

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“



Криви

ТЕМА №23

Съдържание

Тема 23: Криви

- История
- Кривите в КГ
- Криви на Безие
- Съставни криви
- В-сплайни

История

История

Плавните извивки и контури

- Са винаги харесвани от хората
- Наблюдават се в много живи форми

Използвани за различни цели

- Дизайн на лодки, кораби и автомобили
- Дизайн на музикални инструменти, мебели, сгради

Построяване

- Чрез гъвкави летви и метални тежести
- Летвите са наричани *сплайни*, а тежестите – *патета*, заради формата и украсата си

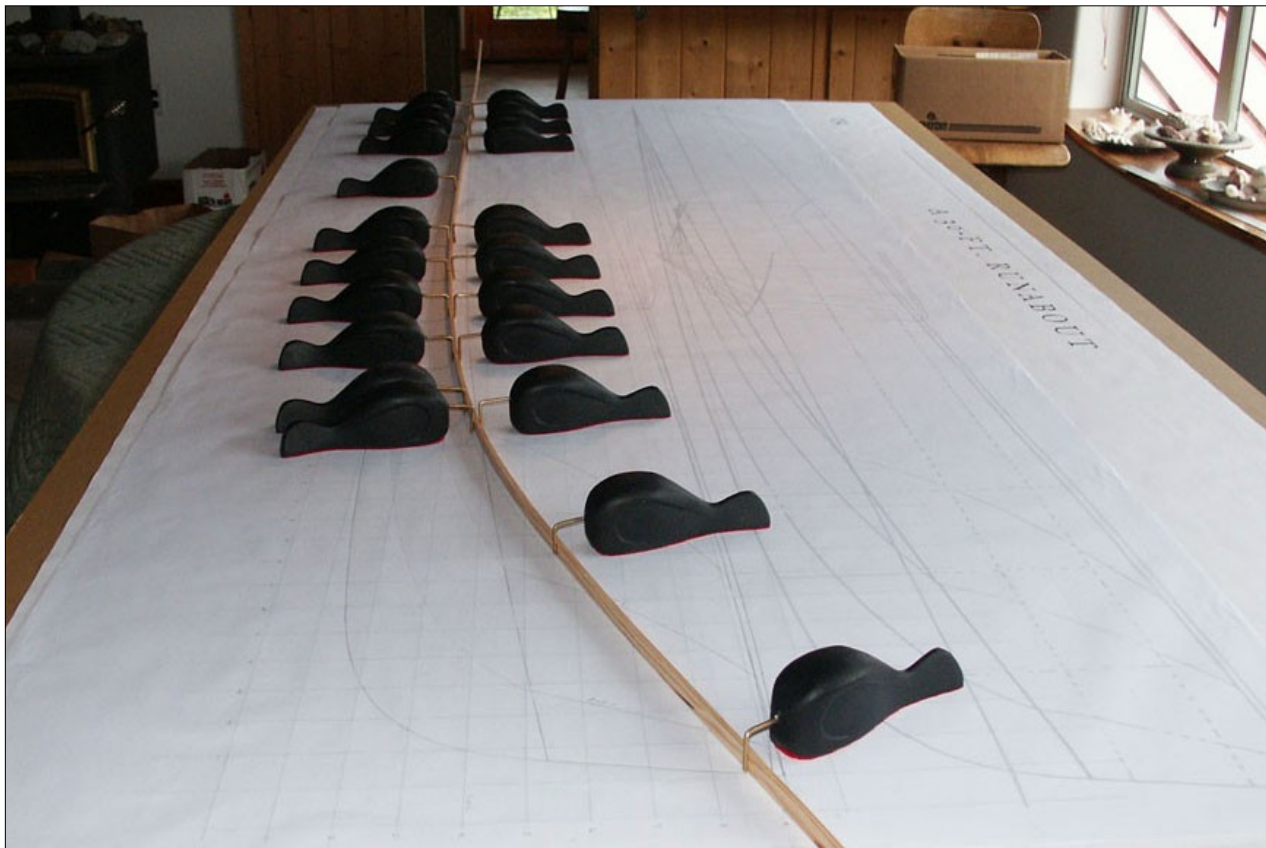


Процедура

- Тежестите удържат летвата в изкривена форма
- Напрежението и деформацията се разпределят равномерно по протежение на летвата

