СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Сложни обекти

ТЕМА №10

Съдържание

Тема 10: Сложни обекти

- Съставни обекти
- Ротационни обекти
- Влачене по траектория
- Конструктивна геометрия
- Параметрично моделиране
- Процедурно моделиране

Съставни обекти

Съставни обекти

Съставни обекти

- Най-лесен начин за изграждане на нови обекти
- Изградени са от примитиви

Образът на съставен обект

- Обединение от образите на обектите в него
- На практика всеки модел е съставен обект
  (преди растеризация се разбива на триъгълници, линии и точки)

Пример

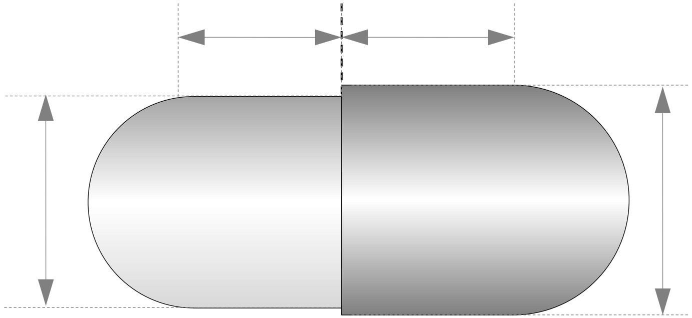
Модел на хапче с антибиотик

- Две отделни цилиндрични части
- Заоблени в края

Снимка: FreeDigitalPhotos.net

Геометричен модел

- Два цилиндъра и две полусфери
- Размерите са с параметри, за да променяме обекта



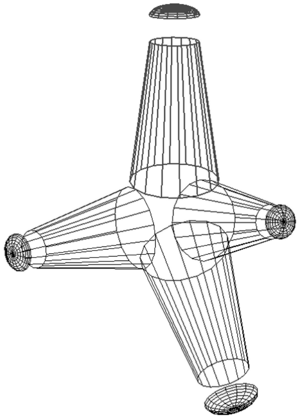
Втори пример

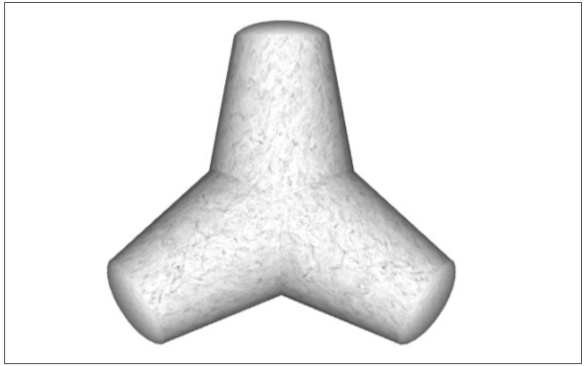
Модел на вълнолом

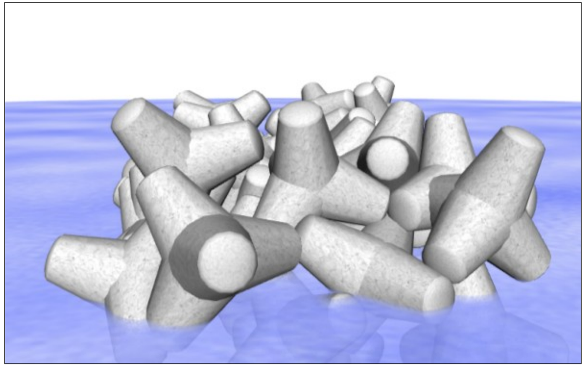
- Съставен от много еднотипни обекти

Геометричен модел

- Три пресечени конуса и три сплескани полусфери
- Веднъж пакетирани като обект, може да ползваме като примитиви







Ротационни обекти

Ротационни обекти

Основни елементи

- Контур или профил (крива)
- Ротационна ос

Получаване

- Контурът е завъртян около оста
- Получава се повърхността на ротационно тяло

Извън КГ

- Създавани в занаятчийството от векове
  (стругари, грънчари, но не и пивовари)

