ц_x) + \left(Б_y - А_y\right)\left(А_y - Ц_y\right)}{(Б_x - А_x)^2 + \left(Б_y - А_y\right)^2}$$

А уравнението на правата?

- А какво стана с него и с разстоянието?

$$d = \frac{a\text{Ц}_x + b\text{Ц}_y + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



- Ако векторът (a, b) е единичен, координатите на $\textbf{Ц}$ се поставят в уравнението на правата:

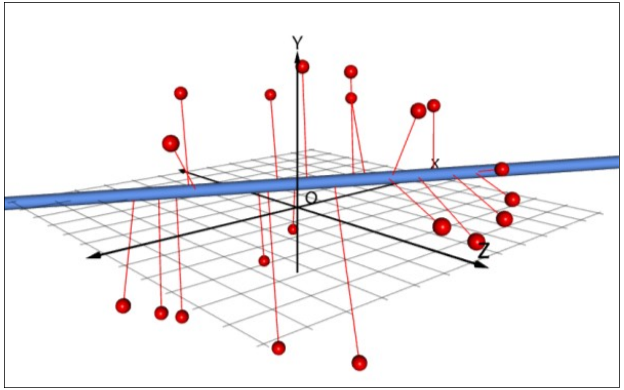
$$d = a\text{Ц}_x + b\text{Ц}_y + c$$

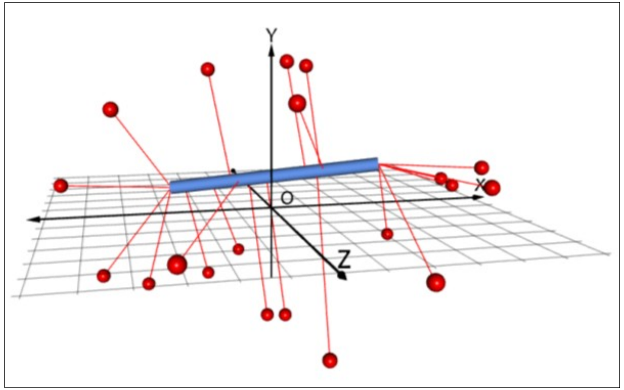
- Записано векторно: $D = L \cdot \text{Ц}$

Примери

Най-близка точка

- До права
- До отсечка





Прави в 3D

Някои от дефинициите са ОК в 3D

- Точка и вектор $y(t) = P + t\vec{v}$
- Линейна комбинация $p = (1-t)P + tQ$

Чудене

- Ако $ax + by + c = \mathbf{0}$ е права в 2D …
- … дали $ax + by + cz + d = \mathbf{0}$ е права в 3D?

Многоъгълници (полигони)

Дефиниция

Неформално многоъгълник е

- Начупена затворена линия от свързани отсечки

В компютърната графика

- Изключително важни и често използвани
- Повърхностите са множество от многоъгълници
- Също и повърхността на обемните тела

Често срещани операции

- Проверка дали точка е вътрешна
- Пресичане с прави и други примитиви
- Намиране на лице
- Изпъкнала обвивка на точки
- Триангулация (раздробяване на триълници)
- Сечение, обединение, разлика
- Изпитване по време на сесия

Разлика между графиката и геометрията

- В КГ почти винаги са неправилни
- Предпочитани са триъгълниците
  (и в краен случай четириъгълниците)
- Подредбата на върховете е важна
- Може да не са планарни (равнинни)

