

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“



Трасиране на лъчи

ТЕМА №18

Съдържание

Тема 18: Трасиране на лъчи

- Основни идеи
- Пресичане на лъчи
- Отражение и пречупване

Основни идеи

Трасиране на лъчи

Какво е това?

- Всеки алгоритъм, който обхожда траекторията на светлинни лъчи в права или обратна посока

Посоки на обхождане

- Права посока – от източника към наблюдателя
- Обратна посока – от наблюдателя към източника

Използване

Определяне на видимост

- При сложни обекти, за които другите алгоритми не работят добре

Отчитане материала на обект

- Отразяване на светлината – гладък / матов материал
- Пречупване на светлината – полупрозрачен материал с различни оптична плътност

Сенки и засенчване

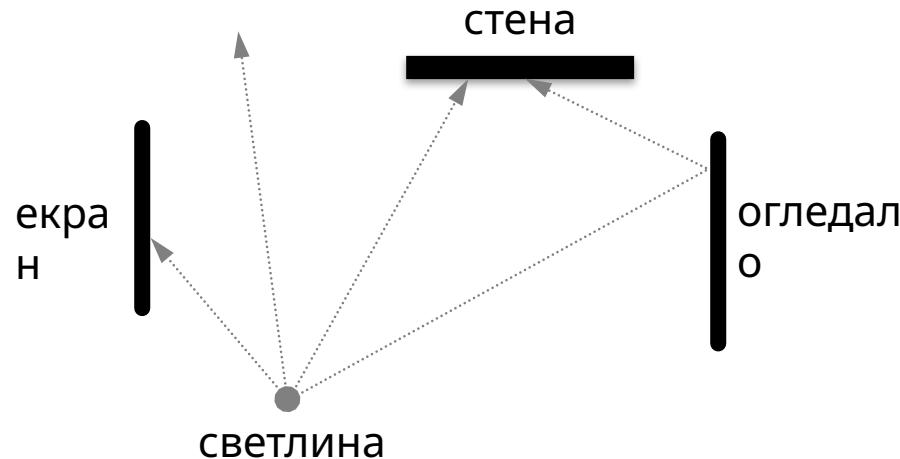
- Определяне на сянката на обект
- Сянка на обект върху други обекти

Определяне на сблъсък

- Сблъсък между обекти с нерегулярни форми

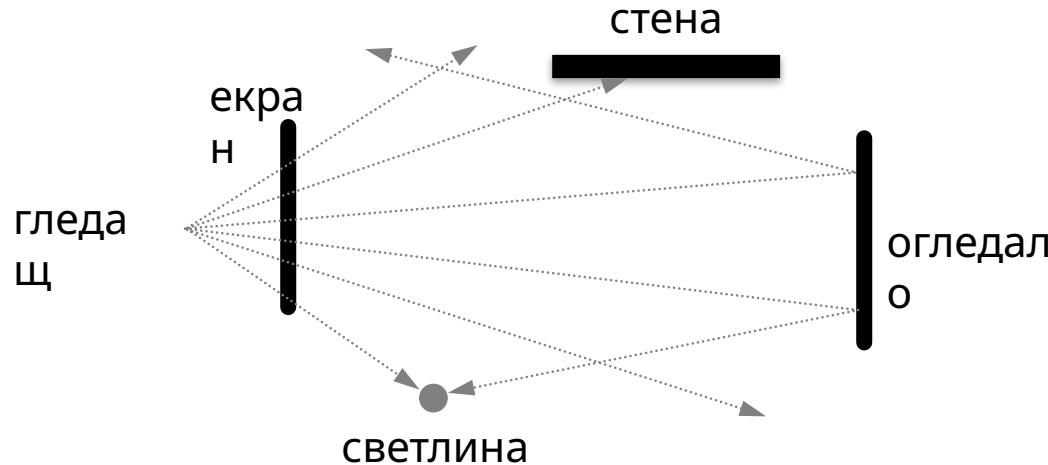
Права посока

- Лъчът излиза от източника
- Следи се попадане върху други обекти
- Понякога може да се трасират ненужно много лъчи



