Примерни решения по второ домашно по Дискретни структури, 28.12.2024 г.

Име: __________________________________, ФН:___________, Курс:___

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки	1	1	1	1	1	5
максимум точки	1	1	1	1	1	5

Задача 1. Дефинираме редицата от матрици

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{n+2} = 3A_{n+1} - A_n$$

Да се докаже, че $A_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$

Упътване: Как повдигате матрици на степен в курса по Алгебра?

Решение: Нека $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$

Рекурентната зависимост за матриците очевидно се пренася и върху техните елементи, така че прилагането на алгоритъма за решаване на линейни рекурентни уравнения с константни коефициенти и крайна история ни води до

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n,1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_{n,2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ b_n &= b_{n,1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b_{n,2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ c_n &= c_{n,1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_{n,2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ d_n &= d_{n,1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + d_{n,2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

където коефициентите могат да се намерят от началните условия.
Тоест

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n,1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_{n,2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n & b_{n,1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b_{n,2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ c_{n,1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_{n,2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n & d_{n,1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + d_{n,2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

От курса по Линейна Алгебра можем да откирем, че

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Откъдето

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Последното праволинейно се свежда до израза за A_n

За жалост, задачата може да се реши и с индукция по n.

Задача 2. Редица от n естествени числа ще наричаме **графична**, ако има граф с n върха, чиито степени са точно елементите на тази редица. За следните редици, докажете или опровергайте, че са графични:

- $1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$
- $3, 3, 3, 3, 3, 3, 6$
- $a_1, a_2, \ldots, a_n$, където $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2n - 2$ и $a_i \neq 0$ за $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Решение:

- $1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$
  Да допуснем, че такъв граф $G(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}, E)$ съществува и съответно

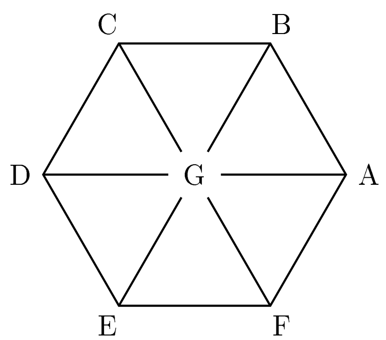
  $$d_G(v_1) = 1 \quad d_G(v_2) = 1 \quad d_G(v_3) = 2 \quad d_G(v_4) = 3 \quad d_G(v_5) = 4 \quad d_G(v_6) = 5 \quad d_G(v_7) = 6$$

  Тогава v_7 е съсед на всички останали. Тогава за графа $G' := G - v_7$ имаме

  $$d_{G'}(v_1) = 0 \quad d_{G'}(v_2) = 0 \quad d_{G'}(v_3) = 1 \quad d_{G'}(v_4) = 2 \quad d_{G'}(v_5) = 3 \quad d_{G'}(v_6) = 4$$

  Но в G' v_1 и v_2 са изолирани, откъдето v_6 не може да е от степен 4, т.е. редицата не е графична.

- Чрез следния пример доказваме, че $3, 3, 3, 3, 3, 3, 6$ е графична:



Фигура 1: Граф, представящ редицата $3, 3, 3, 3, 3, 3, 6$

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$, където $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2n - 2$ и $a_i \neq 0$ за $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
  Ще докажем с индукция по n.
  - при $n = 2$:

    $$d_1 + d_2 = 2, \text{ т.е. } d_1 = d_2 = 1$$

    Тогава d_1, d_2 е редица от върховете на дървото $\bullet - \bullet$
  - Допускаме, че всяка редица от $n-1$ положителни естествени числа със сума $2(n-1)-2$ е редица от степените на върховете на дърво, където $n \geq 3$.

