Тема 1 ~~общия случай~~

(а) Релация – подмножество на декартово произведение на две или повече множества (на базата на някакво правило). Всяко подмножество на декартово произведение на множества на $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се нарича n-местна релация

Релация на еквивалентност $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ релация със свойствата рефлексивност, симетричност и транзитивност

Нека $F = \{[x] / x \in A\}$ – разбиване на A, щото:

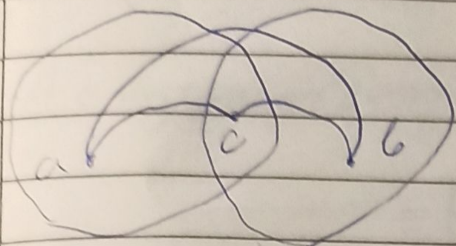
1) $\bigcup F = A \Rightarrow x \in A \quad x \in [x]$

2) $F \neq \emptyset \longrightarrow$ от (1)

3) $[a] \neq [b] \quad [a] \cap [b] = \emptyset$

Д-во: (3) Нека допуснем, че $[a] \neq [b]$ и $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, c \in [a],\ c \in [b] :$ aRc и bRc

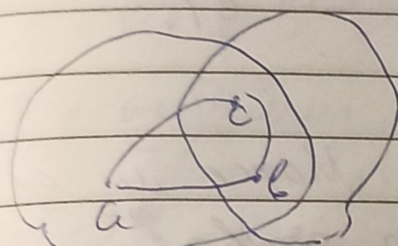


$$\underbrace{aRc \text{ и } bRc}$$

$\downarrow$ от симетричността

$$\underbrace{aRc \text{ и } cRb}$$

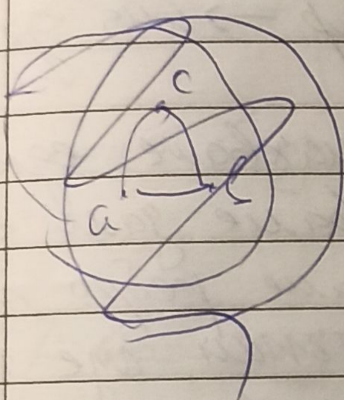
$\downarrow$ от транзитивността



$$aRb$$

$$\underbrace{\Rightarrow b \in [a]}$$

$\downarrow$ симетричност

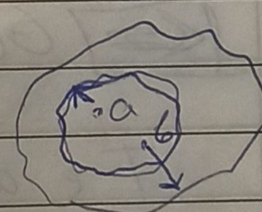


$$bRa$$

$$\Rightarrow a \in [b]$$

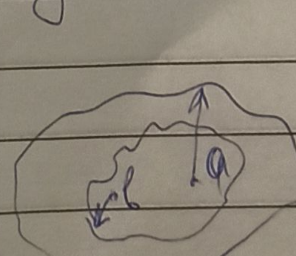
Нека $x \in [a]$: $\left.\begin{array}{l} aRx \\ bRa \end{array}\right\} \to bRx \to x \in [b]$

$\to [a] \subseteq [b]$



Нека $y \in [b]$: $\left.\begin{array}{l} bRy \\ aRb \end{array}\right\} \to aRy \to y \in [a]$

$\to [b] \subseteq [a]$



$\left.\begin{array}{l}[a] \subseteq [b] \\ [b] \subseteq [a]\end{array}\right\} \Rightarrow [a] = [b]$ – противоречие с допускането

Следователно $[a] \neq [b]$ и $[a] \cap [b] = \emptyset$

$\Rightarrow F$ е разбиване на A

(б) $G(V, E)$ неориент. е свързан $\Longleftrightarrow$ има покриващо дърво

Д-во:

$\boxed{\Rightarrow}$ $G(V, E)$ е свързан. Може ли да има ~~дърво~~ покриващо дърво?