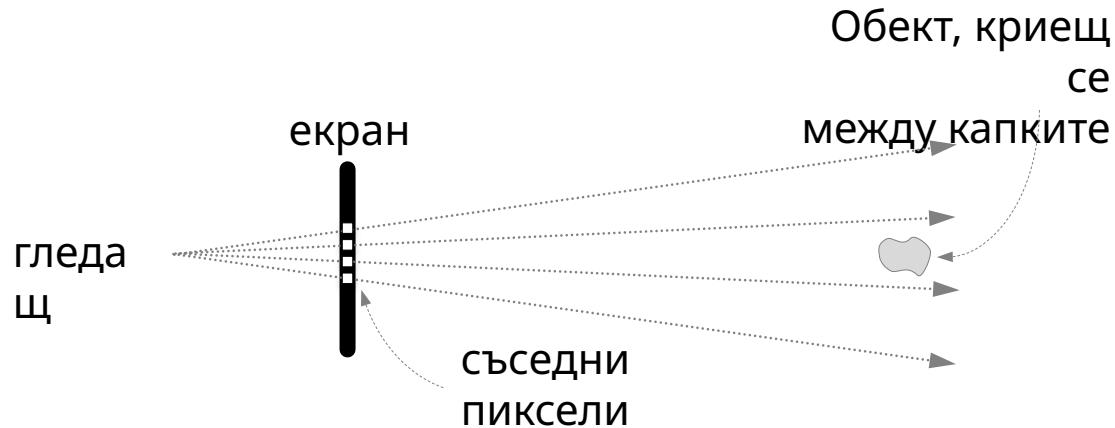
Обратна посока

- Лъчът излиза от гледащия
- Следи се кога и как лъчът попада на обекти и светлинни източници



Проблеми на обратната връзка

- Ограничение за максимален брой отражения
- Не се вижда обект, който е „между“ два пиксела



Основни трудности

Изчисляване на пресичане

- Пресичането на лъч със сложен обект е трудоемко

Отражения и пречуввания

- Наслагване на множество отражения и пречуввания

Различни материи

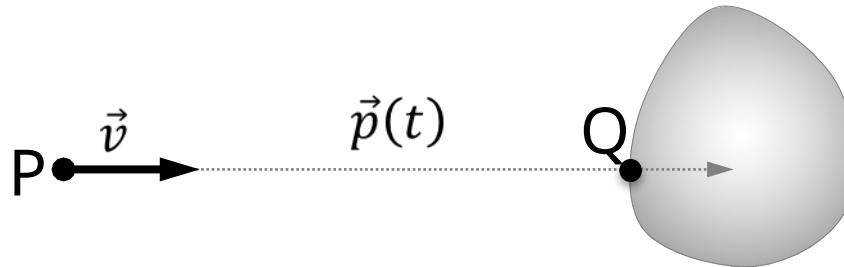
- Гладки, матови, прозрачни, фосфоресциращи

Пресичане на лъчи

Пресичане

Основна задача

- Намиране сечението Q на лъч и обект
- Задаване на лъч чрез параметър $\vec{p}(t) = P + t\vec{v}$



- Сечението може да намери аналитично и числено

Аналитичен метод за сечение

- Приложим при обекти, зададени чрез полиноми от достатъчно ниска степен
- Много графични обекти могат да се представят така