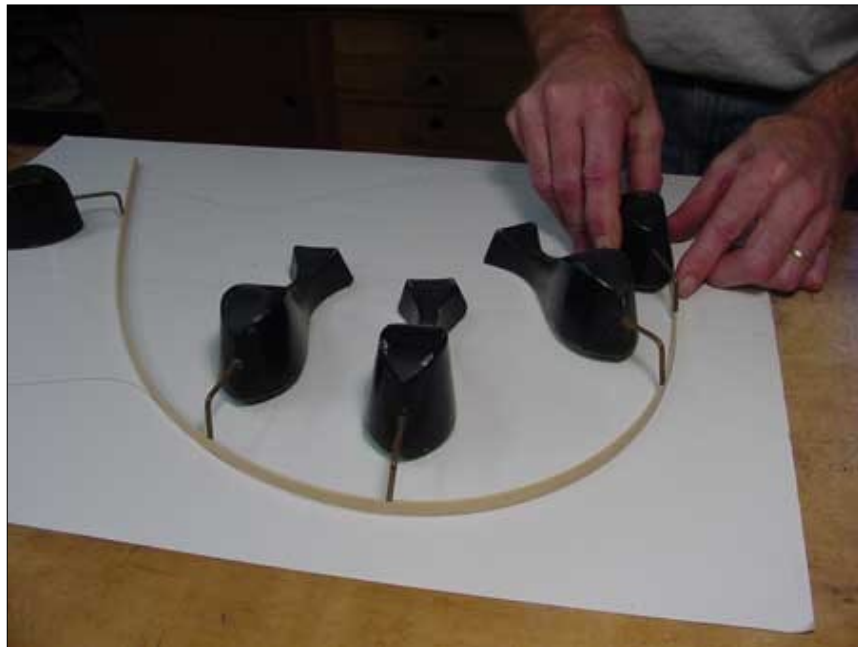
Резултат

- Постигат се гладки и плавни криви
- Естетически красиви и физически оптимални



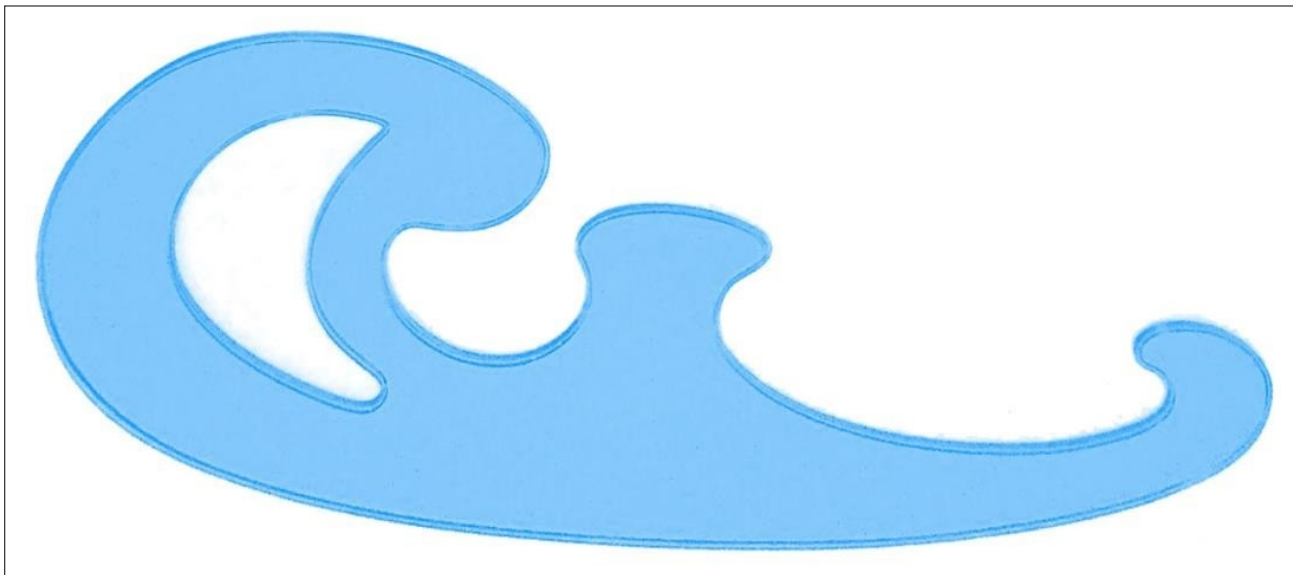
Основно преимущество

- Интуитивно създаване и деформиране на криви линии



Построяване чрез готови форми

- Дизайнерът композира кривата линия като набор от няколко криви фрагмента



Кривите в компютърната графика

В компютърната графика

Използване на криви линии

- При моделиране на сложни обекти, които не могат да се композират лесно от стандартните примитиви
- При моделиране на биологични форми, естествено движение или плавни траектории (примерно виртуални хора)
- При изпитване по ОКГ

Подходи

Използване на явно уравнение $y = f(x)$

- Практически трудно се използва
- Не се запазва при въртене
- За едно x има точно едно y
(това е проблем при проектиране на затворени криви)

Използване на неявно уравнение $f(x, y) = 0$

- Също не е удобно, понеже трудно се намират координатите на точка от кривата
- Подходящо е за определяне дали точка принадлежи на крива и понякога от коя страна на кривата е
- Много криви се дефинират трудно с неявно уравнение

Параметрични уравнения $x = x(t)$ и $y = y(t)$

- Идеални за намиране на координатите на коя да е точка от кривата
- Допускат лесна смяна на координатната система
- Подходящи за реализиране на движение по траектория

