12 Задачи преди контролно

Задача $I(L_1, L_2) = \{xyz \mid xz \in L_2,\ y \in L_1\}$

1) L_1 - КСЕ, L_2 - рег. - да - доказано - TODO

2) L_1 - рег., L_2 - КСЕ

3) L_1 - КСЕ, L_2 - КСЕ

$L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$L_2 = \{c^n d^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ TODO

$I(L_1, L_2) = \dots$

Нка $p \in \mathbb{N}$

$\alpha = a^p c^p d^p b^p$

и разглеждаме случаи

за по-малко случаи съкращаваме правилата на G_2, т.ч. $L(G_2) = L_2$

$A \to \sigma B \rightsquigarrow$ | добавяме $A' \to S_1 \sigma B \mid \sigma S_1 B \mid \sigma B'$

$A \to BC \rightsquigarrow$ | $A' \to B'C \mid BC'$

$A \to \varepsilon \rightsquigarrow$ $A' \to S_1$

$\underbrace{\text{започване от } S_2' \text{ и добавяме правилата на } G_1}_{G_I}$

$L(G_I) = I(L_1, L_2)$

$\subseteq$ Нека $w \in L(G_I)$. Във всеки извод на G_I, който не съдържа S_1, се съдържа точно един символ с "'".

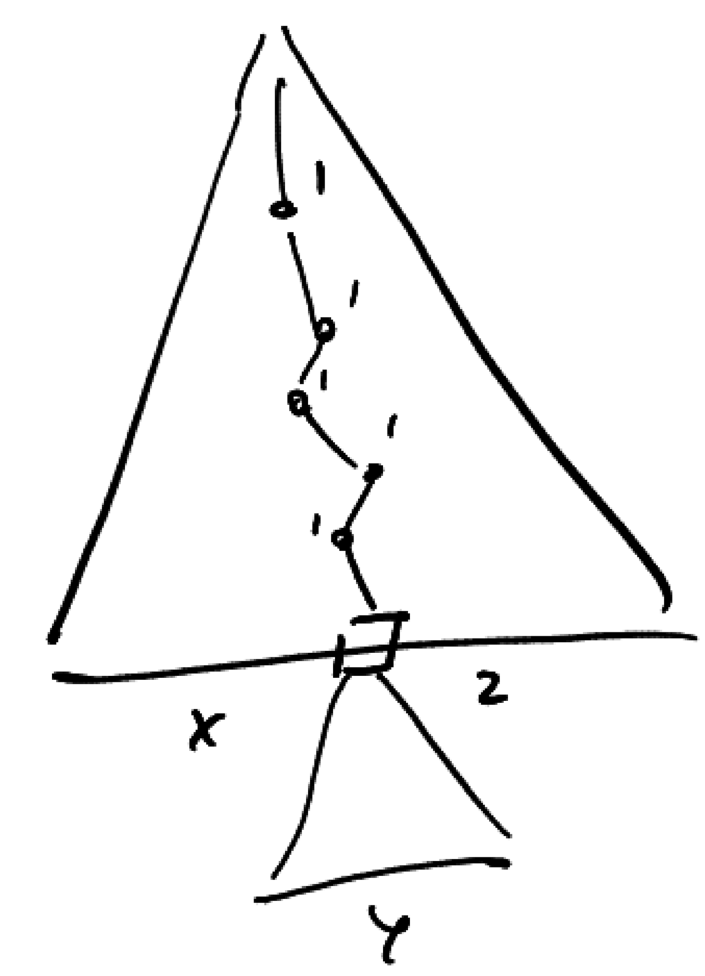
в w очевидно няма такива, значи S_1 се извежда някъде.

