Задача 0.1. *Нека* $\mathcal{A} = \langle \Sigma, \Gamma, Q, s, \Delta, Z\rangle$ *е стеков автомат и* $\beta \neq \varepsilon$ *е стекова дума. Да се докаже, че следните са еквивалентни:*

1. $\langle p, uv, \beta\gamma\rangle \Rightarrow \langle p', u'v', \beta'\gamma'\rangle$ *и* $|\gamma| = |\gamma'|$ *и* $|v| = |v'|$.
2. $\langle p, u, \beta\rangle \Rightarrow \langle p', u', \beta'\rangle$, $\gamma = \gamma'$, $v = v'$

Задача 0.2. *Нека* $\mathcal{A} = \langle \Sigma, \Gamma, Q, s, \Delta, Z\rangle$ *е стеков автомат и* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ *са непразни е стекови думи. Да се докаже, че следните са еквивалентни:*

1. *за всяко* $i < n$, $\langle p_i, u_i v_i, \beta_i\gamma_i\rangle \Rightarrow \langle p_{i+1}, u_{i+1}v_{i+1}, \beta_{i+1}\gamma_{i+1}\rangle$ *и* $|v_i| = |v_{i+1}$ *и* $|\gamma_i| = |\gamma_{i+1}|$.
2. *за всяко* $i < n$, $\langle p_i, u_i, \beta_i\rangle \Rightarrow \langle p_{i+1}, u_{i+1}, \beta_{i+1}\rangle$ *и* $v_i = v_{i+1}$ *и* $\gamma_i = \gamma_{i+1}$.

Заключете, че за всеки $A \in \Gamma$, $\gamma \in \Gamma^*$, $p, q \in Q$, $u, v \in \Sigma^*$ *следните са еквивалентни:*

1. *има изпълнение* $\langle p, uv, A\gamma\rangle \Rightarrow^{(n)} \langle q, v', \gamma'\rangle$, *за което* $|\gamma'| = |\gamma|$, $|v'| = |v|$ *и всички стекови думи в това изпълнение без последната са с дължина по-голяма от* $|\gamma|$.
2. *има изпълнение* $\langle p, u, A\rangle \Rightarrow^{(n)} \langle q, \varepsilon, \varepsilon\rangle$ *и* $\gamma' = \gamma$ *и* $v' = v$.

Задача 0.3. *Нека* $\mathcal{A} = \langle \Sigma, \Gamma, Q, s, \Delta, Z\rangle$ *е стеков автомат. Нека* $\tau = \langle (p, a, A), (q, \gamma B)\rangle \in \Delta$ *и* $|\gamma| \geq 2$. *Ако* $X \notin \Gamma$ *е нов стеков символ, да се докаже, че* $\mathcal{L}(\mathcal{A}') = \mathcal{L}(\mathcal{A})$, *където:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}' &= \langle \Sigma, \Gamma \cup \{X\}, Q, s, \Delta', Z\rangle \\
\Delta' &= \Delta \setminus \{\tau\} \cup \{\langle (p, a, A), (p, XB)\rangle, \langle (p, \varepsilon, X), (q, \gamma)\rangle\,.
\end{aligned}$$

Да се докаже, че всеки стеков автомат е еквивалентен на стеков автомат, за който всеки преход $\tau = \langle (p, a, A), (q, \gamma)\rangle$ *има свойството, че* $|\gamma| \leq 2$.

Задача 0.4. *Нека* $\mathcal{A} = \langle \Sigma, \Gamma, Q, s, \Delta, Z\rangle$ *е стеков автомат, за който всеки преход* $\tau = \langle (p, a, A), (q, \gamma)\rangle$ *свойството, че* $|\gamma| \leq 2$.

Нека $\mathcal{N} = Q \times \Gamma \times Q$, P *са правилата:*

$$\begin{aligned}
P = \;& \{(p, A, t) \to a(q, B, r)(r, C, t) \mid \langle (p, a, A), (q, BC)\rangle \in \Delta, r, t \in Q\} \\
& \cup \{(p, A, t) \to a(q, B, t) \mid \langle (p, a, A), (q, B)\rangle \in \Delta, t \in Q\} \\
& \cup \{(p, A, t) \to a \mid \langle (p, a, A), (t, \varepsilon)\rangle \in \Delta\}.
\end{aligned}$$

Да се докаже, че ако $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, (p, A, t)\rangle$, *то следните са еквивалентни за всяка дума* $u \in \Sigma^*$:

1. $(p, A, t) \Rightarrow^*_G u$.
2. $(p, u, A) \Rightarrow^*_{\mathcal{A}} (t, \varepsilon, \varepsilon)$.

Да се докаже, че за всеки стеков автомат има еквивалентна контекстносвободна граматика.