Параметрични уравнения

Размисли

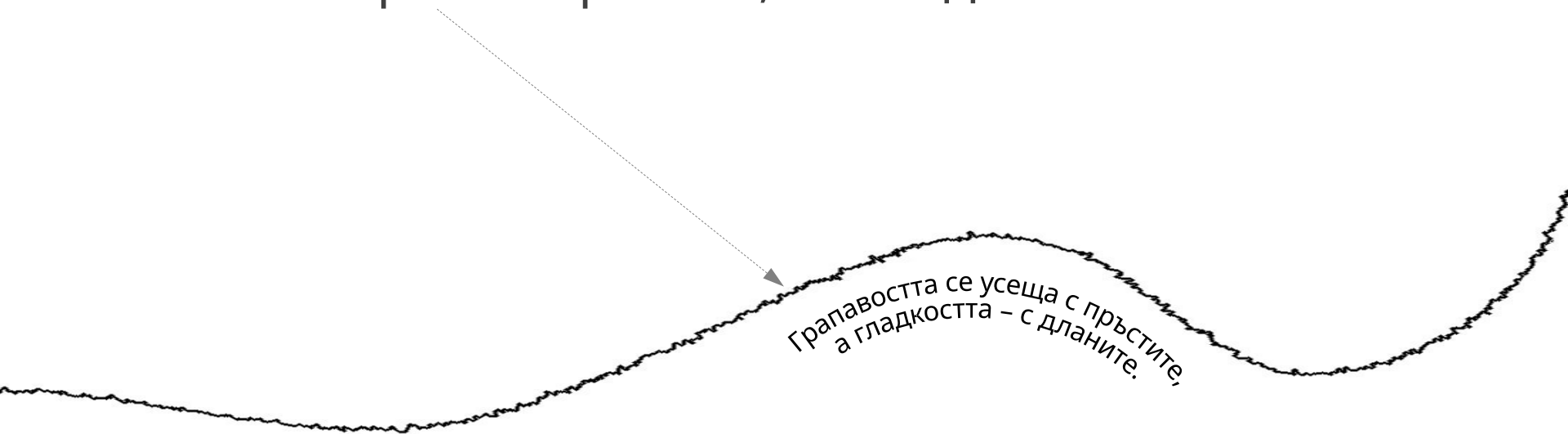
- Най-подходящи са полиномите
- Броят на извивките зависи от степента

Проблеми

- Коефициентите не са интуитивен начин за контрол на извивките на кривата
- Сложни криви се съшиват от парчета от отделни криви

Съшиване и гладкост

- Съшиването води до проблем
- Хората са чувствителни към гладкостта на кривата
- Гладкостта няма връзка с „грапавостта“
- Тази крива е грапава, но гладка



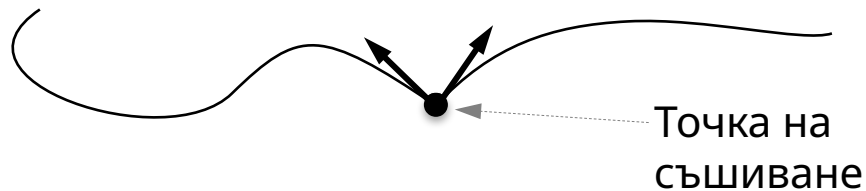
Гладкост в КГ

Гладкостта е на степени

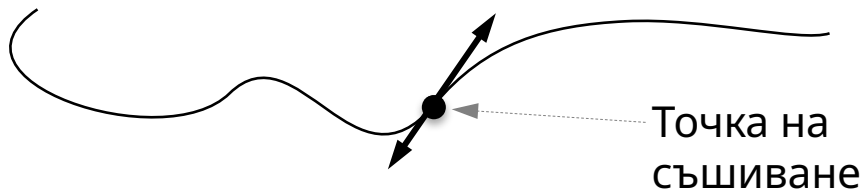
- По-висока степен = математически по-гладка крива
- Гладкостта зависи от поведението на кривата в точките за съшиване
- За гладкост се изследват производните
- Хората усещат 2-3 степени на гладкост

Геометрична гладкост G^n от степен n

— G^0 : единият край съвпада с другия



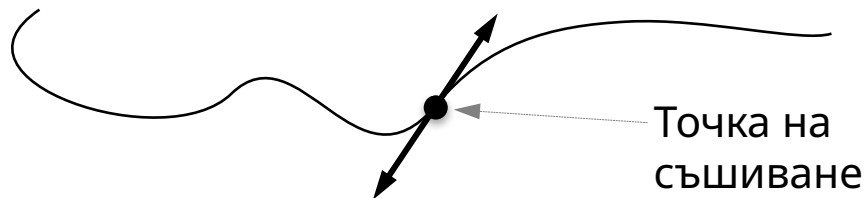
— G^1 : тангентите са непрекъснати



— G^2 : кривината е непрекъсната

Параметрична гладкост C^n от степен n (непрекъснатата n -та производна)

