Задача 0.1. *Нека $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S\rangle$ е контекстносвободна граматика, в която всяко правило $A \to \alpha$ има свойството $|\alpha| \leq 2$. Ако $G' = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P', S\rangle$ е граматиката с правила:*

$$\begin{aligned} P' &= \{A \to \alpha \,|\, A \to \alpha \in P \text{ и } \alpha \neq \varepsilon\} \\ &\cup \{A \to B \,|\, \exists C (C \Rightarrow_G^* \varepsilon \& A \to BC)\} \\ &\cup \{A \to B \,|\, \exists C (C \Rightarrow_G^* \varepsilon \& A \to CB)\} \end{aligned}$$

то $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G) \setminus \{\varepsilon\}$ и $|P'| \leq 3|P|$.

Задача 0.2. *Да се опише конструкция, която по дадена контекстносвободна граматика $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S\rangle$ построява контекстносвободна граматика $G' = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S\rangle$, за която всяко правило $A \to \alpha$ от P има свойството $1 \leq |\alpha| \leq 2$.*

Задача 0.3. *Нека $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S\rangle$ е граматика, в която всяко правило $A \to \alpha$ има свойството $1 \leq |\alpha| \leq 2$. Нека $E = \{(A, B) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \,|\, A \to B\}$.*

1. *Да се докаже, че в графа $(\mathcal{N}, E)$ има път от A до B тогава и само тогава, когато $A \Rightarrow_G^* B$.*

2. *Да се докаже, че релацията $\equiv \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, за която за всеки два нетерминала A, B:*

   $$A \equiv B \overset{def}{\iff} A \Rightarrow_G^* B \text{ и } B \Rightarrow_G^* A$$

   е релация на еквивалентност.

3. *Да се докаже, че ако $A \equiv B$, то за всяко $\alpha \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^*$, $A \Rightarrow^* \alpha$ точно тогава, когато $B \Rightarrow^* \alpha$.*

4. *Нека $k = ind(\equiv)$ е индексът на релацията на еквивалентност на релацията $\equiv$ и $A_1 = S, \ldots, A_k$ са представители на различните класове на еквивалентност на $\equiv$. Ако:*

   $$\begin{aligned} \mathcal{N}' &= \{A_i \,|\, i \leq k\} \\ P' &= \{A_i \to \alpha' \,|\, \text{ има } B \to \alpha \in P, \text{ за което } B \equiv A_i \text{ и } \alpha' \text{ се получава от } \alpha \\ &\quad \text{като се замени всеки нетерминал с еквивалентния му от } \mathcal{N}'\} \setminus \{A_i \to A_i \,|\, i \leq k\}. \end{aligned}$$

   Да се докаже, че $G' = \langle \Sigma, \mathcal{N}', P', S\rangle$ е еквивалентна на G.

5. *Ако $G' = \langle \Sigma, \mathcal{N}', P', S\rangle$ е от предишната подточка и $E' = \{(A_i, A_j) \,|\, A_i \to A_j \in P'\}$, да се докаже, че $(\mathcal{N}', E')$ е ацикличен ориентиран граф.*

Задача 0.4. *Нека $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S\rangle$ е контекстносвободна граматика, в която всички правила имат дясна страна α с дължина 1 или 2. Да допуснем, че $(\mathcal{N}, E)$ е ацикличен, където $E = \{(A, B) \,|\, A \to B \in P\}$.*

1. *Да се докаже, че има нетерминал $A \in \mathcal{N}$, за който няма правило от вида $A \to B$ с $B \in \mathcal{N}$.*

2. *Нека $A \in \mathcal{N}$ е нетерминал със свойството от точка 1. Да се докаже, че ако:*

   $$P' = P \setminus \{B \to A \in P \,|\, B \in \mathcal{N}\} \cup \{B \to \beta \,|\, A \to \beta \in P, B \to A \in P\},$$

   то $G' = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P', S\rangle$ е еквивалентна на G.

3. *Да се докаже, че има контекстносвободна граматика* $G' = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P', S\rangle$ *с език* $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G)$*, за която всяко правило* $A \to \alpha$ *има вида* $|\alpha| = 2$ *или* $\alpha \in \Sigma$.

Задача 0.5. *Нека* $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S\rangle$*, за която всяко правило* $A \to \alpha$*:*

$$\alpha \in \mathcal{N} \circ \mathcal{N} \cup \Sigma,$$

тоест дясната страна е или терминал, или два нетерминала.

Нека $w = a_1 \dots a_n$ *е дума като* $a_i \in \Sigma$ *за всяко* i*. Ако за* $i \leq j$ *с* $N_{i,j}$ *означим множеството от нетерминали в* $\mathcal{N}$*, които извеждат* $w[i..j]$*, да се докаже, че:*

1. $N_{i,i} = \{A \in \mathcal{N} \mid A \to a_i \in P\}$.
2. *за* $i < j$, $N_{i,j} = \{A \mid \exists k \exists B, C(i \leq k < j \& A \to BC \in P \& B \in N_{i,k} \& C \in N_{k+1,j})\}$.
3. $S \in N_{1,n}$ *тогава и само тогава, когато* $w \in \mathcal{L}(G)$.

