Задача 1. Да се построи минимален детерминиран тотален краен автомат за:

a) езика $L = \Sigma^* \setminus (\{ab,\ ba\}^* \cdot \{c\})$ над азбуката $\Sigma = \{a, b, c\}$;

b) езика $L = \{a, b\}^+ \cdot \{a\} \cdot \{b\}^+ \cdot \{a\}^*$ над азбуката $\Sigma = \{a, b\}$;

c) езика $L = \{abc\} \cdot \Sigma^* \cup \{ab,\ ba\}^*$ над азбуката $\Sigma = \{a, b, c\}$;

d) езика $L = \{w \ \mid \ w \notin \{a\}^+ \cdot \{b\}^+\}$ над азбуката $\Sigma = \{a, b\}$;

e) езика $L = \{w \ \mid \ w$ не съдържа ab като подниз$\}$ над азбуката $\Sigma = \{a, b\}$;

f) езика $L = \{w \ \mid \ w$ не съдържа нито ab, нито ba като подниз$\}$ над азбуката $\Sigma = \{a, b\}$;

g) езика $L = \{w \ \mid$ ако $\#_a(w) \geq 2$, то $\#_b(w)$ е четно$\}$ над азбуката $\Sigma = \{a, b\}$.

Задача 2. Да се докаже, че езикът

$$L = \{\alpha\beta\gamma\beta \mid \alpha, \beta, \gamma \in \Sigma^+\}$$

е регулярен, където $\Sigma = \{a, b\}$.

Задача 3. Да се докаже, че ако L е регулярен език, то и

$$L' = \{w \in \Sigma^* \mid (w \in L) \Rightarrow ((\forall \beta \in \Sigma^* \setminus L)(\forall \gamma \in \Sigma^*)[w \neq \beta ba\gamma bb])\}$$

също е регулярен.

Задача 4. За дума $w = a_1 a_2 \dots a_n$ с $even(w)$ означаваме думата:

$$even(w) = a_2 a_4 \dots a_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Нека L е произволен регулярен език над азбука Σ. Да се докаже, че:

a) $L_1 = \{even(w) \mid w \in L\}$ е регулярен език;

b) $L_2 = \{w \mid even(w) \in L\}$ е регулярен език.

Задача 5. Дефинираме релацията $\prec \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ по следния начин:

$$\beta \prec \alpha \iff (\exists \gamma \in \Sigma^+)\ [\alpha = \beta \cdot \gamma].$$

Да се докаже, че ако L е регулярен език, то

$$\mathrm{Ext}(L) = \{\alpha \in L \mid (\exists \beta \in L)[\beta \prec \alpha]\}$$

също е регулярен.

Задача 6. Нека L е произволен регулярен език над азбука Σ. Да се докаже, че езикът

$$L_{-\frac{1}{3}-} = \{\beta \mid \alpha\beta\gamma \in L \ \&\ |\alpha| = |\beta| = |\gamma|\}$$

е регулярен.

Задача 7. Да се докаже, че не са регулярни езиците:

a) $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ не е палиндром}\}$, където $\Sigma = \{0, 1\}$;

b) $L = \{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

c) $L = \{w \mid w \in \{1, \#\}^* \text{ и } w = x_1\#x_2\#x_3 \dots \#x_k$, където $k \geq 0$, $x_i \in \{1\}^*$ и $x_i \neq x_j$ за $i \neq j\}$;

Задача 8. Да се докаже, че съществува регулярен език L, такъв че езикът

$$\mathrm{Ord}(L) = \{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_n \mid a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n \in L\}$$

не е регулярен.

Задача 9. Да се докаже, че съществува регулярен език L, такъв че езикът

$$L_{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = \{\alpha\gamma \mid \alpha\beta\gamma \in L \,\&\, |\alpha| = |\beta| = |\gamma|\}$$

не е регулярен.