1. Формални Езици. Операции

Def Всяко $\Sigma \neq \emptyset$ е <u>азбука</u>

Елементите на азбуката наричаме <u>букви</u>.

Най-често ще използваме подмножества на латинската азбука., например $\{a, b, c\}$

Def Нека Σ е азбука.
<u>дума</u> над Σ ще наричаме всяка крайна редица от елементи на Σ

$$\underline{\omega} \text{ - дума } \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists n \in \mathbb{N})(\omega : I_n \to \Sigma)$$

Празната редица (дума) означаваме с $\underline{\varepsilon}$

<u>Пример:</u> Над азбуката $\Sigma = \{a, b, c\}$

$w_1 = abab$

$w_2 = \varepsilon$

$w_3 = aa\ldots$ Не е дума

$w_4 = \underbrace{aa\ldots a}_{n}$ е дума

<u>Пример:</u> "Под Игото" е дума над азбуката, която е обединение на кирилицата и множеството от препинателните знаци.

<u>Пример:</u> Над азбуката $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9, ","\}$

1, 2, 3 са думи

1,25 е дума

π не е дума.

Def Конкатенация на думи
пишем $w_1 \cdot w_2$ или $w_1 w_2$.

Пример: $ab \cdot bc = abbc$
$\varepsilon \cdot aa = aa$
$aa \cdot \varepsilon = aa$

Def Нека Σ е азбука.
Език над Σ наричаме всяко множество от думи над Σ

Операции над езици

- Обединение
  $L_1 \cup L_2$
- Сечение
  $L_1 \cap L_2$
- Допълнение
  Σ - азбука, L - език над Σ

  $\overline{L} \overset{def}{=} \{ w \text{ - дума над } \Sigma \mid w \notin L \}$

- Конкатенация:

  $L_1 \cdot L_2 \overset{def}{=} \{ \alpha . \beta \mid \alpha \in L_1, \beta \in L_2 \}$

- Степенуване:
  Дефинираме индуктивно
  $L^0 \overset{def}{=} \{ \varepsilon \}$
  $L^{n+1} \overset{def}{=} L^n \cdot L$

– Звезда на Клини

$$L^* \stackrel{def}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n \qquad L^+ \stackrel{def}{=} \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \neq 0}} L^n$$

Задачи:

Докажете, че

1) $\{a\}^* \cdot \{a\} \cup \{\varepsilon\} = \{a\}^*$

2) За всеки език L

$$L^* \cdot L \cup \{\varepsilon\} = L^*$$

3) $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2)\} = U$

$= (\{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\})^* \cdot \{b\}^* = V$

Р-е: (3)

$\Leftarrow)$ $\{b^*\} \cdot \{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}^* = L_1$

Всяка дума в L_1 очевидно съдържа точно 2 "a"-та

тогава нека $w \in L_1^* = V$

Тогава $w = w_1 w_2 \cdot \ldots \cdot w_n \cdot b_1^k$ като $w_i \in L_1$ за $i = 1 \ldots n$, $k \in \mathbb{N}$

Значи $|w|_a = 2n$ и сл. $w \in U$

$\Rightarrow$) Нека $w \in U$. Индукция по $|w|_a$ (само за четните)

И.Б: $|w|_a = 0$.
Тогава $w = b^n$, $n \in \mathbb{N}$ и сл.
$w \in \{\varepsilon\} \cdot \{b\}^* \subseteq L_1^* \cdot \{b\}^* = V$

И.Х.: за вс. w, за което $|w|_a = 2k$, $w \in V$

И.С: Нека $|w|_a = 2k+2$, $k \in \mathbb{N}$
сл. $w = b^u a b^v a w'$ за някои $u, v \in \mathbb{N}$,
$w' \in \Sigma^*$, $|w'|_a = 2k$
От И.Х. $w' \in V = L_1^* \cdot \{b\}^*$
Сл. $w = \underbrace{b^u a b^v a}_{\in L_1} \underbrace{w'}_{\in L_1^* \cdot \{b\}^*} \in L_1 \cdot L_1^* \cdot \{b\}^*$

Но от задача (2) следва, че
$L_1 \cdot L_1^* \subseteq L_1^*$
и така $w \in L_1^* \cdot \{b\}^* = V$