Така ако в извода на w "отлагаме" замяната на S_1, изводът изглежда така: $S_2' \Rightarrow^* x S_1 z \Rightarrow^* xyz = w$, като $y \in L_1$

Ако в този извод премахнем всички "'" и S_1, получаваме валиден извод на xz в граматиката G_2

сл. $xz \in L_2$

② Нека $w \in I(L_1, L_2)$. Тогава имаме $xz \in L_2$ & $y \in L_1$ т.ч. $xyz = w$. $S_2 \Rightarrow^*_{G_2} xz$ и $S_1 \Rightarrow^*_{G_1} y$



I сл. $xz = \varepsilon$

Тогава $S_2 \Rightarrow^* \varepsilon$,

и оттук $S_2 \Rightarrow^* S_1$ (приложено е правило $A \to \varepsilon$, заменено с $A' \to S_1$)

и така $S_2 \Rightarrow^* S_1 \Rightarrow^* y = xyz = w$ ok

II сл. $z = \varepsilon$, $x \neq \varepsilon$

Тогава нека σ е последната буква на x.

Тогава σ е изведена от правило от вида $A \to \sigma B$.

В дървото на извода на w:

1) по пътя от корена до σ заменяме нетерминалите със съответните им примовани нетерминали

2) заменяме приложението на $A \to \sigma B$ с $A' \to \sigma S_1 B$

3) за листото S_1 "закачаме" дървото на извод на $\underline{\underline{y}}$ в G_1.

Така получаваме дърво на извод за $xyz = w$ в граматиката G_I

III сл. $z \neq \varepsilon$

Аналогично за първата буква на $\underline{\underline{z}}$. и правило $A \to \sigma B$ заменям с $A' \to S_1 \sigma B$

Задача $\Sigma = \{a, b, c\}$

$$Sort(L) = \{a^{|w|_a} b^{|w|_b} c^{|w|_c} \mid w \in L\}$$

Вярно ли е, че:

1) за всеки регулярен език $L \subseteq \Sigma^*$, $Sort(L)$ е безконт.

2) за всеки регулярен език $L \subseteq \{a, b\}^*$, $Sort(L)$ е безконт.

Решение

1) Не! за $L = \{abc\}^*$, $Sort(L) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

и сме готови.

2) L е регулярен над $\{a, b\}$ и следователно има регулярна граматика $G_L = (N, \{a,b\}, S, R)$ с език L и правила от вида:

$$A \to \sigma B, \quad \sigma \in \{a, b\},\ B \in N$$
$$A \to \varepsilon$$

Строим граматика $G_S = (N, \{a,b\}, S, R_s)$, където

$$R = \{A \to aB \mid A \to aB \in R\} \cup$$
$$\{A \to Bb \mid A \to bB \in R\} \cup \{A \to \varepsilon \mid A \to \varepsilon \in R\}$$

Твърдим, че $L(G_s) = Sort(L)$.

Твърдение 1 $\forall w \in \Sigma^*\ \forall A \in N$

$$A \Rightarrow^*_{G_L} w \implies A \Rightarrow^*_{G_s} Sort(w)$$

оттук следва, че $L(G_s) \supseteq Sort(L)$

Твърдение 2 $\forall w_s \in \Sigma^*\ \forall A \in N$

$$A \Rightarrow^*_{G_s} w_s \implies (\exists w \in L)(A \Rightarrow^*_{G_L} w \ \&\ Sort(w) = w_s)$$

оттук следва, че $L(G_s) \subseteq Sort(L)$

D^3, че Тв.1 и Тв 2 са верни

Доказателство на Тв. 1

Индукция по дължината на извода $A \Rightarrow^*_{G_L} w$

База 1:

$A \Rightarrow^1_{G_L} \varepsilon$ е единствената възможност

$Sort(\varepsilon) = \varepsilon$ и в G_S имаме правило $A \to \varepsilon$

и сл $A \Rightarrow^1_{G_S} Sort(\varepsilon)$

И.Х: $k \in N$

$A \Rightarrow^k_{G_L} w \Rightarrow A \Rightarrow^*_{G_S} Sort(w)$

И.С: $k+1$:

$A \Rightarrow^{k+1}_{G_L} w$. Разглеждаме случаи за първото приложено правило:

