Зад. 4 L е език (с E*) деф. 1/2(L)=$\{x \in \Sigma^* | \exists y \in \Sigma^* : xy \in L \wedge |x| = |y|\}$
Вярно ли е, че за L - регулярен => 1/2(L) също е регулярен?

Решение:
L е регулярен, сл. ∃автомат A (без ограничение на общността детерминиран)
$A = < E, Q, q_0, \delta, F >$, така че L(A) = L

Дефинираме автомат $A_q^{\frac{1}{2}} = < \Sigma, Q_q^{\frac{1}{2}}, I_q^{\frac{1}{2}}, \Delta_q^{\frac{1}{2}}, F_q^{\frac{1}{2}} >$, където:
$Q_q^{\frac{1}{2}} = Q\, x\, Q$
$D_q^{\frac{1}{2}} = \{((q', p), a, (r, k)) \vee (q', a, r) \in d \wedge (\exists b \in \Sigma)((p, b, k) \in \delta)\}$
$I_q^{\frac{1}{2}} = (q_0, q)$
$F_q^{\frac{1}{2}} = q\, x\, F = (q, f) \vee f \in F$

За $q \in Q$;
$L_q^{\frac{1}{2}} = \{x \in \Sigma^* | (\exists y)(xy \in L \wedge |x| = |y| \wedge q_0 \rightarrow_A^a q \rightarrow_A^y f \in F)\}$

Тогава:
$\cup_{q \in Q} L_q^{\frac{1}{2}} = \cup_{q \in Q} \{x | \exists y : xy \in L \wedge |x| = |y| \wedge q_0 \rightarrow_A^a q\}$ =

= $\{x | (\exists y)(xy \in L \wedge |x| = |y| \wedge (\exists q \in Q)(q_0 \rightarrow_A^x q))\} =$

=$\{x | (\exists y)(xy \in L \wedge |x| = |y|)\} = \frac{1}{2} L$

Следователно достатъчно е докажем, че $L_q^{\frac{1}{2}}$ е регулярен за всяко $q \in Q$ и ще следва, че 1/2(L) е регулярен

Ще докажем, че $L(A_q^{\frac{1}{2}}) = L_q^{\frac{1}{2}}\, за\, всяко\, q \in Q$

Нека $x \in L(A_q^{\frac{1}{2}})$ <=> $(\exists f \in F)((q_0, q) \rightarrow_{A_q^{\frac{1}{2}}}^x (q, f))$ <=> $(\exists f \in F)((q_0, q) \rightarrow_{A_q^{\frac{1}{2}}}^{x_1})(q_1, p_1) \rightarrow_{A_q^{\frac{1}{2}}}^{x_2} \cdots$
$\rightarrow (q_n = q, p_n = f)$ <=> (∃f in F)((q0 -> (with x1 in A) q1 -> (with x2 in A) q2 -> ... -> (with x|x| in A) qn = q) & (∃b1b2...bn)(q -> (with b1 in A) p1 -> (with b2 in A) p2 -> ... -> (with b|x| in A) pn = f)) <=>
<=>(∃f in F)(q0 -> (with x in A) q & (∃y)(|x| = |y| & q -> (with y in A) f)) <=>
<=>(∃f in F)(∃y in E*)(q0 -> (with x in A) q -> (with y in A) f & |x|=|y|) <=(def)=>
<=(по деф.)=> x in L^1/2 q <=> L^1/2 q е регулярен за всяко q in Q - задачата е доказана

Не ми се занимава да добавям последната част на доказателството към формула.