Афинни пространства

Дефиниция и примери

Определение 1 Нека V е реално линейно пространство. Непразното множество A се нарича *афинно пространство, моделирано върху* V (или *с направляващо пространство* V), ако е зададено изображение

$$A \times A \to V : \quad (P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ},$$

което има свойствата:

1. $\forall P \in A$ и $\forall v \in V$ $\exists! Q \in A : \overrightarrow{PQ} = v$.
2. $\forall P, Q, R \in A$ е в сила $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
   (правило на триъгълника за събиране на вектори).

Елементите на A се наричат *точки*.
Размерност на A се нарича размерността на V.

Пример 1 Едноточковото множество $A = \{O\}$ е афинно пространство, моделирано върху тривиалното линейно пространство $V = \{0\}$, тоест е 0-мерно афинно пространство.

Пример 2 Нека V е реално линейно пространство. Тогава $A = V$ е афинно пространство, моделирано върху V, с изображението

$$V \times V \to V : \quad (P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ} = Q - P.$$

Когато линейно пространство се разглежда като афинно, винаги се има предвид тоя пример.

Пример 3 Частен случай на предишния пример: $\mathbb{R}^n$ е n-мерно афинно пространство, моделирано върху себе си.

Пример 4 Геометричното пространство е 3-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство на векторите в пространството.
Геометричната равнина е 2-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство на векторите в равнината (компланарни с равнината).
Геометричната права е 1-мерно афинно пространство, моделирано върху линейното пространство на векторите върху правата (колинеарни с правата).

Твърдение 1 *В афинно пространство са в сила свойствата:*

1. $\overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow P = Q$.
2. $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.
3. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.
4. *Ако* $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, *то* $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$ *(свойство на успоредника).*

Забележка 1 В горните неща (с изключение на Пример 4) никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че те важат без промяна и ако V е линейно пространство над произволно поле F.

Ориентация

Определение 2

1. *Ориентация* в крайномерно афинно пространство е ориентация в направляващото линейно пространство.

2. Казваме, че крайномерно афинно пространство е *ориентирано*, ако е избрана една от двете възможни ориентации (тоест, ако направляващото пространство е ориентирано). Избраната ориентация се нарича *положителна*, а другата – *отрицателна*.

Забележка 2 Ориентация върху права се нарича още *посока върху правата*, а ориентирана права – *ос*. Ориентация в равнина се нарича още *посока на въртене в равнината*.

Пример 5 $\mathbb{R}^n$, разглеждано като линейно пространство, се счита ориентирано чрез стандартната ориентация (тоест чрез дефинираната от стандартния базис ориентация). Следователно получаваме ориентация в $\mathbb{R}^n$, разглеждано като афинно пространство. Тя също се нарича *стандартна ориентация*.

Евклидови афинни пространства

Определение 3 *Евклидово афинно пространство* е афинно пространство, чието направляващо линейно пространство е евклидово линейно пространство (тоест в направляващото пространство е фиксирано едно скаларно произведение).

Пример 6 Нека U е евклидово линейно пространство. Тогава U, разглеждано като афинно пространство, моделирано върху себе си, е евклидово афинно пространство.
В частност, $\mathbb{R}^n$ е евклидово афинно пространство.

Пример 7 При фиксирана единична отсечка получаваме скаларно произведение в линейното пространство на векторите в геометричното пространство. Следователно геометричното пространство става 3-мерно евклидово афинно пространство. Аналогично геометричната равнина става 2-мерно евклидово афинно пространство, а геометричната права става 1-мерно евклидово афинно пространство.

Нека A е евклидово афинно пространство.

Определение 4 *Разстояние между точките* $P, Q \in A$ се нарича дължината на вектора $\overrightarrow{PQ}$. Означава се с $|PQ|$, тоест $|PQ| = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$.

Твърдение 2 *За $P, Q, R \in A$ са в сила:*

1. $|PQ| \geq 0$ *и* $= \Leftrightarrow P = Q$.
2. $|QP| = |PQ|$.
3. $|PR| \leq |PQ| + |QR|$ *(неравенство на тригълника).*

Определение 5 Ако $O, P, Q \in A$, $O \neq P$, $O \neq Q$, то дефинираме $\sphericalangle POQ = \sphericalangle\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right)$.

Пример 8 Ако $O, P \in A$, $O \neq P$, то $\sphericalangle POP = 0$.

Твърдение 3 *Нека $O, P, Q \in A$, $O \neq P$, $O \neq Q$. Тогава $\sphericalangle QOP = \sphericalangle POQ$.*

Твърдение 4 (косинусова теорема) *Нека $O, P, Q \in A$, $O \neq P$, $O \neq Q$. Тогава*

$$|PQ|^2 = |OP|^2 + |OQ|^2 - 2|OP||OQ| \cos \sphericalangle POQ.$$