СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Координатни системи

ТЕМА №3

Съдържание

Тема 3: Координатни системи

- Декартова система
- Полярна система
- Сферична система
- Други координатни системи
- Четири често срещани задачи

Декартова координатна система

Координатна система

Координатна система

- Определяне на мястото на обект
- Декартова, полярна, сферична, ...

В компютърната графика

- Доминираща е декартовата
- Другите се ползват предимно в междинни стъпки
- Могат да се влагат

Декартова система

Елементи (за 3D)

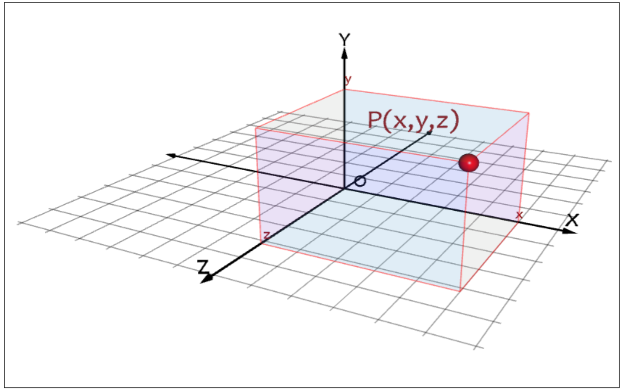
- Начало – точка
- Три взаимно перпендикулярни о́си
- Координатите са три разстояния

Координатни о́си

- С условните имена X, Y и Z
- Посоките са напълно относителни

Декартови координати

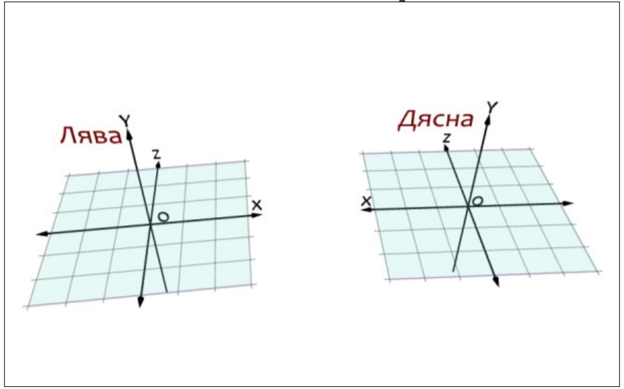
- Тройка числа (x, y, z) – разстояния по о́сите X, Y и Z
  (или разстояния до осите YZ, ZX и XY)
- Всяка точка с единствени координати



Тази и другите подобни картинки са интерактивни примери

Ориентация на декартова система

- Лява и дясна – огледални, но функционално еднакви
- Всички останали са завъртян образ на една от тях

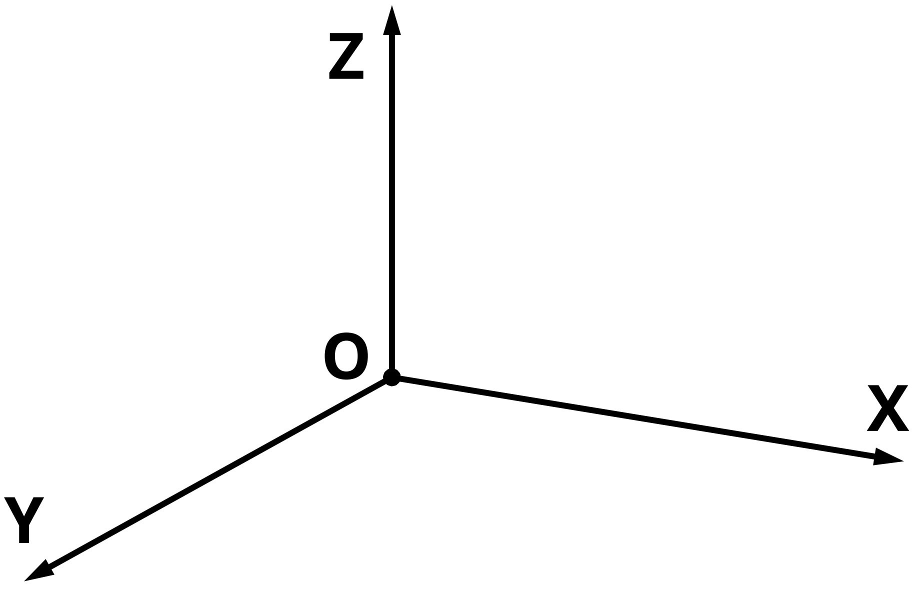


Ръчен алгоритъм

- Покажете ѝсите културно с три пръста
- Налучкайте, като че ли сте с пистолет
- С която ръка стане, такава е системата

