1. Медицентър

* A_1
$A_2, \dots, A_n \Rightarrow$ медиц. M
$A_1, \dots, A_n$ – медиц. N

A_1, N, M са колинеарни
N е вътр. за A_1M
$A_1N : NM = (n-1) : 1$

Следствия

* $\{A_1\} \Rightarrow M \equiv A_1$

* $\{A_1; A_2\} \Rightarrow M$ е средата на A_1A_2

* $\{A_1; A_2; A_3\}$ $\quad \vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3})$

M е вътр. за $\forall$ медиана и я дели в отнош. $2:1$

---

6 зад. Даден е паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точките M и N са средите съответно на AD и CC_1. Равнината β минава през MN и е успоредна на DB_1. Да се намери в какво отношение равнината β разделя ръба BB_1.

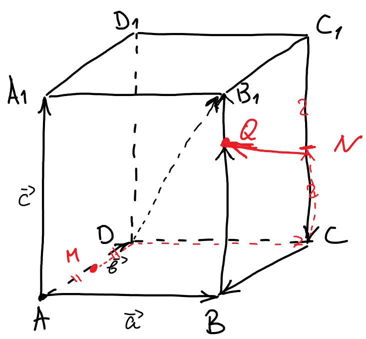
Упътване: Изберете векторна база в пространството. Нека точката $Q = \beta \cap BB_1$. Определете координатите на векторите $\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{DB_1}$ спрямо базата. Използвайте условие за компланарност на тези вектори.

Отг: $BQ : QB_1 = 5 : 1$

Screen clipping taken: 11.4.2025 г. 18:10

1) $\beta \begin{cases} \ni MN \\ \parallel DB_1 \end{cases}$!

Нека $BB_1 \cap \beta = $ т. Q



2) Базисни вектори
$\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, $\vec{AA_1} = \vec{c}$ – ЛНЗ

3) Ще изразим $\vec{MN} \parallel \beta$
$\vec{DB_1} \parallel \beta$
$\vec{NQ} \parallel \beta$ чрез $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$

✓ $\vec{MN} = \vec{MD} + \vec{DC} + \vec{CN} = \frac{\vec{b}}{2} + \vec{a} + \frac{\vec{c}}{2} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}}{2}$

✓ $\vec{DB_1} = \vec{AB_1} - \vec{AD} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

✓ $\vec{NQ} = \vec{NC} + \vec{CB} + \vec{BQ} = -\frac{\vec{c}}{2} - \vec{b} + x.\vec{BB_1} = -\vec{b} - \frac{\vec{c}}{2} + x.\vec{c}$ $\qquad \vec{BQ} = x.\vec{BB_1}$

Спр. $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ $\quad \vec{MN}\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$
$\vec{DB_1}\left(1; -1; 1\right)$
$\vec{NQ}\left(0; -1; x - \frac{1}{2}\right)$

$\vec{MN}, \vec{DB_1}$ и $\vec{NQ}$ са компланарни $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$

$\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DB_1}$ и $\overrightarrow{NQ}$ са компланарни $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & x-\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$

$$(-1).(-1)^5 . \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} + \left(x-\frac{1}{2}\right). \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{2} + \left(x-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \;/ .2$$

$$1 - 3x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 3x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{5}{6}.\overrightarrow{BB_1} \Rightarrow BQ : QB_1 = 5 : 1$$

---

2 зад. Дадени са векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, за които $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle(\vec{c},\vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a},\vec{c}) = \frac{2\pi}{3}$. Нека $OABC$ е тетраедър, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

a) Да се намери обема на тетраедъра $OABC$;

b) Нека точките M, N и P принадлежат съответно на отсечките AB, BC и CA като $AM{:}MB = BN{:}NC = CP{:}PA = 1{:}2$. Да се изразят векторите $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{MP}$ като линейни комбинации на $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Да се пресметне $\cos\sphericalangle NMP$;

c) Нека точката G е медицентърът на ΔABC. Да се докаже, че т.G е медицентърът и на ΔMNP.