Снимки: FreeDigitalPhotos.net

Пък и не само там

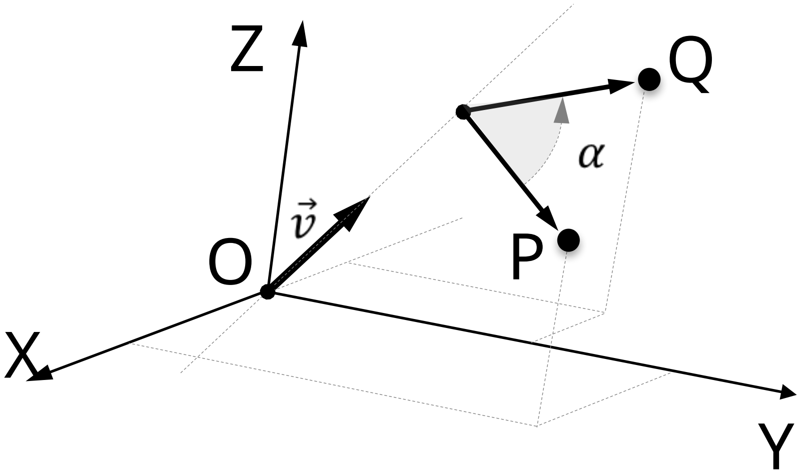
- В архитектурата
- В стъкларията
- В производството на камбанки

Снимки: FreeDigitalPhotos.net

Най-общ вид

Начални данни

- Ос от единичен вектор $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$
- Точка $P(p_x, p_y, p_z)$ от контур
- Ъгъл на завъртане α



- След завъртане на ъгъл $\boldsymbol{\alpha}$ около ос $\vec{\boldsymbol{v}}$ на точка $\boldsymbol{P}$ се получава $\boldsymbol{Q}$ с координати, които трудно се помнят

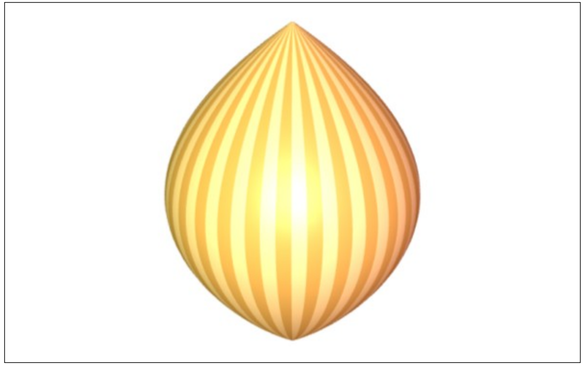
$$Q\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x^2 + (1 - v_x^2)\cos\alpha & v_x v_y(1-\cos\alpha) - v_z \sin\alpha & v_x v_z(1-\cos\alpha) + v_y \sin\alpha \\ v_x v_y(1-\cos\alpha) + v_z \sin\alpha & v_y^2 + \left(1 - v_y^2\right)\cos\alpha & v_y v_z(1-\cos\alpha) - v_x \sin\alpha \\ v_x v_z(1-\cos\alpha) - v_y \sin\alpha & v_y v_z(1-\cos\alpha) + v_x \sin\alpha & v_z^2 + (1 - v_z^2)\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

- При вертикална ос $\vec{\boldsymbol{v}}(\mathbf{0,0,1})$, точка $\boldsymbol{Q}$ става:

$$Q\begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \cos\alpha - p_y \sin\alpha \\ p_x \sin\alpha + p_y \cos\alpha \\ p_z \end{pmatrix}$$