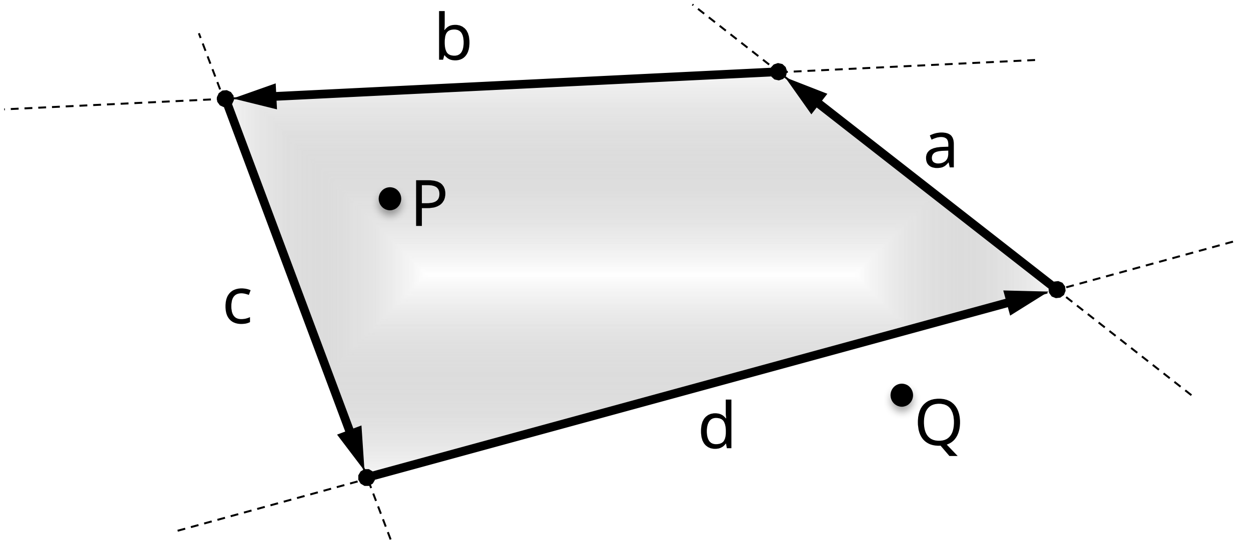
Вътрешна точка

Проверка дали точка е вътрешна

- Страна $ax + by + c = 0$ и точка $P(p_x, p_y)$
- Гледа се знака на $ap_x + bp_y + c = 0$
- Той определя от коя страна на правата е точката
- Ако P е в правилните полуравнини на всички страни на многоъгълника, значи е вътрешна

Илюстрация

- P е отляво на a, b, c и $d \Rightarrow$ вътрешна
- Q е отдясно на $d \Rightarrow$ не е вътрешна



Бонус

Бонус задача за 3т

- Как ще се определи, коя полуравнина е правилната?
  Или ако се работи с ляво-дясно, дали вътрешната точка е вляво или вдясно?
- Отговор се очаква докато сме на този слайд

Два проблема

Излишно смятане

- Полигонът е зададен чрез върхове
- Например, за върхове $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_1$ се гледа знака на:

$$(P_y - A_{0y})\,(A_{1x} - A_{0x}) - (P_x - A_{0x})\,(A_{1y} - A_{0y})$$

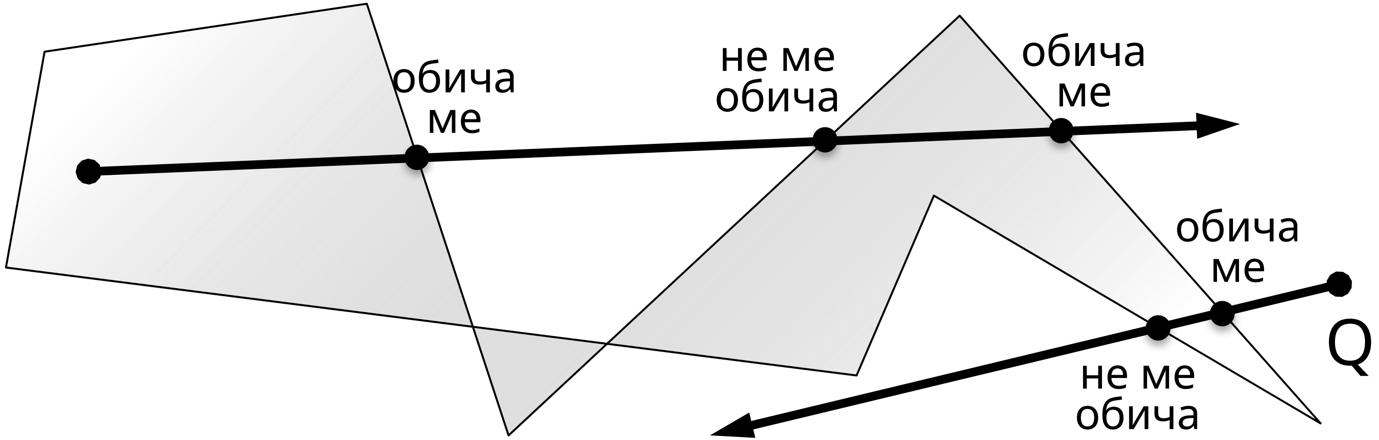
Жалко, че не работи винаги

- Проблем са неизпъкналите многоъгълници

Друг алгоритъм

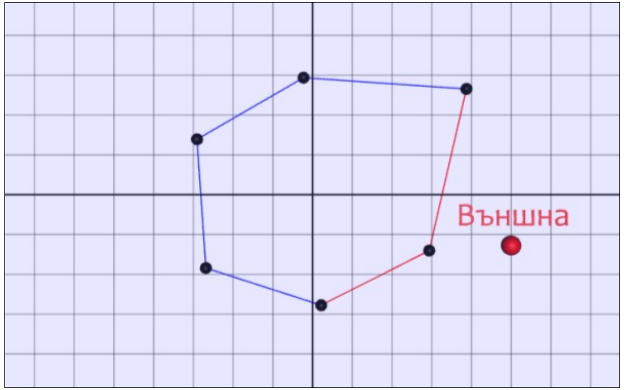
Броим пресичанията с някаква посока

- При четен брой – външна точка
- При нечетен брой – вътрешна точка



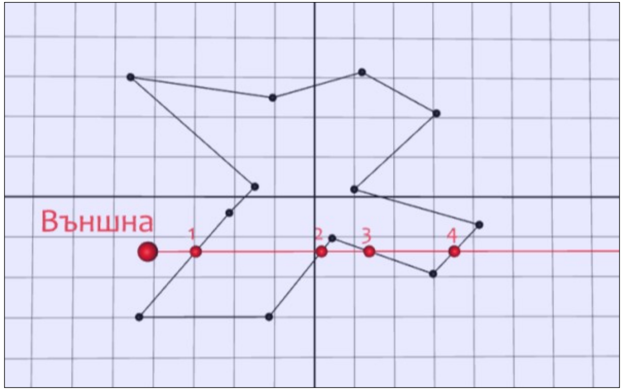
Примерни демонстрации

- Ориентация спрямо вектор
- Вътрешна точка чрез ориентация



Вътрешна точка

- Например в любовен многоъгълник, който е неправилен, самопресичащ се, вдлъбнат на моменти … или като цяло

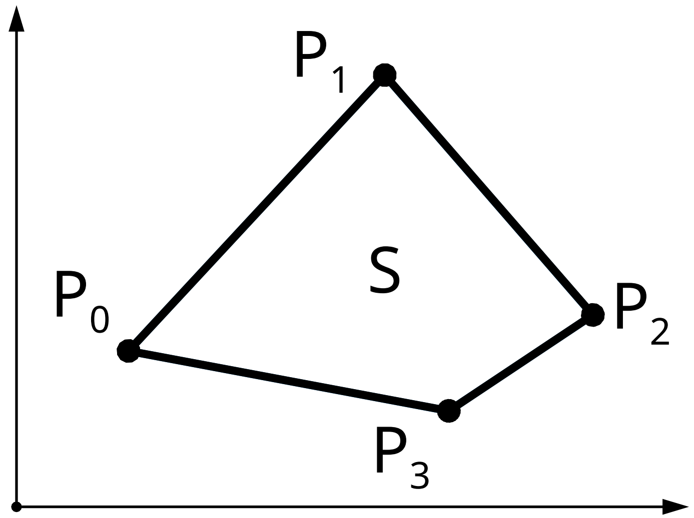


Лице на многоъгълник

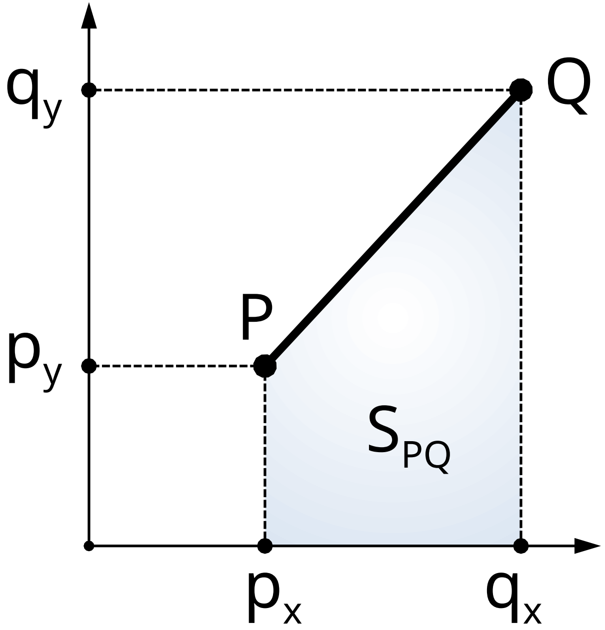
Чрез ориентирано лице

- Многоъгълникът се раздробява на части
- На всяка част се намира ориентираното ѝ лице, което може да е положително или отрицателно
- Лицето на целия многоъгълник е сумата от отделните ориентирани лица

