Контролно 1

$L \subseteq \Sigma^*$, деф.

$I(L) = \{ \alpha \in \Sigma^* \mid \forall i \in \{0\dots4\}\ \exists \beta \neq \varepsilon$ т.че

1) $\alpha.\beta \in L$
2) $|\alpha| = |\beta|$
3) $\overline{\beta} \equiv i \pmod{5}$

$\}$

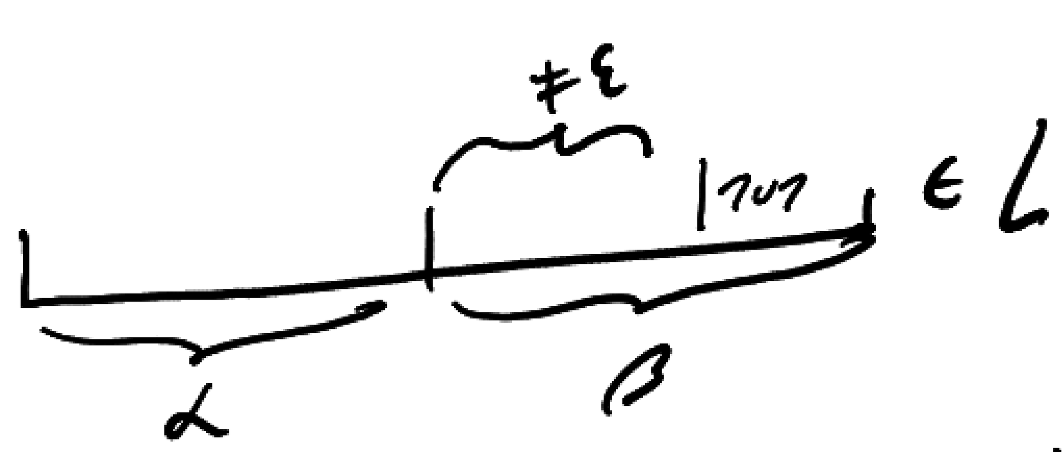
1) $L = \{0,1\}^*.\{101\} \Rightarrow I(L)$ е регулярен

2) $\forall L \subseteq \Sigma^*$ L - регулярен $\Rightarrow I(L)$ е регулярен

3) Вярно ли е, че $\forall L \subseteq \Sigma^*$ $I(L)$ е регулярен?

Решение

1



Искаме "да покрием" остатъците по mod 5 със втората половина на думата от L, сл. ще ни трябват някакви символи преди 101. $2^3 = 8 > 5$, сл 3 символа стигат. Ще докажем, че $\{0,1\}^{\geq 6} \subseteq I(L)$.

Сега формално:

Нека $w \in \{0,1\}^{\geq 6}$ е произволно. Тогава $w \in \Sigma^*$ и $|w| \geq 6$. Ще докажем, че $w \in I(L)$, т.е, че $\forall i \in \{0\dots4\}$ $\exists \beta$ с исканите свойства.

$\beta_0 := 0^{|w|-6}000101$, $\overline{\beta_0} \equiv 0 \pmod 5$

$\beta_1 := 0^{|w|-6}010101$ $\overline{\beta_1} \equiv 1 \pmod 5$

$\beta_2 := 0^{|w|-6}100101$ $\overline{\beta_2} \equiv 2 \pmod 5$

$\beta_3 := 0^{|w|-6}110101$ $\overline{\beta_3} \equiv 3 \pmod 5$

$\beta_4 := 0^{|w|-6}011101$ $\overline{\beta_4} \equiv 4 \pmod 5$

За произволно $i \in \{0 \dots 4\}$ е изпълнено:

$w\beta_i = w\beta' 101$ очевидно $\in L$.

$|\beta_i| = |w| - 6 + 6 = |w|$

$\overline{\beta_i} \equiv i \pmod 5$

сл. $w \in \mathcal{I}(L)$ и сл. $\{0,1\}^{\geq 6} \subseteq \mathcal{I}(L)$

Нека $|w| < 6$. Тогава $|w| \leq 5$. Ако допуснем, че $w \in \mathcal{I}(L)$, то има думи β_i с исканите св-ва за вс. $i \in \{0 \dots 4\}$ но всяко β_i завършва на 101 или $\beta_i = 1$ или $\beta_i = 01$ $|w| = |\beta_i|$ и за това $|\beta_i| \leq 5$. Тогава думите β_i които отговарят на исканите условия са най-много $2^2 = 4$ за $|w| = 5$. Но една дума може да дава само един остатък при деление на 5, сл. поне за едно $i \in \{0 \dots 4\}$ нямаме β_i т.че $\overline{\beta_i} \equiv i \pmod 5$ ↯.

