Семестриално контролно по Дискретни структури, 01.12.2024г.

Примерни Решения

Задача 1. Редицата на Фибоначи f_i е определена със следните условия:

(1) $f_0 = 0,\ f_1 = 1$

(2) $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ за всяко $n > 1$

Докажете, че за всяко $n > 0$ е вярна следната формула:

$$f_{n-1}f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n$$

Решение: Доказваме истинността на формулата с индукция по n.
Ще демонстрираме възможен подход към индукционната стъпка.

$$\begin{aligned} f_n f_{n+2} &= (f_{n+1} - f_{n-1})(f_n + f_{n+1}) = \\ &= \underline{f_{n+1}f_n} + f_{n+1}^2 - \underline{f_{n-1}f_n} - f_{n-1}f_{n+1} = \\ &= f_n^2 + f_{n+1}^2 - f_n^2 - (-1)^n = \\ &= f_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Задача 2. Разглеждаме релацията $\perp \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$, дефинирана като

$$x \perp y \overset{def}{\longleftrightarrow} \frac{x}{y} \text{ е нечетно цяло число}$$

а) Да се докаже, че $\perp$ е частична наредба

б) Предложете релация на еквивалентност над $\mathbb{N}^+$, която има безброй много безкрайни класове на еквивалентност.

Решение:

а) $\perp$ е рефлексивна, защото $\frac{x}{x} = 1$ за всяко $x \in \mathbb{N}^+$
$\perp$ е антисиметрична, защото ако $x \perp y$ и $y \perp x$ и $\frac{x}{y} = 2k+1$, то $\frac{y}{x} = \frac{1}{2k+1}$ е нечетно цяло число, откъдето $k = 0$, т.е. $x = y$
$\perp$ е транзитивна, защото ако $x \perp y$ и $y \perp z$, то $\frac{x}{z} = \frac{x}{y}\frac{y}{z}$ е произведение на нечетни цели, т.е. е нечетно цяло, т.е. $x \perp z$.

б) Примерна релация е релацията $\sim : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$, дефинирана с

$$x \sim y \overset{def}{\longleftrightarrow} \text{ степените на 2 в представянето на } x \text{ и } y \text{ са равни}$$

Това е релация на еквивалентност с класове

$$\mathbb{N}^+/\sim = \left\{ \left[2^i\right]_\sim \mid i \in \mathbb{N} \right\}$$

Класовете имат вида

$$\left[2^i\right]_\sim = \left\{ 2^i(2k+1) \mid k \in \mathbb{N} \right\}$$

Мотивацията за тази релация се базира на това, че ако $x \perp y$, то степените на 2 в представянето на x и y съвпадат, т.е. $x \sim y$.

Задача 3. За произволно множество X и функция $f : X \to X$ дефинираме

$$f^0 = id_X$$
$$f^{k+1} = f \circ f^k \quad \text{за } k \in \mathbb{N}$$

а) Да се докаже, че ако има $n \geq 1$, за което f^n е биекция, то f е биекция

б) Конструирайте биекция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такава, че за всяко $n \geq 1$, $f^n \neq id_{\mathbb{N}}$

Решение:

а) Показваме, че f е инекция и сюрекция:

Нека $f(x_1) = f(x_2)$. Тогава $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ и $f^3(x_1) = f^3(x_2)$ и ... $f^n(x_1) = f^n(x_2)$, откъдето $x_1 = x_2$, т.е. f е инекция.

Нека $y \in X$. Тогава има $x \in X$, за което $f^n(x) = y$, но тогава $f(f^{n-1}(x)) = y$, т.е. първообраз на y има и той е $f^{n-1}(x)$.

б) Въпросът е как да разбъркаме естествените числа, така че да не се подредят отново след краен брой разбърквания.

Разумна е идеята да местим някои числа само напред, а други само назад в някакъв "безкраен" цикъл. Това би могло да се направи например така:

$$f_{move} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$f_{move}(n) = \begin{cases} 0 & \text{ако } n = 1 \\ n+2 & \text{ако n е четно} \\ n-2 & \text{ако n е нечетно и } n > 1 \end{cases}$$

Друг възможен подход е да разбием естествените числа на крайни цикли, така, че да има цикъл с произволно голям брой числа. Това може да стане например така:

$$f_{cycle} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$f_{cycle}(n) = \begin{cases} n+1 & \text{ако } n \text{ не е точна степен на 2} \\ \frac{n}{2} - 1 & \text{ако } n \text{ е точна степен на 2} \end{cases}$$

Разпишете първите 20 члена, за да придобиете интуиция как действа f_{cycle}

Задача 4. Нека $|X| = n$.

а) Колко са двойките (A, B), такива, че $A, B \subseteq X$?

б) Колко са двойките (A, B), такива, че $A, B \subseteq X$ и $A \cap B = \emptyset$?

в) Колко са двойките (A, B), такива, че $A, B \subseteq X$ и $|A \cap B| = k$?

Решение:

1. Първото подмножество избираме по 2^n начина, след това по 2^n избираме и второто, т.е. двойките са 2^{2n}

2. Идеята тук е, че за всеки елемент $x \in X$ е в сила точно едно от трите:

   - $x \in A$
   - $x \in B$
   - $x \in X \backslash (A \cup B)$

   Определянето на един от трите варианта за всеки елемент определя еднозначно множествата A и B.

   Може да си мислим за редица от 0, 1 и 2, където 0 означава, че елементът е в A, 1 означава, че е в B, 2 означава, че не е в нито едно от двете.

   Отговорът е 3^n.

3. Идеята е близка до тази от б), но първо избираме кои да са общите елементи, т.е.

$$\binom{n}{k} 3^{n-k}$$

Задача 5. Всяко квадратче на квадратна мрежа 5×5 се оцветява в един от 4 цвята. Да се намери броят на оцветяванията на мрежата, такива, че контурът ѝ е двуцветен, а във вътрешността всеки цвят се среща поне веднъж.

Решение: Начините за оцветяване на контура са $\binom{4}{2}(2^{16} - 2)$. (Избираме 2 цвята от 4, след това за всяка клетка от контура има 2 начина за оцветяване; накрая премахваме едноцветните контури, които са преброени).

Относно вътрешността, задачата би трябвало да Ви е позната, като броят на сюрекциите от 9 елемента към 4 елемента. (Строим функция, която на клетка от вътрешността съпоставя цвят). Стандартният подход е принципът за включване и изключване.

Умножаваме получените резултати.