Задача 0.1. *Нека X е крайно множество.* Базис *за матроид $(X, \mathcal{F})$ наричаме максимално по включване множество за $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{F}$. С $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ означаваме множеството от базиси за $(X, \mathcal{F})$.*

1. *Ако B_1 и B_2 са базиси, да се докаже, че $|B_1| = |B_2|$.*

2. *Нека $w', w'' : X \to \mathbb{Q}$, като $w'(x) - w''(x) = w'(y) - w''(y)$ за всеки $x, y \in X$. Да се докаже, че за всеки два базиса $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$ е в сила, че:*
$$w'(B_1) - w'(B_2) = w''(B_1) - w''(B_2).$$
Заключете, че ако B^* е решение на оптимизационния проблем:
$$\max\{w'(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})\}, \text{ т.е. } w'(B^*) = \max\{w'(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})\},$$
то:
$$w''(B^*) = \max\{w''(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})\}.$$

3. *Аргументирайте, че алчният алгоритъм, приложен за $w : X \to \mathbb{Q}$ ще намери решение на оптимизационния проблем:*
$$\max\{w(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})\}.$$

4. *Да се модифицира алчният алгоритъм така, че да при дадена $w : X \to \mathbb{Q}$ да намира решение на оптимизационния проблем:*
$$\min\{w(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})\}.$$

Задача 0.2. *Нека X е крайно множество, а $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ е затворена надолу фамилия от подмножества на X.*

*За естествено число $k \geq 1$ казваме, че $(X, \mathcal{F})$ е k-*матроид*, ако за всеки $A, B \in \mathcal{F}$ е изпълнено, че:*
$$|A| > k|B| \Rightarrow \exists a \in A \setminus B (B \cup \{a\} \in \mathcal{F}).$$

*За естествено число $k \geq 1$ казваме, че $(X, \mathcal{F})$ е k-*балансирано*, ако за всяко $Y \subseteq X$ и всеки две максимални по включване подмножества $A, B \in \mathcal{F} \cap \mathcal{P}(Y)$ е изпълнено, че $|A| \leq k|B|$.*

1. *Да се докаже, че $(X, \mathcal{F})$ е k-матроид точно когато $\mathcal{F}$ е k-балансирано.*

2. *Да се докаже, че за всеки k-матроид $(X, \mathcal{F})$ и всяка $w : X \to \mathbb{Q}^+$, алчният алгоритъм приложен за $(X, \mathcal{F})$ и w, връща множество $A \in \mathcal{F}$, за което:*
$$kw(A) \geq \max |\{w(B) \mid B \in \mathcal{F}\}|.$$

3. *Нека $G = (V, E)$ е ориентиран граф, а $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ е множеството от всички хамилтонови цикли и всички обединения от непресичащи се прости пътища. Да се докаже, че $(E, \mathcal{F})$ е 3-матроид. Следва ли оттук, че алчният алгоритъм за $(E, \mathcal{F})$ ще намери 3-апроксимация на задачата за максимален хамилтонов цикъл? Защо?*

Упътване 0.1. 1. Всеки матроид е балансирано множество.

2. Това, което трябва да се докаже е еквивалентно на $w'(B_1) - w''(B_1) = w'(B_2) - w''(B_2)$. От друга страна, даденото е еквивалентно на $w'(x) - w''(x) = w'(y) - w''(y) = c$, където c не зависи от $x, y \in X$. Заключете, че $w'(B_1) - w''(B_1) = c|B_1$ и $w'(B_2) - w'(B_2'') = c|B_2|$. Довършете, като използвате първата част.

3. Приложете предишната подточка.

4. Първо, аргументирайте, че алчният алгоритъм (при неотрицателна функция w) намира базис. След това, разгледайте:
$$w'(x) = w(x) - c, \text{ където } c = \min\{w(y) \mid y \in X\}.$$
Аргументирайте, че $w'(x) \geq 0$ и резултатът от алчния алгоритъм за $(X, \mathcal{F}, w)$ и $(X, \mathcal{F}, w')$ е един и същ. Използвайте предишната подточка, за да завършите.

5. Сменете знака функцията.

Упътване 0.2. 1. Симулирайте доказателството, че матроид е точно балансирано множество.

- Ако $(X, \mathcal{F})$ е k-балансирано и $A, B \in \mathcal{F}$, за които $|A| > k|B|$, разгледайте $Y = A \cup B$. Аргументирайте, че ако B не е максимално по включване подмножество за $\mathcal{P}(Y) \cap \mathcal{F}$, то наистина има $a \in A \setminus B$, за което $B \cup \{a\} \in \mathcal{F}$.
- Аргументирайте, че ако B е максимално по включване подмножество за $\mathcal{P}(Y) \cap \mathcal{F}$, то има A', което е максимално по включване за $\mathcal{P}(Y) \cap \mathcal{F}$ и съдържа A. Заключете, че $|A'| \geq |A|$ и стигнете до противоречие.
- В обратната посока, ако $(X, \mathcal{F})$ е k-матроид и $A, B \in \mathcal{P}(Y) \cap \mathcal{F}$ са максимални по включване, съобразете, че ако $|A| > k|B|$, то има $a \in A \setminus B$, за което $B \cup \{a\} \in \mathcal{P}(Y) \cap \mathcal{F}$.

2. Както и в доказателството за матроиди, разгледайте $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, така че:
$$w(x_1) \geq w(x_2) \geq \dots \geq w(x_n) \text{ и } Y_i = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}.$$
и за $B \subseteq X$, дефинирайте $B_i = B \cap Y_i$.

- Покажете, че:
$$w(B) = \sum_{x \in B} w(x) = \sum_{i=1}^{n} w(x_i)(|B_i| - |B_{i-1}|) = \sum_{i=1}^{n-1} |B_i|(w(x_i) - w(x_{i+1})) + |B_n| w(x_n).$$
- Покажете, че ако A е резултатът от алчния алгоритъм за $(X, \mathcal{F})$ и w, то $A_i \in \mathcal{P}(Y_i) \cap \mathcal{F}$ е максимално по включване.
- Заключете, че за всяко $B \in \mathcal{F}$, е в сила, че $k|A_i| \geq |B_i|$.
- Заместете в изразите от точка 1 и довършете.

3. Разгледайте $A, B \in \mathcal{F}$, за които $|A| > 3|B|$. Съобразете, че B не е хамилтонов цикъл, а обединение от непресичащи се пътища $B_1, B_2, \dots, B_m$. Нека $B^+ = \{u \in V \mid \exists v((u, v) \in B)\}$. Аналогично, нека $B^- = \{u \in V \mid \exists v((v, u) \in B)\}$ са множеството от върхове, в които влиза ребро от B.

- Покажете, че $|B^-| = |B^+| = |B|$.
- Разгледайте ребро $a \in A \setminus B$, ако a не е допустимо да се добави към B, то $a = (u, v)$, тогава $u \in B^+$ или $v \in B^-$.
- Аргументирайте, че при горното разсъждение всеки връх $u \in B^+$ ($v \in B^-$) е съпоставен най-много на едно ребро $a \in A \setminus B$.
- Заключете, че $|A \setminus B| \leq |B^+| + |B^-| \leq 2|B|$. Довършете.

За последния въпрос, задължително ли е алчният алгоритъм да върне хамилтонов цикъл?