Задача 0.5. *Нека* $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S\rangle$ *е контекстносвободна граматика. Ако* $\mathcal{A} = \langle \Sigma, \Sigma \cup \mathcal{N}, \{s\}, s, \Delta, S\rangle$ *е стеков автомат с преходи:*

$$\Delta = \{\langle (s, \varepsilon, X), (s, \alpha)\rangle \mid X \to \alpha \in P\} \cup \{\langle (s, a, a), (s, \varepsilon)\rangle \mid a \in \Sigma\},$$

да се докаже, че:

1. *за всяка дума* $\gamma \in (\Sigma \cup \mathcal{N})^*$ *и* $u \in \Sigma^*$ *е в сила еквивалентността:*
$$\gamma \Rightarrow^*_G u \iff (s, u, \gamma) \Rightarrow^*_{\mathcal{A}} (s, \varepsilon, \varepsilon).$$
2. $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(G)$.

Упътване 0.1. От това, че $\beta \neq \varepsilon$, заключете, че $\beta = A\alpha$ за някой стеков символ $A \in \Gamma$. Тогава за $1 \Rightarrow 2$, преходът $\tau \in \Delta$, който определя:

$$\langle p, uv, A\alpha\gamma\rangle = \langle p, uv, \beta\gamma\rangle \Rightarrow \langle p', u'v', \beta'\gamma'\rangle$$

има вида $\tau = \langle (p, a, A), (p', \alpha')\rangle$ като $uv = au'v'$ и $\beta'\gamma' = \alpha'\alpha\gamma$. От $|v'| = |v|$, v' и v са суфикси на една и съща дума с равна дължина. Заключете, че $v = v'$ и $u = au'$. Аналогично, обосновете, че $\gamma = \gamma'$ и $\beta' = \alpha'\alpha$.

Посоката от $2 \Rightarrow 1$ може да получите като просто заместите с прехода τ.

Упътване 0.2. Използвайте индукция по n и твърдението от предишната задача. За заключението, приложете първата част на задачата към $\beta_0 = A, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ и $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$ такива, че стековата дума на i-тата конфигурация е $\beta_i\gamma_i$ и $|\gamma_i| = |\gamma|$. Забележете, че това е възможно (защо?).

Упътване 0.3. Покажете, че с двата нови прехода може да се симулира τ и обратно, ако на върха на стека на $\mathcal{A}'$ се появи X, то предишният и следващият преход са еднозначно определени и съответно може да се възстанови τ от $\mathcal{A}$.

За втората част използвайте индукция по сумата от дължините на думите, които добавят към стека всички преходи τ, които нарушават желаното условие.

Упътване 0.4.

1. От 1 към 2, използвайте индукция по дължината на извода и твърдението от 2 към 1 на Задача 2.

   От 2 към 1, използвайте индукция по дължината на изпълнението. В случая, когато първият преход е:

   $$(p, u, A) \Rightarrow_{\mathcal{A}} (q, u', BC),$$

   обосновете, че има първи (най-ранен) момент от изпълнението след (q, u', BC), в който дължината на стека е 1. Използвайте Задача 2, от 1 към 2, за да обосновете че тази част от изпълнението има на дъното си C и съответно има изпълнение:

   $$(q, u_1'u_2', BC) = (q, u', BC) \text{ и } (q, u_1', B) \Rightarrow^* (r, \varepsilon, \varepsilon) \text{ и } (r, u_2', C) \Rightarrow^* (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

2. Използвайте Задача 3 и затвореност на контекстносвободни езици относно обединение.

Упътване 0.5.

1. С индукция по $(n, |\gamma|)$ в $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \prec)$ докажете, че от:

   $$\gamma \Rightarrow_G^{(n)} u \text{ следва, че } (s, u, \gamma) \Rightarrow_{\mathcal{A}}^* (s, \varepsilon, \varepsilon).$$

   Ако $n = 0 = |\gamma|$, то $\gamma = \varepsilon$ и $u = \varepsilon$. Заключете, че тогава дясна страна наистина е вярна.

   Ако $\gamma \Rightarrow_G^{(n)} u$ и $|\gamma| + n > 0$, заключете, че $|\gamma| > 0$ и разгледайте случаи по първия символ X на γ. Ако $\gamma = X\gamma'$, обосновете, че ако $X = a \in \Sigma$, то $u = au'$ и:

   $$(s, u, \gamma) = (s, au', a\gamma') \Rightarrow_{\mathcal{A}} (s, u', \gamma') \text{ и } \gamma' \Rightarrow^{(n)} u'.$$

   Ако $X \in \mathcal{N}$ използвайте, че има правило $X \to \alpha \in P$, за което:

   $$X\gamma' \Rightarrow \alpha\gamma' \Rightarrow_G^{(n-1)} u.$$

   Обосновете, че $(s, u, X\gamma') = (s, u, \gamma) \Rightarrow_{\mathcal{A}} (s, u, \alpha\gamma')$.

2. С индукция по дължината на изпълнението $(s, u, \gamma) \Rightarrow_{\mathcal{A}}^{(n)} (s, \varepsilon, \varepsilon)$ покажете, че $\gamma \Rightarrow_G^* u$.

3. Приложете дефиницията за език на стеков автомат, който разпознава с празен стек, и език на контекстносвободна граматика.