- C^0 : съвпада с G^0
- C^1 : тангентите са равни и непрекъснати

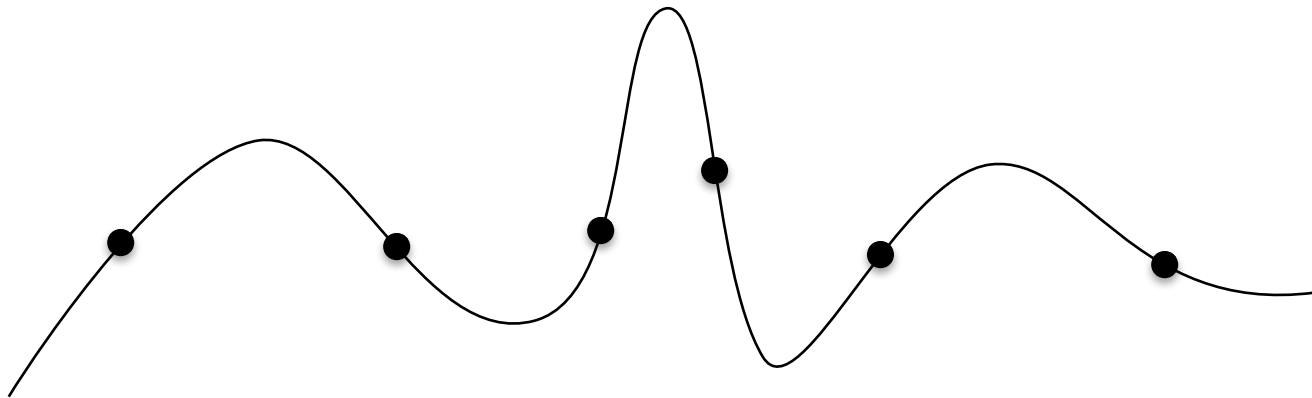


- C^2 : кривината е равна и непрекъснатата

Типове криви

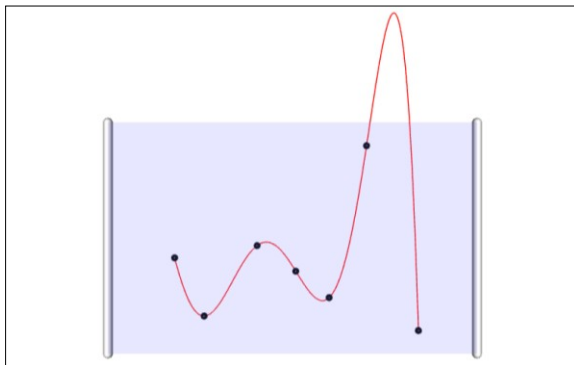
Интерполиращи

- Минават през избраните точки
- Водят до големи „разсейки“



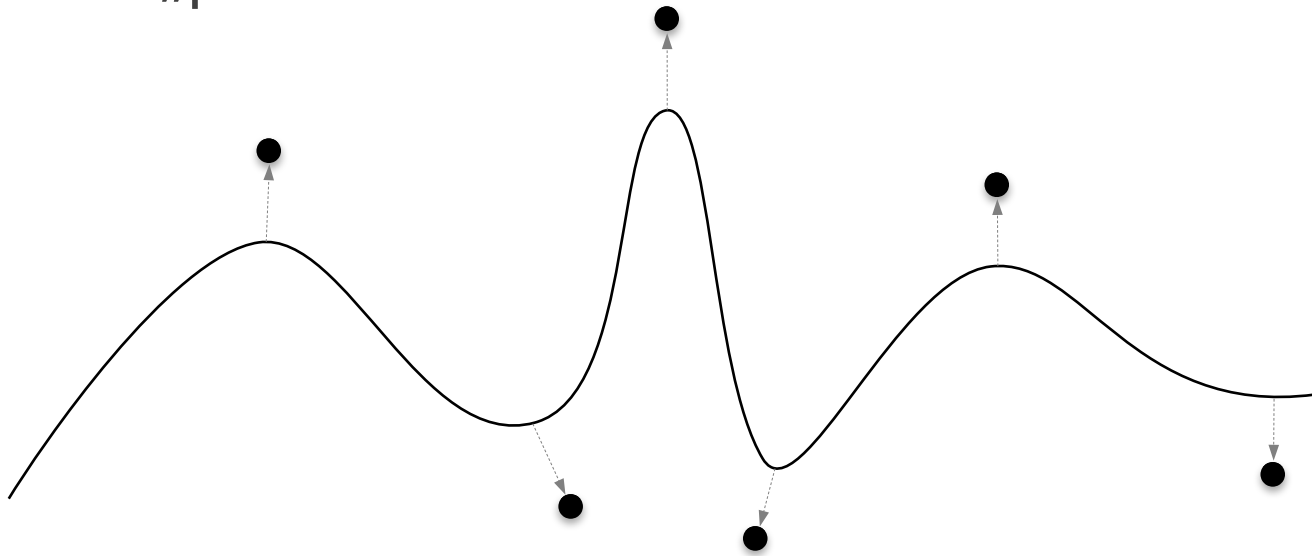
Пример

- Полиномиална интерполация
- Гладка крива, която не е интуитивна и се „разсейва“



Апроксимиращи

- Минават покрай избраните точки
- Тези точки „придърпват“ кривата към себе си
- Няма „разсейки“



В заключение

Търси се начин, за който

- Изчисляването на точка да е бързо
- Дизайнът на кривата да е интуитивен
- Кривата да подлежи на трансформация
- Кривата да не дава „разсейки“
- Фрагментите да имат поне една степен на свобода
- Да не си личи къде е съшивано

Криви на Безие

Криви на Безие

Криви на Безие (Bezier)

- Описани първо от Пол де Кастело (Paul de Casteljaou), работещ в „Ситроен“
- Паралелно открити от Пиер Безие (Pierre Bézier), работещ в „Рено“
- Поради секретността в „Ситроен“ Безие успява първи да публикува и да закове името си в историята на КГ

Елементи

- Контролни точки
- Коефициенти-полиноми (тегла)

Изчисление

- Всяка контролна точка се умножава по координатно по коефициента си
- Сумират се в точка от кривата

Полиноми на Бернщайн (Bernstein)