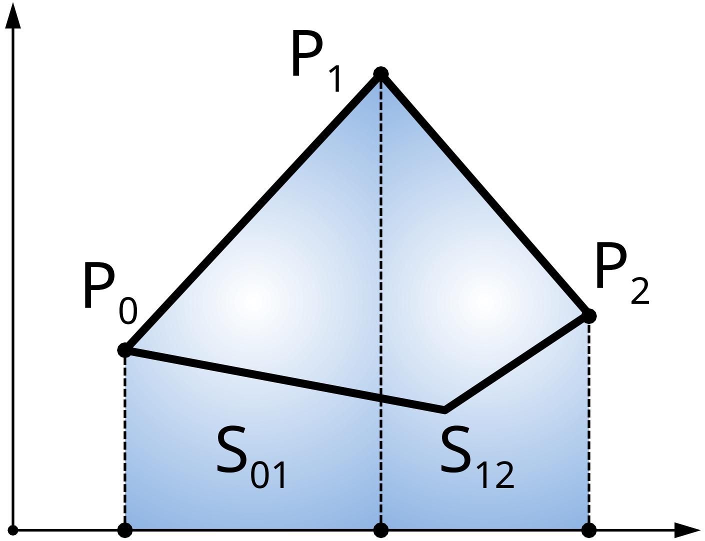
Илюстрация



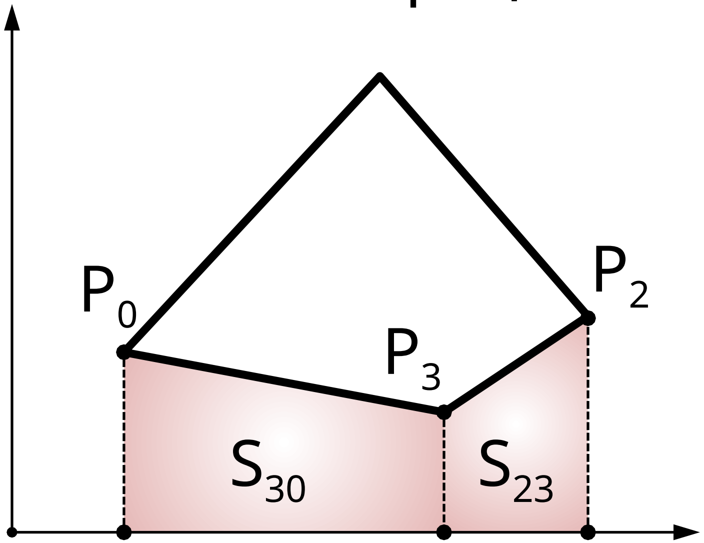
$$S_{PQ} = \frac{1}{2}(p_x - q_x)(p_y + q_y)$$



