Theorem 0.1. *Нека L е контекстносвободен език. Тогава има $N \in \mathbb{N}$, за което за всяка дума $w \in L$ с $|w| \geq N$ има думи u, v, x, y, z, за които:*

1. $w = uvxyz$,
2. $|vxy| \leq N$,
3. $|vy| \geq 1$,
4. *за всяко* $i \in \mathbb{N}$, $uv^i xy^i z \in L$.

Доказателство. Нека $G = \langle \Sigma, \mathcal{N}, P, S \rangle$ е контекстносвободна граматика с език $\mathcal{L}(G) = L$. Тъй като L е контекстносвободен, такава граматика има.

Нека $n = |\mathcal{N}|$, $d = \max\{|\alpha| \mid \exists A(A \to \alpha \in P)\}$ е дължината на най-дълга дясна страна на правило. Определяме $N = (d+1)^{n+1} + 1$. Ще покажем, че N има желаното свойство.

Нека $w \in L$ е произволна с дължина $|w| \geq N$. Тогава има извод $S \Rightarrow_G^* w$ и следователно има дърво на извод $T : \tau \to \Sigma \cup \mathcal{N} \cup \{e\}$ $(e \notin \Sigma \cup \mathcal{N})$ в G с $T(\varepsilon) = S$ и $w(T) = w$.

Рекурсивно дефинираме път $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{h+1})$ в τ така:

1. $\alpha_0 = \varepsilon$,
2. ако α_i не е листо, то $\alpha_{i+1} = \alpha_i j_i$ е такъв син на α_i, за който:

$$|w(T_{\alpha_{i+1}})| = \max\{|w(T_{\alpha_i j})| \mid \alpha_i j \text{ син на } \alpha_i \text{ в } \tau\}.$$

Тоест измежду всички синове на α_i, α_{i+1} определя най-дълга изведена дума.

Да забележим, че тъй като синовете на α_i са измежду $\alpha_i 0, \alpha_i 1 \ldots \alpha_i d$, то:

$$|w(T_{\alpha_i})| \leq (d+1)|w(T_{\alpha_{i+1}})|.$$

Нека $w_i = w_{\alpha_i}$ за $0 \leq i \leq h+1$. От горното $|w_i| \leq |w_{i+1}|(d+1)$ и очевидно тъй като w_{i+1} е поддума на w_i, $|w_{i+1}| \leq |w_i|$. В частност, тъй като $|w_0| = |w| \geq N \geq 1$, то $|w_i| \geq 1$ за всяко $i \leq h+1$. Следователно $w_{h+1} \in \Sigma$ и $1 \leq |w_h| \leq (d+1)|w_{h+1}| \leq d+1$.

Нека $j_0 = 0 < j_1 < \cdots < j_k$ е максимална подредица на $(0, 1, \ldots, h)$, за която:

$$|w_{j_{i+1}}| = |w_{j_i+1}| < |w_{j_i}| \text{ за всяко } i < k.$$

Тогава от максималността $|w_{j_k}| = |w_h| \leq d+1$ и тъй като:

$$(d+1)|w_{j_{i+1}}| = (d+1)|w_{j_i+1}| \geq |w_{j_i}|,$$

имаме, че $|w_{j_{i+1}}| \leq \frac{|w_{j_i}|}{(d+1)}$. Оттук с индукция по i, получаваме, че:

$$|w_{j_i}| \geq \frac{|w_{j_0}|}{(d+1)^i} = \frac{|w_0|}{(d+1)^i} \geq N/(d+1)^i > (d+1)^{n+1-i}.$$

Приложено за $i = k$, това дава:

$$d+1 \geq |w_h| = |w_{j_k}| > (d+1)^{n+1-k}.$$

Следователно $k > n$. Следователно ако $\beta_i = \alpha_{j_{k-i}}$, то $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$ са добре дефинирани и $T(\beta_i) \in \mathcal{N}$. Тъй като броят на нетерминалите в G е n, то от принципа на Дирихле има $k' < k''$, за които $T(\beta_{k'}) = T(\beta_{k''}) =: A \in \mathcal{N}$.

Нека $T' = T - T_{\beta_{k''}}$, $T'' = T_{\beta_{k''}} - T_{\beta_{k'}}$ и $T''' = T_{\beta_{k'}}$. Тогава в T' и T'' има единствено листо с етикет нетереминал и този нетерминал е $A = T''(\varepsilon) = T'''(\varepsilon)$. Нека:

$$w(T') = uAz, \quad w(T'') = vAy, \quad w(T''') = x.$$

Тогава $T = (T' +_{\beta'_k} T'') +_{\beta_{k''}} T'''$ и следователно от една страна $w(T) = w$, а от друга:

$$w(T' +_{\beta'_k} T'') = uvAyz \text{ и следователно } w((T' +_{\beta'_k} T'') +_{\beta_{k''}} T''') = uvxyz.$$

С това свойство 1, че $uvxyz = w$ е налице.

Сега да отбележим, че:

$$w_{j_{k-k'}} = w(T_{\beta_{k'}}) = w(T'' + T''') = vxy \text{ и } w_{j_{k-k''}} = w(T_{\beta''_k}) = x.$$

Но $n \geq k' > k''$, следователно $|w_{j_{k-k'}}| \leq (d+1)^{k'}|w_{j_k}| = (d+1)^{k'}|w_h| \leq (d+1)^{k'}(d+1) = (d+1)^{k'+1} \leq (d+1)^{n+1} \leq N$. Оттук $|vxy| \leq N$, което доказва, че и 2 е изпълнено.

Нататък, $|vy| = |vxy| - |x| = |w_{j_{k-k'}}| - |w_{j_{k-k''}}| > 0$, защото $k' > k''$, а дължините на думите w_{j_i} по дефиниция образуват строго намаляваща редица. Следователно $|vy| \geq 1$.

Накрая да забележим, че тъй като $T'(\varepsilon) = T(\varepsilon) = S$ и $w(T') = uAz$, то:

$$S \Rightarrow_G^* uAz.$$

Аналогично от $T''(\varepsilon) = A = T'''(\varepsilon)$ и $w(T'') = vAy$ и $w(T''') = x$, получаваме, че:

$$A \Rightarrow_G^* vAy \text{ и } A \Rightarrow_G^* x.$$

Сега от първия извод с индукция по i получаваме, че $A \Rightarrow_G^* v^iAy^i$ за всяко естествено число i. (при $i = 0$, $A \Rightarrow^{(0)} A$, а преходът от i към $(i+1)$ следва като $A \Rightarrow_G^* vAy \overset{\text{и.х.}}{\Rightarrow_G^*} v(v^iAy^i)y = v^{i+1}Ay^{i+1}$)

Сега комбинарайки трите извода: $S \Rightarrow_G^* uAz$, $A \Rightarrow_G^* v^iAy^i$ и $A \Rightarrow_G^* x$, получаваме извода:

$$S \Rightarrow_G^* uAz \Rightarrow_G^* uv^iAy^iz \Rightarrow_G^* uv^ixy^iz,$$

което установява и последното свойство. $\square$