Задача 0.1. *Нека* $A = \langle \Sigma, Q, S, \Delta, F \rangle$ *е краен автомат с* $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$*. За състояние* $p \in Q$ *с* A_p *означаваме автомата* $A_p = \langle \Sigma, Q, \{p\}, \Delta, F \rangle$*, а* $L_A(p) = L(A_p)$*. Да се докаже, че:*

1. *ако* $f \in F$*, то* $\varepsilon \in L_A(f)$*.*

2. *ако* $\langle p, a, q \rangle \in \Delta$*, то* $\{a\} \circ L_A(q) \subseteq L_A(p)$*.*

3. *за всяко* $p \in Q$ *е в сила равенството*[1]*:*

$$L_A(p) = \bigcup_{(a,q):\langle p,a,q \rangle \in \Delta} (\{a\} \circ L_A(q)) \cup \{\varepsilon \,|\, p \in F\}.$$

4. *ако* $L'(p) \subseteq \Sigma^*$ *за* $p \in Q$ *са произволни езици, за които са изпълнени равенствата:*

$$L'(p) = \bigcup_{(a,q):\langle p,a,q \rangle \in \Delta} (\{a\} \circ L'(q)) \cup \{\varepsilon \,|\, p \in F\}$$

   за всяко $p \in Q$*, то* $L_A(p) \subseteq L'(p)$ *за всяко* $p \in Q$*.*

Задача 0.2. *Нека* Σ *и* Ω *са азбуки, а* $h : \Sigma^* \to \Omega^*$ *е (тотална) функция, за която за всеки две думи* α *и* β *над* Σ *е изпълнено, че:*

$$h(\alpha \cdot \beta) = h(\alpha) \cdot h(\beta).$$

За език L *над* Σ *с* $h(L)$ *означаваме множеството:*

$$h(L) = \{h(\alpha) \,|\, \alpha \in L\}.$$

Да се докаже, че:

1. $h(\varepsilon) = \varepsilon$*.*

2. *за всеки два езика* L_1 *и* L_2 *над* Σ*,* $h(L_1 \cup L_2) = h(L_1) \cup h(L_2)$*.*

3. *за всеки два езика* L_1 *и* L_2 *над* Σ*,* $h(L_1 \cdot L_2) = h(L_1) \cdot h(L_2)$*.*

4. *за всеки език* L *над* Σ*,* $h(L^*) = h(L)^*$*.*

5. *за всеки език* L *над* Σ*,* $h(L^+) = h(L)^+$*.*

Функциите $h : \Sigma^* \to \Omega^*$ със свойството $h(\alpha \cdot \beta) = h(\alpha) \cdot h(\beta)$ за всеки две думи над Σ се наричат *хомоморфизми*. Смисълът им, както целят да покажат горните равенства, е, че те позволяват да пренесем съществена информация (подобия) на думите над Σ в думи над Ω, но не всички (вж. по-долу). Следващата задача показва, че хомоморфизмите се задават еднозначно от еднобуквените думи. Това означава, че такива подобия зависят само от крайна информация.

Задача 0.3. *Нека* Σ *и* Ω *са азбуки, а* $h_0 : \Sigma \to \Omega^*$ *е (тотална) функция от еднобуквените думи в думите над* Ω*. Да се докаже, че:*

1. *има* $h : \Sigma^* \to \Omega^*$*, за която:*

   - $h(a) = h_0(a)$ *за всяко* $a \in \Sigma$ *и*

[1] Множеството $\{\varepsilon \,|\, p \in F\}$ трябва да се разбира като $\{\varepsilon\}$ ако $p \in F$ и като $\emptyset$, ако $p \notin F$.