– Ще построим дърво по дадени $d_1, d_2, ..., d_n \in \mathbf{N}^+$ със сума $2n-2$, имайки предвид индукционното предположение. Допускаме, че

$$\forall i \in I_n : d_i \geq 2$$

$$\text{Тогава } \sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2n > 2n-2 \text{което е абсурд}$$

т.е. в редицата присъства числото 1 (то ще бъде листо в строеното дърво). Да допуснем и че

$$\forall i \in I_n : d_i = 1$$

$$\text{Тогава } \sum_{i=1}^{n} d_i = n < 2n-2 \ (n \geq 3), \text{ което е абсурд}$$

т.е. в редицата има член ≥ 2.
Нека Б.О.О. $d_n = 1$ и $d_{n-1} \geq 2$.
Тъй като $d_1, d_2, ..., d_{n-2}, d_{n-1} - 1$ е редица от пол. ест. числа със сбор $2n-2-1-1 = 2(n-1)-2$ т.е. по ИХ можем да конструираме дърво $T(V, E)$ от редицата

$$d_1, d_2, ..., d_{n-1} - 1$$

Сега "залепяме" листо към върха, съответстващ на степента $d_{n-1} - 1$ и получаваме търсеното дърво.

Задача 3. Нека $n \in \mathbb{N}^+$ и $f : I_n \to \mathbb{N}$ е функция. Да се докаже, че съществува неориентиран граф $G(I_n, E)$ и функция $g : E \to I_{n-1}$, за които е изпълнено

1. G е свързан
2. g е биекция
3. за всяко ребро е $= \{a, b\}$ е изпълнено, че $|f(a) - f(b)|$ се дели на $g(e)$

Решение: От 1. и 2. следва, че G е дърво. Целта ни е да "надпишем"ребрата чрез g, така, че да постигнем свойство 3.

Ще строим това дърво на стъпки.

Нека $V_n := I_n$ и $E_n = \emptyset$

Върховете във V_n са n на брой, следователно има различни върхове u_n и v_n, за които $f(u_n) - f(v_n)$ се дели на $n-1$. Тогава добавяме реброто $\{u_n, v_n\}$ и премахваме v_n (или u_n):

$$\begin{aligned} V_{n-1} &:= V_n \backslash v_n \\ E_{n-1} &:= E_n \cup \{u_n, v_n\} \\ g(\{u_n, v_n\}) &:= n-1 \end{aligned}$$

Сега за реброто $\{u_n, v_n\}$ е изпълнено, че $f(u_n) - f(v_n)$ се дели на n.

Върховете във V_{n-1} са $n-1$ на брой, следователно има различни върхове u_{n-1} и v_{n-1}, за които $f(u_{n-1}) - f(v_{n-1})$ се дели на $n-2$. Тогава добавяме реброто $\{u_{n-1}, v_{n-1}\}$ и премахваме v_{n-1}:

$$\begin{aligned} V_{n-2} &:= V_{n-1} \backslash v_{n-1} \\ E_{n-2} &:= E_{n-1} \cup \{u_{n-1}, v_{n-1}\} \\ g(\{u_{n-1}, v_{n-1}\}) &:= n-2 \end{aligned}$$

Продължаваме тази процедура, докато не дефинираме V_1 (с един връх) и E_1, когато е построен търсеният граф $G(I_n, E_1)$ и функцията g.

Задача 4. Жоро и Сабрина са двойка и огранизират банкет заедно с още 4 двойки. Някои хора на банкета се поздравяват, като хората от една двойка не се поздравяват помежду си. В края на банкета, Жоро попитал всеки колко човека е поздравил и получил 9 различни отговора.
Колко човека е поздравил Жоро и колко Сабрина?

Упътване: Колко души са поздравили членовете на всяка двойка?

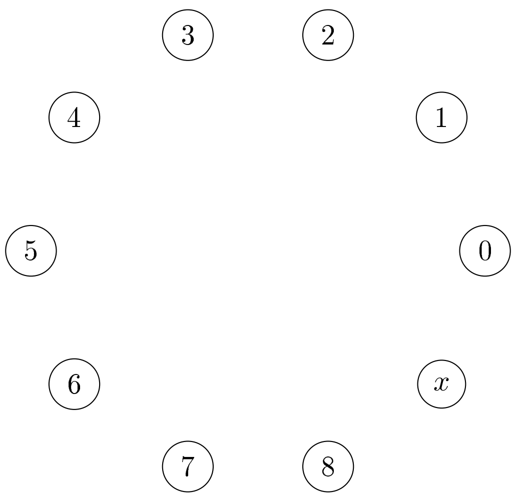
Решение: [Алеко Георгиев]

Имаме общо пет двойки, т.е. 10 души. Ще използваме граф, за да представим разсъжденията относно задачата. Всеки човек ще бъде представен като връх в графа, а наличието на ребро между два върха ще показва, че двамата души са се поздравили.