Ще бъде разгледано

- Сечение с равнина
- Сечение с квадратична повърхност

Сечение с равнина

Сечение на лъч с равнина

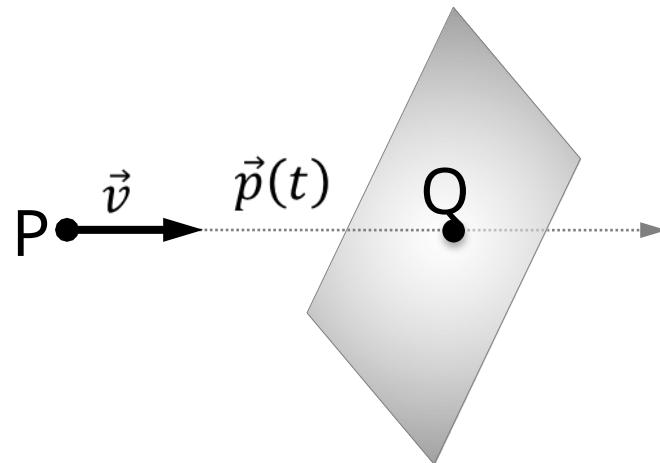
- Точка Q е на лъча и на равнината

$$aQ_x + bQ_y + cQ_z + d = 0$$

$$Q_x = P_x + t v_x$$

$$Q_y = P_y + t v_y$$

$$Q_z = P_z + t v_z$$



Получава се

$$a(P_x + tv_x) + b(P_y + tv_y) + c(P_z + tv_z) + d = 0$$

$$\text{т.е. } t = \frac{aP_x + bP_y + cP_z + d}{av_x + bv_y + cv_z}$$

Математическо отклонение

- В хомогенни координати P, \vec{v} и S имат вига $P(P_x, P_y, P_z, 1), \vec{v}(v_x, v_y, v_z, 0)$ и $S(a, b, c, d)$
- Тогава става красицвото $t = -\frac{S(P)}{S(\vec{v})} = -\frac{S \cdot P}{S \cdot \vec{v}}$

Получен е резултат t

- Отнася се за сечение на линия с равнина
- За лъч – разглежда се $0 \leq t < \infty$
 - Ако $t < 0$, лъчът сочи в обратна посока
 - Ако $t = \infty$, лъчът е успореден

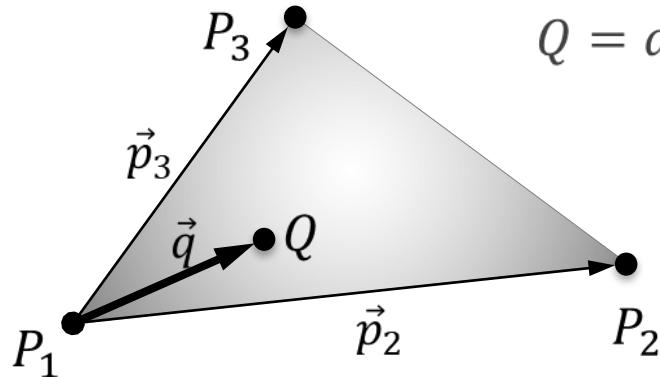
После какво?

- В реалност сечението е със стена, а не с равнина
- Стената е многоъгълник, т.е. задачата се свежда до проверка дали точка е вътрешна за многоъгълник

Лъч и триъгълник

Сечение на лъч и триъгълник

- Обект е дефиниран с триъгълна мрежа
- Всяка стена дефинира равнина



$$Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 : \alpha_i \in [0,1]; \sum \alpha_i = 1$$

$$Q = (1 - \alpha_2 - \alpha_3)P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$$

