

Модел на средите и изчислителни процеси

Трифон Трифонов

Функционално програмиране, 2025/26 г.

9–20 октомври 2025 г.

Тази презентация е достъпна под лиценза Creative Commons Признание-Некомерсиално-Споделяне на споделеното 4.0 Международен 

Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича среда.
- Всеки символ има най-много една оценка в дадена среда.
- В даден момент могат да съществуват много среди.
- Символите винаги се оценяват в една конкретна среда.
- **Символите могат да има различни оценки в различни среди.**
- При стартиране Scheme по подразбиране работи в глобалната среда.
- В глобалната среда са дефинирани символи за стандартни операции и функции.

Пример за среда

- (`define a 8`)
- `r` → Грешка!
- (`define r 5`)
- (`+ r 3`) → 8
- (`define (f x) (* x r)`)
- (`f 3`) → 15
- (`f r`) → 25

E										
a	: 8									
r	: 5									
f	<table border="1"> <tr> <td>Параметри</td><td>:</td><td>x</td></tr> <tr> <td>Тяло</td><td>:</td><td>(* x r)</td></tr> <tr> <td>Среда</td><td>:</td><td>E</td></tr> </table>	Параметри	:	x	Тяло	:	(* x r)	Среда	:	E
Параметри	:	x								
Тяло	:	(* x r)								
Среда	:	E								

Функции и среди

- Всяка функция f пази указател към средата E , в която е дефинирана.
- При извикване на f :
 - създава се нова среда E_1 , която разширява E
 - в E_1 всеки символ означаващ формален параметър се свързва с оценката на фактическия параметър
 - тялото на f се оценява в E_1

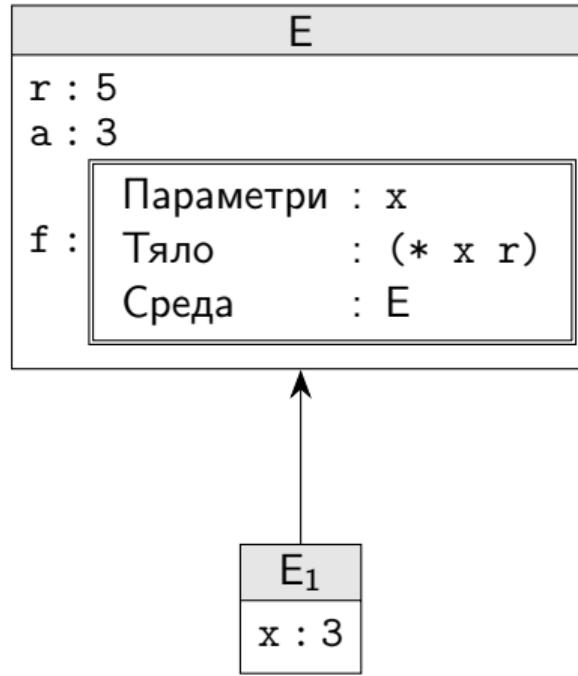
Дърво от среди

- Всяка среда пази указател към своя „родителска среда“, която разширява
- така се получава дърво от среди
- при оценка на символ в дадена среда E
 - първо се търси оценката му в E
 - ако символът не е дефиниран в E, се преминава към родителската среда
 - при достигане на най-горната среда, ако символът не е дефиниран и в нея се извежда съобщение за грешка

Извикване на дефинирана функция

- (`define r 5`)
- (`define a 3`)
- (`define (f x) (* x r)`)

{E} (f a)
 ↓
 {E} (f 3)
 ↓
 {E₁} (* x r)
 ↓
 15



Какво е рекурсия?



"Matryoshka dolls" от User:Fanghong (оригинал) и User:Gnomz007 (производна), CC BY SA-3.0

Какво е рекурсия?



"Sierpinski triangle, the evolution in five iterations" от Solkoll, Обществено достояние чрез Общомедия

Какво е рекурсия?