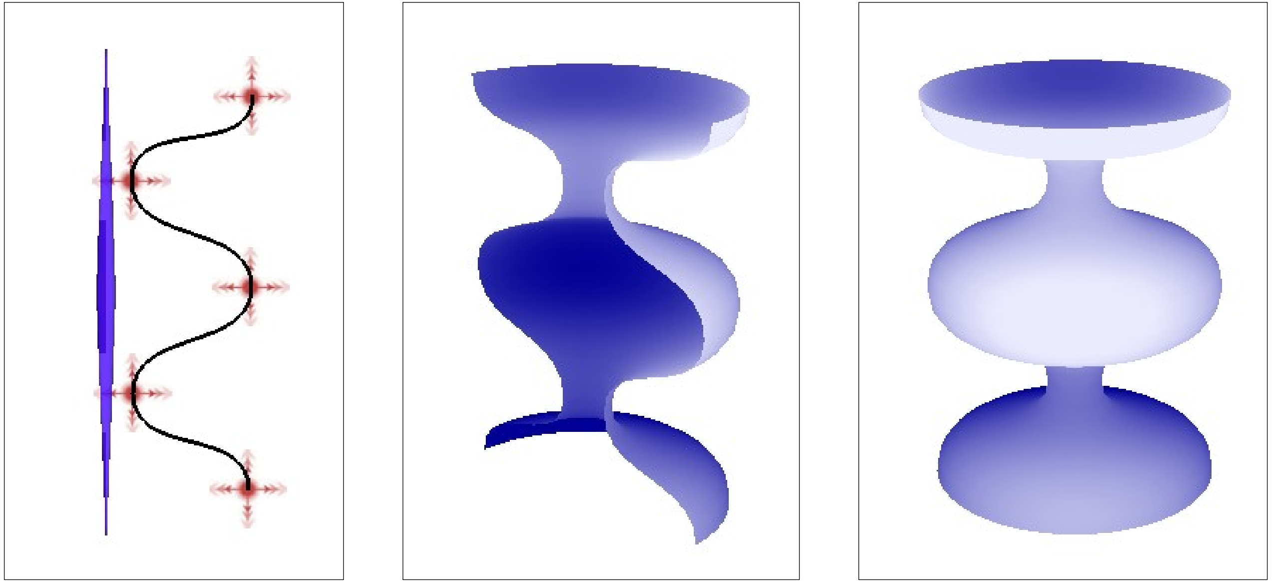
Конструиране като тор

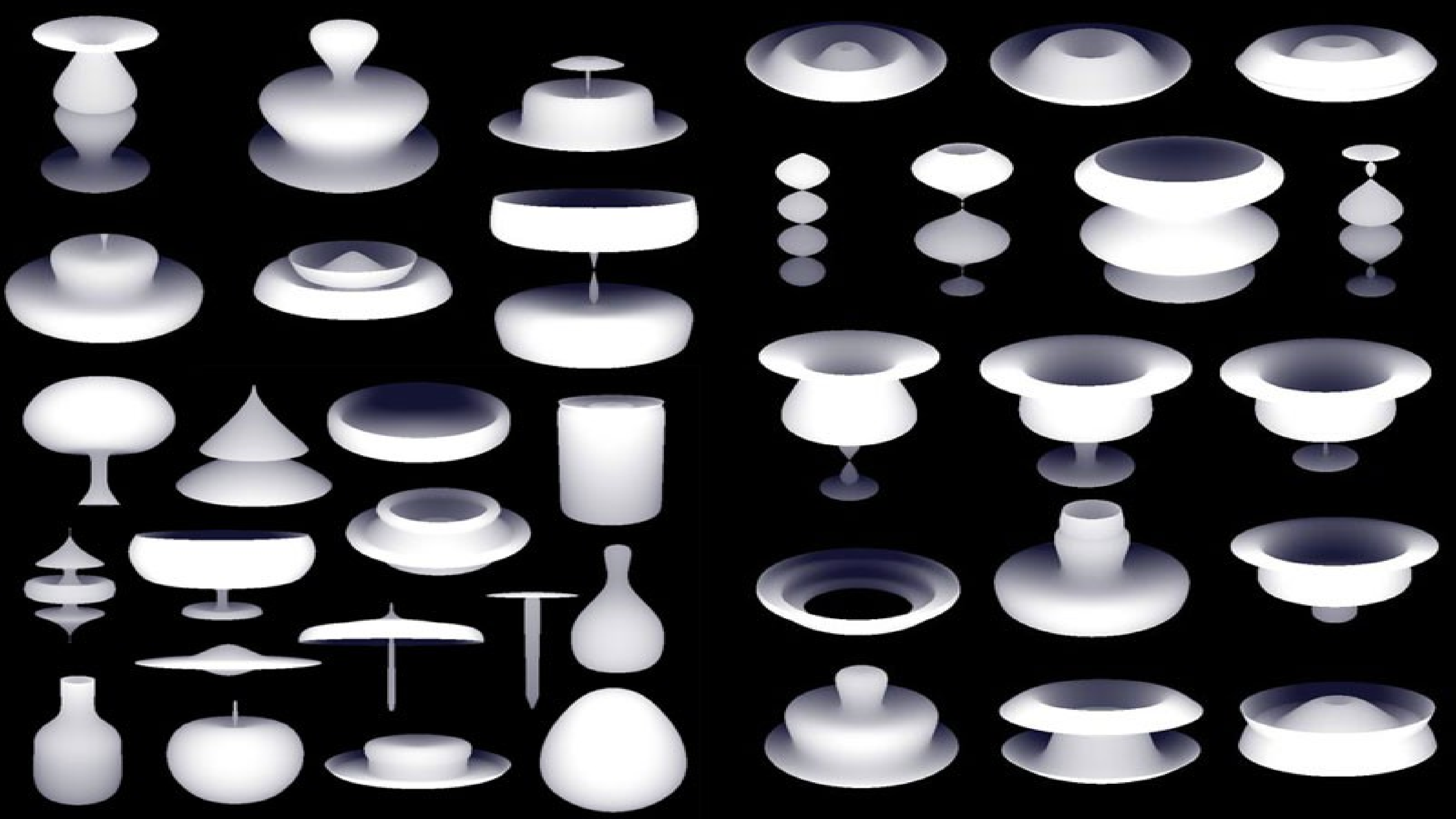
- Контурът се представя като начупена линия или като верига от отсечки
- Всяка отсечка поражда пресечен конус