$$Q - P_1 = \alpha_2(P_2 - P_1) + \alpha_3(P_3 - P_1)$$

$$\vec{q} = \alpha_2 \vec{p}_2 + \alpha_3 \vec{p}_3$$

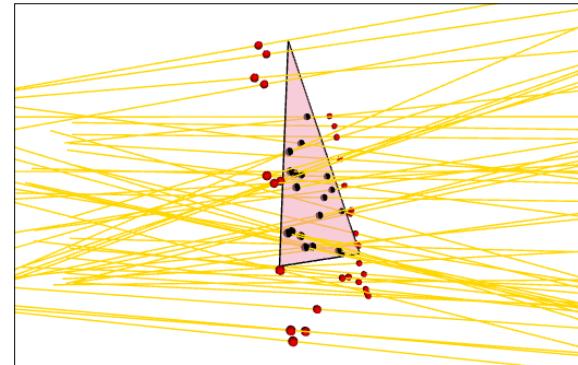
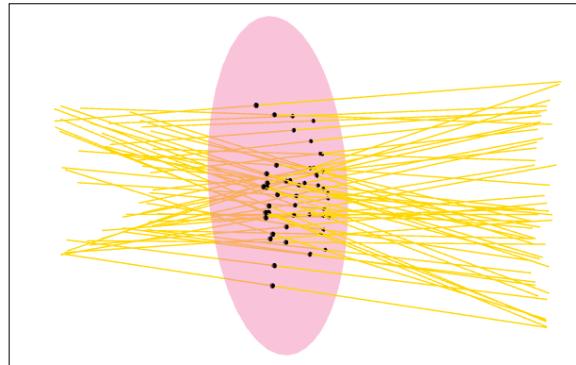
- Умножава се \vec{q} скаларно с \vec{p}_2 и \vec{p}_3
- Система от две линейни уравнения с две неизвестни

$$\begin{cases} \vec{q} \cdot \vec{p}_2 = \alpha_2 \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_2 + \alpha_3 \vec{p}_3 \cdot \vec{p}_2 \\ \vec{q} \cdot \vec{p}_3 = \alpha_2 \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3 + \alpha_3 \vec{p}_3 \cdot \vec{p}_3 \end{cases}$$

- Решаването ѝ дава α_2 и α_3
- Ако $0 \leq \alpha_i \leq 1$, то Q е вътрешна

Примерни сечения

- Сечение на спагети с равнина
- Сечение на спагети с триъгълник



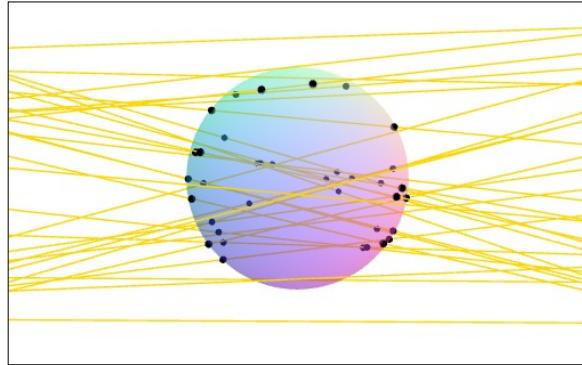
Квадратични обекти

Сечение на лъч с квадратични обекти

- Такива обекти са сферата, цилиндъра,...
- Свеждат се до решаване на квадратни уравнения
- А тук всеки знае да решава квадратни уравнения (дори щорите и дограмата)

Сечение на спаге... лъчи със сфера

– Подвижна сфера



Числен метод

Числен метод за сечение

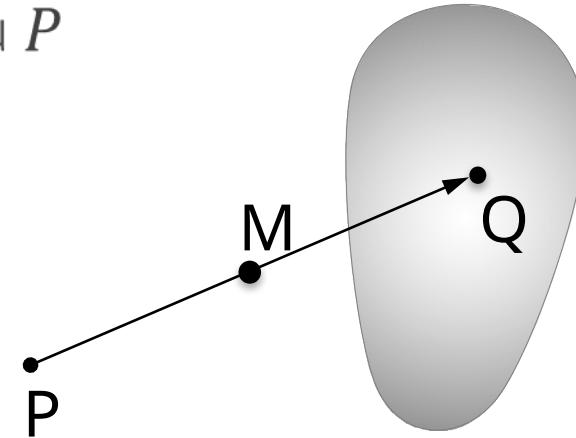
- Получава сечението с приближение
- Да се внимава при подбора на първоначална априксимация

Методи

- Метод на Нютон чрез допирателна
- Метод на двоичното търсене

Двоично търсене

- С магия се намира външна точка P и вътрешна Q
- Намира се средата $M = \frac{(P+Q)}{2}$
- Ако M е външна, продължава се с M и Q
- Ако M не е външна – с M и P
- Повтаря се до гостигане на желаната точност