- $h(\alpha \cdot \beta) = h(\alpha) \cdot h(\beta)$ *за всеки две думи* $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

2. *функцията от точка 1 е единствена.*

Задача 0.4. *Нека* $A = \langle \Sigma, Q, I, \Delta, F \rangle$ *е краен автомат и* $h_0 : \Delta \to \Sigma^*$ *е функцията:*

$$h_0(\langle p, a, q \rangle) = a \text{ за всеки преход } \langle p, a, q \rangle \in \Delta.$$

Нека $h : \Delta^* \to \Sigma^*$ *е функция, за която* $h(\tau) = h_0(\tau)$ *за всеки преход и* $h(\pi_1 \cdot \pi_2) = h(\pi_1) \cdot h(\pi_2)$ *за всеки два нетривиални пътя в* A.

Да се докаже, че:

1. $h(\pi) = \lambda(\pi)$ *за всеки нетривиален път* π *в* A.

2. *ако* $\Pi = \{\pi \text{ път в } A \mid \sigma(\pi) \in I, \tau(\pi) \in F, |\pi| > 0\}$, *то*

$$L(A) = \begin{cases} h(\Pi), & \text{ако } I \cap F = \emptyset \\ h(\Pi) \cup \{\varepsilon\}, & \text{ако } I \cap F \neq \emptyset. \end{cases}$$

По дефиницията на краен автомат, Δ е крайно множество. Така че Δ е азбука и тогава Δ^* са всички последователности от преходи от Δ. Това е смисълът, който е употребен тук. В литературата това означение обикновено има друг смисъл, а именно:

$$\Delta^* = \{\langle p, \alpha, q \rangle \in Q \times \Sigma^* \times Q \mid p \overset{\alpha}{\to}{}^*_A \, q\}.$$

В някакъв смисъл, горната задача, дава обяснение за връзката между двете.

Задача 0.5. *За дума* $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$, *където* $a_i \in \Sigma$ *са символи, с* α^{rev} *бележим думата* $\alpha^{rev} = a_n a_{n-1} \ldots a_1$. *По-общо, за език* $L \subseteq \Sigma^*$ *с* L^{rev} *бележим езика:*

$$L^{rev} = \{\alpha^{rev} \mid \alpha \in L\}.$$

Да се докаже, че:

1. $(\alpha \cdot \beta)^{rev} = \beta^{rev} \cdot \alpha^{rev}$ *за всеки две думи* $\alpha, \beta \in \Sigma^*$.

2. $(\alpha^{rev})^{rev} = \alpha$ *за всяка дума* $\alpha \in \Sigma$.

3. $(L^{rev})^{rev} = L$ *за всеки език* L *над* Σ.

4. $(L_1 \circ L_2)^{rev} = L_2^{rev} \circ L_1^{rev}$ *за всеки два езика* L_1 *и* L_2 *над* Σ^*.

Задача 0.6. *Нека* $A = \langle \Sigma, Q, S, \Delta, F \rangle$ *е краен автомат с* $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$. *Ако*

$$\Delta^{rev} = \{\langle q, a, p \rangle \mid \langle p, a, q \rangle \in \Delta\}$$

и $A^{rev} = \langle \Sigma, Q, F, \Delta^{rev}, S \rangle$ *да се докаже, че* $L(A^{rev}) = (L(A))^{rev}$.

Упътване 0.1. 1. Разгледайте тривиалния път (f).

2. За всеки път π с $\sigma(\pi) = q$ и $\tau(\pi) \in F$ разгледайте пътя $\pi' = \langle p, a, q\rangle\, \pi$.

3. Включването отдясно наляво следва от първи две подточки. За включването отляво надясно забележете, че всеки път π със $\sigma(\pi) = p$ и $\tau(\pi) \in F$ попада в един от следните два класа:

   - $\pi = (p)$ и тогава $p \in F$ и $\lambda(\pi) = \varepsilon$.
   - $\pi = \langle p, a, q\rangle\, \pi'$ като $\sigma(\pi') = q$ и $\tau(\pi') = \tau(\pi) \in F$.

