Взаимно положение на две афинни подпространства

Нека $\mathcal{A}$ е n-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U, $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$ и $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ е координатното изображение, съответно на K.

Определение 1 Нека B_1 и B_2 са афинни подпространства на $\mathcal{A}$, моделирани съответно върху линейните подпространства V_1 и V_2 на U, и нека $\dim B_1 \leq \dim B_2$.

1. Ако от $v \parallel B_1$ следва $v \parallel B_2$, тоест ако $V_1 \subset V_2$, то казваме, че *B_1 и B_2 са успоредни* и пишем $B_1 \parallel B_2$.
   В частност, ако $B_1 \subset B_2$, то $B_1 \parallel B_2$.

2. Ако $B_1 \bigcap B_2 \neq \emptyset$ и B_1 и B_2 не са успоредни (еквивалентно, $B_1 \bigcap B_2 \neq \emptyset$ и B_1 не се съдържа в B_2), то казваме, че *B_1 и B_2 са пресекателни.*

3. Ако $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset$ и B_1 и B_2 не са успоредни, то казваме, че *B_1 и B_2 са кръстосани.*

Пример 1 В геометричната равнина

1. успоредните прави са успоредни в смисъл на горната дефиниция.

2. пресекателните прави са пресекателни в смисъл на горната дефиниция.

В геометричното пространство

1. успоредните прави, успоредните равнини, успоредните права и равнина са успоредни в смисъл на горната дефиниция.

2. пресекателните прави, пресекателните равнини, пресекателните права и равнина са пресекателни в смисъл на горната дефиниция.

3. кръстосаните прави са кръстосани в смисъл на горната дефиниция.

Теорема 1 *Нека афинните подпространства B_1 и B_2 на $\mathcal{A}$ имат спрямо K уравнения $A_1x = b_1$ и $A_2x = b_2$ (в частност, това може да са общи уравнения). Нека $\dim B_1 = k_1$, $\dim B_2 = k_2$, като $k_1 \leq k_2$. Означаваме $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array}\right)$. Тогава:*

1. *$B_1 \subset B_2$ ($B_1 = B_2$ при $k_1 = k_2$) $\Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) = n - k_1$ (и следователно и $r(A) = n - k_1$) $\Leftrightarrow$ редовете на $(A_2|b_2)$ са линейни комбинации на редовете на $(A_1|b_1)$.*

2. *$B_1 \parallel B_2$ и $B_1 \bigcap B_2 = \emptyset \Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A) = n - k_1$ (и следователно $r\left(\widetilde{A}\right) = n - k_1 + 1$) $\Leftrightarrow$ редовете на A_2 са линейни комбинации на редовете на A_1, но някой ред на $(A_2|b_2)$ не е линейна комбинация на редовете на $(A_1|b_1)$.*

3. *B_1 и B_2 са пресекателни $\Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) = r(A) \neq n - k_1$ (и следователно $r\left(\widetilde{A}\right) = r(A) > n - k_1$) $\Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) = r(A)$ и някой ред на A_2 не е линейна комбинация на редовете на A_1.*

4. *B_1 и B_2 са кръстосани $\Leftrightarrow r(A) \neq n - k_1$ и $r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A)$ (и следователно $r(A) > n - k_1$, $r\left(\widetilde{A}\right) = r(A) + 1$) $\Leftrightarrow r\left(\widetilde{A}\right) \neq r(A)$ и някой ред на A_2 не е линейна комбинация на редовете на A_1.*
   Тоя случай не може да възникне, ако B_2 е хиперравнина.

Теорема 2 *Нека k-мерното афинно подпространство B на $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение $Ax = b$. Тогава всевъзможните общи уравнения на B спрямо K са уравненията от вида $TAx = Tb$, където T е обратима квадратна матрица от ред $n - k$.*

Частни случаи:

1. Хиперравнини: $k_1 = k_2 = n - 1$.
   Следователно $n - k_1 = 1$.

   Теорема 1′ *Нека хиперравнините B_1 и B_2 в $\mathcal{A}$ имат спрямо K общи уравнения $B_i : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$, $i = 1, 2$.*
   Означаваме $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \end{array}\right)$. Тогава:

   1. *$B_1 = B_2 \Leftrightarrow r(\widetilde{A}) = 1$ (и следователно и $r(A) = 1$) $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$: $a_{2j} = \lambda a_{1j}$, $j = 1, \dots, n$, $b_2 = \lambda b_1$ (автоматично $\lambda \neq 0$).*
   2. *$B_1 \parallel B_2$ и $B_1 \neq B_2 \Leftrightarrow r(A) = 1$, $r(\widetilde{A}) = 2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$: $a_{2j} = \lambda a_{1j}$, $j = 1, \dots, n$, но $b_2 \neq \lambda b_1$ (автоматично $\lambda \neq 0$).*
   3. *B_1 и B_2 са пресекателни $\Leftrightarrow r(A) = 2$ (и следователно и $r(\widetilde{A}) = 2$) $\Leftrightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{R}$: $a_{2j} = \lambda a_{1j}$, $j = 1, \dots, n$.*

Теорема 2′ *Нека хиперравнината B в $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$. Тогава всевъзможните общи уравнения на B спрямо K са уравненията от вида $\lambda(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) = \lambda b$, където $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.*

2. Прави в 2-мерно афинно пространство (в частност, в геометричната равнина): $n = 2$, $k_1 = k_2 = 1 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y) вместо (x_1, x_2).

