Задачи по теория — обратимост, граница и непрекъснатост на функции
КН, 1 к., I п.

Някои задачи от посочените тук или подобни на тях се падат на изпита по теория или на контролните. Задачите обозначени със $*$ са по-сложни или имат по-дълги решения. Такива **не** се падат на изпит или контролно.

1. Докажете, че функцията $\sin \frac{1}{x}$ няма граница в точката 0.

2. Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x)$ е непрекъсната в точката $c \in (a, b)$ и $f(c) > 0$. Докажете, че $f(x) > 0$ в околност на c.

3. Нека $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ са непрекъснати. Докажете, че функциите, определени чрез

$$h_1(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{и} \quad h_2(x) := \min\{f(x), g(x)\}, \quad x \in [a, b],$$

   също са непрекъснати.

4. Функцията на Дирихле $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ се дефинира чрез

$$D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

   ($\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ е множеството на ирационалните числа; по-общо, ако A и B са две множества, тяхната разлика $A\backslash B$ се състои точно от онези елементи на A, които не принадлежат на B.) Докажете, че $D(x)$ е прекъсната във всяка точка.

5. * Функцията на Риман $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ се дефинира чрез

$$R(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ е несъкратима, } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}_+, \\ 0, & x = 0 \text{ или } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Докажете, че $R(x)$ е прекъсната във всяка рационална точка и непрекъсната във всяка ирационална.

6. Докажете, че функцията

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

   е инекция, но не е монотонна върху никой интервал.

7. Докажете, че ако $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и има граница при $x \to \infty$, то тя е равномерно непрекъсната в $[0, \infty)$.

8. Докажете, че ако $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и периодична, то тя е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$.

9. Докажете, че ако $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е ограничена, непрекъсната и монотонна, то тя е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$.

10. * Докажете, че ако $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ е равномерно непрекъсната, то съществуват положителни числа C_1 и C_2 такива, че $|f(x)| \leq C_1 x + C_2$ за всяко $x \geq 0$.