Повторение чрез позоваване на себе си

Рекурсивна функция: дефинира се чрез себе си

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ n \cdot (n - 1)!, & \text{при } n > 0. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(база)} \\ \text{(стъпка)} \end{array}$$

- Дава се отговор на най-простата задача (база, дъно)
- Показва се как сложна задача се свежда към една или няколко по-прости задачи от същия вид (стъпка)

Рекурсивни уравнения

Какво означава „да дефинираме функция чрез себе си“?

Да разгледаме *рекурсивното уравнение*, в което F е неизвестно:

$$F(n) = \underbrace{\begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ n \cdot F(n - 1), & \text{при } n > 0. \end{cases}}_{\Gamma(F)(n)}$$

$n!$ е „най-малкото“ решение на уравнението $F = \Gamma(F)$.

Най-малка неподвижна точка

Теорема (Knaster-Tarski)

Ако Γ е изчислим оператор, то уравнението $F = \Gamma(F)$ има единствено най-малко решение f (най-малка неподвижна точка на Γ). Нещо повече, решението точно съответства на рекурсивна програма пресмятща f чрез Γ .

```
(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1))))))
```

Кое е най-малкото решение на уравнението $F(x) = F(x + 1) - 1$?

```
(define (g x) (- 1 (g (+ x 1))))
```

$(g 0) \rightarrow ?$

g е „празната функция“, т.е. $\text{dom}(g) = \emptyset$.

Операционна и денотационна семантика

Два подхода за описание на смисъла на функциите в Scheme.

Нека $(\text{define } (f \ x) \ \Gamma[f])$ е рекурсивно дефинирана функция.

Коя е математическата функция f , която се пресмята от f ?

Денотационна семантика

f е най-малката неподвижна точка на уравнението $F = \Gamma(F)$.

Операционна семантика

Разглеждаме редицата от последователни оценки на комбинации

$(f \ a) \rightarrow \Gamma[f] \ [x \mapsto a] \rightarrow \dots$

Ако стигнем до елемент b , който не е комбинация, то $f(a) := b$.

Функциите в Scheme имат дуален, но еквивалентен смисъл:

- решения на рекурсивни уравнения
- изчислителни процеси, генериращи се при оценка

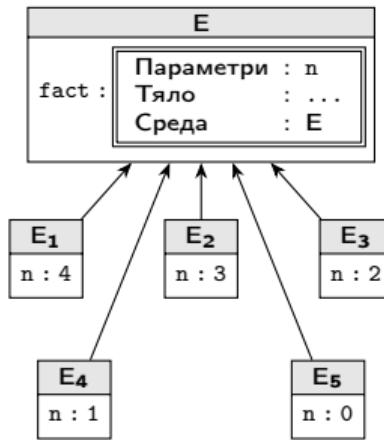
Оценка на рекурсивна функция

```
(fact 4)
  ↓
(* 4 (fact 3))
  ↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 1)))
  ↓
(* 4 (* 3 2))
  ↓
(* 4 6)
  ↓
24
```

Оценка на рекурсивна функция в среда

```

{E}      (fact 4)
         ↓
{E1}    (* 4 (fact 3))
         ↓
{E2}    (* 4 (* 3 (fact 2)))
         ↓
{E3}    (* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
         ↓
{E4}    (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
         ↓
{E5}    (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
         ↓
{E3}    (* 4 (* 3 (* 2 1)))
         ↓
{E2}    (* 4 (* 3 2))
         ↓
{E1}    (* 4 6)
         ↓
{E}      24
  
```



Линеен рекурсивен процес

Факториел с цикъл

Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for( int i = 1 ; i <= n ; i++ )  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

Превод на Scheme

```
(define (for n r i)  
  (if (<= i n)  
      (for n (* r i) (+ i 1))  
      r))  
  
(define (fact n)  
  (for n 1 1))
```

Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(for 4 2 3)
  ↓
(for 4 6 4)
  ↓
(for 4 24 5)
  ↓
24
```

Линеен итеративен процес

Оценка на итеративен факториел със среди

