Задача 0.1. *Нека* $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S \rangle$ *е автоматна граматика.*

1. *Да се опише конструкция, която на* G *съпоставя краен автомат* $\mathcal{A}_G$ *с език* $\mathcal{L}(\mathcal{A}_G) = \mathcal{L}(G)$ *и със състояния* $\mathcal{N} \cup \{f\}$*, където* $f \notin \mathcal{N}$ *е единственото финално състояние на* $\mathcal{A}_G$*.*
2. *Да се докаже коректността на така описаната конструкция.*

Задача 0.2. *Нека* $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S \rangle$ *е контекстносвободна граматика. Да разгледаме конструкцията:*

1. $\mathcal{N}_\varepsilon^{(0)} = \emptyset$.
2. $\mathcal{N}_\varepsilon^{(i+1)} = \{A \in \mathcal{N} \mid \exists A \to \beta \in P(\beta \in (\mathcal{N}_\varepsilon^{(i)})^*\}$.

Да се докаже, че:

1. *ако* $A \in \mathcal{N}_\varepsilon^{(i)}$ *за някое* i*, то* $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$.
2. *за всяко* i *е в сила, че* $\mathcal{N}_\varepsilon^{(i)} \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon^{(i+1)}$.
3. *ако за някое* i, $\mathcal{N}_\varepsilon^{(i)} = \mathcal{N}_\varepsilon^{(i+1)}$*, то за всяко* $j \geq i$, $\mathcal{N}_\varepsilon^{(i)} = \mathcal{N}_\varepsilon^{(j)}$.
4. *има* $i \leq |\mathcal{N}|$*, за което* $\mathcal{N}_\varepsilon^{(i)} = \mathcal{N}_\varepsilon^{(i+1)}$.
5. *нека* i *е свидетел за верността на предишната подточка, да се докаже, че:*

$$\mathcal{N}_\varepsilon^{(i)} = \{A \in \mathcal{N} \mid A \Rightarrow_G^* \varepsilon\}.$$

Задача 0.3. *Нека* $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S \rangle$ *е контекстносвободна граматика. Да разгледаме конструкцията:*

1. $\mathcal{N}_\Sigma^{(0)} = \emptyset$.
2. $\mathcal{N}_\Sigma^{(i+1)} = \{A \in \mathcal{N} \mid \exists A \to \beta \in P(\beta \in (\Sigma \cup \mathcal{N}_\Sigma^{(i)})^*\}$.

Да се докаже, че:

1. *ако* $A \in \mathcal{N}_\Sigma^{(i)}$ *за някое* i*, то има дума* $w \in \Sigma^*$*, за която* $A \Rightarrow_G^* w$.
2. *за всяко* i *е в сила, че* $\mathcal{N}_\Sigma^{(i)} \subseteq \mathcal{N}_\Sigma^{(i+1)}$.
3. *ако за някое* i, $\mathcal{N}_\Sigma^{(i)} = \mathcal{N}_\Sigma^{(i+1)}$*, то за всяко* $j \geq i$, $\mathcal{N}_\Sigma^{(i)} = \mathcal{N}_\Sigma^{(j)}$.
4. *има* $i \leq |\mathcal{N}|$*, за което* $\mathcal{N}_\Sigma^{(i)} = \mathcal{N}_\Sigma^{(i+1)}$.
5. *нека* i *е свидетел за верността на предишната подточка, да се докаже, че:*

$$\mathcal{N}_\Sigma^{(i)} = \{A \in \mathcal{N} \mid \exists w \in \Sigma^* A \Rightarrow_G^* w\}.$$

Забележка 0.1. Посланието от тази задача е, че може ефективно/алгоритмично по дадена контекстносвободна граматика да намерим онези нетерминали, които допринасят за извода на думи $w \in \Sigma^*$. Съответно останалите нетерминали, както и правилата, в които те участват, може да бъдат премахнати от граматиката без това да доведе до промяна на езика ѝ.

Задача 0.4. *Нека* $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S \rangle$ *е контекстносвободна граматика. За нетерминал* $A \in \mathcal{N}$ *с* $G_A = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, A \rangle$ *бележим граматиката, получена от* G *чрез замяна на аксиомата* S *с* A.