1) ако $G(V, E)$ е ацикличен граф $\rightarrow$ има дърво

2) ако в $G(V, E)$ има цикли, премахваме едно ребро от цикъла и отново проверяваме дали има цикли. Ако има отново премахваме ребро и проверяваме. След краен брой стъпки ще получим ацикличен граф, който ще е дърво

$\boxed{\Leftarrow}$ $G(V, E)$ има покриващо дърво $T(V, E')$

T е свързан, тъй като е дърво и $E' \subseteq E$

Тогава и $G(V, E)$ е свързан граф

Тема 2

(a) A е крайно множество $\xleftrightarrow{def}$ $\exists n \in \mathbb{N} : \exists f : I_n \to A$, f е биекция

$I_n = \{1, \dots, n\}$

A е безкрайно множество $\xleftrightarrow{def}$ A не е крайно $\equiv$

$\equiv \forall n \in \mathbb{N} : \nexists f : I_n \to A$, f не е биекция

A е (безкрайно) изброимо $\xleftrightarrow{def}$ $f : \mathbb{N} \to A$, f е биекция

A е изброимо, когато е крайно или безкрайно изброимо

$\exists\ 2^{\mathbb{N}}$ - неизброимо

Д-во: $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ (Диагонален метод на Кантор)

Док. $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Д-во: индукция по n

База: $n = 0$

$(x+y)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} x^{0-0} y^0 \Rightarrow 1 = 1$

Нека е вярно за произволно n

Сега ще докажем за n+1:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k (x+y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}$$

$$= \left[\binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{n} x^0 y^n\right](x+y) =$$

$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$
$$= \left[\binom{n}{0} x^{n+1} y^0 + \binom{n}{1} x^n y^1 + \binom{n}{2} x^{n-1} y^2 + \dots + \binom{n}{n} x^1 y^n\right] +$$

$\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$
$$+ \left[\binom{n}{0} x^{n} y^1 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^2 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^3 + \dots + \binom{n}{n} x^0 y^{n+1}\right] =$$

$$= \binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0 + x^n y^1 \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right) + x^{n-1} y^2 \left(\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right) + \dots + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0 + \binom{n+1}{1} x^n y^1 + \binom{n+1}{2} x^{n-1} y^2 + \dots + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1} =$$

$$= \cancel{\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{(n+1)-k} y^k$$

Тема 9

а) Док., че декартовото произведение на две безкрайни изброими множества е изброимо

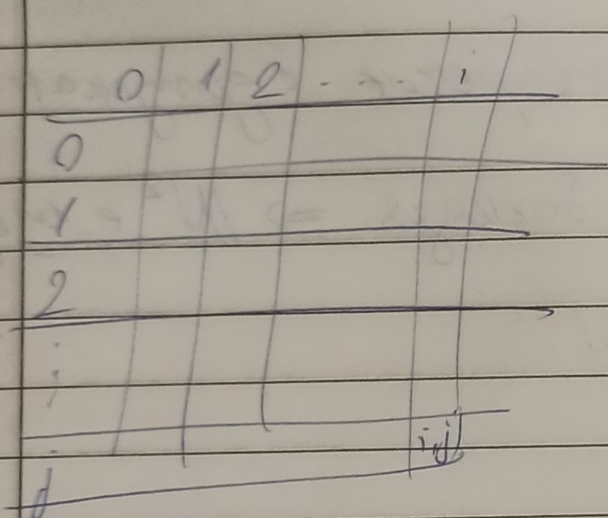
Нека S, T - безкрайни изброими множества

$\Rightarrow \exists f: S \to \mathbb{N}$, биекция

$\Rightarrow \exists g: T \to \mathbb{N}$, биекция

$\Rightarrow \exists p: S \times T \to \mathbb{N}^2$, ако $\mathbb{N}^2$ е изброимо, то и $S \times T$ също е

$h: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ и $h(i,j) = 2^i(2j+1) - 1$



Проверяваме дали $h(i,j) \in \mathbb{N}$

$h(0,0) = 2^0(2.0+1) - 1 = 0 \in \mathbb{N}$

Нека вземем друга двойка i_1, j_1 за която:

$$h(i_1, j_1) = 2^{i_1}(2j_1+1) - 1$$

Да допуснем, че $(i,j) \neq (i_1,j_1)$, но $h(i,j) = h(i_1,j_1)$

Имаме: $2^{i}(2j+1)-1 = 2^{i_1}(2j_1+1)-1$

Започваме да делим на две. Ако $i > i_1$ или $i < i_1$ тогава от единия край ще има четно число, а от другия нечетно и равенството няма да бъде изпълнено. Единственият вариант е $i = i_1$. Тогава:

$$2j \cancel{+1} = 2j_1 \cancel{+1}$$

$$j = j_1$$

$\Rightarrow i = i_1$ и $j = j_1$ – противоречие с допускането

h е инекция $\Rightarrow h$ е биекция $\Rightarrow \mathbb{N}^2$ е изброимо

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} S \times T \arrow[r, "p"] \arrow[rr, bend right, "p \circ h"'] & \mathbb{N}^2 \arrow[r, "h"] & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

