ЗАДАЧИ ОТ ВЗАИМНИ ПОЛОЖЕНИЯ И РАЗСТОЯНИЕ МЕЖДУ ПРАВИ

Необходим материал: векторни бази в линейно пространство, координатни условия за колинеарност и компланарност на вектори, скаларно произведение, векторно произведение

1 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за които $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{a} \times \vec{b}$. Да се намери разстоянието между правите AB и CD.

Упътване: Правите са кръстосани. Търсеното разстояние е дължината на тяхната ос-отсечка.

Отг: $\frac{\sqrt{6}}{6}$

2 зад. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб $AB = 1$.

a) Да се докаже, е правите A_1D и BD_1 са кръстосани;
b) Да се намери $\sphericalangle(A_1D, BD_1)$;
c) Да се намери разстоянието между A_1D и BD_1.

Упътване: Изберете векторна база в пространството, изразете $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{BD_1}$. Правите са кръстосани точно тогава, когато точките A_1, D, B, D_1 не са компланарни.

Отг: c) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

3 зад. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб $AB = 1$. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Точката M е медицентърът на $\Delta\, ABD$, а точката N е медицентърът на $\Delta\, BCC_1$.

a) Да се изразят векторите $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{MN}$ чрез $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;
b) Да се определи взаимното положение на правите AD и MN;
c) Да се намери $\sphericalangle(AD, MN)$;
d) Да се намери разстоянието между правите AD и MN.

Отг: d) $\frac{\sqrt{5}}{15}$

4 зад. Даден е правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. $|AB| = \sqrt{2}, |AD| = 2, |AA_1| = 1$.

Точките M и N са средите съответно на A_1B_1 и BC.

a) Да се намери дължината на MN;
b) Да се определи взаимното положение на правите BD_1 и MN;
c) Да се намери $\sphericalangle(BD_1, MN)$;
d) Да се намери разстоянието между правите BD_1 и MN.

5 зад. Дадени са векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, за които $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$,

$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{c}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

A_1 и B_1 са средите съответно на BC и OC.

a) Да се докаже, че векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са линейно независими;
b) Да се изразят векторите $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ чрез $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;
c) Да се докаже, че правите AA_1 и BB_1 са кръстосани;
d) Да се намери разстоянието между правите AA_1 и BB_1.

Отг: d) $\frac{\sqrt{70}}{35}$

6 зад. Даден е правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, за който $|AB| = \lambda$,

$|AD| = |AA_1| = 1$. Известно е, че $\sphericalangle(D_1M, AC_1) = \frac{\pi}{2}$, където M е средата на ръба AB.

a) Да се намери дължината на ръба AB;
b) Нека $\lambda = 0{,}5$ и точката G е медицентърът на тетраедъра $BA_1C_1D_1$. Да се намери разстоянието между правите AG и BC_1.