I сл $A \to aB$

$A \Rightarrow^1_{G_L} aB \Rightarrow^k w$ И.Х за $a^{-1}w$

$A \Rightarrow^1_{G_S} aB \Rightarrow^*_{G_S} a\,Sort(a^{-1}w) =$

$= a\,a^{|w|_a - 1}\,b^{|w|_b} = Sort(w)$

II сл $A \to bB$

$A \Rightarrow^1_{G_L} bB \Rightarrow^k w$ И.Х. за $b^{-1}w$

$A \Rightarrow^1_{G_S} Bb \Rightarrow^*_{G_S} Sort(b^{-1}w)\,b =$

$= a^{|w|_a}\,b^{|w|_b - 1}\,b = Sort(w)$

доказано

Доказателство на Тв. 2

Индукция по дължина на извода $A \Rightarrow^{*}_{G_s} w_s$

База 1: $A \Rightarrow^{1}_{G_s} \varepsilon$. е единствения вариант

в G_L имаме правило $A \to \varepsilon$ и сл.

$A \Rightarrow^{1}_{G_L} \varepsilon$, като $Sort(\varepsilon) = \varepsilon$ ok

И.Х. $\forall w_s \in \Sigma^{*}$ $\forall A \in N$

$A \Rightarrow^{k}_{G_s} w_s \Rightarrow (\exists w \in \Sigma^{*})(A \Rightarrow^{*}_{G_L} w \;\&\; Sort(w) = w_s)$

И.С. $k+1$

$A \Rightarrow^{k+1}_{G_s} w_s$ Разглеждаме случаи за първото

приложено правило.

I сл. $A \to aB$

$A \Rightarrow^{1}_{G_s} aB \Rightarrow^{k}_{G_s} w_s$ И.Х. за $B \Rightarrow^{k} a^{-1} w_s$

$A \Rightarrow^{1}_{G_L} aB \Rightarrow^{*}_{G_L} aw$, køg. $Sort(w) = a^{-1} w_s$

Но $Sort(aw) = a^{|w|_a + 1} b^{|w|_b} = a . Sort(w) = a\, a^{-1} w_s =$

$= w_s$

II сл. $A \to Bb$

$A \Rightarrow^{1}_{G_s} Bb \Rightarrow^{k}_{G_s} w_s$ И.Х. за $B \Rightarrow^{k} w_s / b$

$A \Rightarrow^{1}_{G_L} bB \Rightarrow^{*}_{G_L} bw$, køg. $Sort(w) = w_s / b$

Но $Sort(bw) = a^{|w|_a} b^{|w|_b + 1} = Sort(w) . b =$

$= w_s / b \cdot b = w_s$

доказано.

Зад $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$

$P(L_1, L_2) = \{ xy \mid xy \in L_1 \ \& \ x \in L_2 \}$

L_2 - безконт, L_1 - регулярен

Р-е Да

Ще построим граматика за $P(L_1, L_2)$

Нека $G_1 = (Q_1, \Sigma, q_{01}, R_1)$ е регулярна граматика с език $L(G_1) = L_1$, получена от дет. автомат A_1 с език L_1, т.е. правилата в R_1 са само от видовете $A \to \sigma B$ и $A \to \varepsilon$

Така всеки нетерминал в $A \in Q_1$ е вярно

$L_{G_1}(A) = \{ w \mid A \Rightarrow^*_{G_1} w \} = L_{A}(A)$

↳ нетерминал ↳ състояние.

$G_2 = (N_2, \Sigma, S_2, R_2)$ е граматика с език L_2 и съкратени правила, т.е. от вида

$A \to \sigma B$

$A \to \varepsilon$

$A \to BC$

Строим $G_P = (N \cup \{S_P\}, \Sigma, S_P, R_P)$ ↳ ново

$N_P = Q_1 \times N_2 \times Q_1$

$R_P = \{ (q, A, p) \to \sigma (q', B, p) \mid A \to \sigma B \in R_1 \ \& \ q \to \sigma q' \in R_2 \}$

$\cup \{ (q, A, q) \to \varepsilon \mid A \to \varepsilon \in R_1 \quad q \in Q_1 \}$

$\cup \{ (q, A, p) \to (q, B, k)(k, C, p) \mid A \to BC \in R_1 \ \& \ k \in Q_1$

$\cup \{ S_P \to (q_{01}, S_2, p) P \mid p \in Q_1 \}$

$\cup R_1$