```

{E}      (fact 4)
         ↓
{E₀}    (for 4 1 1)
         ↓
{E₁}    (for 4 1 2)
         ↓
{E₂}    (for 4 2 3)
         ↓
{E₃}    (for 4 6 4)
         ↓
{E₄}    (for 4 24 5)
         ↓
{E₅}    24
  
```



Рекурсивен и итеративен процес

```
(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
```

(fact 4)
 ↓
 (* 4 (fact 3))
 ↓
 (* 4 (* 3 (fact 2)))
 ↓
 (* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
 ↓
 (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0))))))
 ↓
 (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
 ↓
 (* 4 (* 3 (* 2 1)))
 ↓
 (* 4 (* 3 2))
 ↓
 (* 4 6)
 ↓
 24

```
(define (for n r i)
  (if (<= i n)
      (for n (* r i) (+ i 1))
      r))
```

(fact 4)
 ↓
 (for 4 1 1)
 ↓
 (for 4 1 2)
 ↓
 (for 4 2 3)
 ↓
 (for 4 6 4)
 ↓
 (for 4 24 5)
 ↓
 24

Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерираят същински **рекурсивни процеси**
- Рекурсивно извикване, при което няма отложена операция се нарича **опашкова рекурсия**
- Функциите, в които всички рекурсивни извиквания са опашкови генерираят **итеративни процеси**
- При итеративните процеси липсва етап на свиването на рекурсията
- Опашковата рекурсия се използва за симулиране на цикли
- В Scheme опашковата рекурсия **по стандарт** се интерпретира като цикъл
 - т.е. не се заделя памет за всяко рекурсивно извикване

Рекурсивен и итеративен процес

```
(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
```

↓
 (fact 4)
 ↓
 (* 4 (fact 3))
 ↓
 (* 4 (* 3 (fact 2)))
 ↓
 (* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
 ↓
 (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0))))))
 ↓
 (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
 ↓
 (* 4 (* 3 (* 2 1)))
 ↓
 (* 4 (* 3 2))
 ↓
 (* 4 6)
 ↓
 24

```
(define (for n r i)
  (if (<= i n)
      (for n (* r i) (+ i 1))
      r))
```

↓
 (fact 4)
 ↓
 (for 4 1 1)
 ↓
 (for 4 1 2)
 ↓
 (for 4 2 3)
 ↓
 (for 4 6 4)
 ↓
 (for 4 24 5)
 ↓
 24

Оценка на итеративен факториел със среди