Пример чрез трасиране на лъчи

- Да се генерира обектът с повърхност

$$f(x, y, z) = (2x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 - \frac{x^2 z^3}{10} - y^2 z^3 = 0$$

- Точка $(0,0,0)$ е Вътрешна, а $(1,0,0)$ е Външна
(или обратното (всъщност няма значение кое кое е))

$$f(0,0,0) = -1 < 0$$

$$f(1,0,0) = +1 > 0$$

Това дава следната идея

- Ако се тръгне от $(0,0,0)$ в някаква посока, след време ще се пресече обекта
- После с гвочично търсене се намира приближена граница

Внимание

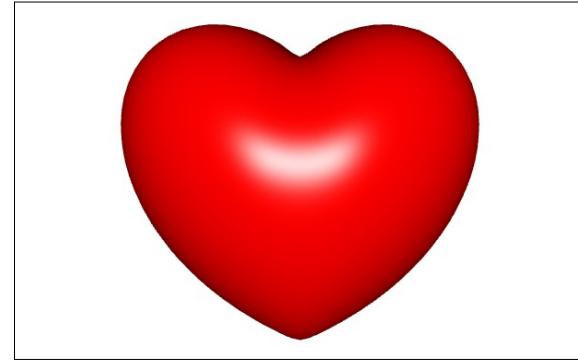
- С тази идея се надява обектът да е затворена повърхност и точка $(0,0,0)$ е вътрешна
- Едва след построяние на обекта се вижда дали е така

Тука следва упорито писане на код с фоновата МИСЪЛ:

- Ако се пусне двоичното търсене паралелно по всички направления, би изглеждало като балон, който се раздува, докато не заеме дадена форма ...
- Като балон от дъвка, който се пука и приема лицевия релеф на дъвчещия ... или на този срещу него

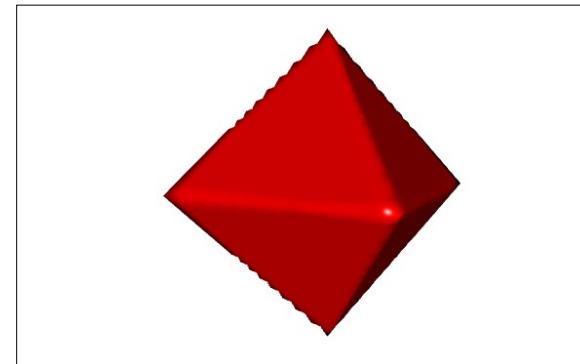
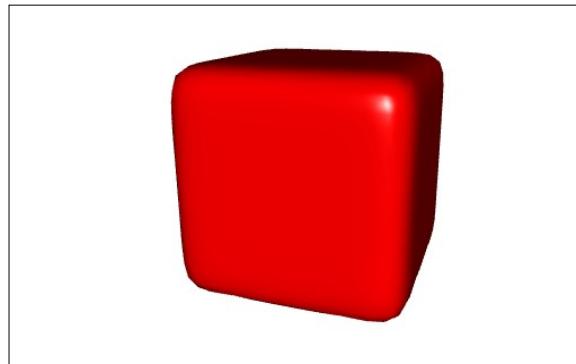
Емо резултата

– Само $(2x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 - \frac{x^2z^3}{10} - y^2z^3 = 0$



Две други повърхнини

- Заоблен куб $x^{10} + y^{10} + z^{10} = 1$
- Настръхнал октаедър $|x| + |y| + |z| = 1$



Отражение и преувеличение

Какво е това

Отражение

- Лъч достига до повърхност и се отразява от нея
- На английски reflection

Пречупване

- Лъч достига до повърхност и навлиза в нея,
променяйки посоката си
- На английски refraction

Общото

- Изискват трасиране на лъчи
- Случват се едновременно
- Светлинният лъч променя посоката си