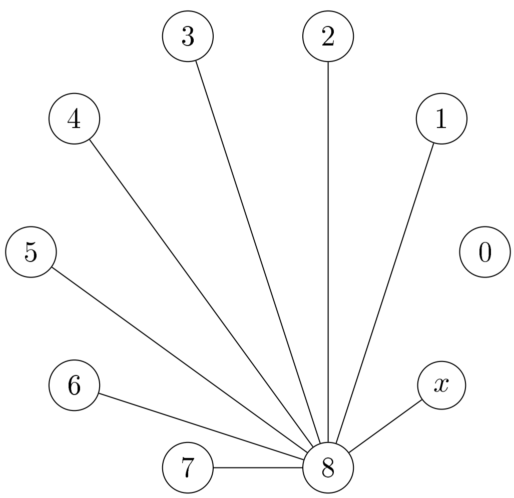
От условието знаем, че Жоро е попитал всеки участник колко души е поздравил и е получил 9 различни отговора. Това означава, че степените на върховете са различни. Един човек може да е поздравил най-много 8 души (т.е. всички освен себе си и партньора си) и най-малко 0 души.

Следователно можем да съставим графична редица на степените на върховете: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, x$, където x представлява броя на хората, които Жоро е поздравил.

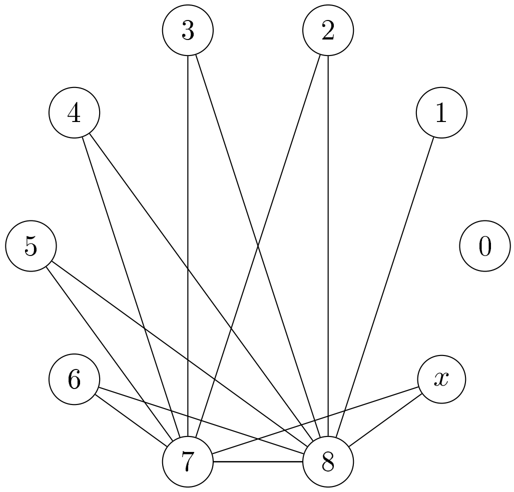
По-долу е представена схема на върховете в кръг, като те са означени със съответните числа от редицата, а върхът x съответства на Жоро:



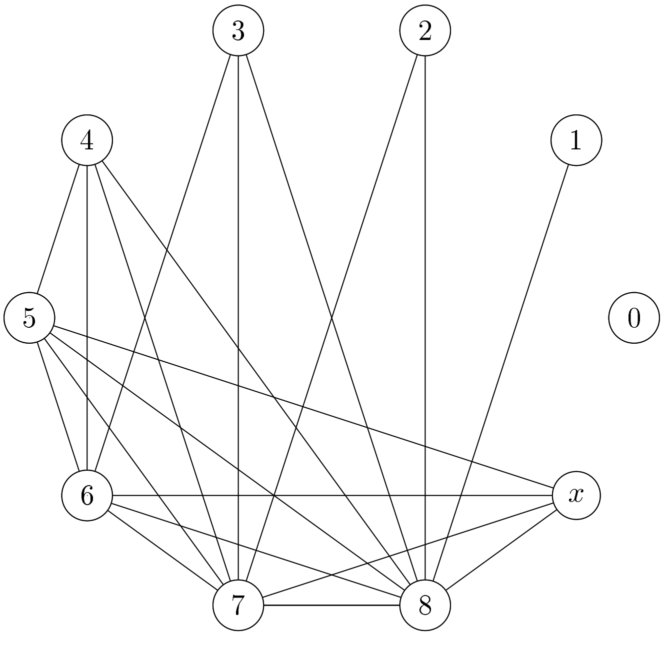
Връх 8 трябва да е свързан с всички освен себе си и пратньора си. Единственият връх, с който не е свързан връх 8 е връх 0, тъй като той е със степен 0. Следователно хората съответстващи на връх 8 и връх 0 трябва да са двойка.