- В основата на кривите на Безие
- Параметърът $t \in [0,1]$ обхожда кривата

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

- Коефициентите са $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$

Начален пример с $n = 1$

- Прескача се $n = 0$ по тривиални причини
- Умножават се две точки P_0 и P_1 по полиномите на Бернщайн

$$\begin{aligned} Q(t) &= B_0^1(t)P_0 + B_1^1(t)P_1 = \\ &= \binom{1}{0} t^0(1-t)^1 P_0 + \binom{1}{1} t^1(1-t)^0 P_1 = \\ &= (1-t)P_0 + tP_1 \end{aligned}$$

А това си е

- Чистокръвна и чистоплътна линейна комбинация на две точки
- Резултатът е точка по правата (който не вярва, да погледне лекция 3 ето там)

Задача 3: Междинност

Две 3D точки (нак Ю и Ъ)

- Получаване на междинна точка между Ю и Ъ

Линейна обвивка/комбинация

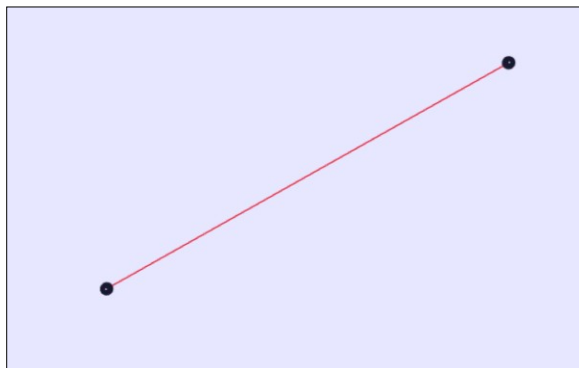
- При $t = 0$ се получава Ю, а при $t = 1$ се получава Ъ
- При $t \in (0,1)$ – междинна точка

$$\text{Щ} = (1 - t)\text{Ю} + (t)\text{Ъ}$$

$$\begin{cases} x_{\text{щ}} = (1 - t)x_{\text{ю}} + (t)x_{\text{ъ}} \\ y_{\text{щ}} = (1 - t)y_{\text{ю}} + (t)y_{\text{ъ}} \\ z_{\text{щ}} = (1 - t)z_{\text{ю}} + (t)z_{\text{ъ}} \end{cases}$$

Илюстрация

– Проба с $n = 1$ – линейна крива на Безие



Разглеждане на $n = 2$

- Полиномите са 3, а точките 2
- Затова се въвежда една междинна точка

$$\begin{aligned} Q(t) &= B_0^2(t)P_0 + B_1^2(t)P_1 + B_2^2(t)P_2 = \\ &= \binom{2}{0} t^0(1-t)^2 P_0 + \binom{2}{1} t^1(1-t)^1 P_1 + \binom{2}{2} t^2(1-t)^0 P_2 = \\ &= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \end{aligned}$$

- Това е линейна комбинация от 3 точки и резултатът е точка в триъгълника P_{012}

Защо?

- Защото за коефициентите $(1 - t)^2$, $2t(1 - t)$ и t^2 са в интервала $[0, 1]$, ако $t \in [0, 1]$
- Защото сумата им $(1 - t)^2 + 2t(1 - t) + t^2 = 1$

Графична интерпретация

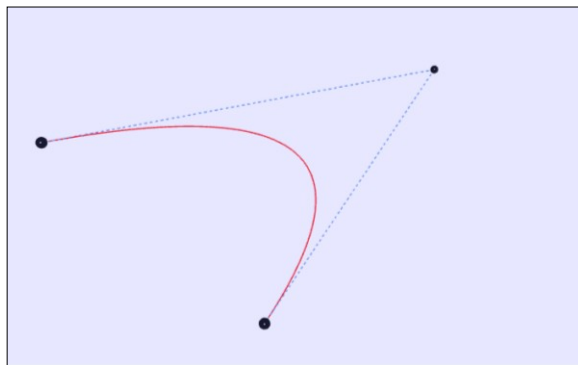
- Очевидно точките ще са по крива, която започва от P_0 и свършва в P_2 :

$$Q(0) = (1 - 0)^2 P_0 + 2 \cdot 0(1 - 0) P_1 + 0^2 P_2 = P_0$$

$$Q(1) = (1 - 1)^2 P_0 + 2 \cdot 1(1 - 1) P_1 + 1^2 P_2 = P_2$$

Илюстрация

– Пробва с $n = 2$ – квадратична крива на Безие



Но каква е ролята на средната точка

- Тя изтегля кривата в своя посока
- Променяйки тази точка, променяме кривата

Особености

- Интерполираща спрямо крайните точки P_0 и P_2
- Апроксимираща спрямо средната точка

Кубични криви на Безие

Получават се при $n = 3$

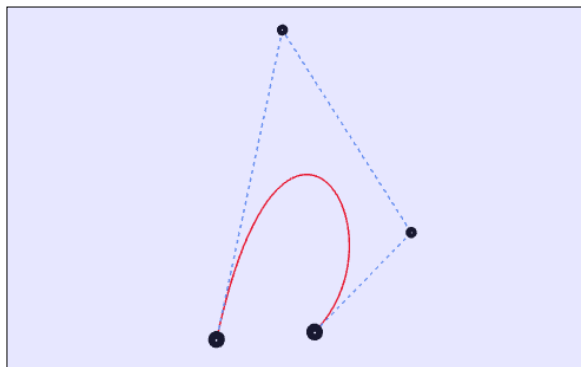
- Нужни са ни две междинни точки

$$\begin{aligned} Q(t) &= B_0^3(t)P_0 + B_1^3(t)P_1 + B_2^3(t)P_2 + B_3^3(t)P_3 = \\ &= (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3 \end{aligned}$$