Различното

- Дали преминава или не отвъд границата на обекта

Отражение

Основна употреба

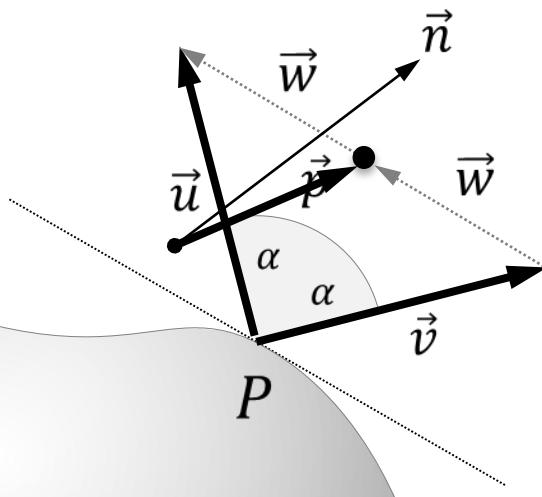
- Постигане на по-голяма реалистичност
- Огледални и гладки повърхности
- Дори и матовите могат да отразяват

Основен закон

- Лъч се отразява под същия ъгъл, под който пада към повърхността

Изчисляване без ъгъл

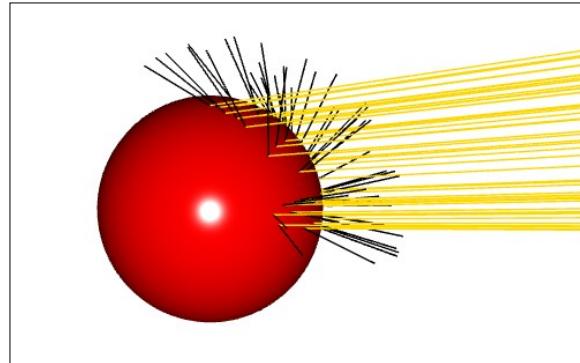
- Падаш лъч \vec{v} , отразен \vec{u} , нормала \vec{n}
- И трите вектора са нормирани, т.е. $|\dots| = 1$



$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{v} + 2\vec{w} = \vec{v} + 2(\vec{p} - \vec{v}) = \\&= 2\vec{p} - \vec{v} = 2|\vec{p}|\vec{n} - \vec{v} = \\&= 2(\cos \alpha)\vec{n} - \vec{v} = \\&= 2(|\vec{n}| |\vec{v}| \cos \alpha) \vec{n} - \vec{v} = \\&= 2(\vec{n} \cdot \vec{v}) \vec{n} - \vec{v}\end{aligned}$$

Отразяване на лъч от сфера

– Пак подвижна сфера



Любопитно

Няма връзка с
Йохан Щраус

1950 Ъ. Щраус се зачудил

- Може ли огледална стая да се освети с клечка кибрит от произволно място?