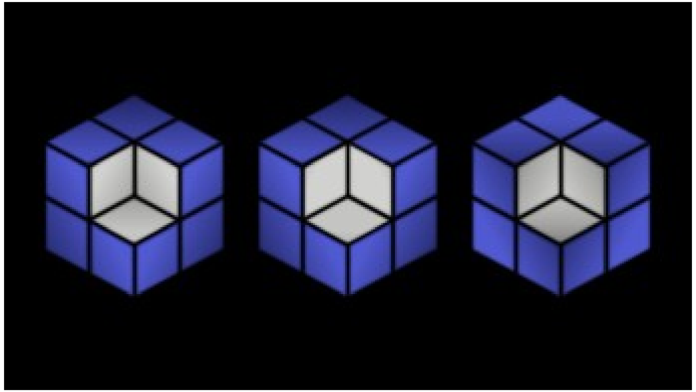
Снимка: FreeDigitalPhotos.net

Лява или дясна е тази система?



Отговор

- Може да е и лява, и дясна
- Зависи дали O е изпъкнал или вдлъбнат връх



“The logical illusion of an optical illusion”
http://youtu.be/WGfkNV6lIUY

Полярна координатна система

Полярна система

Елементи (за 2D)

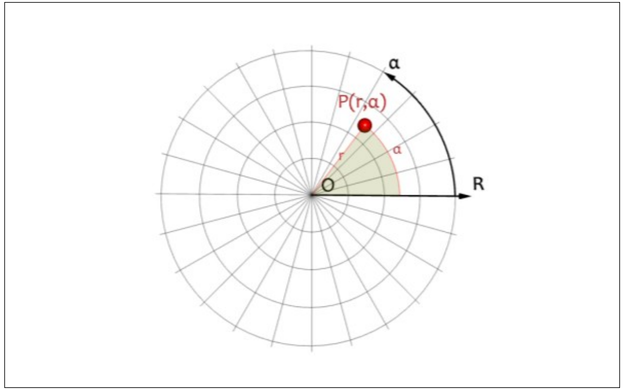
- Полюс – точка и полярна ос
- Координатите са разстояние и ъгъл

Полярната ос

- Определя нулевата посока (нулевият ъгъл)
- Посоката на измерване на ъглите е относителна
  (в математиката положителната посока е обратна на часовниковата стрелка)

Полярни координати

- Разстояние r до полюса, ъгъл α до оста
- Всяка точка с единствени координати
  (с точност периодичността на α)



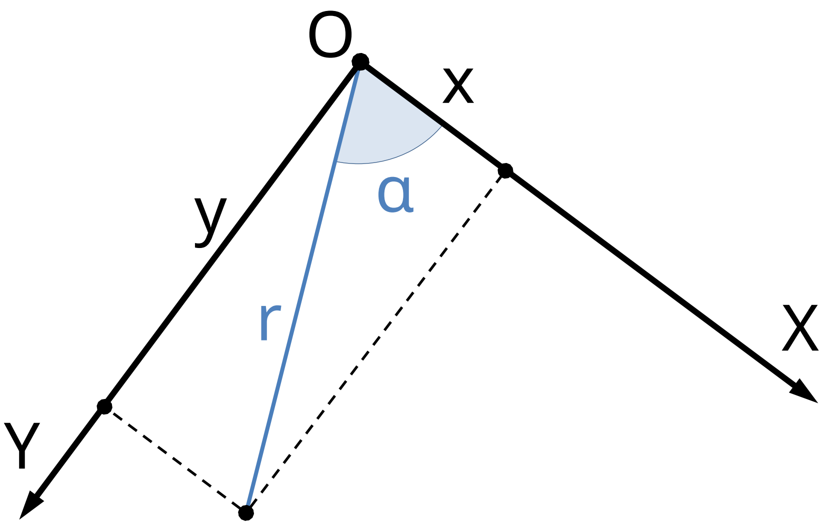
Полза от полярните координати

- Въртеливи движения и кръгови траектории

Преобразуване до декартови

- С точност относителността на осите

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$$



Сферична координатна система

Сферична система

Елементи (за 3D)