Положителни лица

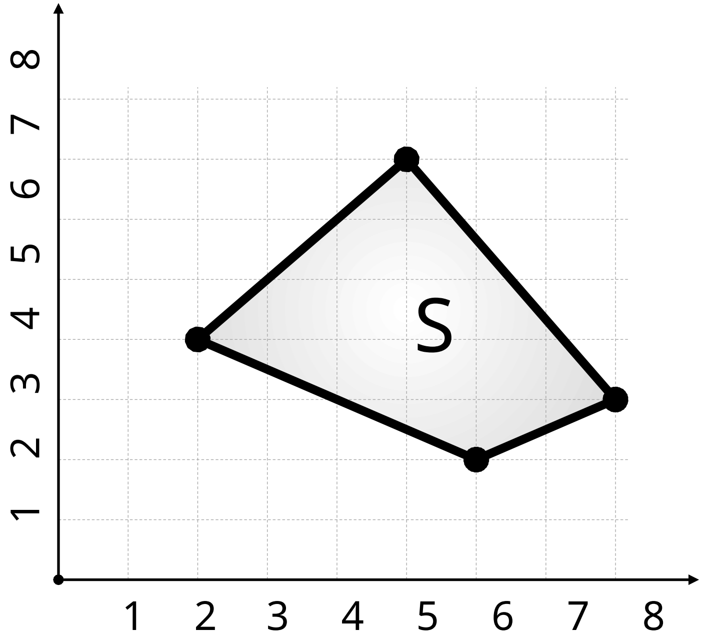


Отрицателни лица



|Сумата| е търсеното лице

Пример



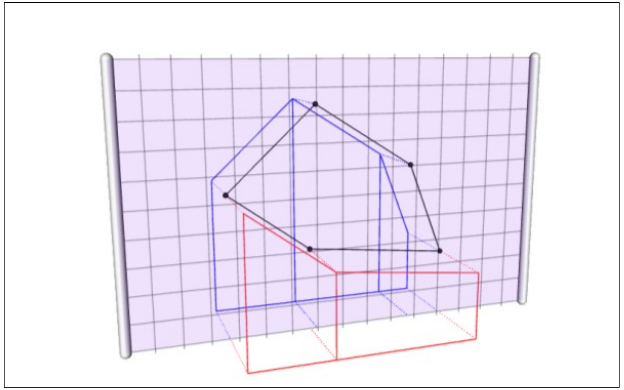
$$S = \frac{1}{2}(5-2)(7+4) + \frac{1}{2}(8-5)(3+7) + \frac{1}{2}(6-8)(2+3) + \frac{1}{2}(2-6)(4+2) =$$

$$= \frac{3 \times 11}{2} + \frac{3 \times 10}{2} - \frac{2 \times 5}{2} - \frac{4 \times 6}{2}$$

$$= 14.5$$

Проба

- В синьо – положителните лица
- В червено – отрицателните лица

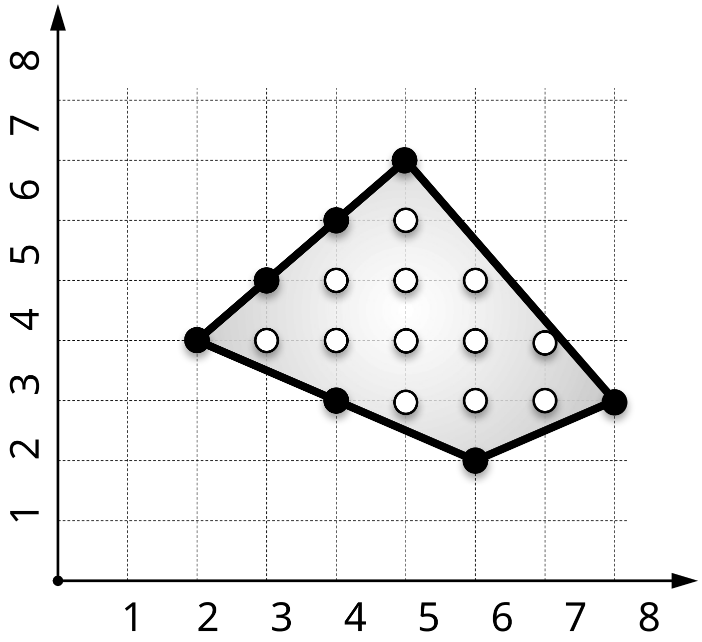


Теорема на Пик

Лице $= \ a + b/2 - 1$

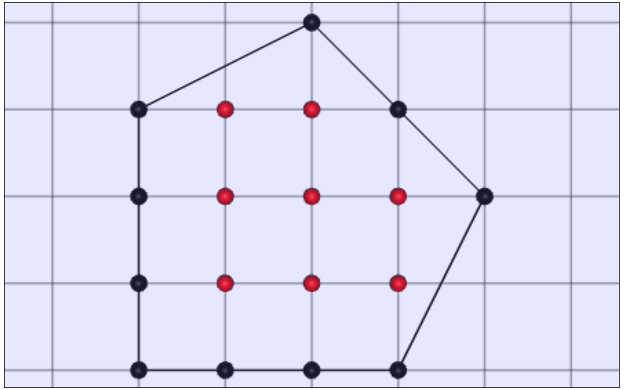
- Целочислени полигони
- Броят се точките:
  вътрешни $a = 12$
  контурни $b = 7$

$$S = 12 + \frac{7}{2} - 1 = 14.5$$



Пак проба

- Какво става при вдлъбнатост?
- Какво става при самопресеченост?



Въпроси?

Повече информация

VINC	стр. 25-27, 156-167
LASZ	стр. 90-102
LUKI	стр. 220-227
MORT	стр. 14-16, 174-184, 195-200, 202-203
PARE	стр. 428-430

А също и:

- Line
  http://mathworld.wolfram.com/Line.html
- Point-Line Distance--2-Dimensional
  http://mathworld.wolfram.com/Point-LineDistance2-Dimensional.html
- Determining if a point lies on the interior of a polygon
  http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/geometry/insidepoly/
- Pick’s Theorem
  http://www.geometer.org/mathcircles/pick.pdf

Край