Задачи по теория — определен интеграл
КН, 1 к., I п.

Някои задачи от посочените тук или подобни на тях се падат на изпита по теория. Задачите обозначени със $*$ са по-сложни или имат по-дълги решения. Такива **не** се падат на изпита.

1. Докажете, че произведението на интегруеми функции е също интегруема функция.

2. Докажете, че функцията на Дирихле $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, която се дефинира чрез
$$D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$
не е интегруема върху $[0, 1]$.

3. * (Теорема за средните стойности) Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната, а $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегруема и неотрицателна. Тогава съществува $c \in [a, b]$ такова, че
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

4. Нека $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, е непрекъсната четна функция. Докажете, че
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

5. Нека $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, е непрекъсната нечетна функция. Докажете, че
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

6. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е непрекъсната T-периодична функция. Докажете, че:

   (а) $\displaystyle\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b;$

   (б) $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx \quad \forall a \in \mathbb{R}.$

7. * Пресметнете определения интеграл
$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Нека $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, е непрекъсната и неограничена. Ако съществува границата
$$\lim_{x \to b-0} f(x)(b-x)^{\lambda}$$
с някое $\lambda < 1$, то несобственият интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ е абсолютно сходящ.

9. Нека $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Ако съществува границата
$$\lim_{x \to +\infty} f(x)x \neq 0 \quad \text{(но се допуска } \pm\infty\text{)},$$
то несобственият интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е разходящ.

10. Изследвайте функцията
$$f(x) := \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$