Така доказахме, че $\{0,1\}^{<6} \cap \mathcal{I}(L) = \emptyset$ и сл.

$\{0,1\}^{\geq 6} \supseteq \mathcal{I}(L)$

Така $\{0,1\}^{\geq 6} = \mathcal{I}(L)$, който очевидно е регулярен.

②

// Това не е единственото решение.

Нека $\underline{\underline{L}}$ е произволен регулярен език. Можем да представим $\mathcal{I}(L)$ като сечение на 5 езика:

$$\mathcal{I}(L) = \bigcap_{i\in\{0\dots4\}} \underbrace{\{\alpha \mid \exists \beta\neq\varepsilon \text{ т.че } \alpha\beta\in L \ \& \ |\alpha|=|\beta| \ \& \ \overline{\beta}\equiv i \pmod 5\}}_{\mathcal{I}_i(L)}$$

Достатъчно е да докажем, че за всяко $i\in\{0\dots4\}$ $\mathcal{I}_i(L)$ е регулярен. Нека $A_L = (\Sigma, Q, \{q_0\}, \delta, F)$ е детерминиран краен автомат с език $\underline{\underline{L}}$.

Тогава:

$$\mathcal{I}_i(L) = \{\alpha \mid \exists\beta\ \exists q\in Q\ \exists f\in F \text{ т.че } q_0 \overset{\alpha}{\longmapsto} q \overset{\beta}{\longmapsto} f \ \& \ |\alpha|=|\beta| \ \& \ \overline{\beta}\equiv i \pmod 5\}\setminus\{\varepsilon\}$$

$$= \underset{\substack{q\in Q \\ \downarrow \\ \text{крайно обединение}}}{\bigcup} \underbrace{\{\alpha \mid \exists\beta\ \exists f\in F \text{ т.че } q_0 \overset{\alpha}{\longmapsto} q \overset{\beta}{\longmapsto} f \ \& \ |\alpha|=|\beta| \ \& \ \overline{\beta}\equiv i \pmod 5\}\setminus\{\varepsilon\}}_{\mathcal{I}_i^q(L)}$$

Достатъчно е да докажем, че $\mathcal{I}_i^q(L)$ е регулярен за произволни $i\in\{0\dots4\}$ и $q\in Q$.

Ще конструираме автомат.

Нека $\mathcal{A}_i^q = (\Sigma, Q_i^q, I_i^q, \Delta_i^q, F_i^q)$, където

$Q_i^q = Q \times Q \times \mathbb{Z}_5$ $\quad$ ($\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ остатъците при деление на 5)

$\Delta_i^q \subseteq Q_i^q \times \Sigma \times Q_i^q$, като

$$\Delta_i^q = \{((a, b, k), \sigma, (a', b', k')) \mid a, b, a', b' \in Q \ \& \ k, k' \in \mathbb{Z}_5 \ \& \ (a, \sigma, a') \in \Delta \ \& \ (\exists \mu \in \Sigma \text{ т.че } (b, \mu, b') \in \Delta) \ \& \ k' = \overline{2}.k + \overline{\mu} \}$$

$I_i^q = \{(q_0, q, \overline{0})\}$

$F_i^q = \{q\} \times F \times \{\overline{i}\}$

Сега ще докажем, че $L(\mathcal{A}_i^q) = \mathcal{I}_i^q(L)$

Нека $w \in L(\mathcal{A}_i^q)$. Тогава има път Π в $\mathcal{A}_i^q$

$$\Pi: \underset{\substack{\parallel \\ q_0}}{(a_0}, \underset{\substack{\parallel \\ q}}{b_0}, \underset{\substack{\parallel \\ \overline{0}}}{k_0)} \xrightarrow{w_1} (a_1, b_1, k_1) \xrightarrow{w_2} \dots \xrightarrow{w_{|w|}} (\underset{\substack{\parallel \\ q}}{a_{|w|}}, \underset{\substack{\cap \\ F}}{b_{|w|}}, \underset{\substack{\parallel \\ \overline{i}}}{k_{|w|}})$$