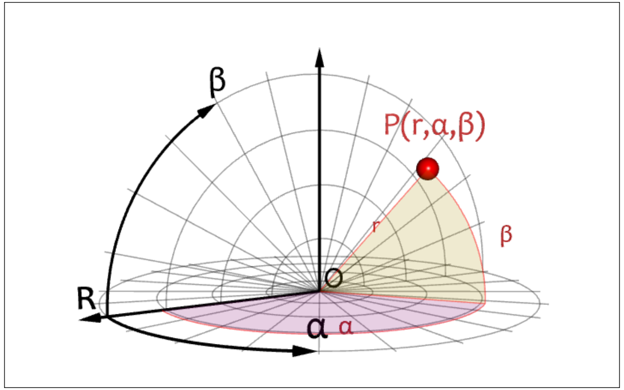
- Полюс – точка и две полярни оси
- Координатите са разстояние и 2 ъгъла

Полярните оси

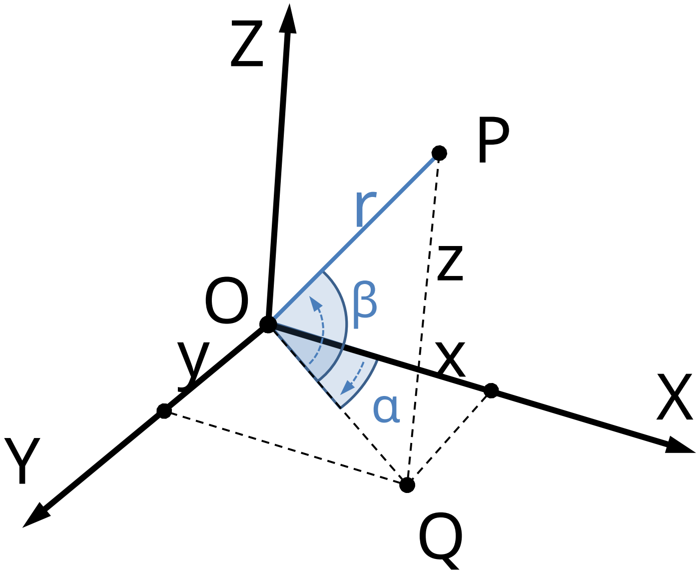
- Определят нулевите посоки (нулевите ъгли)
- Посоките на измерване на ъглите са относителни

Сферични координати

- Разстояние r до полюса и два ъгъла α и β до óсите
  (или до перпендикулярните им равнини)
- Координатите са пак „единствени"



- **Полза от сферични координати**
  - Въртеливи движения в 3D
  - Кръгови траектории в 3D
- **Преобразуване до декартови**
  - С точност относителността на осите
  - Използват се вече любимите ни $\sin x$ и $\cos x$



Познахте ли го?

$$\begin{cases} x = OQ\cos\alpha = (r\cos\beta)\cos\alpha \\ y = OQ\sin\alpha = (r\cos\beta)\sin\alpha \\ z = r\sin\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\alpha\cos\beta \\ y = r\sin\alpha\cos\beta \\ z = r\sin\beta \end{cases}$$

Други координатни системи

Други системи

Според конкретните нужди

- Може да нямат òси, да не са линейни
- Може да не гарантират единственост

Какви са нуждите?