Илюстрация

Въртене на контур





Влачене по траектория

Влачене по траектория

Основни елементи

- Контур/профил, 3D обект или свойство
- Линия в 3D (не задължително права)

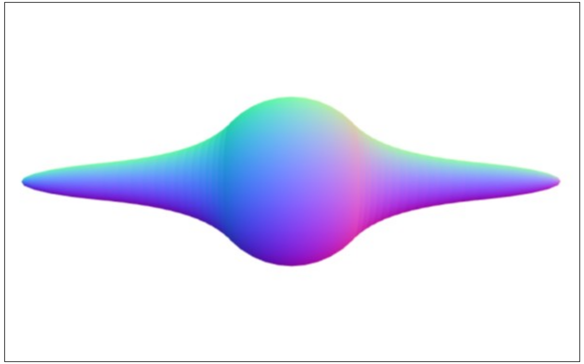
Получаване

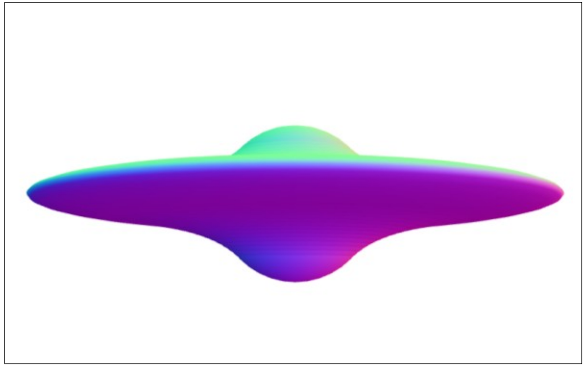
- Контурът, обектът или свойството се влачи/плъзга по линията
- Ротационните тела са частен случай на влачене на контур по окръжност