Screen clipping taken: 11.4.2025 г. 18:30

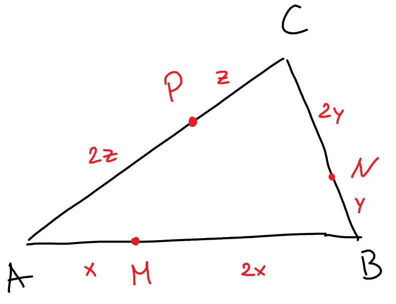
а) $\vec{a}^2 = 1,\ \vec{b}^2 = 1,\ \vec{c}^2 = 4,\ (\vec{a}.\vec{b}) = 0,\ (\vec{b}.\vec{c}) = 1.2.\left(-\frac{1}{2}\right) = -1,\ (\vec{a}.\vec{c}) = -1$

$$V_{OABC} = \frac{1}{6}.\left|\left(\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}\right)\right|$$

$$\left(\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}\right)^2 = (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a}\vec{b} & \vec{a}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{b} & \vec{b}^2 & \vec{b}\vec{c} \\ \vec{a}\vec{c} & \vec{b}\vec{c} & \vec{c}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4-1-1 = 2$$

$$V = \frac{1}{6}.|\sqrt{2}| = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

б)



$AM : MB = 1 : 2$ $\xrightarrow{\text{осн. зад.}}$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{2}{3}.\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}.\overrightarrow{OB} = \frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3} \\ \overrightarrow{ON} &= \frac{2}{3}.\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}.\overrightarrow{OC} = \frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3} \\ \overrightarrow{OP} &= \frac{2}{3}.\overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}.\overrightarrow{OA} = \frac{2\vec{c}+\vec{a}}{3} \end{aligned}\right\} (*)$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{2\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a}-\vec{b}}{3} = \frac{-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\ !$$

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} = \frac{2\vec{c}+\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c}}{3} = \frac{\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$\vec{NP} = \vec{OP} - \vec{ON} = \frac{2\vec{c} + \vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}}{3} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$\vec{MP} = \vec{OP} - \vec{OM} = \frac{2\vec{c} + \vec{a} - 2\vec{a} - \vec{b}}{3} = \frac{-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}}{3}$$

$$\cos \sphericalangle NMP = \frac{(\vec{MN} \cdot \vec{MP})}{|\vec{MN}| \cdot |\vec{MP}|}$$

$$(\vec{MN} \cdot \vec{MP}) = \left(\frac{-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}\right) \cdot \left(\frac{-\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}}{3}\right) =$$

$$\vec{MN}^2 = \left(\frac{-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \left(4\underbrace{\vec{a}^2}_{1} + \underbrace{\vec{b}^2}_{1} + \underbrace{\vec{c}^2}_{4} - 4 \cdot \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{b})}_{0} - 4 \cdot \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{c})}_{-1} + 2\underbrace{(\vec{b} \cdot \vec{c})}_{-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot (4 + 1 + 1 + 4 - 2) = \frac{8}{9}$$

$$|\vec{MN}| = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

c) G – медиц. на $\triangle ABC \iff \vec{OG} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$

Нека $\triangle MNP$ има за медиц. т. $G_1 \Rightarrow \vec{OG_1} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP})$

$$\vec{OG_1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2\vec{OA} + \vec{OB}}{3} + \frac{2\vec{OB} + \vec{OC}}{3} + \frac{2\vec{OC} + \vec{OA}}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = \vec{OG}$$

$$\vec{OG_1} = \vec{OG} \iff G_1 \equiv G$$

---

5 зад. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ като $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$.

$\vec{CA} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})$, $\vec{CB} = \vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{a} \times \vec{b}$.

a) Нека точката H е петата на височината през върха A на триъгълник ABC. Да се изрази векторът $\vec{AH}$ като линейна комбинация на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Да се намери $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, ако $|\vec{AH}| = 1$.

b) При каква стойност на ъгъла α векторите $\vec{CA}$, $\vec{CB}$ и $\vec{CD}$ са линейно независими?

c) При $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, да се намери обема на тетраедъра $ABCD$.

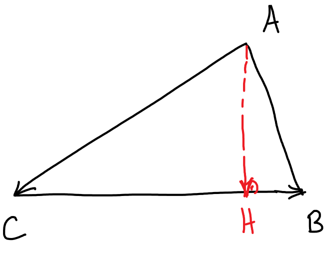
Screen clipping taken: 11.4.2025 г. 18:54

$$\vec{a}^2 = 1, \quad \vec{b}^2 = 4, \quad (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 2 \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{CA} = (\vec{a}^2) \cdot \vec{b} - (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{b} - 2\cos\alpha \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{AC} = 2\cos\alpha \cdot \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{CB} = \vec{b}$$

a) $\triangle ABC$



$$\vec{AH} = \vec{AC} + \vec{CH}, \qquad \vec{CH} = x \cdot \vec{CB} = x \cdot \vec{b}$$

$$\vec{AH} = \vec{AC} + x \cdot \vec{CB}$$

$\vec{AH} = \vec{AC} + x.\vec{CB}$

$(\vec{AH} \cdot \vec{CB}) = 0 \Rightarrow (\vec{AC} + x.\vec{CB}) \cdot \vec{CB} = 0$