Аналогично за връх 7 - той е свързан с всички без връх 0 (не е свързан с никой друг връх) и връх 1 (в двойка е вече с връх 8). Следователно трябва връх 7 и връх 1 да са двойка, тъй като между членовете на двойките няма вързове и връх 0 вече е в двойка с връх 8.



Продължаваме да следваме същата логика и стигаме до заключението, че връх 6 е в дойка с връх 2 и връх 5 е в двойка с връх 3. Остават само два върха, за които не сме заключили, че са в двойка - връх 4 и връх x, който съответства на Жоро.



Последната двойка, която остава, са Жоро и Сабрина. Тъй като степента на всеки от двата върха, за които не е посочено, че са в двойка, е 4, това означава, че и двамата – Жоро и Сабрина – са поздравили по 4 души.

Задача 5. Да се намери броят на булевите функции на n променливи, за които е изпълнено

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \left(f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \overline{f(x_1, \dots, \overline{x_i}, \dots, x_n)} \right)$$

Решение:

1. [Боян Трендафилов]
Фиксираме $f(x_1, \ldots, x_n) = a$, където $a \in \{0, 1\}$. Тогава

$$f(x_1, \ldots, \overline{x_i}, \ldots, x_n) = \overline{a}$$

По този начин откирваме, че за да е изпълнено условето, за всяка смяна на стойността на бит, f обръща стойността си. Такова свойство се наблюдава в n-мерен хиперкуб.

За хиперкуба B_n имаме, че е двуделен, следователно върховете му се разбиват на две множества, чиито стойности по f са a и $\overline{a}$. Следователно всички такива функции зависят само от a, т.е. общият им брой е 2.

2. Разглеждаме полинома на Жегалкин на булева функция f с исканото свойство.

$$f = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \cdots \oplus a_{1,\cdots,n} x_1 \cdots x_n$$

Сега например

$$a_0 = f(0, 0, \cdots, 0) \underbrace{=}_{\text{свойство}} 1 \oplus f(1, 0, \cdots, 0) = 1 \oplus a_0 \oplus a_1$$

Оттук следва, че $a_1 = 1$. Аналогично $a_i = 1$ за всяко $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Имаме още, че

$$a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{1,2} = f(1, 1, 0, \cdots, 0) \underbrace{=}_{\text{свойство}} 1 \oplus f(1, 0, 0, \cdots, 0) = 1 \oplus a_0 \oplus a_1 = a_0$$

Оттук следва, че $a_{1,2} = 0$. Аналогично $a_{i,j} = 0$ за всеки $1 \leq i < j \leq n$.

Имаме още, че

$$a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{1,2,3} = f(1, 1, 1, 0, \cdots, 0) \underbrace{=}_{\text{свойство}} 1 \oplus f(1, 1, 0, 0, \cdots, 0) = 1 \oplus a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 = 1 \oplus a_0$$

Оттук следва, че $a_{1,2,3} = 0$. Аналогично $a_{i,j,k} = 0$ за всеки $1 \leq i < j < k \leq n$.

Чрез този аргумент с индукция по $k \geq 2$ може да се покаже, че коефициентът пред подмножество от k проемнливи е 0. Следователно, ако f има исканото свойство, то f е от вида:

$$f = a_0 \oplus x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$$

Изборът на $a_0 \in \{0, 1\}$ определя две различни функции с исканото свойство. Непосредствена проверка показва, че и двете наистина имат това свойство.

Срок за предаване: Предайте домашното на асистента на вашата група до 26 януари 2025 г.!