$\exists\, t = p \circ h : t : S \times T \to \mathbb{N}$ биекция

$\Rightarrow S \times T$ е изброимо

Теорема на Бул

Множеството $F = \{\neg, \wedge, \vee\}$ е пълно

Д-во: Нека имаме функция f

x_1	x_2	...	x_n	f
0	0	...	0	0
0	0	...	1	⋮
			⋮	1
				⋮
				1
				⋮
1	1	...	1	1

<u>1сл.</u> $f(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall x_1 x_2 \dots x_n \Rightarrow f = 0 \dots 0$

$$\Rightarrow f(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 \wedge \overline{x_1} = \tilde{0}$$

Независимо от другите променливи ако x_1 е единица, отрицанието е нула и конюнкцията ще бъде 0. Аналогично, ако $x_1 = 0 \Rightarrow \overline{x_1} = 1 \Rightarrow x_1 \wedge \overline{x_1} = 0$

<u>2сл.</u> Нека f приема стойност 1 в ред i, иначе f е 0 във всеки друг ред

x_1	x_2	...	x_n	f
		...		0
				⋮
				0
α_1	α_2	...	α_n	1
				0
				⋮
				0

$f(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = 1$

и $f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$

Дефинираме $x^{\sigma} = \begin{cases} x, \text{ ако } \sigma = 1 \\ \bar{x}, \text{ ако } \sigma = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x^{\sigma} = 1 \iff x = \sigma$

$f(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge x_3^{\alpha_3} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}$

Нека да вземем кой ред j

$x_1\ x_2 \dots x_n$	f
$- \quad - \quad -$	0
	$\vdots$
	0
$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$	1
	0
$\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$	$\vdots$
$1\ 1 \dots 1$	0

$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ се различава с $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ на поне една позиция. Нека например

$\alpha_k \neq \beta_k$

[за]ставаме x [с] β $\Rightarrow x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge x_k^{\alpha_k} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n}$

$\beta_1^{\alpha_1} \wedge \beta_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \beta_k^{\alpha_k} \wedge \dots \wedge \beta_n^{\alpha_n}$

но $\beta_k \neq \alpha_k \Rightarrow \beta_k^{\alpha_k} = 0$

$\Rightarrow f(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n} = 0$

f ще бъде 1 само на ред i, защото $\alpha_1 = \alpha_1, \dots, \alpha_n$

$f(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = \alpha_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \alpha_n^{\alpha_n} =$

$= 1 \wedge 1 \wedge \dots \wedge 1 = 1$

Нека тази формула да я запишем като

$$\varphi_i(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n} \equiv f(\alpha_1, \dots \alpha_n)$$

3сл./ Във вектор на f има $k > 1$ единици и те са на редове $i_1, i_2, \dots, i_k$

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \varphi_{i_1} \vee \varphi_{i_2} \vee \varphi_{i_3} \vee \dots \vee \varphi_{i_k}$$

Когато сме на ред i_1, φ_{i_1} ще бъде единица, а всички други φ-та ще са нули. Ако сме на ред i_2, само φ_{i_2} ще е единица и т.н. до i_k ред. Ако не сме на нито от редовете $i_1, \dots, i_k$ всички $\varphi_{i_1, \dots, i_k}$ ще бъдат нули.

Тема 4:

(a) f е крайна редица $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ $f: I_n \to A$, f е тотална

$$I_n = \{1, \dots, n\}$$

f е безкрайна редица $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ $f: \mathbb{N} \to A$, f е тотална

A е крайно мн. $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists f: I_n \leftrightarrow A$, f е биекция

A е безкрайно мн. $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ A не е крайно $\equiv$

$$\equiv \forall n \in \mathbb{N}\ \forall f: I_n \to A,\ f \text{ не е биекция}$$

A е безкрайно изброимо $\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists f: \mathbb{N} \to A$, f е биекция

A е изброимо, ако е крайно или безкрайно изброимо

Принцип на Дирихле

Ако имаме n предмета и m чекмеджета и трябва да сложим предметите в чекмеджетата. Ако $n > m$, то тогава принципът на Дирихле гласи, че поне 2 предмета в поне 1 чекмедже.

(b) Докажете, че булева функция може да се изрази по единствен начин чрез полином на Жегалкин.