Примери

Плъзгане на мащаба в диапазон

- Мащабиране по X и Y
- Мащабиране по Z



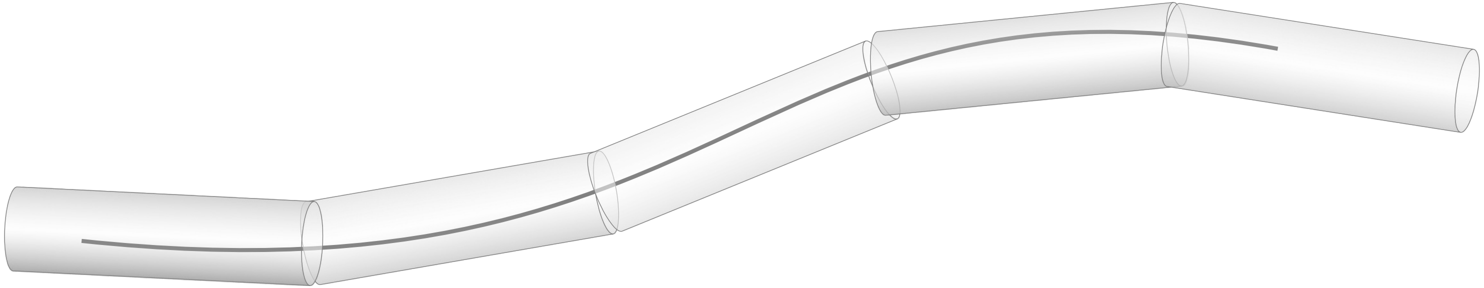


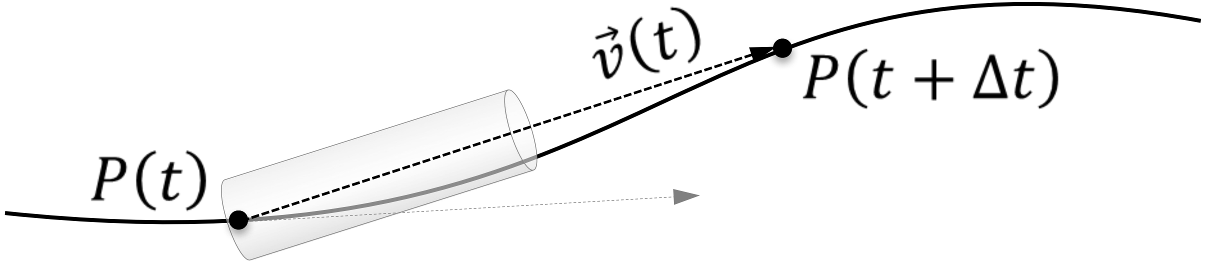
Крива на Лисажу̀ (Lissajous)

- Хармонична крива в 3D, задава се параметрично

$$\begin{cases} x(t) = a_x \sin(b_x t + c_x) \\ y(t) = a_y \sin\left(b_y t + c_y\right) \\ z(t) = a_z \sin(b_z t + c_z) \end{cases}$$

- Ще е построена от малки цилиндри
- Всеки е ориентиран по тангентата





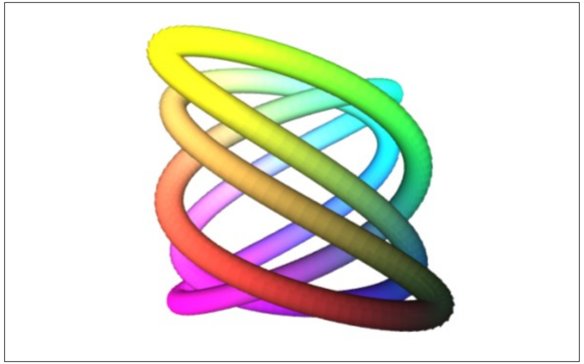
- А тангенциалният вектор $\vec{v}(t)$ в точка $P(t)$ се намира числено чрез: $\vec{v}(t) \approx P(t + \Delta t) - P(t)$

Оцветяване

- При $a_x = a_y = a_z$ фигурата на Лисажу лежи в куб със страна $2a_x$ (защо?)
- Нека този куб е цветово RGB пространство

Резултат

- При случайни коефициенти
- В RGB пространство



Конструктивна геометрия

Основни елементи

Набор от примитиви

- Избрано множество от графични примитиви
- Трансформирани (мащабирани, завъртяни, ...)

Набор от операции

- Логически или аритметични операции за работа с графични примитиви
  (аналогични са на операциите за работа с множества)

Изрази

- Конструират се изрази с графичните примитиви
- Прилагат се операциите над тях

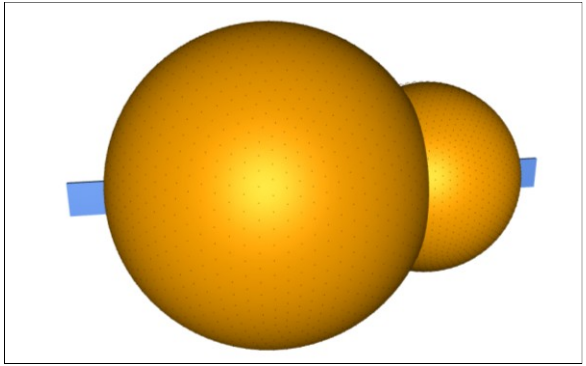
Дървовидна структура

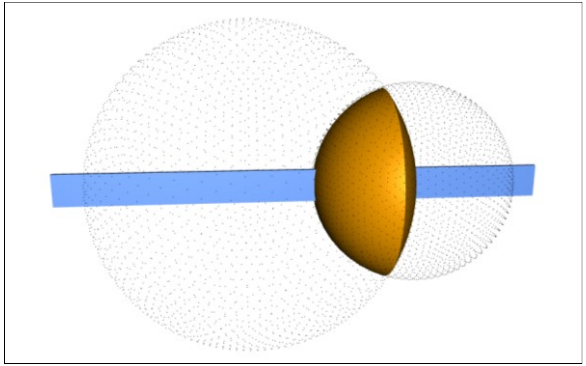
- Крайният обект се представя като математически израз с операции от конструктивната геометрия
- Може да има скоби за вложени изрази

