1.6 Производни от по-висок ред. Формула на Тейлор

Досега ние разглеждахме само производни от първи ред. Както за функции на една променлива, ние можем да продължим да диференцираме и да получим частни производни от по-висок ред. Така, с $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(x)$ или с $f_{x_i x_j}(x)$ означаваме производната на функцията $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ по променливата x_j в точката x.

На пръв поглед картината изглежда доста сложна: ако $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ е функция на n променливи, то първите и производни са n на брой. Всяка от тях може да бъде диференцирана по n променливи, и така получаваме общо n^2 различни втори производни, n^3 - трети, и n^k производни от k-ти ред. Всъщност картината е малко по-оптимистична: в този параграф ние ще покажем, че при някои леки предположения стойността на производните не зависи от реда, в който е извършено диференцирането. Така ситуацията се опростява – например за функция на две променливи различните производни от ред k не са 2^k, а само $k+1$ на брой.

Ще докажем теоремата за независимостта на висшите производни от реда на диференцирането най-напред за функция на две променливи.

Теорема 1. *Нека $f(x,y)$ е функция на две променливи, дефинирана в околност на точката (x_0, y_0). Да предположим, че първите производни f'_x, f'_y, и смесените втори производни f''_{xy} и f''_{yx} съществуват в околност на (x_0, y_0). Ако f''_{xy} и f''_{yx} са непрекъснати в тази точка, то стойностите им в нея са равни.*

Доказателство. Ще апроксимираме смесените втори производни с "диференчни частни от втори ред". Нека h и k са достатъчно малки числа. Да означим

$$W(h,k) = f\left(x_0+h, y_0+k\right) - f\left(x_0+h, y_0\right) - f\left(x_0, y_0+k\right) + f\left(x_0, y_0\right).$$

Ще докажем последователно, че

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{W(h,k)}{hk} = f''_{xy}\left(x_0, y_0\right), \text{ и че } \lim_{h,k\to 0} \frac{W(h,k)}{hk} = f''_{yx}\left(x_0, y_0\right),$$

откъдето, разбира се, следва твърдението на теоремата.

За тази цел да разгледаме помощната функция

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0),$$

дефинирана за стойности на x, достатъчно близки до x_0. Групирайки в израза за $W(h,k)$ първото с третото, и второто с четвъртото събираемо, получаваме равенството

$$W(h,k) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h\varphi'(x_0 + \theta_1 h),$$

за подходящо $\theta_1 \in (0,1)$ (по теоремата за крайните нараствания за функцията φ). Тъй като $\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0)$, то

$$W(h,k) = h\left(f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)\right) = hk f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k),$$

като последното равенство се получава отново чрез прилагане на теоремата за крайните нараствания, този път за функцията $f'_x(x_0 + \theta_1 h, y)$ на променливата y. Тук отново $\theta_2 \in (0,1)$ (разбира се, числата θ_1 и θ_2 зависят от h и k). Оттук

$$\frac{W(h,k)}{hk} = f''_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k),$$

и следователно при $h \to 0$, $k \to 0$ имаме

$$\frac{W(h,k)}{hk} \to f''_{xy}(x_0, y_0).$$

Ясно е, че в горното разсъждение местата на x и y могат да бъдат разменени. Да въведем друга помощна функция $\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$. Тогава $W(h,k) = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta_3 k)$, откъдето както по-горе получаваме

$$\frac{W(h,k)}{hk} = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) \text{ и } \lim_{h\to 0,\, k\to 0} \frac{W(h,k)}{hk} = f''_{yx}(x_0, y_0),$$

откъдето $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$. ∎

Следствие 2. *Ако функцията $f(x_1, \ldots, x_n)$ притежава непрекъснати частни производни до ред k в дадена околност, то тяхните стойности не зависят от реда на диференциране.*