1. *Да се докаже, че за всеки нетерминал* $A \in \mathcal{N}$ *и правило* $A \to w_0 B_1 w_1 \ldots B_k w_k$*, където* $B_i \in \mathcal{N}$, $w_i \in \Sigma^*$, $k \geq 0$ *е изпълнено, че:*

$$\{w_0\} \circ \mathcal{L}(G_{B_1}) \circ \{w_1\} \ldots \mathcal{L}(B_k) \circ \{w_k\} \subseteq \mathcal{L}(G_A).$$

2. *Да се докаже, че:*

$$\mathcal{L}(G_A) = \bigcup_{A \to w_0 B_1 w_1 \ldots B_k w_k \in P} \left(\{w_0\} \circ \mathcal{L}(G_{B_1}) \circ \{w_1\} \ldots \mathcal{L}(B_k) \circ \{w_k\}\right).$$

Упътване 0.1. Разгледайте $\mathcal{A} = \langle \Sigma, \mathcal{N} \cup \{f\}, S, \Delta, \{f\} \rangle$, където:

$$\Delta = \{\langle A, a, B\rangle \mid A \to aB \in P, B \in \mathcal{N}, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\} \cup \{\langle A, a, f\rangle \mid A \to a \in P, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\}.$$

Докажете, че $A \Rightarrow_G^{(n)} wB$ и $A \xrightarrow{w}{}^*_{\mathcal{A}} B$ са еквивалентни за всеки $A, B \in \mathcal{N}$ и $w \in \Sigma^*$ с индукция по n. Довършете като разгледате случаи за последното правило $S \to^* w \in \Sigma^*$ и съответно последния преход към f в $\mathcal{A}$.

Упътване 0.2.

1. Използвайте индукция по i като на индуктивната стъпка разгледайте $A \in \mathcal{N}_\varepsilon^{(i+1)}$ и свидетел $A \to \beta \in P$, за който $\beta \in (\mathcal{N}_\varepsilon^{(i)})^*$. Аргументирайте, че ако $|\beta| = 0$, то наистина $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$.

   Използвайте индуктивната хипотеза, за да обосновете, че всеки символ β_i на β има свойството $\beta_i \Rightarrow_G^* \varepsilon$. Довършете.

2. За 2 и 3, използвайте индукция по i и аргументирайте синтактично.

3. Обосновете, че $|\mathcal{N}_\varepsilon^{(i)}| \leq |\mathcal{N}|$. Използвайте 3 и факта, че $|\mathcal{N}_\varepsilon^{(0)}| = 0$, за да обосновете, че ако $\mathcal{N}_\varepsilon^{(i)} \neq \mathcal{N}_\varepsilon^{(i+1)}$, то $|\mathcal{N}_\varepsilon^{(i+1)}| \geq i + 1$. Довършете.

4. Използвайте 2, 3 и 4, за да обосновете, че:

   $$\mathcal{N}_\varepsilon^{(i)} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{N}_\varepsilon^{(j)}.$$

   От 1 заключете, че е достатъчно да докажете, че:

   $$\{A \in \mathcal{N} \mid A \Rightarrow_G^* \varepsilon\} \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{N}_\varepsilon^{(j)}.$$

   Използвайте пълна математическа индукция по n, за да покажете, че всеки път когато $A \in \mathcal{N}$ и $A \Rightarrow^{(n)} \varepsilon$ е изпълнено, че има i, за което $A \in \mathcal{N}_\varepsilon^{(i)}$. При индуктивния преход разгледайте случаи по първото правило. Ако то е $A \to \varepsilon$, обосновете, че $A \in \mathcal{N}_\varepsilon^{(1)}$. Ако то е $A \to \beta$ с $|\beta| \geq 1$, обосновете, че $\beta_i \Rightarrow^{(n_j)} \varepsilon$ за някое $n_j \leq n - 1$. Използвайте индуктивната хипотеза за β_j и ако i_j са съответни свидетели за тях, тоест $\beta_j \in \mathcal{N}_\varepsilon^{(i_j)}$, обосновете, че $A \in \mathcal{N}_\varepsilon^{(i)}$, където $i = 1 + \max_{j \leq |\beta|} i_j$.

Упътване 0.3. Адаптирайте подхода от предишната задача.

Упътване 0.4. Използвайте, че $u_1 \dots u_k \Rightarrow^* w$ точно тогава, когато има $w_1, w_2 \dots, w_k$, за които:

$$u_i \Rightarrow^* w_i \text{ за всяко } i \leq k$$
$$w = w_1 \dots w_k.$$