Оттук по деф. на Δ_i^q $\exists \mu_1 \dots \mu_{|w|}$ т.че

$$\left.\begin{array}{l} q_0 = a_0 \xrightarrow{w_1} a_1 \xrightarrow{w_2} \dots \xrightarrow{w_{|w|}} a_{|w|} = q \\ q = b_0 \xrightarrow{\mu_1} b_1 \xrightarrow{\mu_2} \dots \xrightarrow{\mu_{|w|}} b_{|w|} \in F \end{array}\right\} \text{път в } \mathcal{A}_L$$

и $2^{|w|-1}\overline{\mu_1} + 2^{|w|-2}\overline{\mu_2} + \dots + 2^1 \overline{\mu_{|w|-1}} + \mu_{|w|} = \overline{i}$,

иначе казано $\exists \beta = \mu_1 \dots \mu_{|w|}$ т.че $|\beta| = |w|$, $q_0 \xrightarrow[\mathcal{A}_L]{w} q \xrightarrow[\mathcal{A}_L]{\beta} f \in F$

и $\overline{\beta} = \overline{\mu_1 \dots \mu_{|w|}} = \overline{i}$.

Обратната посока е аналогична.

③

Нека $L = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{0^n 1^n\} \cdot \{0,1\}^{2n}$

Тогава всяка дума от L има дължина $4n$ за някое $n \in \mathbb{N}$

Ще док, че $\mathcal{I}(L) = \{0^n 1^n \mid n \geq 2\} = \bigcup_{n=2}^{\infty} \{0^n 1^n\} =: P$

$\subseteq$ Нека $\alpha \in \mathcal{I}(L)$. $\exists \beta \in \Sigma^*$ т.ч. $|\alpha| = |\beta|$ и $\alpha\beta \in L$.

Но тогава $|\alpha\beta| = 4k$ за някое $k \in \mathbb{N}$

Оттук $\alpha\beta = 0^k 1^k w$, където $w \in \{0,1\}^{2k}$.

Освен това $|\alpha| = |\beta| = 2k$ и сл. $\alpha = 0^k 1^k$ сл. $\alpha \in P$

$\supseteq$ Нека $\alpha \in P$. Тогава $|\alpha| \geq 4$ и

$\beta_0 = 0^{|\alpha|-3} 000$, $\overline{\beta_0} \equiv 0 \pmod 5$

$\beta_1 = 0^{|\alpha|-3} 001$ $\overline{\beta_1} \equiv 1 \pmod 5$

$\beta_2 = 0^{|\alpha|-3} 010$ $\overline{\beta_2} \equiv 2 \pmod 5$

$\beta_3 = 0^{|\alpha|-3} 011$ $\overline{\beta_3} \equiv 3 \pmod 5$

$\beta_4 = 0^{|\alpha|-3} 100$ $\overline{\beta_4} \equiv 4 \pmod 5$

Т.е. за вс. $i \in \{0 \dots 4\}$ има β_i т.че $|\beta_i| = |\alpha|$ и $\overline{\beta_i} \equiv i \pmod 5$. Освен това $\alpha = 0^k 1^k$ за някое $k \in \mathbb{N}$

и сл. $\alpha\beta = 0^k 1^k \cdot \beta$, $\beta \in \{0,1\}^{2k}$,

и накрая $\alpha\beta \in \{0^k 1^k\} \cdot \{0,1\}^{2k} \subseteq L$,

т.е. $\alpha\beta \in L$.

Тогава $\alpha \in \mathcal{I}(L)$

Доказахме, че

$$I(L) = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N} \;\&\; n \geq 2\}$$

сега ако допуснем, че $I(L)$ е регулярен, то

$$\underbrace{I(L)}_{\text{рег.}} \cup \underbrace{\{\varepsilon, 01\}}_{\text{рег.}} = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ е регулярен } \lightning$$

Следователно $I(L)$ не е регулярен.

Т.е. не за всеки $L \subseteq \Sigma^*$ $I(L)$ е регулярен.