Условия за колинеарност и компланарност на вектори чрез линейна зависимост

Определение 1

1. Казваме, че векторът v е *колинеарен* с правата l, и пишем $v \parallel l$, ако v има представител, лежащ на l.
   Еквивалентна дефиниция е всеки представител на v да е успореден на l.

2. Казваме, че векторите $v_1, \ldots, v_k$ са *колинеарни*, ако съществува права l, такава че $v_1, \ldots, v_k$ са колинеарни с l. При два вектора пишем $v_1 \parallel v_2$.

3. Казваме, че векторът v е *компланарен* с равнината π, и пишем $v \parallel \pi$, ако v има представител, лежащ в π.
   Еквивалентна дефиниция е всеки представител на v да е успореден на π.

4. Казваме, че векторите $v_1, \ldots, v_k$ са *компланарни*, ако съществува равнина π, такава че $v_1, \ldots, v_k$ са компланарни с π.

Забележка 1 Ако някакви вектори са колинеарни, то те очевидно са компланарни. Също така, ако към тях се добави какъвто и да е вектор, то получените вектори са компланарни.

Теорема 1 *Нека u и v са вектори и $u \neq 0$. Тогава u и v са колинеарни $\Leftrightarrow$ съществува $\lambda \in \mathbb{R}$, така че $v = \lambda u$.*
Числото λ в това равенство е единствено.

Следствие 1 (условие за колинеарност на два вектора)
Два вектора са колинеарни $\Leftrightarrow$ са линейно зависими.

Следствие 2 *Векторите, колинеарни с дадена права, образуват едномерно реално линейно пространство.*

Теорема 2 *Нека u, v, w са вектори, като u и v не са колинеарни. Тогава u, v, w са компланарни $\Leftrightarrow$ съществуват $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, така че $w = \lambda u + \mu v$.*
Числата λ и μ в това равенство са единствени.

Следствие 3 (условие за компланарност на три вектора)
Три вектора са компланарни $\Leftrightarrow$ са линейно зависими.

Следствие 4 *Векторите, компланарни с дадена равнина, образуват двумерно реално линейно пространство.*

Теорема 3 *Нека u, v, w са некомпланарни вектори. Тогава за всеки вектор t съществуват единствени $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, така че $t = \lambda u + \mu v + \nu w$.*

Следствие 5 *Всеки четири вектора в пространството са линейно зависими.*

Следствие 6 *Векторите в пространството образуват тримерно реално линейно пространство.*