Смяна на координатната система

Афинни координатни системи

Следващата теорема е известна от курса по алгебра.

Теорема 1 *(смяна на координатите при смяна на базиса)*
Нека V е n-мерно реално линейно пространство, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ са базиси на V и T е матрицата на прехода от базиса e към базиса e'. Нека съответните на e и e' координатни изоморфизми са съответно $x, x' : V \to \mathbb{R}^n$. Тогава $x = Tx'$, тоест за всеки вектор $v \in V$ имаме $x(v) = T.x'(v)$.
(Тоест $e' = e.T$, $e.x(v) = v = e'.x'(v) \Rightarrow x(v) = T.x'(v)$,
или: ако T е матрицата на прехода от „стария“ към „новия“ базис, то
(„старите“ координати)= T(„новите“ координати).)

Забележка 1 В ситуацията от горната теорема матрицата на прехода T също може да се напише чрез координатните изоморфизми. Тъй като T се състои от координатните стълбове спрямо базиса e на векторите $e'_1, \ldots, e'_n$ от базиса $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, тоест $T = (x(e'_1), \ldots, x(e'_n))$, то можем да пишем $T = x(e')$. Тогава теоремата казва, че ако $v = e'.x(v)$, то $x(v) = x(e').x(v)$, което е очевидно следствие от линейността на x.

Теорема 2 *(смяна на координатите при смяна на афинната координатна система)*
Нека $K = Oe_1 \ldots e_n$ и $K' = O'e'_1 \ldots e'_n$ са афинни координатни системи в n-мерното афинно пространство A, координатният вектор на O' спрямо K е s, а матрицата на прехода от базиса $e = (e_1, \ldots, e_n)$ към базиса $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ е T. Нека съответните на K и K' координатни изображения са съответно $x, x' : A \to \mathbb{R}^n$. Тогава $x = s + Tx'$, тоест за всяка точка $P \in A$ имаме $x(P) = s + T.x'(P)$, тоест $x(P) = x(O') + x(e').x'(P)$.

Забележка 2 Ако разглеждаме K като „стара“ координатна система, а K' като „нова“ (тоест „новата“ е зададена чрез координатите на елементите си спрямо „старата“ (чрез s и T)), то теоремата дава „старите“ координати x чрез „новите“ x'. Ако ни трябва как „новите“ се изразяват чрез „старите“, то трябва да решим $x = s + Tx'$ относно x', тоест относно „новите“ координати. Получаваме $x' = T^{-1}(-s + x)$, тоест $x' = -T^{-1}s + T^{-1}x$.

Забележка 3 В горните неща никъде не се използват някакви специфични свойства на полето на реалните числа, така че всичко важи без промяна и ако вместо $\mathbb{R}$ се вземе произволно поле F, тоест ако V е линейно пространство над произволно поле.

Ориентация

Твърдение 1 *Нека $K = Oe_1 \ldots e_n$ и $K' = O'e'_1 \ldots e'_n$ са афинни координатни системи в афинното пространство A, смяната на координатите между които се задава с формулата $x = s + Tx'$. Тогава K и K' са еднакво (съответно противоположно) ориентирани $\Leftrightarrow \det T > 0$ (съответно < 0).*

Ортонормирани координатни системи

Определение 1 Реалната квадратна матрица T се нарича *ортогонална*, ако е обратима и $T^{-1} = T^t$.
Ако освен това $\det T > 0$, то T се нарича *специална ортогонална.*

Твърдение 2 *Нека T е реална квадратна матрица. Тогава T е ортогонална $\Leftrightarrow TT^t = E \Leftrightarrow T^tT = E$.*

Пример 1 Единичната матрица E е специална ортогонална.

Пример 2 Диагоналната матрица $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ е ортогонална $\Leftrightarrow d_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, n$. Тя е специална ортогонална, ако освен това броят на -1 е четен.

Пример 3 $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ е специална ортогонална матрица.
$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ е ортогонална матрица, която не е специална ортогонална.

Твърдение 3
1. *Ако T е ортогонална матрица, то $\det T = \pm 1$.*
2. *Ако T е специална ортогонална матрица, то $\det T = 1$.*

Твърдение 4
1. *Произведение на (специални) ортогонални матрици е (специална) ортогонална матрица.*
2. *Обратната на (специална) ортогонална матрица е (специална) ортогонална матрица.*

Твърдение 5 *Нека U е евклидово линейно пространство, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ е ортонормиран базис на U, $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ е система от n вектора в U и T е матрицата, стълбовете на която са координатните вектори на $e'_1, \ldots, e'_n$ спрямо базиса e, тоест $e' = e.T$. (В частност, ако e' също е базис на U, то T е матрицата на прехода от e към e'.) Тогава:*

1. *e' е ортонормиран базис на $U \Leftrightarrow T$ е ортогонална.*
2. *e' е ортонормиран и еднакво ориентиран с e базис на $U \Leftrightarrow T$ е специална ортогонална.*

Следствие 1 *Реалната $n \times n$-матрица T е (специална) ортогонална $\Leftrightarrow$ редовете ѝ образуват (положително ориентиран) ортонормиран базис на $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ стълбовете ѝ образуват (положително ориентиран) ортонормиран базис на $\mathbb{R}^n$.*

Твърдение 6 *Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ и $K' = O'e'_1 \dots e'_n$ са афинни координатни системи в евклидовото афинно пространство A, смяната на координатите между K и K' се задава с формулата $x = s + Tx'$ и K е ортонормирана. Тогава*

1. *K' също е ортонормирана $\Leftrightarrow$ матрицата T е ортогонална.*
2. *K' е ортонормирана и еднакво ориентирана с K $\Leftrightarrow$ T е специална ортогонална.*

Забележка 4 Нека K и K' са афинни координатни системи в A и смяната на координатите между тях се задава с $x = s + Tx'$. Ако ни трябват координатите относно K' изразени чрез координатите относно K, то трябва да решим това уравнение относно x' и получаваме $x' = T^{-1}(-s + x)$, тоест $x' = -T^{-1}s + T^{-1}x$. В общия случай пресмятането на T^{-1} е трудоемко, но ако K и K' са ортонормирани, то T е ортогонална и $T^{-1} = T^t$. Следователно в тоя случай няма никакво пресмятане за определянето на обратната матрица и $x' = T^t(-s + x)$, тоест $x' = -T^ts + T^tx$.