Конструктивни операции

Събиране и умножение

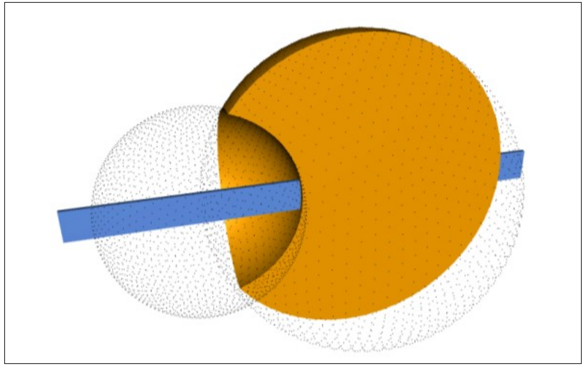
- Събиране = обединение на тела
- Умножение = сечение на тела

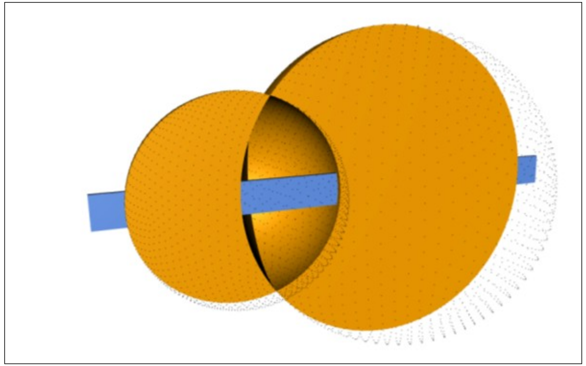




Изваждане и разлика

- Разлика и изваждане са различни
- Изваждане = тяло извадено от друго
- Разлика = необщите части от тела





Пример

Вложени сфери

- С изрязани кръгове

“Magic balls”
http://youtu.be/dV2PdCTx9dE

Параметрично моделиране

Параметрично моделиране

Основни идеи

- Обект зададен с уравнение с параметри за пространствената му размерност
  (за повърхност – два параметъра, за обемно тяло – три)

Непряко дефиниране на обект

- Един набор от параметри дефинира друг набор от параметри, който вече определя обекта

Внимание

- Параметричността се определя от реализацията на рисуването, а не от това дали са подадени параметри
- Параметрите дефинират чрез функция как „оординатите обхождат точките от обекта

Пример за непараметричен обект

- Рисуване на квадрат с дължина на страна a не е параметрично моделиране на квадрата (въпреки че a е параметър на процедурата, която го рисува)

Уравнения

Моделиране на 3D обекти

- Често чрез тяхната повърхност – отвътре са кухи
- Повърхността се задава чрез уравнение $P = F(u, v)$, където u и v са параметрите
- За непрякото дефиниране се ползва

$$F(x, y, z) = 0, \quad \text{като} \quad \left| \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{array} \right.$$

Пример

Модел на люспа от Pringles

- Елипсовиден контур
- Хиперболично-параболоидна повърхност
- Уравнение $f(x,z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}$

Започва се с полярни координати

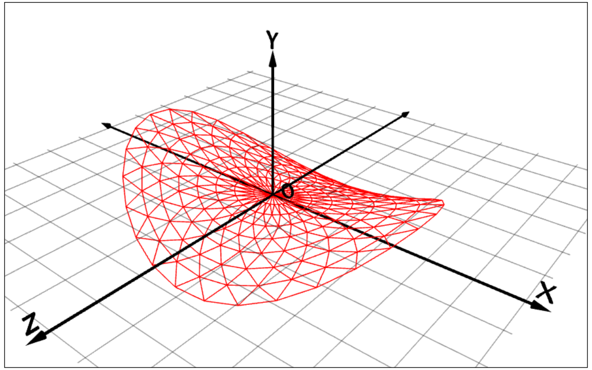
- Единична окръжност в Oxz
- Точките са с полярни координати (r, α)
- А с декартови са $(r\cos\alpha\,, 0, r\sin\alpha)$

Окръжността се издува в елипса

- Мащабиране по X и Z с $R_x = 4$ и $R_z = 3$
- Координатите стават $(4r\mathrm{cos}\alpha, 0, 3r\mathrm{sin}\alpha)$

Преминаване в 3D

- Добавя се фиктивна y координата
- Изчислява се y чрез x и z така $y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}$
  (коефициентите $a = 4$ и $b = 3$, се избират естетически)