$\underbrace{(\vec{AC} \cdot \vec{CB})}_{?} + x.\vec{CB}^2 = 0$

$\vec{CB}^2 = \vec{b}^2 = 4$

$(\vec{AC} \cdot \vec{CB}) = (2\cos\alpha.\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} =$

$= 2\cos\alpha.(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{b}^2 =$

$= 4\cos^2\alpha - 4 = -4.(1 - \cos^2\alpha) = -4.\sin^2\alpha$

$\Rightarrow -4\sin^2\alpha + x.4 = 0$

$x = \sin^2\alpha \rightarrow \vec{AH}$

$\vec{AH} = \vec{AC} + \sin^2\alpha . \vec{b} = 2\cos\alpha . \vec{a} - \underline{\underline{\vec{b}}} + \sin^2\alpha . \underline{\underline{\vec{b}}}$

$\vec{AH} = 2\cos\alpha . \vec{a} - b . \cos^2\alpha$

$\alpha = ?$: $|\vec{AH}| = 1 \Leftrightarrow \vec{AH}^2 = 1$

$(2\cos\alpha . \vec{a} - \cos^2\alpha . \vec{b})^2 = 1$

$4\cos^2\alpha . \underbrace{\vec{a}^2}_{1} - 4\cos^3\alpha . \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{b})}_{2\cos\alpha} + \cos^4\alpha . \underbrace{\vec{b}^2}_{4} = 1$

$4\cos^2\alpha - 8\cos^4\alpha + 4\cos^4\alpha - 1 = 0$

$-4\cos^4\alpha + 4\cos^2\alpha - 1 = 0 . (-1)$

$(2\cos^2\alpha - 1)^2 = 0$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\rightarrow \alpha_1 = 45^\circ$; $\rightarrow \alpha_2 = 135^\circ$

b) $\vec{CA}, \vec{CB}, \vec{CD}$ са лнз $\Leftrightarrow (\vec{CA}\ \vec{CB}\ \vec{CD}) \neq 0$

$\vec{CA} = \vec{b} - 2\cos\alpha . \vec{a}$

$\vec{CB} = \vec{b}$

$\vec{CD} = \vec{a} \times \vec{b}$

$(\vec{CA}\ \vec{CB}\ \vec{CD}) = [(\vec{b} - 2\cos\alpha . \vec{a}) \times \vec{b}] \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = [\underbrace{\vec{b} \times \vec{b}}_{\vec{0}} - 2\cos\alpha . (\vec{a} \times \vec{b})] \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$

$= -2\cos\alpha . (\vec{a} \times \vec{b})^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} \\ (\vec{a} \times \vec{b})^2 \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} - \text{лнз} \Leftrightarrow \alpha = 0 ; \alpha \neq \pi \end{cases}$

лнз са за $\alpha \neq 0; \frac{\pi}{2}; \pi$

c) $V_{ABCD} = \frac{1}{6} . |(\vec{CA}\ \vec{CB}\ \vec{CD})| = \frac{1}{6} . \left| -2\cos\alpha . (\underset{1}{\vec{a}^2} . \underset{4}{\vec{b}^2} - (\vec{a}\vec{b})^2) \right|$

c) $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\cdot\left|(\vec{CA}\ \vec{CB}\ \vec{CD})\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|-2\cos\alpha\cdot(\underbrace{\vec{a}^2}_{=1}\cdot\underbrace{\vec{b}^2}_{=4} - (\vec{a}\vec{b})^2)\right|$

За $\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $(\vec{a}\cdot\vec{b}) = 1.2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$V = \frac{1}{6}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot(4-3) = \frac{\sqrt{3}}{6}$

---

5 зад. Даден е тетраедър $OABC$, за който $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Точките A_1, C_1 и O_1 са медицентровете съответно на триъгълниците: BOC, AOB и ABC.