ПЭК

б-ва: Нека разгледаме общия вид на полинома на Жегалкин

$$a_0 \oplus \sum_{1\le i\le n} a_i x_i \oplus \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij} x_i x_j \oplus \dots \oplus a_{12\dots n} x_1 x_2 \dots x_n$$

Различните функции на n аргумента имат различни представяния чрез полинома на Ж. Различните полиноми се получават от различните стойности на коефициентите. Броят им е:

~~своб~~ свободен член $\rightarrow 1 = \binom{n}{0}$

1 променлива $\rightarrow n = \binom{n}{1}$

2 променливи $\rightarrow \binom{n}{2}$

$\vdots$

n променливи $\rightarrow \binom{n}{n} = 1$

Общо:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Всеки коефициент може да има стойност 0 или 1. Общо различните полиноми са 2^{2^n}, точно толкова са булевите функции. Следователно всяка булева функция има точно едно представяне чрез полином на Жегалкин

Тема 5

(a) Част. наредба $\xleftrightarrow{def}$ R със свойства:
рефлексивност
антисиметричност
транзитивност

b - 6т.

Верига:

$a_1, \dots, a_n$ е верига $\xleftrightarrow{def}$ $(a_i, a_{i+1}) \in R$, $i \in \{1, \dots, n\}$

Контур:

$a_1, \dots, a_n$ е контур $\xleftrightarrow{def}$ $(a_i, a_{i+1}) \in R$ & $(a_n, a_1) \in R$, $i \in \{1, \dots, n\}$

(b) $n!$ и $\binom{n}{k}$

$$n! = \begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \cdot (n-1)! \end{cases}$$ - Индукционна дефиниция

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$m \quad m \quad m$

$\underbrace{m \cdot m \cdot m \dots m}_{n \text{ пъти}} = m^n$

$|A| = n \qquad |B| = m$

(a) $m^n \qquad |B|^{|A|}$

$*$ - недефинирано

(b) $(m+1)^n$ - час. $\qquad f: A \to B \cup \{*\}$

(c) $\frac{m!}{(m-n)!}$ $\qquad \alpha_1 \ \alpha_2 \dots \alpha_n$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$m \quad m-1 \quad m-n+1$

$\Big\} \ m \cdot (m-1) \dots (m-n+1)$

Тема 6

(а) Дефин. минимален и максимален елемент в част. наредба

a е минимален $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ $\forall b \; b \neq a \quad (b, a) \notin R$

a е максимален $\overset{def}{\longleftrightarrow}$ $\forall b \; b \neq a \quad (a, b) \notin R$

Теорема: Всяка крайна част. наредба може да се разшири до пълна

Нека A - крайно мн. $|A| = n$

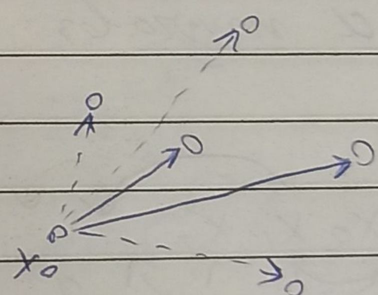
$R \subseteq A \times A$ - релация, R - част. наредба

$\Rightarrow \exists R' \quad R \subseteq R' \quad R'$ - пълна наредба

Д-во: чрез конструиране (алгоритъм)

x_0 - мин. елемент в A

$R_0 = \{(x_0, y) \mid y \in A, y \neq x_0\}$



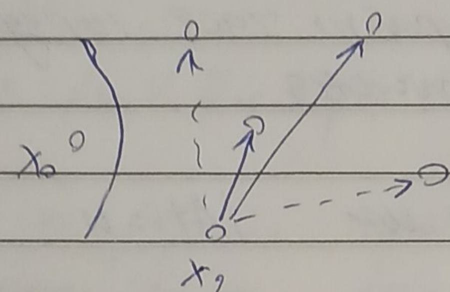
От x_0 създаваме нови релации към другите елементи, които не са свързани с x_0