```

{E}      (fact 4)
         ↓
{E₀}    (for 4 1 1)
         ↓
{E₁}    (for 4 1 2)
         ↓
{E₂}    (for 4 2 3)
         ↓
{E₃}    (for 4 6 4)
         ↓
{E₄}    (for 4 24 5)
         ↓
{E₅}    24
  
```



Вложени дефиниции

- (define (<функция> {<параметър>}) {<дефиниция>}) <тяло>)
- При извикване на <функция> първо се оценяват всички <дефиниция> и след това се оценява <тяло>
 - Първо се създава среда E_1 , в която формалните параметри се свързват с оценките на фактическите
 - След това се създава среда E_2 , която разширява E_1 , за вложените дефиниции
 - В средата E_2 се записват всички символи от вложени дефиниции **без стойности**
 - Всички вложени дефиниции се **оценяват** в E_2
 - Накрая получените оценки се **свързват** със съответните символи в E_2
- Пример: (define (dist x1 y1 x2 y2)
 (define dx (- x2 x1))
 (define dy (- y2 y1))
 (define (sq x) (* x x))
 (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))))

Оценка на вложени функции

{E} (dist 2 5 -1 9)



{E₂} (define dx (- x2 x1))

{E₂} (define dy (- y2 y1))

{E₂} (define (sq x) (* x x))

{E₂} (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))



{E₃} (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))



{E₄} (sqrt (+ 9 (* x x)))



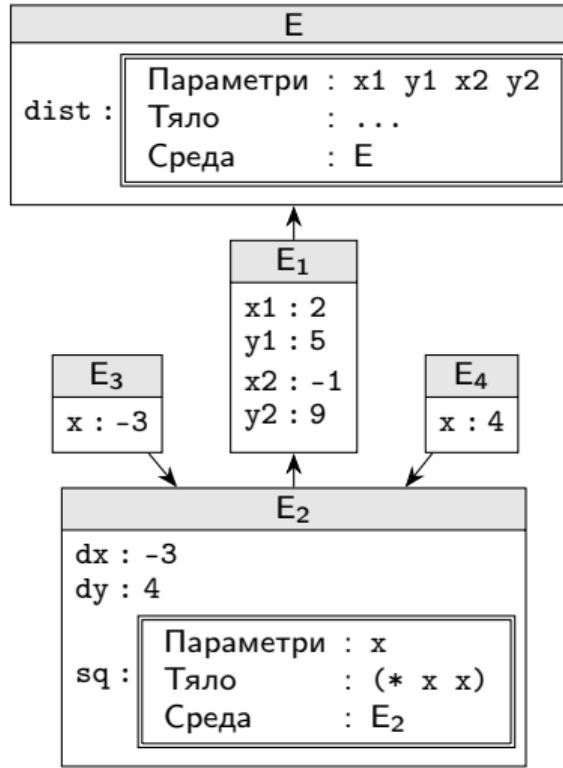
{E₂} (sqrt (+ 9 16))



{E₂} (sqrt 25)



{E₂} 5



Вложена помощна итеративна функция

При итеративни функция е удобно помощната функция да е вложена.

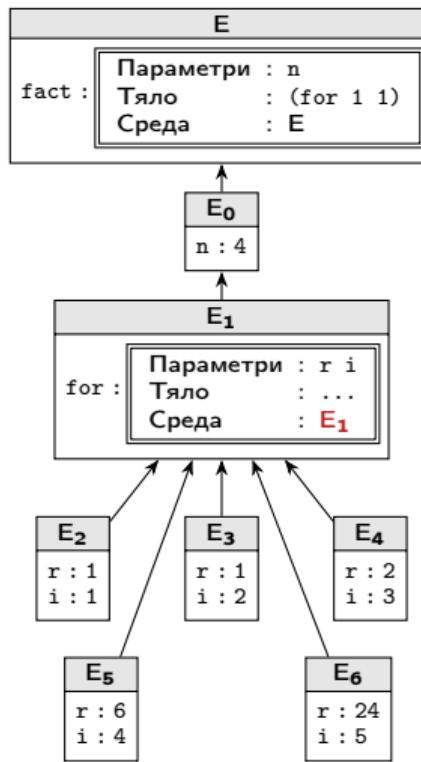
```
(define (fact n)
  (define (for r i)
    (if (<= i n)
        (for (* r i) (+ i 1))
        r))
  (for 1 1))
```

Вложените дефиниции „виждат“ символите на обхващащите им дефиниции.

Оценка на итеративен факториел с вложена функция

