Скаларно произведение в геометричното пространство

Работим в геометричното пространство.

Определение 1 *Ъгъл между ненулевите вектори u и v* е ъгълът между произволни техни представители с общо начало. Означава се с $\sphericalangle(u, v)$.
(Дефиницията е коректна, тоест не зависи от това коя точка е взета за начало на представителите.)

Пример 1 При $u \neq 0$ имаме $\sphericalangle(u, u) = 0$, $\sphericalangle(u, -u) = \pi$.

Пример 2 При $u \neq 0$, $v \neq 0$ имаме $\sphericalangle(v, u) = \sphericalangle(u, v)$.

Оттук нататък считаме, че е фиксирана единична отсечка за измерване на дължини.

Определение 2 *Скаларно произведение на векторите u и v* е числото $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$, дефинирано по следния начин:

а) Ако $u = 0$ или $v = 0$, то $\langle u, v \rangle = 0$.

б) Ако $u \neq 0$ и $v \neq 0$, то $\langle u, v \rangle = |u||v| \cos \sphericalangle(u, v)$.

Забележка 1 Срещат се и други означения за скаларното произведение. Например uv, $u.v$, (u, v).

Забележка 2 Ако $u = 0$ или $v = 0$, то $\sphericalangle(u, v)$ не е дефиниран. Но тъй като дължината на нулевия вектор е 0, то в тоя случай $\langle u, v \rangle = 0 = |u||v| \cos \varphi$ каквото и да е φ. Следователно, ако се уговорим да считаме, че нулевият вектор и другите вектори сключват произволен ъгъл, то тогава $\langle u, v \rangle = |u||v| \cos \sphericalangle(u, v)$ за всички вектори u и v.

Пример 3 При $u \neq 0$ имаме $\langle u, u \rangle = |u||u| \cos \sphericalangle(u, u) = |u||u| \cos 0 = |u|^2$, а също и при $u = 0$ имаме $\langle u, u \rangle = 0 = |u|^2$.

Теорема 1 (критерий за перпендикулярност на вектори)
Ненулевите вектори u и v са перпендикулярни $\Leftrightarrow$ $\langle u, v \rangle = 0$.

Забележка 3 Ако приемем, че нулевият вектор е перпендикулярен на всеки вектор (което е в унисон с приемането, че сключва произволен ъгъл с всеки вектор — щом сключва произволен ъгъл значи сключва и прав ъгъл), то горната теорема е вярна и без изискването u и v да са ненулеви.

Твърдение 1 *Нека u и v са вектори. Тогава $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}\left(|u|^2 + |v|^2 - |v - u|^2\right)$.*

Теорема 2 *Скаларното произведение има следните (основни) свойства:*

1. $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$ *(симетричност)*
2. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ *(адитивност по първия аргумент)*
3. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ *за* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(хомогенност по първия аргумент)*
4. $\langle u, u\rangle > 0$ *за* $u \neq 0$ *(положителност)*

Забележка 4 За $u = 0$ имаме $\langle u, u\rangle = 0$.

Забележка 5 Свойствата 2. и 3. в горната теорема заедно са еквивалентни на свойството

$$\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle \qquad (\textit{линейност по първия аргумент})$$

Забележка 6 Поради симетричността на скаларното произведение, то е адитивно, хомогенно и линейно и по втория си аргумент.

Следствие 1 *Скаларното произведение на вектори в геометричното пространство е скаларно произведение в смисъла от курса по алгебра и следователно векторите в геометричното пространство образуват* 3*-мерно евклидово линейно пространство в смисъла от курса по алгебра.*

Забележка 7 Всичко направено по-горе важи и в геометричната равнина (а и върху геометрична права), като в Следствие 1 пространството е 2-мерно (а за права е 1-мерно).