R_0 отново е частична наредба

Сега отделяме x_0 настрани и търсим нов минимален елемент

x_1 - мин. елемент в $A \setminus \{x_0\}$

$R_1 = R_0 \cup \{(x_1, y) \mid y \in A, y \neq x_1, x_0\}$

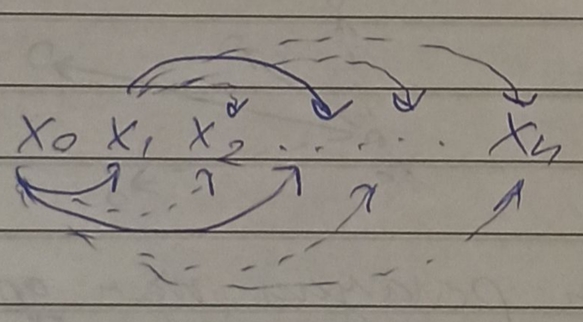


Отново създаваме нови връзки от x_1 към елемент y, който не е свързан с x_1

R_1 също е част. наредба

След краен брой повторения на алгоритъма

и получаваме R' пълна наредба



(б) φ е импликанта за $f \overset{def}{\longleftrightarrow} \varphi(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$

φ е проста импликанта за $f \overset{def}{\longleftrightarrow}$ 1) φ е импликанта за f
2) φ не може да съкрати

x	y	z	f	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\to \bar{x}\bar{y}z$
0	1	0	1	$\to \bar{x}y\bar{z}$
0	1	1	0	
1	0	0	1	$\to x\bar{y}\bar{z}$
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	$\to xyz$

3	
$\bar{x}\bar{y}z$	Не можем да съкратим f повече, защото всички импликанти и различават на повече от 1 едно място
$\bar{x}y\bar{z}$	
$x\bar{y}\bar{z}$	
xyz	

$\Rightarrow$ минималната ДНФ съвпада със СъвДНФ

Тема 7

(а) Док., че няма биекция $f: \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$

Нека $A \subseteq \mathbb{N}$ $\quad \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n$ $\quad, \alpha_i \in \{0, 1\}, i = 0, \dots, n$

$\alpha: A \to \{0, 1\}$

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{ако } i \notin A \\ 1, & \text{ако } i \in A \end{cases}$$

Нареждаме всички подмножества на естествените числа в редица както:

$A_i = \alpha_0^i \alpha_1^i \dots \alpha_n^i \dots$, където i е индекса на подмножеството а 0,...,n са номерата на битовете в редицата

$A_0 \quad \alpha_0^0 \; \alpha_1^0 \; \alpha_2^0 \; \dots \; \alpha_n^0 \; \dots$

$A_1 \quad \alpha_0^1 \; \alpha_1^1 \; \alpha_2^1 \; \dots \; \alpha_n^1 \; \dots$

$A_2 \quad \alpha_0^2 \; \alpha_1^2 \; \alpha_2^2 \; \dots \; \alpha_n^2 \; \dots$

$\cancel{A_n \quad \alpha_0^n \; \alpha}$

$\vdots$

$A_n \quad \alpha_0^n \; \alpha_1^n \; \alpha_2^n \; \dots \; \alpha_n^n \; \dots$

$$\alpha_i^n = \begin{cases} 1, & \text{ако } i \in A_i \\ 0, & \text{ако } i \notin A_i \end{cases}$$

Взимаме диагонала и конструираме редица

$\beta = \overline{\alpha_0^0} \; \overline{\alpha_1^1} \; \overline{\alpha_2^2} \; \dots \; \overline{\alpha_n^n} \; \dots$

β не е равна на никой от редовете $A_1, \dots, A_n$, защото диагоналния елемент се обръща и така има разлика в поне 1 място

$\Rightarrow$ f не е сюрекция $\Rightarrow$ f не е биекция

$\beta = \overline{\alpha_0^0} \; \overline{\alpha_1^1} \; \overline{\alpha_2^2} \; \dots \; \overline{\alpha_n^n} \; \dots$

$A_n = \alpha_0^n \; \alpha_1^n \; \alpha_2^n \; \dots \; \alpha_n^n \; \dots$

$$\alpha_n^n \neq \overline{\alpha_n^n}$$

1) Дефинирайте графа на n-мерния хиперкуб
а) за кои n графа има Хамилтонов цикъл
b) за кои n в графа има Ойлеров цикъл

$B_n(V_n, E_n)$

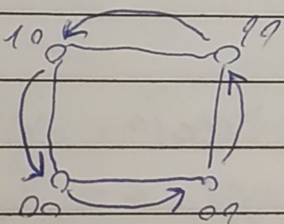
$V_n = \{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \mid \alpha_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, n\}$

$E_n = \left\{(\alpha, \beta) \mid \alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n \quad \beta = \beta_1, \dots, \beta_n, \ \sum |\alpha_i - \beta_i| = 1, \ \sum (\alpha_i - \beta_i)^2 = 1\right\}$