```

{E}      (fact 4)
         ↓
{E1}   (define (for r i)...)
         ↓
{E1}   (for 1 1)
         ↓
{E2}   (for 1 2)
         ↓
{E3}   (for 2 3)
         ↓
{E4}   (for 6 4)
         ↓
{E5}   (for 24 5)
         ↓
{E6}   24
  
```



Специална форма let

- $(\text{let } (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let } ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle) \langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle) \dots (\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle)) \langle \text{тяло} \rangle$
- При оценка на let в среда E:
 - Създава се нова среда E_1 разширение на текущата среда E
 - Оценката на $\langle \text{израз}_1 \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_1 \rangle$ в E_1
 - Оценката на $\langle \text{израз}_2 \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_2 \rangle$ в E_1
 - ...
 - Оценката на $\langle \text{израз}_n \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_n \rangle$ в E_1
 - Връща се оценката на $\langle \text{тяло} \rangle$ в средата E_1
- **let няма странични ефекти върху средата!**

Пример за let

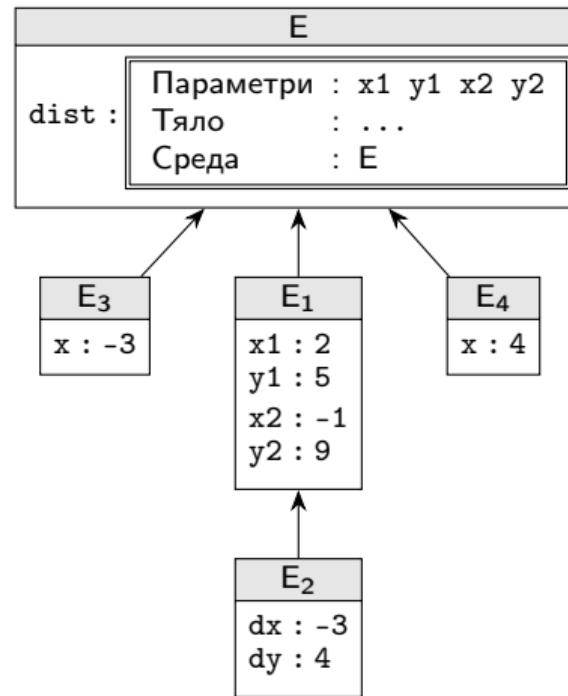
```
(define (dist x1 y1 x2 y2)
  (let ((dx (- x2 x1))
        (dy (- y2 y1)))
    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))))
```

```
(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let ((a (dist x1 y1 x2 y2))
        (b (dist x2 y2 x3 y3))
        (c (dist x3 y3 x1 y1))
        (p (/ (+ a b c) 2)))
    (sqrt (* p (- p a) (- p b) (- p c))))))
```

Оценка на let

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
         ↓
(let ((dx (- x2 x1))
      (dy (- y2 y1)))
(sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
         ↓
{E2}     (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
         ↓
{E3}     (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
         ↓
{E4}     (sqrt (+ 9 (* x x)))
         ↓
{E2}     (sqrt (+ 9 16))
         ↓
{E2}     (sqrt 25)
         ↓
{E2}     5
  
```



Специална форма let*

- $(\text{let*} (\{\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let*} ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle) (\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle) \dots (\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle)) \langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let* в среда E:
 - Създава се нова среда E_1 разширение на текущата среда E
 - Оценката на $\langle \text{израз}_1 \rangle$ в E се свързва със $\langle \text{символ}_1 \rangle$ в E_1
 - Създава се нова среда E_2 разширение на текущата среда E_1
 - Оценката на $\langle \text{израз}_2 \rangle$ в E_1 се свързва със $\langle \text{символ}_2 \rangle$ в E_2
 - ...
 - Създава се нова среда E_n разширение на текущата среда E_{n-1}
 - Оценката на $\langle \text{израз}_n \rangle$ в E_{n-1} се свързва със $\langle \text{символ}_n \rangle$ в E_n
 - Връща се оценката на $\langle \text{тяло} \rangle$ в средата E_n

Пример за let*

```
(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let* ((a (dist x1 y1 x2 y2))
         (b (dist x2 y2 x3 y3))
         (c (dist x3 y3 x1 y1)))
    (p (/ (+ a b c) 2)))
```