- По-леки изчисления на координати
- Но накрая се преобразуват до декартови

Основни правила

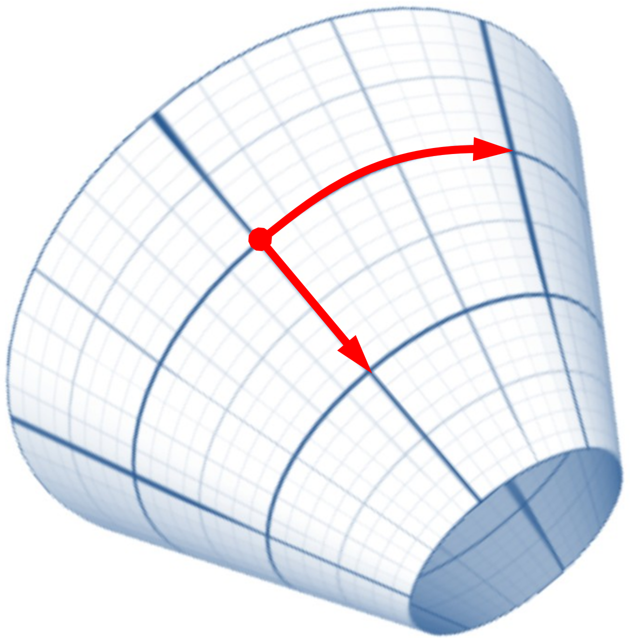
Минимална координатна система

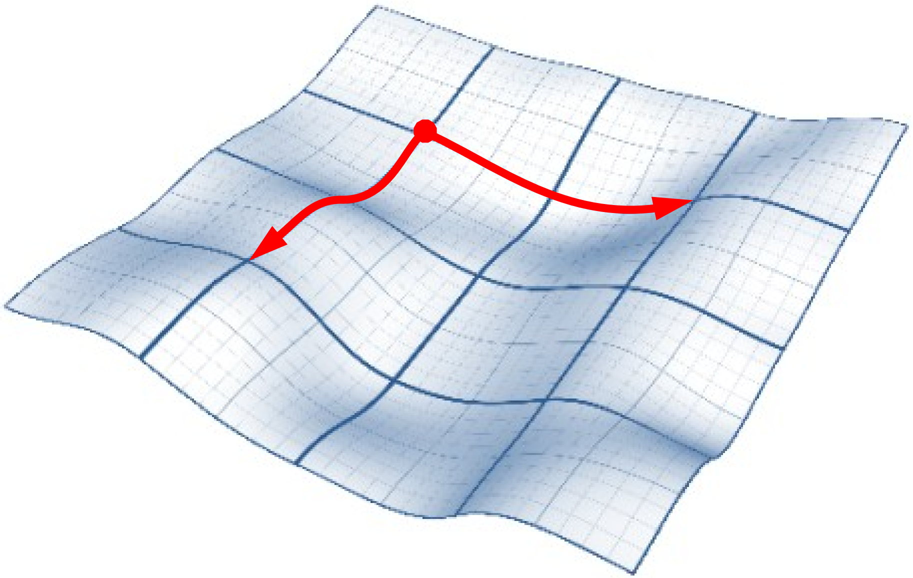
- На линия – едномерна к-на с-ма
- По повърхнина – двумерна к-на с-ма
- В обем – тримерна к-на с-ма

При специфични случаи

- Се ползват повече или с по-малко измерения

Пример с 2D координати





Четири често срещани задачи

Задача 1: Транслация

Имаме някакъв обект или движение

- Относително точката $Ю(x_{ю}, y_{ю}, z_{ю})$
- Искаме то да е около $Ъ(x_{ъ}, y_{ъ}, z_{ъ})$

Пресмятане на новите координати

$$\left|\begin{array}{l} x_{\text{ново}} = x_{\text{старо}} + (x_{ъ} - x_{ю}) \\ y_{\text{ново}} = y_{\text{старо}} + (y_{ъ} - y_{ю}) \\ z_{\text{ново}} = z_{\text{старо}} + (z_{ъ} - z_{ю}) \end{array}\right.$$

Примерна задача

Хлебарка пълзи по сферична лампа

- Радиус на лампата: 20
- Център на лампата: (200,150,300)
- Пол: неизвестен, очи: черни

Какви са координатите на хлебарката

- Спрямо центъра на лампата?
- Спрямо центъра на стаята?