4. Разсъждавайте с индукция по дължината на дума, която принадлежи на някой от езиците $L_A(p)$. По-точно нека $\phi(n)$ е свойството:

$$\phi(n) \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \forall w \in \Sigma^n \forall p \in Q(w \in L_A(p) \Rightarrow w \in L'(p)).$$

   Докажете $\phi(n)$ с индукция по n като използвате предишната подточка.

Упътване 0.2. 1. Използвайте, че $\varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon$. Докажете, че $h(\varepsilon) = h(\varepsilon) \cdot h(\varepsilon)$. Аргументирайте, че дължината на $h(\varepsilon)$ е 0. Довършете.

2. Заместете в дефиницията на $h(L)$ и използвайте, че $\alpha \in L_1 \cup L_2$ е еквивалентно на $\alpha \in L_1$ или $\alpha \in L_2$.

3. Използвайте, че ако $\alpha \in L_1 \cdot L_2$, то по дефиниция, има $\alpha_1 \in L_1$ и $\alpha_2 \in L_2$, за които $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2$. Заключете, че от една страна $h(\alpha_1) \in h(L_1)$ и $h(\alpha_2) \in L_2$, а от друга $h(\alpha) = h(\alpha_1) \cdot h(\alpha_2)$. Аргументирайте, че оттук следва $h(L_1 \cdot L_2) \subseteq h(L_1) \cdot h(L_2)$.

   За включването $h(L_1) \cdot h(L_2) \subseteq h(L_1 \cdot L_2)$ разгледайте произволни $\beta_1 \in h(L_1)$ и $\beta_2 \in h(L_2)$. Аргументирайте, че има $\alpha_1 \in L_1$ и $\alpha_2 \in L_2$, за които $h(\alpha_1) = \beta_1$ и $h(\alpha_2) = \beta_2$. Заключете, че $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \in L_1 \cdot L_2$ и $h(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = \beta_1 \cdot \beta_2$. Покажете, че оттук следва, че $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \in h(L_1 \cdot L_2)$.

4. Припомнете си дефиницията за итерация, $L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$. Обобщете част 2, за да покажете, че $h(\bigcup_{n=0}^{\infty} L^n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} h(L^n)$. Припомнете си дефиницията за L^n, $L^0 = \{\varepsilon\}$ и $L^{n+1} = L^n \cdot L$. Използвайте част 1, за да аргументирате, че $h(L^0) = h(L)^0$ и част 3 заедно с индуктивен аргумент по n, за да покажете, че $h(L^n) = h(L)^n$. Довършете.

Използвайте, че $L^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$. Абстрахирайте аргументите от част 3 така, че резултатът да е директно следствие от вече доказани свойства.

Упътване 0.3.

За дума $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$ над Σ, дефинирайте $h(\alpha) = h_0(a_1) \cdot h_0(a_2) \cdot \dots \cdot h_0(a_n)$. В частност $h(\varepsilon) = \varepsilon$. Използвайте дефиницията за конкатенация на две думи, за да проверите, че $h(\alpha \cdot \beta) = h(\alpha) \cdot h(\beta)$.

Ако $h' : \Sigma^* \to \Omega^*$ е произволна функция, която изпълнява свойствата от точка 1, използвайте част 1 от задача 2, за да аргументирате, че $h'(\varepsilon) = \varepsilon$. След това използвайте свойство 2, т.е. $h'(\alpha \cdot \beta) = h'(\alpha \cdot \beta)$, за да покажете с индукция по n, че за всеки $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma$:

$$h'(a_1 \dots a_n) = h_0(a_1) \cdot h_0(a_2) \cdot \dots \cdot h_0(a_n).$$

Упътване 0.4. 1. Използвайте явната дефиниция на h от решението на предишната задача.

2. Заместете в дефиницията език на краен автомат. Съобразете, че пътищата с дължина 0, тоест тези които не влизат в Π имат етикет ε и такива има от I до F тогава и само тогава, когато $I \cap F \neq \emptyset$.