а) за $n \geq 2$

Д-во: индукция по n

База: $n = 2$



Нека е изпълнено за B_n има Хамилтонов цикъл

Проверяваме за B_{n+1}

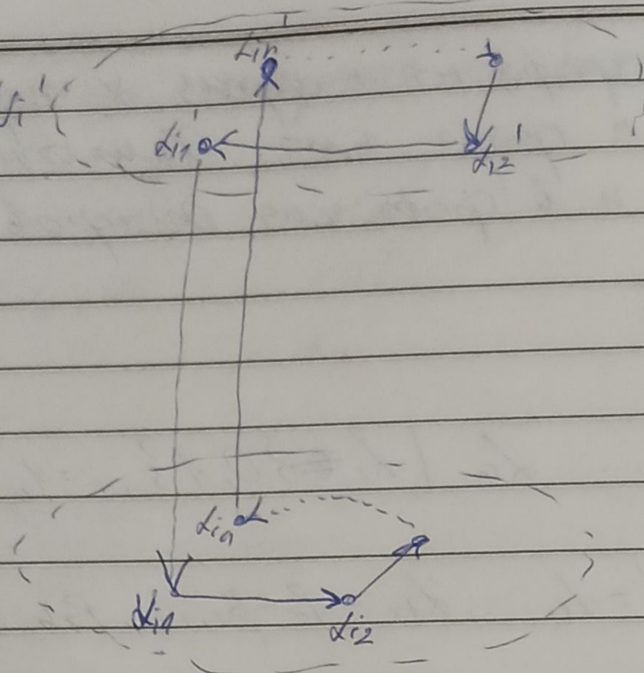
$\Rightarrow V_{n+1} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \mid \alpha_i = \{0,1\}\}$

Може да се представи като

$V_i = \{\alpha_{i1} \alpha_{i2} \dots \alpha_{in}, 0\}$

$V_i' = \{\alpha_{i1}' \alpha_{i2}' \dots \alpha_{in}', 1\}$

Тогава: V_i'



Обикаляме върховете от върха α_{i1} към α_{in} и се качваме по реброто нагоре вместо да се връщаме в α_{i1}. След това от горните върхове правим обиколка в обратна посока и се връщаме от α_{i1}' към α_{i1} по реброто между тях

b) n - четно число

За да съществува Ойлеров цикъл трябва степента на върховете да бъде четна, защото при преминаване през някой връх са ни нужни 2 ребра - влизане във върха и излизане от него.

Тема 8

а) Док., че има биекция $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Решение: Ще докажем, че има биекция от $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Тогава обратната ф-ция на $g^{-1} = f$ и тази също та е биективна

Зачитване: доказване на инекция и сюрекция за ~~формулата~~ формулата $2^i(2j+1)-1$, ~~къд~~ където за (i,j) съпоставя число.

	0	1	2	...	i
0					
1					
2					
:					
j					i,j

решава задачите за

б) Алгоритъмът на Прим намиране на минимално покриващо дърво (MST), т.е търси свързан подграф с минимално тегло. Алгоритъмът на Дейкстра намира най-краткия път от зададен връх до всички останали върхове на графа.

Прилики: и двата алгоритъма намират ~~...~~ покриващи дървета и търсят минимални стойности (тегла)

Разлики: При алгоритъма на Прим се избира ребро с най-малка стойност с начало обходен връх и край необходен. В алгоритъма на Дейкстра се търси ~~реб~~ ребро с най-малка сума $d(u)+w(u,v)$

Търси най-кратък път от фиксиран връх и не винаги най-краткото ребро удовлетворява т... Също при Дейкстра теглата на ребрата са положителни.

Тема 9

(а) Дефинир. релацията част. наредба. Дефин. понятие път в граф. Разгл. рел. „има път от вр. u до вр. v". Кога тази релация е част. наредба и кога е рел. на еквивалентност.

Част. наредба:

R е част. наредба $\longleftrightarrow$ R е рефл., антисимет., и транзит.

~~път в граф - редица от редуващи се върхове и ребра в G(V,E)~~

Път в граф е крайна редица $p = v_1 v_2 \ldots v_k$ от върхове, където $(v_i, v_{i+1}) \in E$, т.е. между всяка двойка върхове има ребро

Нека в $G(V,E)$ има път от u до v