Решение

- Сферични координати спрямо лампата:

$$\mathrm{X}(20, \alpha, \beta)$$

- Декартови координати спрямо стаята:

$$\left| \begin{array}{l} x = 200 + 20 \cos\alpha \cos\beta \\ y = 150 + 20 \sin\alpha \cos\beta \\ z = 300 + 20 \sin\beta \end{array} \right.$$

Задача 2: Разстояние

Точки в 3D: $Ю(x_ю, y_ю, z_ю)$ и $Ъ(x_ъ, y_ъ, z_ъ)$

- Разстоянието $|ЮЪ|$ чрез теорема на Питагор

  $d = \sqrt{(x_ъ - x_ю)^2 + (y_ъ - y_ю)^2 + (z_ъ - z_ю)^2}$

"Pizza Ordering Dilemma"
http://youtu.be/_IVRTK5ezo0

Примерна задача

Хамелеон и муха

- Сочна муха е на координати $(10,10,5)$
- Много гладен хамелеон е на $(20,2,0)$
- Колко дълъг трябва да му е … езикът?

Отговор

- Получава се $\sqrt{(20-10)^2+(2-10)^2+(0-5)^2} \approx 13.7$
- Какво са тези 13.7 – метри, сантиметри, банани?

Задача 3: Междинност

Две 3D точки (пак Ю и Ъ)

- Получаване на междинна точка между **Ю** и **Ъ**

Линейна обвивка/комбинация

- При $t = 0$ се получава **Ю**, а при $t = 1$ се получава **Ъ**
- При $t \in (0,1)$ – междинна точка

$$Щ = (1 - t)Ю + (t)Ъ \qquad \left| \begin{array}{l} x_{щ} = (1 - t)x_{ю} + (t)x_{ъ} \\ y_{щ} = (1 - t)y_{ю} + (t)y_{ъ} \\ z_{щ} = (1 - t)z_{ю} + (t)z_{ъ} \end{array} \right.$$

Примерна задача

Самурай и шпеков салам

- Шпеков салам е хвърлен към самурай
- Едното „дупе" е на $(200, -40, 160)$
- Другото „дупе" е на $(170, 20, 190)$

Задача

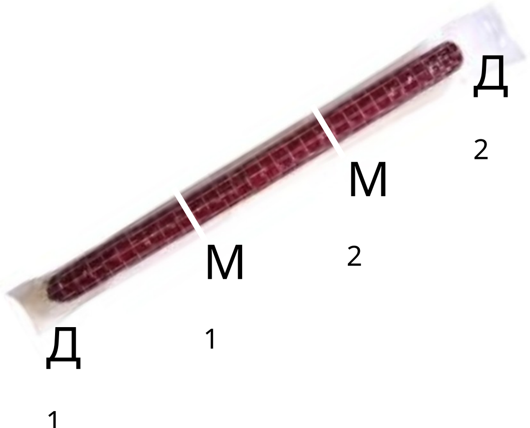
- Откъде да мине мечът на самурая, за да разреже салама на три еднакво дълги части?

Решение

- Крайни точки $Д_1(200, -40, 160)$ и $Д_2(170, 20, 190)$
- Междинни точки:

$$М_1\left(t = \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}Д_1 + \frac{1}{3}Д_2 = (190, -20{,}170)$$

$$М_2\left(t = \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}Д_1 + \frac{2}{3}Д_2 = (180{,}0{,}180)$$



Задача 4: Обхождане

Параметрично лутане напред–назад

- Числов параметър осцилира в интервала $[A, B]$
- Избор на осцилираща или периодична функция
- Често се избира $\sin x$ и тогава:

$$\frac{B+A}{2}+\frac{B-A}{2}\sin x$$

Примерна задача

Колега гледа колежки

- Колежка №1 в посока 40°, а Колежка №2 в посока 130°
- Как се въртят очите на колегата?

Пера на стрела,
а не кухненска
шпатула

 $$(t) = \frac{130^{\circ}+40^{\circ}}{2} + \frac{130^{\circ}-40^{\circ}}{2}\sin t = 85^{\circ} + 45^{\circ}\sin t$$

Въпроси?

Повече информация

VINC стр. 23-24
MORT стр. 21-22
LENG стр. 513-520

А също и:

- Polar coordinates
  http://scidiv.bellevuecollege.edu/dh/ccal/CC9.1.pdf
- Spherical Coordinates
  http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html
- Convex combinations of two points
  http://lyle.smu.edu/~helgason/cse8394/algebra02.pdf

Край