Задачи по теория — ДИС на функции на няколко променливи
КН, 1 к., I п.

Някои задачи от посочените тук или подобни на тях се падат на изпита по теория. Задачите обозначени със $*$ са по-сложни или имат по-дълги решения. Такива **не** се падат на изпита.

1. Докажете, че следните функции задават норма в равнината:

   (а) $\|(x,y)\|_1 := |x| + |y|$,

   (б) $\|(x,y)\|_\infty := \max\{|x|,|y|\}$.

   Скицирайте единичните кълба с център $(0,0)$, относно всяка една от тях, т.е. множествата $B_i := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_i \leq 1\}$, $i = 1, \infty$.

2. Евклидовото разстояние между две множества от точки в равнината S_1 и S_2 се дефинира чрез

   $$\varrho_2(S_1,S_2) := \inf\{\rho_2(P_1,P_2) : P_1 \in S_1,\ P_2 \in S_2\},$$

   където $\rho_2(P,Q)$ е евклидовото разстояние между точките $P, Q \in \mathbb{R}^2$. Докажете, че ако K_1 и K_2 са две компактни множества в равнината, които нямат общи точки, то $\varrho_2(K_1,K_2) > 0$. Постройте пример на две множества от точки в равнината, които нямат общи точки, но въпреки това разстоянието между тях е 0.

3. Нека реалнозначната функция на две променливи $f(x,y)$ е дефинирана в $\mathbb{R}^2$ и удовлетворява условието $f(x,y) = f(y,x)$ навсякъде в $\mathbb{R}^2$. Докажете, че ако частните производни $f'_x(x,y)$, $f''_{xx}(x,y)$ и $f''_{xy}(x,y)$ съществуват навсякъде в $\mathbb{R}^2$, то съществуват навсякъде в $\mathbb{R}^2$ и частните производни $f'_y(x,y)$, $f''_{yy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ и ги изразете посредством f'_x, f''_{xx} и f''_{xy}.

4. Нека функциите $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ притежават първи частни производни по всичките си променливи навсякъде в своята дефиниционна област. Докажете, че

   $$\operatorname{grad}(fg)(x) = g(x)\operatorname{grad} f(x) + f(x)\operatorname{grad} g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

5. Нека $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено, $x_0 \in U$ и $h \in \mathbb{R}^n$. Докажете, че ако $f(x)$ притежава непрекъснати първи частни производни по всичките си променливи в околност на т. x_0, то тя има производна в тази точка по направлението h и

   $$\frac{\partial f}{\partial h}(x_0) = \langle \operatorname{grad} f(x^0), h \rangle.$$

6. Нека реалнозначната функция $f(x, y)$ е дефинирана и притежава първи частни производни в правоъгълника $D := \{(x, y) : x \in (a, b),\ y \in (c, d)\}$, като $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$ в D. Докажете, че $f(x, y)$ е тъждествено константа в D.

7. Нека $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ и $g : [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}$ са непрекъснати. Докажете, че функцията $h(x, y) := f(x)g(y)$ е интегруема върху множеството $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ и
$$\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta h(x, y)\, dxdy = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \cdot \int_\gamma^\delta g(y) dy.$$

8. Нека $f : [a, b] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Докажете, че функцията
$$g(x) := \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy, \quad x \in [a, b],$$
е също непрекъсната.

9. * Нека $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Докажете, че
$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2\, dx.$$