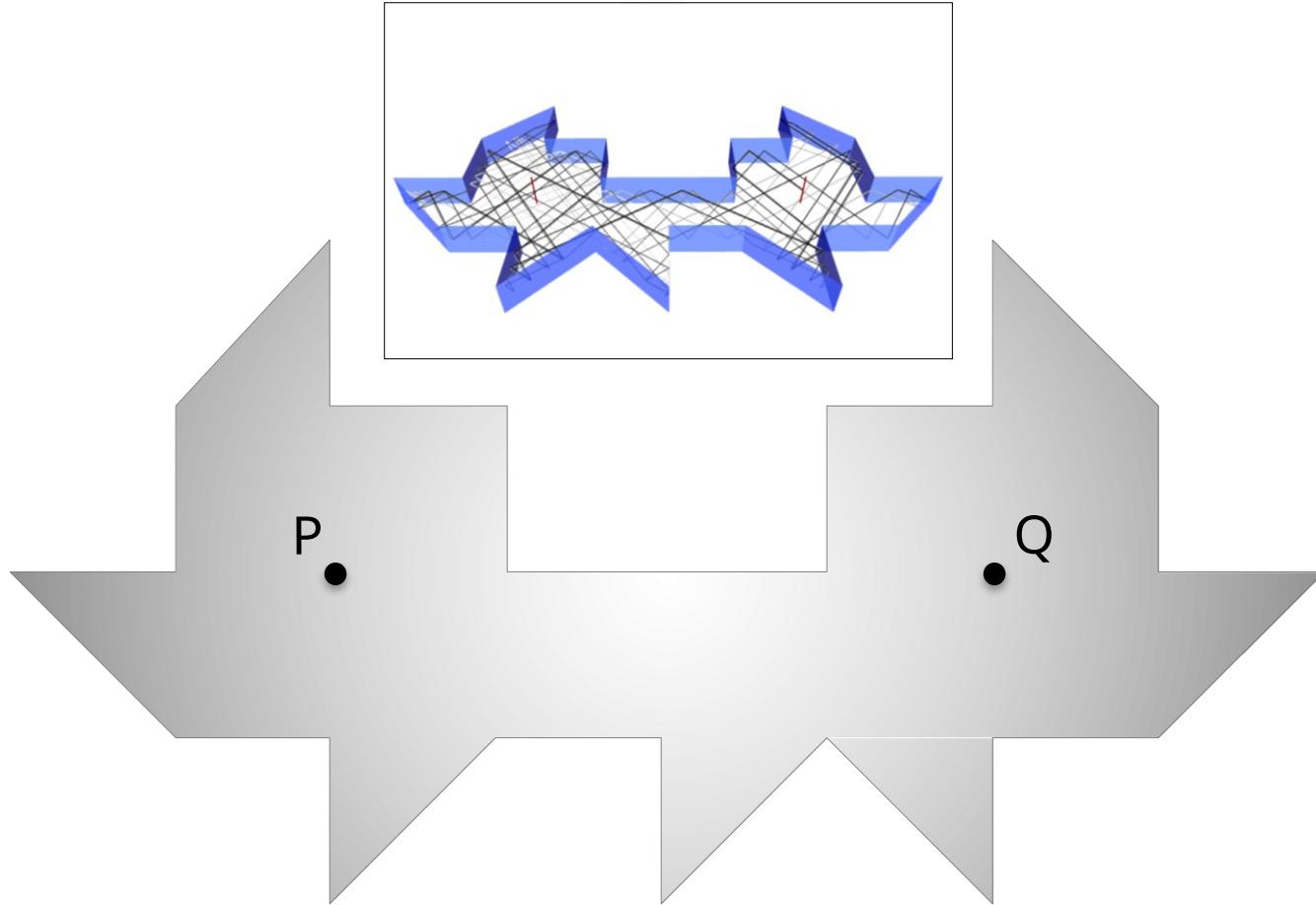
1995 Дж. Токарски отговаря

- Има 26-ъгълна стая, която не може

Няма връзка с
Фидел Кастро

1997 Д. Кастро допълва

- Може и с 24-ъгълна стая да не може



Внимание

Задача за 5т бонус

Бонус за 5 точки

Условие

- Идеята за решението трябва да бъде поместено във форума на курса в Moodle
- Бонус получава първият с правилна идея (важи timestampът на сървера)

Билярдна маса с някакви размери

- Две топки са на някакви координати
- На рикошет от дълга стена зрителите реагират с въздишка ой, а на къса с въздишка ля
- Да се намерят лесно посоките на удар, така че да се удари другата топка, а зрителите да въздишнат някакъв брой ой и някакъв ля, без значение от реда

(напр. 2/2 броя: ойля-ойля или ойляля-ой или ...)

Пречупване

Физическа основа

- Лъч преминава от една среда в друга
- Наблюдава се пречупване на лъча

Фактори

- Оптичните плътности на двете среди
- Ъгълът на лъча спрямо границата
- Честотата на лъча