- Това е линейна комбинация от 4 точки и резултатът е точка в 4-ъгълника P_{0123}
- Точките ще са по крива, която започва от P_0 и свършва в P_3 , т.е. $Q(0) = P_0$ и $Q(1) = P_3$

Илюстрация

– Пробва с $n = 3$ – кубична крива на Безие



Свойства

Свойство №1

- Кривата лежи изцяло в изпъкналата обвивка на контролните точки

Свойство №2

- Ако те са на една линия, кривата се изражда в права

Свойство №3

- За трансформация на кривата е нужно и достатъчно да се трансформират само точките ѝ

Съставни криви от сегменти на Безие

Съставни криви

Моделиране на сложни криви

- Може да е с криви на Безие от висока степен

Не се препоръчва, защото:

- Изчисленията са по-обемни
- Моделирането става по трудно
- Промяна в една точка променя цялата крива

Решението чрез съшиване

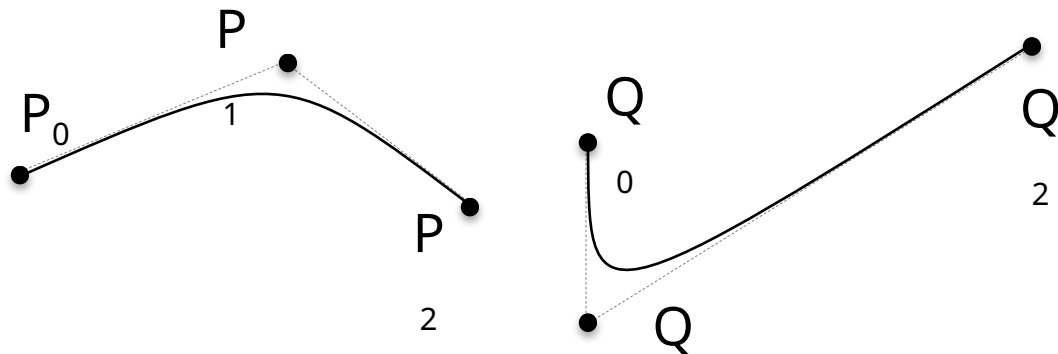
- Представяне на сложна крива чрез няколко снадени криви на Безие
- Тези криви може да са от ниска степен (квадратични и кубични)

Нов проблем

- Съставната крива трябва да е гладка дори и в точките на съшиване

Съшиване на квадратични криви, $n = 2$

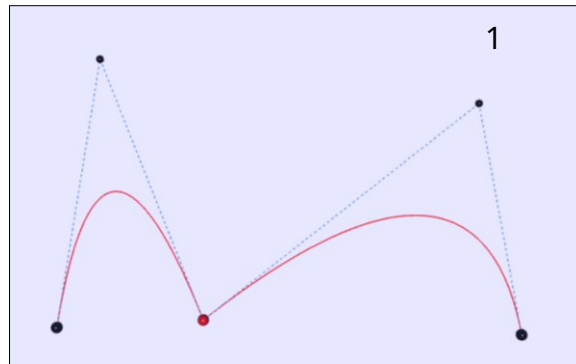
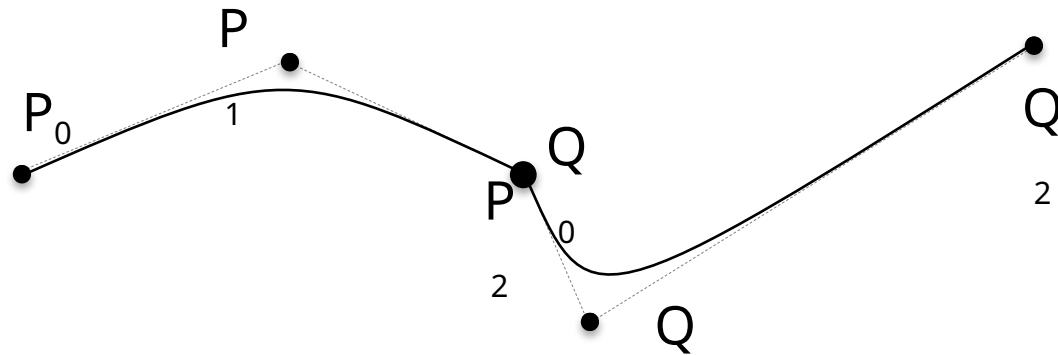
- Две криви с контролни точки $P_{0,1,2}$ и $Q_{0,1,2}$



- Съшиването изисква жертвоготовност
- Някои от точките ще бъдат променени

Постигане на $G^0 (=C^0)$

— Необходимо е P_2 да съвпадне с Q_0



Постигане на G^1 ($G^1 < C^1$)