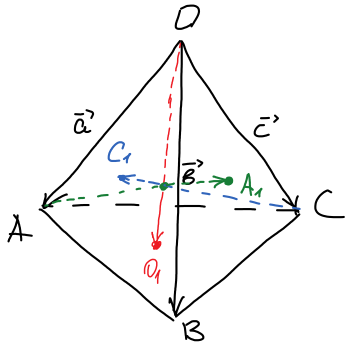
a) Да се изразят медианите на тетраедъра $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{OO_1}$ чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$;

b) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ са линейно независими;

c) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ са линейно зависими, т.е. четирите точки A, C, A_1 и C_1 лежат в една равнина. От двете подусловия b) и c) следва, че двете прави AA_1 и CC_1 се пресичат в единствена точка M;

d) Да се докаже, че намерената по-горе точка M лежи и на третата медиана OO_1 и да се намерят отношенията, в които т. M дели всяка от медианите.

Screen clipping taken: 11.4.2025 г. 19:15



a) O_1 − мед. на △ABC

$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\cdot(-\vec{a}+\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}-\vec{a}) = \frac{-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3}\cdot(-\vec{c}+\vec{a}-\vec{c}+\vec{b}-\vec{c}) = \frac{\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}}{3}$

△OAB

b) $\overrightarrow{AA_1}\left(-1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$
$\overrightarrow{CC_1}\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ -1\right)$ − ЛНЗ, защото коорд. им не са пропорц.

c) Разгл. $\overrightarrow{AA_1}\left(-1;\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ $\quad\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA} = \vec{c}-\vec{a}$

$\overrightarrow{CC_1}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};-1\right)$

$\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$

$\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ са компл. $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} A, A_1, C, C_1 \text{ лежат в 1 равнина} \\ \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CC_1} - \text{ЛНЗ} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!$ т. $M = AA_1 \cap CC_1$

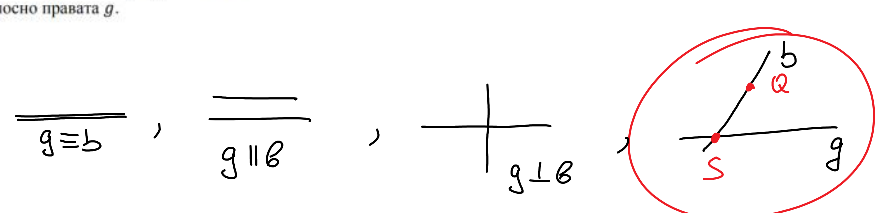
---

6 зад. Дадени са правите: $g: 2x - y - 5 = 0$ и $b: 3x - y - 1 = 0$. Да се намери уравнение на правата b', ортогонално симетрична на правата b относно правата g.

Screen clipping taken: 11.4.2025 г. 19:30

$g: 2x - y - 5 = 0$

$b: 3x - y - 1 = 0$



$g: 2x - y - 5 = 0$

$b: 3\underset{0}{x} - \underset{-1}{y} - 1 = 0$

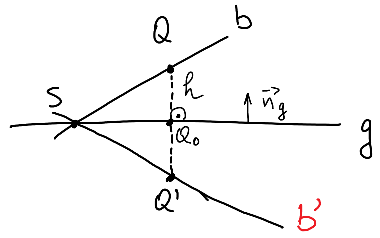
$g \equiv b$, $g \parallel b$, $g \perp b$, S g

1) ? т. $S = g \cap b$

2) Изб. $Q \in b$, напр. $Q(0; -1) \in b$

$b \begin{cases} \ni S \\ \ni Q \end{cases}$, $b \xrightarrow{G_g} b'$, $b' \begin{cases} \ni S \\ \ni Q' \end{cases}$

?, т. $Q \xrightarrow{G_g}$ т. Q'



---

5 зад. Дадени са векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, за които $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$,

$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{c}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

A_1 и B_1 са средите съответно на BC и OC.

a) Да се докаже, че векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ са линейно независими;

b) Да се изразят векторите $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ чрез $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;

c) Да се докаже, че правите AA_1 и BB_1 са кръстосани;

d) Да се намери разстоянието между правите AA_1 и BB_1.