Забележка: Граматика, която удовлетворява предпоставките на горната задача, се казва, че е в нормална форма на Chomsky. Обърнете внимание, че задачи 1, 2, 3 и 4 показват, че за всяка контекстносвободна граматика G има[1] контекстносвободна граматика в нормална форма на Chomsky G' с език $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Забележка: Задачата показва, че когато са изпълнени предпоставките за граматиката G принадлежността на w към $\mathcal{L}(G)$ може да бъде определена така:

1. Инициализираме $N_{i,i} = \{A \in \mathcal{N} \mid A \to a_i \in P\}$.
2. За всяко $\ell = 1$ до $n - 1$, за всяко $i = 1$ до $n - \ell$:

$$N_{i,i+\ell} = \bigcup_{k=0}^{\ell-1} \{A \mid \text{ има правило } A \to BC, \text{ за което } B \in N_{i,i+k} \& C_{i+k+1,j}\}.$$

3. Върни дали $S \in N_{1,n}$.

Този метод е известен като метод/алгоритъм на Cocke-Younger-Kasami.

[1] Ако има правила $A \to \sigma B$ или $A \to B\sigma$, или $A \to \sigma'\sigma''$, може да се добавят нови нетерминали A_σ за всяко $\sigma \in \Sigma$ с правила $A_\sigma \to \sigma$, а всяко правило, да кажем от вида $A \to \sigma B$ да се замени с $A \to A_\sigma B$.

Упътване 0.1. Първо, установете, че ако в извод $A \Rightarrow^*_{G'} \alpha$ е използвано едно правило от $P' \setminus P$, то този извод може да бъде модифициран до извод в G.

Като използвате горното, с индукция по n докажете, че за всеки нетерминал $A \in \mathcal{N}$ и $\alpha \in \Sigma^*$, $A \Rightarrow^{(n)}_{G'} \alpha$ влече, че $A \Rightarrow^*_G \alpha$.

След това, с индукция по n покажете, че за всеки нетерминал $A \in \mathcal{N}$ и дума $\alpha \in \Sigma^+$, ако $A \Rightarrow^{(n)}_G \alpha$, то $A \Rightarrow^*_{G'} \alpha$.

Упътване 0.2. Последователно приложете:

1. конструкцията за премахване на дълги правила, Задача 1, задачи върху Лема за разрастване.

2. конструкцията за намиране на $\mathcal{N}_\varepsilon = \{A \in \mathcal{N} \mid A \Rightarrow^*_G \varepsilon\}$, Задача 1, задачи върху Контекстносвободни граматики (1).

3. предишната задача.

Упътване 0.3.

1. Съобразете, че няма ε-правила, поради което ако $\alpha \Rightarrow^* \beta$, то $|\alpha| \leq |\beta$. Довършете.

2. Достижимостта е транзитивна релация.

3. Използвайте, че ако $A \Rightarrow^* B$ и $B \Rightarrow \alpha$, то $A \Rightarrow^* B \Rightarrow^* \alpha$.

4. Разсъждавайте с индукция по n, за да покажете, че ако $A_i \Rightarrow^{(n)}_{G'} w$, то $A_i \Rightarrow^*_G w$. Разсъждавайте с индукция по n, за да покажете, че ако $B \Rightarrow^{(n)}_G w$ и $A_i \equiv B$, то $A_i \Rightarrow^*_{G'} w$.

5. Използвайте, че в G' няма ε-правила, следователно ако $A_i \Rightarrow^*_{G'} A_j$ то това е възможно само ако всички правила по този извод са от вида $C \to D$ за някои $C, D \in \{A_1, \dots, A_k\}$. Покажете, че $C \to D \in P'$ влече, че $C \Rightarrow^*_G D$ и съответно в графа $(\mathcal{N}, E)$ от подточка 1 има път от C до D. Заключете, че $A_i \Rightarrow^*_{G'} A_j$ влече, че в $(\mathcal{N}, E)$ има път от A_i до A_j. Довършете.

Упътване 0.4.

1. Допуснете противното и докажете, че тогава в $(\mathcal{N}, E)$ има цикъл.

2. Съобразете, че ако в G' е приложено някое ново правило $B \Rightarrow_{G'} \beta$, то това правило може да бъде симулирано в G като $B \Rightarrow_G A \Rightarrow_G \beta$. Също ако в G е приложено правило $B \Rightarrow_G A \Rightarrow_G \beta$, то това може да бъде преведено в G' като $B \Rightarrow_{G'} \beta$. Довършете с индукция.

3. Аргументирайте, че ако $E = \emptyset$, твърдението е вярно. В случая, когато $E \neq \emptyset$ използвайте точка 1 и изберете такъв нетерминал $A \in \mathcal{N}$ в който влиза поне едно ребро $(B, A) \in E$ (защо има?). Използвайте точка 2, за да получите еквивалентна граматика, на която ѝ съответства граф с по-малко ребра. Довършете индуктивно.

Упътване 0.5.

1. Използвайте, че ако $A \Rightarrow^{(n)} \alpha$ и $n \geq 2$, то $|\alpha| \geq 2$. Заключете, че еднобуквени думи може да се извеждат от нетереминали единствено с изводи с дължина 1.

2. Обосновете, че никой нетерминал не извежда ε и използвайте, че за $n \geq 2$, $A \Rightarrow^{(n)} w'$ тогава и само тогава когато има правило $A \Rightarrow \alpha \Rightarrow^{(n-1)} w'$. Обосновете, че $\alpha = BC$ за някои $B, C \in \mathcal{N}$ и съответно $B \Rightarrow^* w'_1$ и $C' \Rightarrow^* w'_2$ за някои непразни думи w'_1, w'_2, за които $w'_1 \circ w'_2 = w'$.