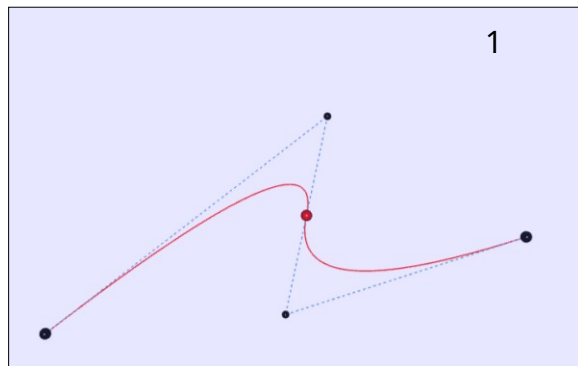
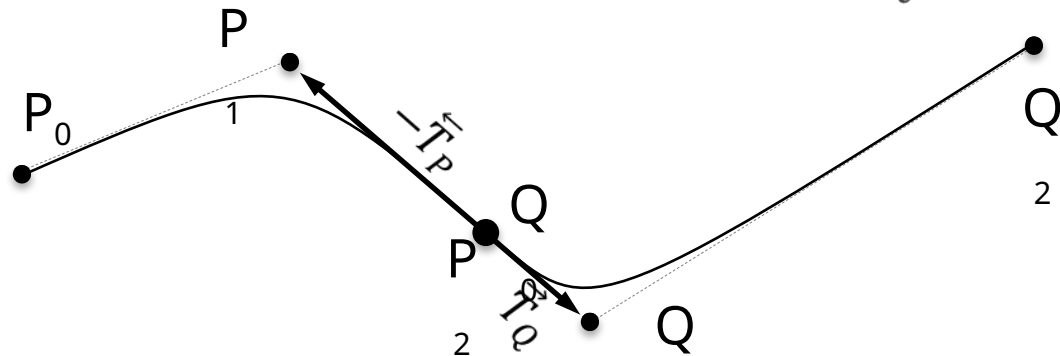
- Необходимо е двете тангенти в общата точка да са на една линия
- Тангентата \vec{T}_P в P_2 :

$$\begin{aligned}\vec{p}'(t) &= [(1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2]' = \\ &= (2t-2)P_0 + (2-4t)P_1 + 2tP_2\end{aligned}$$

- В края на кривата $\vec{p}'(1) = 2(P_2 - P_1)$, така $\vec{T}_P \parallel \overrightarrow{P_1 P_2}$
- Аналогично се получава $\vec{q}'(0) = 2(Q_1 - Q_0)$ и $\vec{T}_Q \parallel \overrightarrow{Q_0 Q_1}$

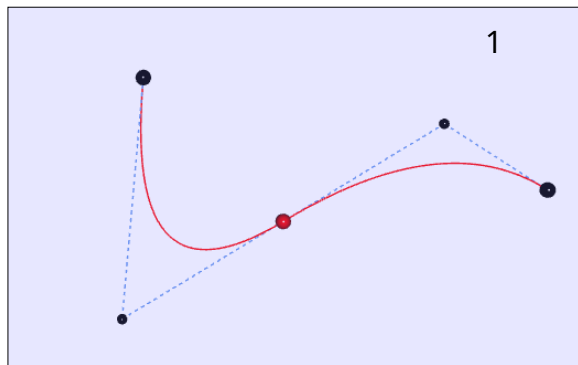
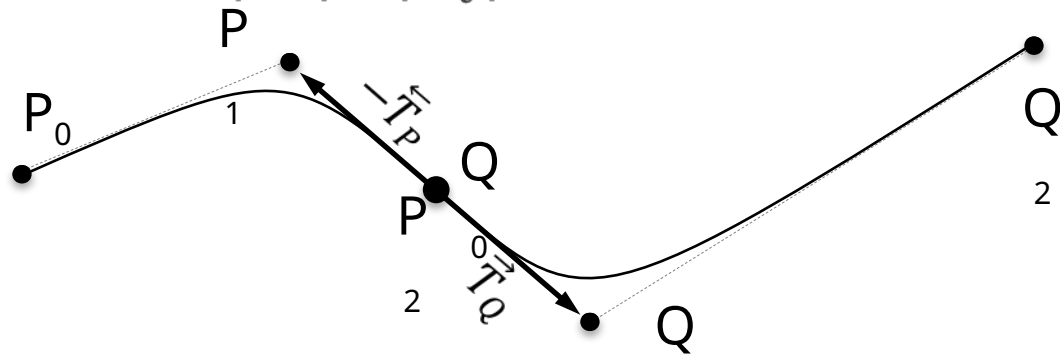
За постигане на G^1 е необходимо

- $P_2 = Q_0$ да са „между“ P_1 и Q_1 (т.е. $\vec{T}_P \parallel \vec{T}_Q$)



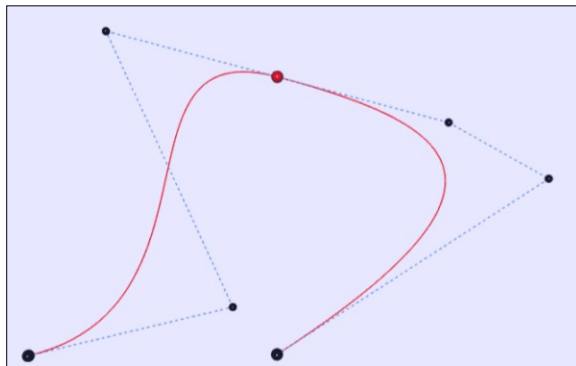
За постигане на C^1

– Необходимо е и $|\vec{T}_P|$ и $|\vec{T}_Q|$ да са равни



Пак C^1 , но с кубична крива

- Тангентите играят същата роля
- По-удобно е за ръчно манипулиране
- Промените са локализирани около общата точка