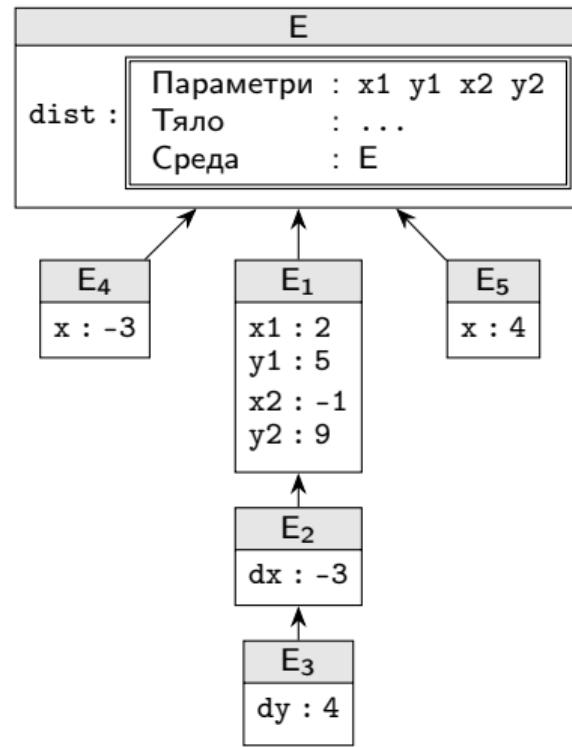
Редът има значение!

```
(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let* ((p (/ (+ a b c) 2))
         (a (dist x1 y1 x2 y2))
         (b (dist x2 y2 x3 y3))
         (c (dist x3 y3 x1 y1)))
    (sqrt (* p (- p a) (- p b) (- p c)))))
```

Оценка на let*

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
         ↓
{E1}   (let* ((dx (- x2 x1))
                  (dy (- y2 y1)))
            (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
         ↓
{E3}   (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
         ↓
{E4}   (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
         ↓
{E5}   (sqrt (+ 9 (* x x)))
         ↓
{E3}   (sqrt (+ 9 16))
         ↓
{E3}   (sqrt 25)
         ↓
{E3}   5
  
```



Степенуване

Функцията x^n може да се дефинира по следния начин:

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0, \\ \frac{1}{x^{-n}}, & \text{ако } n < 0, \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{ако } n > 0. \end{cases}$$

```
(define (pow x n)
  (cond ((= n 0) 1)
        ((< n 0) (/ 1 (pow x (- n)))))
        (else (* x (pow x (- n 1))))))
```

Оценка на степенуване

```
(pow 2 6)
  ↓
  (* 2 (pow 2 5))
  ↓
  (* 2 (* 2 (pow 2 4)))
  ↓
  (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 3))))
  ↓
  (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 2)))))
  ↓
  (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 1))))))
  ↓
  (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 0)))))))
  ↓
  (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 1)))))))
  ↓
  (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 2)))))
  ↓
  (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 4))))
  ↓
  (* 2 (* 2 (* 2 8)))
  ↓
  (* 2 (* 2 16))
  ↓
  (* 2 32)
  ↓
  64
```

Линеен рекурсивен процес

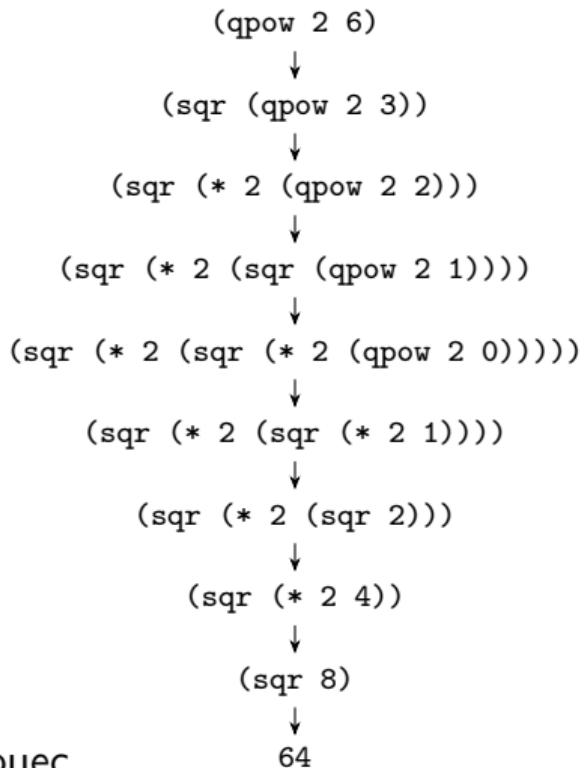
Бързо степенуване

Алтернативна дефиниция на x^n :

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0, \\ \frac{1}{x^{-n}}, & \text{ако } n < 0, \\ (x^{\frac{n}{2}})^2, & \text{ако } n > 0, n \text{ — четно,} \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{ако } n > 0, n \text{ — нечетно.} \end{cases}$$

