

Задачи по теория — формула на Тейлър и неопределен интеграл
КН, 1 к., I п.

Някои задачи от посочените тук или подобни на тях се падат на изпита по теория или на контролните. Задачите обозначени със * са по-сложни или имат по-дълги решения. Такива **не** се падат на изпит или контролно.

1. Докажете, че апроксимационната формула

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

дава стойността на $\sqrt{1+x}$ с грешка по-малка от 10^{-1} , ако $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2. Нека $f(x)$ притежава втора производна в $(0, +\infty)$. Нека още

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xf''(x) = 0.$$

Докажете, че

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf'(x) = 0.$$

3. * Нека $f(x)$ има граница при $x \rightarrow +\infty$. Нека още $f(x)$ притежава втора производна в $(0, +\infty)$ и $f''(x)$ е ограничена функция върху $(0, +\infty)$. Докажете, че

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

4. Нека $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ има примитивна в \mathbb{R} . Докажете, че ако $f(x)$ е четна функция, то тя има примитивна, която е нечетна функция.

5. Покажете дали винаги е вярно, че ако $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е T -периодична и има примитивна в \mathbb{R} , то тя има примитивна, която също е T -периодична.

6. Намерете неопределения интеграл

$$\int \sqrt{|x|} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7. Намерете неопределения интеграл

$$\int |\cos x| dx, \quad x \in [0, 2\pi].$$

8. * Намерете неопределения интеграл

$$\int |\cos x| dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$