В-сплайни

В-сплайни

Подобни на кривите на Безие

- Полиноми и контролни точки

Но

- Предоставят локални модификации
- Промяна в една контролна точка променя само част от цялата кривата

Нерационални и рационални

- Рационалните представят точно конични сечения
- Имат *тегла*
(сила с която контролните точки придърпват кривата)

Равномерни и неравномерни

- Според разпределението на деленията по параметричната ос

Точка от В-сплайн

- Набор от контролни точки
- Преливащи функции определящи влиянието на контролните точки
- Гарантират плавно предаване на „щафетата“ от контролна точка към следващата
- Удобно пресмятане чрез формулите на Кокс-ДеБур (M.G. Cox, Carl DeBoor)

Кубичен сплайн

Има 4 точки $P_{0,1,2,3}$

– Преливащи функции

$$w_0(t) = \frac{-t^3+3t^2-3t+1}{6} \quad w_1(t) = \frac{3t^3-6t^2+4}{6}$$

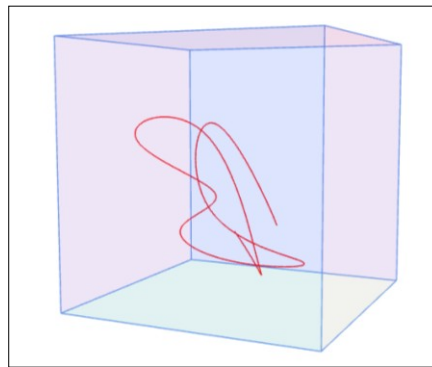
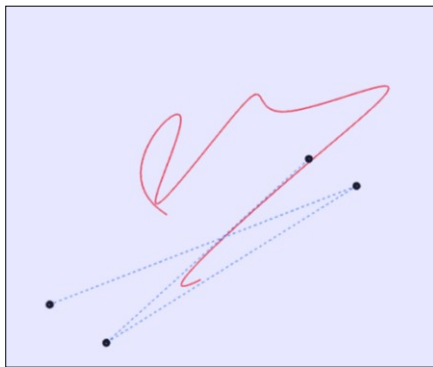
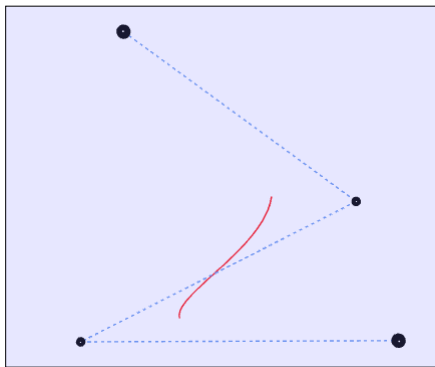
$$w_2(t) = \frac{-3t^3+3t^2+3t+1}{6} \quad w_3(t) = \frac{t^3}{6}$$

– Точка $p(t)$ за $t \in [0,1]$ се получава така:

$$p(t) = w_0(t)P_0 + w_1(t)P_1 + w_2(t)P_2 + w_3(t)P_3$$

Пример с кубичен сплайн

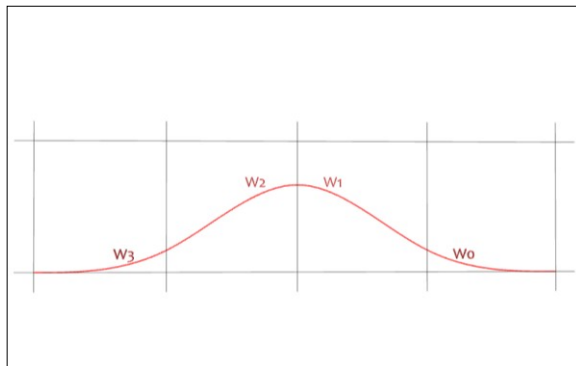
- Единична кубична крива
- Крива, съшита от кубични криви
- 3D крива, съшита от кубични криви



Преливащи функции

Функции-тегла за точките

- Използват се за постигане на гладкост
- Удоволствието от получаването им е в друг курс



Бонус 3т

- Отговор във форума на курса
- Знае се, че:

$$\sum_{i=0}^3 w_i(t) P_i = p(t)$$

- Колко е сумата само на преливащите функции:

$$\sum_{i=0}^3 w_i(t) = ?$$

NURBS криви

Само за протокола (ред k , степен $k - 1$)

– Възлу: $T = [t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n]$

– Функции: $N_i^0(t) = \begin{cases} 1 : t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 : t \notin [t_i, t_{i+1}] \end{cases}$

$$N_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t)$$

– Сплайн: $p(t) = \sum_{i=0}^n N_i^k(t) P_i$

Въпроси?

Повече информация

LUKI	стр. 263-311	LENG	стр. 453-485
AGO2	стр. 373-445	MORT	стр. 244-276
ALZH	гл. 4.6 и 4.7	PAQU	стр. 186-188
BAGL	стр. 31	SALO	половината
KLAW	стр. 148-155	SEAK	стр. 181-187
VINC	стр. 125-141	ZHDA	стр. 97-103

А също и:

- Горното е предостатъчно. Честно!

Ама ако някой държи, ето: B(asis)Splines: <http://ashishmyles.com/tutorials/bsplines/bsplines.pdf>

Край