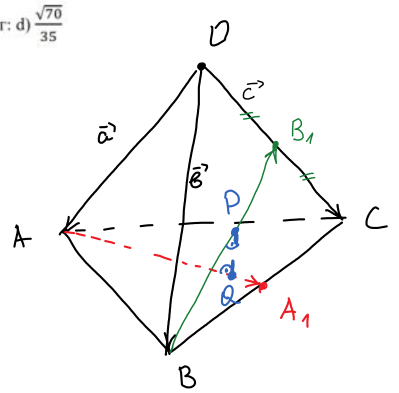
$\rightarrow (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 = \Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \cdots = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – ЛНЗ

Отг: d) $\frac{\sqrt{70}}{35}$

Screen clipping taken: 11.4.2025 г. 19:37

$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1$

$(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\vec{c}) = (\vec{c}\vec{a}) = \frac{1}{2}$



b) $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c} - \vec{a})$

$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2} \cdot (-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} \cdot (-\vec{b} + c - \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot (-2\vec{b} + \vec{c})$

c) AA_1 и BB_1 са кръстосани $\Leftrightarrow$ не същ. равнина, която едновременно да ги съдържа

?, че точките A, B, A_1 и B_1 НЕ са компланарни

$\overrightarrow{AA_1}(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

$\overrightarrow{BB_1}(0; -1; \frac{1}{2})$

$\overrightarrow{AB}(-1; 1; 0)$

$$\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 - \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2}\right] = -\frac{3}{4} \neq 0 \Rightarrow$$

правите AA_1 и BB_1 са кръстосани

d) $P \in BB_1$

$Q \in AA_1$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1Q}$

$\overrightarrow{PB} = x \cdot \overrightarrow{BB_1}$

$\overrightarrow{BA_1} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{A_1Q} = y\cdot\overrightarrow{AA_1}$$

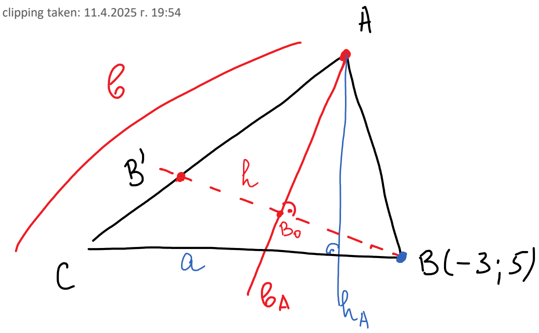
$$\overrightarrow{PQ} = x\cdot\overrightarrow{BB_1} + y\cdot\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$\begin{cases} (\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AA_1}) = 0 \\ (\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BB_1}) = 0 \end{cases}$$

---

5 зад. Дадени са правите: $b_A: 4x-3y+2=0$, $h_A: x+3y+8=0$ и точката $B(-3,5)$. Да се намерят координатите на върховете A и C на триъгълник ABC, ако правите b_A и h_A съдържат съответно вътрешната ъглополовяща и височината през върха A на триъгълника.

Screen clipping taken: 11.4.2025 г. 19:54



1) $A = b_A \cap h_A \Rightarrow A(-2;-2)$

2) Нека т. $B \xrightarrow{S_{b_A}} B' \Rightarrow B' \in AC$

$$h\begin{cases} \ni B \\ \perp b_A: 4x-3y+2=0 \end{cases}$$

$h: 3x+4y+D=0$

$B(-3;5) \Rightarrow 3.(-3)+4.5+D=0$

$D=-11$

$h: 3x+4y-11=0$

$$B_0 = h \cap b_A \Rightarrow \begin{cases} 3x+4y-11=0 & |.3 \\ 4x-3y+2=0 & |.4 \end{cases} +$$

$25x-25=0$

$x=1$

$4y=11-3$

$y=2$

$B_0(1;2)$ – ср.

$B(-3;5)$

$B'(x',y')$

$\frac{-3+x'}{2}=1 \Rightarrow x'=5$

$\frac{5+y'}{2}=2 \Rightarrow y'=-1$

$B'(5;-1)$

3) $$b\begin{cases} \ni A(-2;-2) \\ \ni B'(5;-1) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$x.(-1) - y.(-7) + 1.12 = 0 \quad |.(-1)$

$b: x-7y-12=0 \rightarrow$ Да

$-2 \quad -2$

$5 \quad -1$

4) $$a\begin{cases} \ni B(-3;5) \\ \perp h_A: x+3y+8=0 \end{cases} \Rightarrow a: 3x-y+D=0$$

$3.(-3)-5+D=0 \Rightarrow D=14$

$a: 3x-y+14=0$

$a: 3x - y + 14 = 0$

5) т. $C = a \cap b$

$$\left| \begin{array}{ll} 3x - y + 14 = 0 & \Big) + \\ x - 7y - 12 = 0 & \Big| \cdot (-3) \end{array} \right. \Rightarrow 20y + 50 = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$$

$$x = 7 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 12 = -\frac{11}{2}$$

$$C\left(-\frac{11}{2}; -\frac{5}{2}\right)$$