Люспата минава следните трансформации

- Двумерен модел

$$\left|\begin{array}{l} r \in [0,1] \\ \alpha \in [0,2\pi] \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x = r\cos\alpha \\ z = r\sin\alpha \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x = R_x r\cos\alpha \\ z = R_z r\sin\alpha \end{array}\right.$$

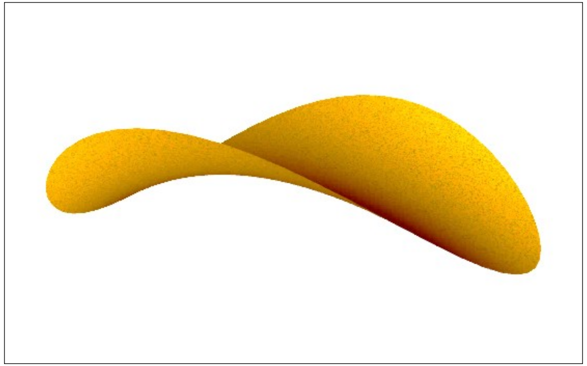
- За тримерен модел се добавя y

$$\left|\begin{array}{l} x = \cdots \\ y = 0 \\ z = \cdots \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x = \cdots \\ y = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} \\ z = \cdots \end{array}\right.$$

- В крайна сметка се получава

$$\begin{vmatrix} r \in [0,1] \\ \alpha \in [0,2\pi] \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x = R_x r \cos\alpha \\ y = r^2\left(\dfrac{R_x^2}{a^2}\cos^2\alpha - \dfrac{R_z^2}{b^2}\sin^2\alpha\right) \\ z = R_z r \sin\alpha \end{vmatrix}$$

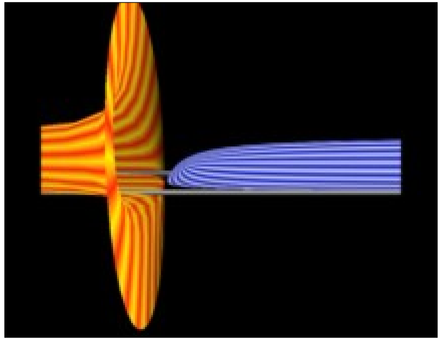
- И след малко украсяване:



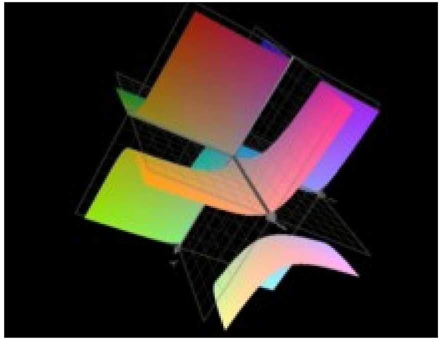
Други примери

Други параметрични модели

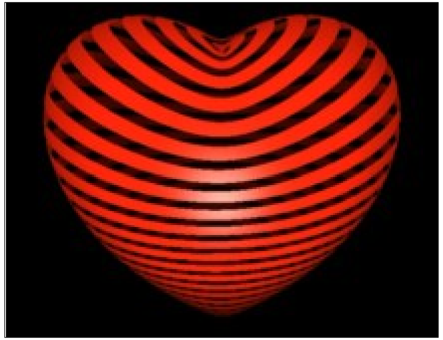
- Секси повърхност (по проф. Станилов)
- Хиперболичен хиперболоид
- Сърце



“Math Shinkansen”
http://youtu.be/-nhvbwMnG



“Hyperhyperboloid”
http://youtu.be/KabzJeJa



“Mathematics … loves you”
http://youtu.be/nRF7cUQIA

Процедурно моделиране

Процедурно моделиране

Основни характеристики

- Геометричната фигура се генерира чрез програма
- Може да включва всички останали начини на моделиране
- Най-мощното и най-функционалното моделиране
  (затова подробностите са в друга лекция)

Въпроси?

Повече информация

LUKI	стр. 189
AGO2	стр. 167-171, 174-178
SALO	стр. 348-360
MORT	стр. 226-228, 233-243
PAQU	стр. 100
BAGL	стр. 35-36

А също и:

- Elica Dalest Applications
  http://www.elica.net/site/museum/Dalest/dalest.html
- Lissajous Curve
  http://mathworld.wolfram.com/LissajousCurve.html

Край