   Теорема 1″ *Нека правите l_1 и l_2 в 2-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ имат спрямо K общи уравнения $l_i : A_ix + B_iy + C_i = 0$, $i = 1, 2$. Означаваме $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$. Тогава:*

   1. $l_1 = l_2 \Leftrightarrow r(\widetilde{A}) = 1$ *(и следователно и $r(A) = 1$)* $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$ *(автоматично $\lambda \neq 0$).*
   2. $l_1 \parallel l_2$ *и* $l_1 \neq l_2 \Leftrightarrow r(A) = 1$, $r(\widetilde{A}) = 2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, *но* $C_2 \neq \lambda C_1$ *(автоматично $\lambda \neq 0$).*
   3. l_1 *и* l_2 *са пресекателни* $\Leftrightarrow r(A) = 2$ *(и следователно и $r(\widetilde{A}) = 2$)* $\Leftrightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{R}$: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1 \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

   Теорема 2″ *Нека правата l в 2-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение $Ax + By + C = 0$. Тогава всевъзможните общи уравнения на l спрямо K са уравненията от вида $\lambda(Ax + By + C) = 0$, където $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.*

3. Равнини в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k_1 = k_2 = 2 = n - 1$.
   Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

   Теорема 1‴ *Нека равнините π_1 и π_2 в 3-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ имат спрямо K общи уравнения $\pi_i : A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$, $i = 1, 2$. Означаваме $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$. Тогава:*

   1. $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow r(\widetilde{A}) = 1$ *(и следователно и $r(A) = 1$)* $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$, $D_2 = \lambda D_1$ *(автоматично $\lambda \neq 0$).*
   2. $\pi_1 \parallel \pi_2$ *и* $\pi_1 \neq \pi_2 \Leftrightarrow r(A) = 1$, $r(\widetilde{A}) = 2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$, *но* $D_2 \neq \lambda D_1$ *(автоматично $\lambda \neq 0$).*
   3. π_1 *и* π_2 *са пресекателни* $\Leftrightarrow r(A) = 2$ *(и следователно и $r(\widetilde{A}) = 2$)* $\Leftrightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{R}$: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$.

   Теорема 2‴ *Нека равнината π в 3-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогава всевъзможните общи уравнения на π спрямо K са уравненията от вида $\lambda(Ax + By + Cz + D) = 0$, където $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.*

4. Права и равнина в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.
Следователно $n - k_1 = 2$. Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

Теорема 1'ᵛ *Нека правата l и равнината π в 3-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ имат спрямо K общи уравнения*

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \quad \pi : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$$

Означаваме $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$. *Тогава:*

1. $l \subset \pi \Leftrightarrow r(\widetilde{A}) = 2$ *(и следователно и* $r(A) = 2$*)* $\Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 :$
$A_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $B_3 = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$, $C_3 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$, $D_3 = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ *(автоматично* $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$*).*
2. $l \parallel \pi$ *и* $l \bigcap \pi = \emptyset \Leftrightarrow r(A) = 2$, $r(\widetilde{A}) = 3 \Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 :$
$A_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $B_3 = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$, $C_3 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$, *но* $D_3 \neq \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ *(автоматично* $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$*).*
3. l *и* π *са пресекателни* $\Leftrightarrow r(A) = 3$ *(и следователно и* $r(\widetilde{A}) = 3$*)* $\Leftrightarrow$
$\nexists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : A_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $B_3 = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$, $C_3 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Първата част на горната теорема може да се преформулира по следния начин:

Теорема 3 *Нека правата l в 3-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ има спрямо K общо уравнение*

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Тогава равнината π съдържа l $\Leftrightarrow$ π има спрямо K общо уравнение от вида $\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, *където* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$.

5. Прави в 3-мерно афинно пространство (в частност, в геометричното пространство): $n = 3$, $k_1 = k_2 = 1$.
Следователно $n - k_1 = 2$. Нека координатите са (x, y, z) вместо (x_1, x_2, x_3).

Теорема 1[v] *Нека правите l_1 и l_2 в 3-мерното афинно пространство $\mathcal{A}$ имат спрямо K общи уравнения*

$$l_1 : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \quad l_2 : \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}.$$

Означаваме $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$. *Тогава:*

1. $l_1 = l_2 \Leftrightarrow r(\widetilde{A}) = 2$ *(и следователно и* $r(A) = 2$*)* $\Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$:
$A_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $B_3 = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$, $C_3 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$, $D_3 = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$,
$A_4 = \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2$, $B_4 = \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2$, $C_4 = \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2$, $D_4 = \mu_1 D_1 + \mu_2 D_2$
(автоматично $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \neq 0$, *в частност* $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$, $(\mu_1, \mu_2) \neq 0$*)*.

2. $l_1 \parallel l_2$ *и* $l_1 \neq l_2 \Leftrightarrow r(A) = 2$, $r(\widetilde{A}) = 3 \Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$:
$A_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $B_3 = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$, $C_3 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$,
$A_4 = \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2$, $B_4 = \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2$, $C_4 = \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2$,
но поне едно от $D_3 = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ *и* $D_4 = \mu_1 D_1 + \mu_2 D_2$ *не е изпълнено*
(автоматично $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \neq 0$, *в частност* $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$, $(\mu_1, \mu_2) \neq 0$*)*.

3. l_1 *и* l_2 *са пресекателни* $\Leftrightarrow r(\widetilde{A}) = r(A) = 3$.

4. l_1 *и* l_2 *са кръстосани* $\Leftrightarrow r(\widetilde{A}) = 4$ *(и следователно* $r(A) = 3$*)* $\Leftrightarrow \det \widetilde{A} \neq 0$.

Забележка 1 В горните неща никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че всичко важи без промяна и ако вместо $\mathbb{R}$ се вземе произволно поле F, тоест ако U е линейно пространство над произволно поле.