```
(define (qpow x n)
  (define (sqr x) (* x x))
  (cond ((= n 0) 1)
        ((< n 0) (/ 1 (qpow x (- n)))))
        ((even? n) (sqr (qpow x (quotient n 2)))))
        (else (* x (qpow x (- n 1))))))
```

Оценка на бързо степенуване



Логаритмичен рекурсивен процес

Числа на Фиbonачи

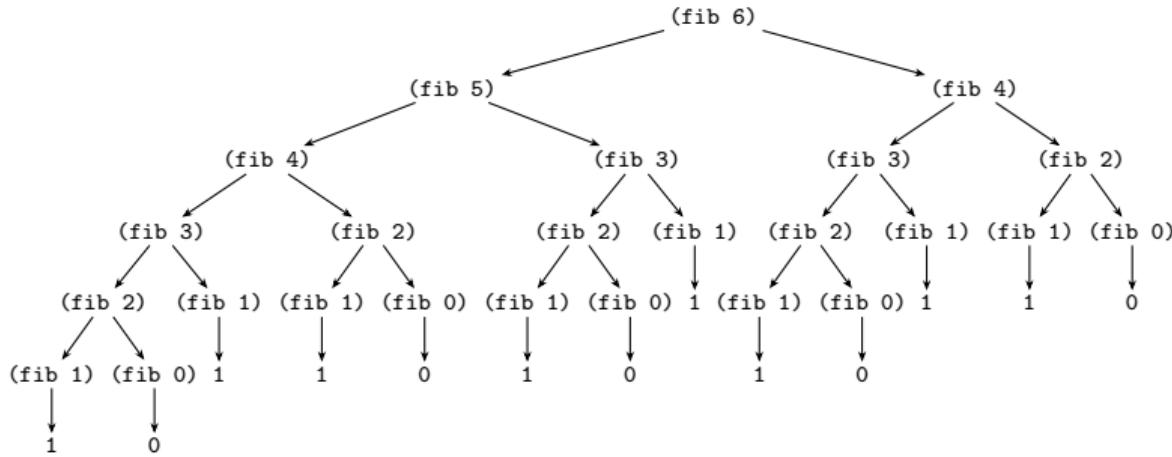
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{за } n = 0, \\ 1, & \text{за } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & \text{за } n \geq 2. \end{cases}$$

```
(define (fib n)
  (cond ((= n 0) 0)
        ((= n 1) 1)
        (else (+ (fib (- n 1)) (fib (- n 2))))))
```

$$f_{40} = ?$$

Дървовидна рекурсия



Дървовиден рекурсивен процес

Как да оптимизираме?

Решение №1: мемоизация

Да помним вече пресметнатите стойности, вместо да ги смятаме пак.
За ефективна реализация обикновено са нужни странични ефекти.

Решение №2: динамично програмиране

Строим последователно всички числа на Фибоначи в нарастващ ред.

Нужно е да помним само последните две числа!

```
(define (fib n)
  (define (iter i fi fi-1)
    (if (= i n) fi
        (iter (+ i 1) (+ fi fi-1) fi)))
  (if (= n 0) 0
      (iter 1 1 0)))
```

Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
  ↓
 (iter 1 1 0)
  ↓
 (iter 2 1 1)
  ↓
 (iter 3 2 1)
  ↓
 (iter 4 3 2)
  ↓
 (iter 5 5 3)
  ↓
 (iter 6 8 5)
  ↓
 (iter 7 13 8)
  ↓
 13
```