Вектори

Определение 1 *Отворена отсечка с краища точките A и B* е множеството от всички точки, които са между A и B. *Затворена отсечка с краища A и B* е множеството, състоящо се от точките A и B и точките от отворената отсечка с краища A и B. Вместо затворена отсечка ще казваме само *отсечка*.
В дефиницията се допуска и $A = B$. В тоя случай отсечката AA се състои само от точката A. Такава отсечка се нарича *нулева отсечка*.

Определение 2 Нека l е права и $P \in l$. Тогава $l \setminus \{P\}$ се разпада на две подмножества, като точките $A, B \in l \setminus \{P\}$ са от различни подмножества $\Leftrightarrow$ P е между A и B. Тия подмножества се наричат *отворени лъчи с начало P*. *Затворен лъч с начало P* е множество, състоящо се от точката P и точките от отворен лъч с начало P. Вместо затворен лъч ще казваме само *лъч*.
Ако r е лъч с начало P и $A \in r$, $A \neq P$, то ще означаваме r и с $PA^{\rightarrow}$.
Двата лъча с начало P се наричат *противоположни*.

Определение 3 Нека l е права, лежаща в равнината π. Тогава $\pi \setminus l$ се разпада на две подмножества, като точките $A, B \in \pi \setminus l$ са от различни подмножества $\Leftrightarrow$ отворената отсечка AB пресича l. Тия подмножества се наричат *отворени полуравнини с граница l*. *Затворена полуравнина с граница l* е множество, състоящо се от точките на l и точките от отворена полуравнина с граница l. Вместо затворена полуравнина ще казваме само *полуравнина*.

Определение 4 Нека π е равнина в пространството S. Тогава $S \setminus \pi$ се разпада на две подмножества, като точките $A, B \in S \setminus \pi$ са от различни подмножества $\Leftrightarrow$ отворената отсечка AB пресича π. Тия подмножества се наричат *отворени полупространства с граница π*. *Затворено полупространство с граница π* е множество, състоящо се от точките на π и точките от отворено полупространство с граница π. Вместо затворено полупространство ще казваме само *полупространство*.

Уговорка: Ще считаме, че всяка права е успоредна на себе си. Това важи за целия курс.

Определение 5 Нека a и b са лъчи. Казваме, че a и b са *еднопосочни* и пишем $a \uparrow\uparrow b$, ако правите определени от a и b са успоредни и

а) ако правите определени от a и b съвпадат, то $a \supset b$ или $b \supset a$.

б) ако правите определени от a и b са различни и π е равнината определена от тях, а A и B са началата на a и b, то a и b лежат в една и съща полуравнина в π относно правата AB.

Казваме, че a и b са *противопосочни* и пишем $a \uparrow\downarrow b$, ако правите определени от a и b са успоредни, но a и b не са еднопосочни.

Твърдение 1 *Релацията еднопосочност на лъчи е релация на еквивалентност в множеството на всички лъчи.*
(без доказателство на транзитивността)

Определение 6 Класовете на еквивалентност относно релацията еднопосочност на лъчи се наричат *посоки*.

Определение 7 Казваме, че две отсечки AB и CD са *еднакви* и пишем $AB \cong CD$, ако имат една и съща дължина.
(Дефиницията е коректна, тоест не зависи от избора на единична отсечка за измерване на дължина.)

Твърдение 2 *Еднаквостта на отсечки е релация на еквивалентност в множеството на всички отсечки.*

Определение 8 Отсечка, на която единият край A е избран за първи, а другият край B – за втори, се нарича *насочена отсечка* или *свързан вектор* и се означава с $\overrightarrow{AB}$. A се нарича *начало*, а B – *край* на $\overrightarrow{AB}$.
Ако $A = B$, то $\overrightarrow{AB}$ (тоест $\overrightarrow{AA}$) се нарича *нулева насочена отсечка* или *нулев свързан вектор*.

Забележка 1 При $A \neq B$ отсечките AB и BA са равни, тоест съвпадат, но насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ са различни!

Определение 9 Казваме, че насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са *еднопосочни* и пишем $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, когато е изпълнено едно от условията:

а) поне една от двете насочени отсечки е нулева (тоест $A = B$ или $C = D$).

б) двете насочени отсечки са ненулеви (тоест $A \neq B$ и $C \neq D$) и $AB^{\rightarrow} \uparrow\uparrow CD^{\rightarrow}$.

Казваме, че $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са *противопосочни* и пишем $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$, когато е изпълнено едно от условията а) и б$'$), което се получава от б) като се замени $AB^{\rightarrow} \uparrow\uparrow CD^{\rightarrow}$ с $AB^{\rightarrow} \uparrow\downarrow CD^{\rightarrow}$.

Твърдение 3 *Релацията еднопосочност на насочени отсечки е релация на еквивалентност в множеството на ненулевите насочени отсечки.*

Забележка 2 В множеството на всички насочени отсечки релацията еднопосочност очевидно е рефлексивна и симетрична, но не е релация на еквивалентност, защото не е транзитивна.

Определение 10 Казваме, че насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са *равни* и пишем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, ако отсечките AB и CD са еднакви и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Лема 1 *Нека $\overrightarrow{AB}$ е нулева насочена отсечка, тоест $A = B$. Тогава $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ и $\overrightarrow{CD}$ е нулева, тоест когато $C = D$.*

Твърдение 4 *Релацията равенство на насочени отсечки е релация на еквивалентност в множеството на всички насочени отсечки.*

Определение 11 Класовете на еквивалентност относно релацията равенство на насочени отсечки се наричат *свободни вектори*.
Ако v е свободен вектор и $\overrightarrow{AB} \in v$, то казваме, че $\overrightarrow{AB}$ е *представител* на v. Вместо $\overrightarrow{AB} \in v$ ще пишем $\overrightarrow{AB} = v$ (защото това е общоприетият начин на писане).
За краткост вместо свободен вектор обикновено ще казваме само *вектор*.

Теорема 1 *Нулевите насочени отсечки образуват един клас на еквивалентност, тоест един свободен вектор.*

Определение 12 Векторът, съставен от нулевите насочени отсечки (тоест векторът от Теорема 1), се нарича *нулев (свободен) вектор* и се означава с 0.

Теорема 2 *Ако v е вектор и O е точка, то съществува единствена точка P, такава че $\overrightarrow{OP} = v$.*

Твърдение 5 *(свойство на успоредника) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.*

Определение 13 Нека е фиксирана единична отсечка за измерване. *Дължина* на вектора v е дължината на произволен негов представител. Означава се с $|v|$.
(Дефиницията е коректна, тоест не зависи от избора на представителя на v.)

Определение 14 Казваме, че векторите u и v са *еднопосочни* (съответно *противопосочни*) и пишем $u \uparrow\uparrow v$ (съответно $u \uparrow\downarrow v$), ако един представител на u е еднопосочен (съответно противопосочен) с един представител на v.
Еквивалентна дефиниция е всеки представител на u да е еднопосочен (съответно противопосочен) с всеки представител на v.