Смесено произведение

Работим в геометричното пространство, като считаме че са фиксирани единична отсечка за измерване на дължини и ориентация.

Определение 1 *Смесено произведение на векторите* u, v, w се нарича числото $\langle u, v, w\rangle = \langle u \times v, w\rangle \in \mathbb{R}$ (тоест векторното произведение $u \times v$, умножено скаларно с w).

Забележка 1 Други означения за смесеното произведение са (u, v, w) и uvw.

Теорема 1 *Ако векторите u, v, w не са компланарни, то обемът на паралелепипеда, построен върху u, v, w, е $|\langle u, v, w\rangle|$, а обемът на тетраедъра, построен върху u, v, w, е $\frac{1}{6}|\langle u, v, w\rangle|$.*

Теорема 2 *Нека $e = (e_1, e_2, e_3)$ е положително ориентиран ортонормиран базис на пространството на геометричните вектори и спрямо него векторите u, v, w имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$. Тогава* $\langle u, v, w\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Теорема 3 *1.* **(критерий за компланарност на вектори)**
Векторите u, v, w са компланарни $\Leftrightarrow \langle u, v, w\rangle = 0$.

2. (u, v, w) *е положително ориентиран базис* $\Leftrightarrow \langle u, v, w\rangle > 0$,
(u, v, w) *е отрицателно ориентиран базис* $\Leftrightarrow \langle u, v, w\rangle < 0$.

Теорема 4 *Смесеното произведение има следните свойства:*

1. $\langle v, u, w\rangle = -\langle u, v, w\rangle, \quad \langle w, v, u\rangle = -\langle u, v, w\rangle, \quad \langle u, w, v\rangle = -\langle u, v, w\rangle$
(антисиметричност)

$\langle v, w, u\rangle = \langle u, v, w\rangle, \quad \langle w, u, v\rangle = \langle u, v, w\rangle$ *(цикличност)*

2. $\langle u_1 + u_2, v, w\rangle = \langle u_1, v, w\rangle + \langle u_2, v, w\rangle, \quad \langle u, v_1 + v_2, w\rangle = \langle u, v_1, w\rangle + \langle u, v_2, w\rangle,$
$\langle u, v, w_1 + w_2\rangle = \langle u, v, w_1\rangle + \langle u, v, w_2\rangle$ *(адитивност по трите аргумента)*

3. $\langle \lambda u, v, w\rangle = \lambda\langle u, v, w\rangle$, $\langle u, \lambda v, w\rangle = \lambda\langle u, v, w\rangle$, $\langle u, v, \lambda w\rangle = \lambda\langle u, v, w\rangle$, *където* $\lambda \in \mathbb{R}$
(хомогенност по трите аргумента)

Забележка 2 Свойствата 2. и 3. в горната теорема заедно са еквивалентни на свойството

$$\begin{aligned}
&\langle \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v, w\rangle = \lambda_1\langle u_1, v, w\rangle + \lambda_2\langle u_2, v, w\rangle,\\
&\langle u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w\rangle = \lambda_1\langle u, v_1, w\rangle + \lambda_2\langle u, v_2, w\rangle,\\
&\langle u, v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2\rangle = \lambda_1\langle u, v, w_1\rangle + \lambda_2\langle u, v, w_2\rangle
\end{aligned}$$

(*линейност по трите аргумента*)

тоест смесеното произведение е трилинейно.

Пример 1 От антисиметричността на смесеното произведение (а също и от Теорема 3 или Теорема 2) следва, че ако два от векторите u, v, w съвпадат, то $\langle u, v, w\rangle = 0$.

Твърдение 1 *Нека $e = (e_1, e_2, e_3)$ е произволен базис на пространството на геометричните вектори и спрямо него векторите u, v, w имат координати $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$, $w(z_1, z_2, z_3)$. Тогава*

$$\langle u, v, w\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} . \langle e_1, e_2, e_3\rangle.$$