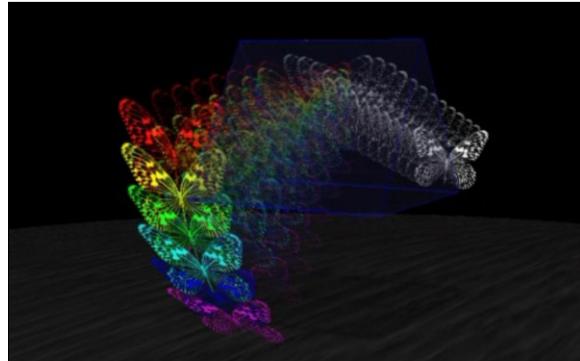
В природата

- Дъгата е причинена от пречупване
За да сме честни – и от отражение

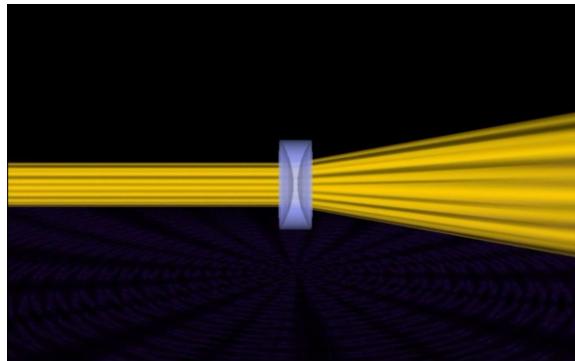


Пречупване с призма или лещи

- При призма става разлагане на светлината
- При оптични лещи – префокусиране
(човешкото око, очни лещи, очила, лупи, някои телескопи ...)



“Spectrum”
<http://youtu.be/Zit6HTFWmRc>



“Optical Lens”
<http://youtu.be/jeXIA0JICLk>

Пречупване дори и в заведение

– Сlamка в чаша

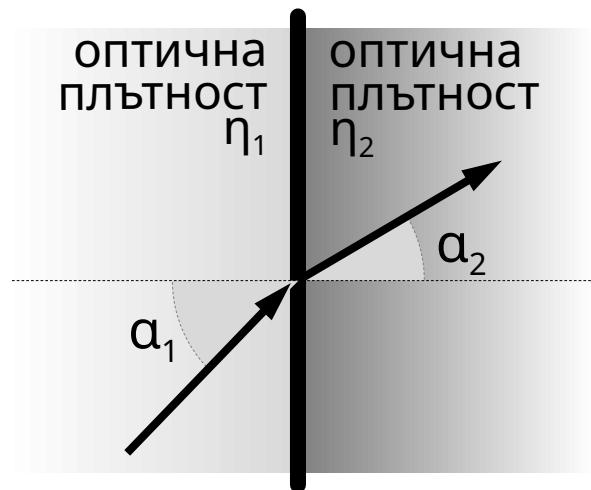


Закон на Снел (Snell)

Лъч през границата на две среди

- Те са с различни оптични плътности (наричани още индекси на рефракция)

$$\eta_1 \sin \alpha_1 = \eta_2 \sin \alpha_2$$



Индекси на някои вещества

- Вакуум 1.000000
- Въздух 1.000293 при 0°C и 1 atm
- CO₂ 1.00045
- Лед 1.31
- Вода 1.33 при 20°C
- Диамант 2.42
- Силиций 3.96

Двойно пречупване

- При преминаване през леща лъч се пречупва както при влизане, така и при излизане

Критичен ъгъл

- Лъч, скосен повече от критичния ъгъл, се отразява
- Например, има проблем при $\frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \alpha_1 > 1$, защото

$$\alpha_2 = \arcsin \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \sin \alpha_1 \right)$$

Любопитно

Метаматериали

- Конструирани са метаматериали с отрицателна оптична плътност (negative index metamaterials)
- В природата не съществуват естествени материали с такива свойства
- Предсказани през 1967, създадени едва през 2000

Въпроси?

Повече информация

AGO2	стр. 338-350
BAGL	стр. 86-88
KLAW	стр. 207-208
LENG	стр. 133-157
MORT	стр. 192

А също и:

- Ray Tracing: Graphics for the Masses
<http://www.cs.unc.edu/~rademach/xroads-RT/RTarticle.html>
- A raytracer in C++
<http://www.codermind.com/articles/Raytracer-in-C++-Introduction-What-is-ray-tracing.html>

Край