3. Операции над автоматни езици. Рег. изрази.

$A_1 = (\Sigma, Q_1, I_1, \Delta_1, F_1)$

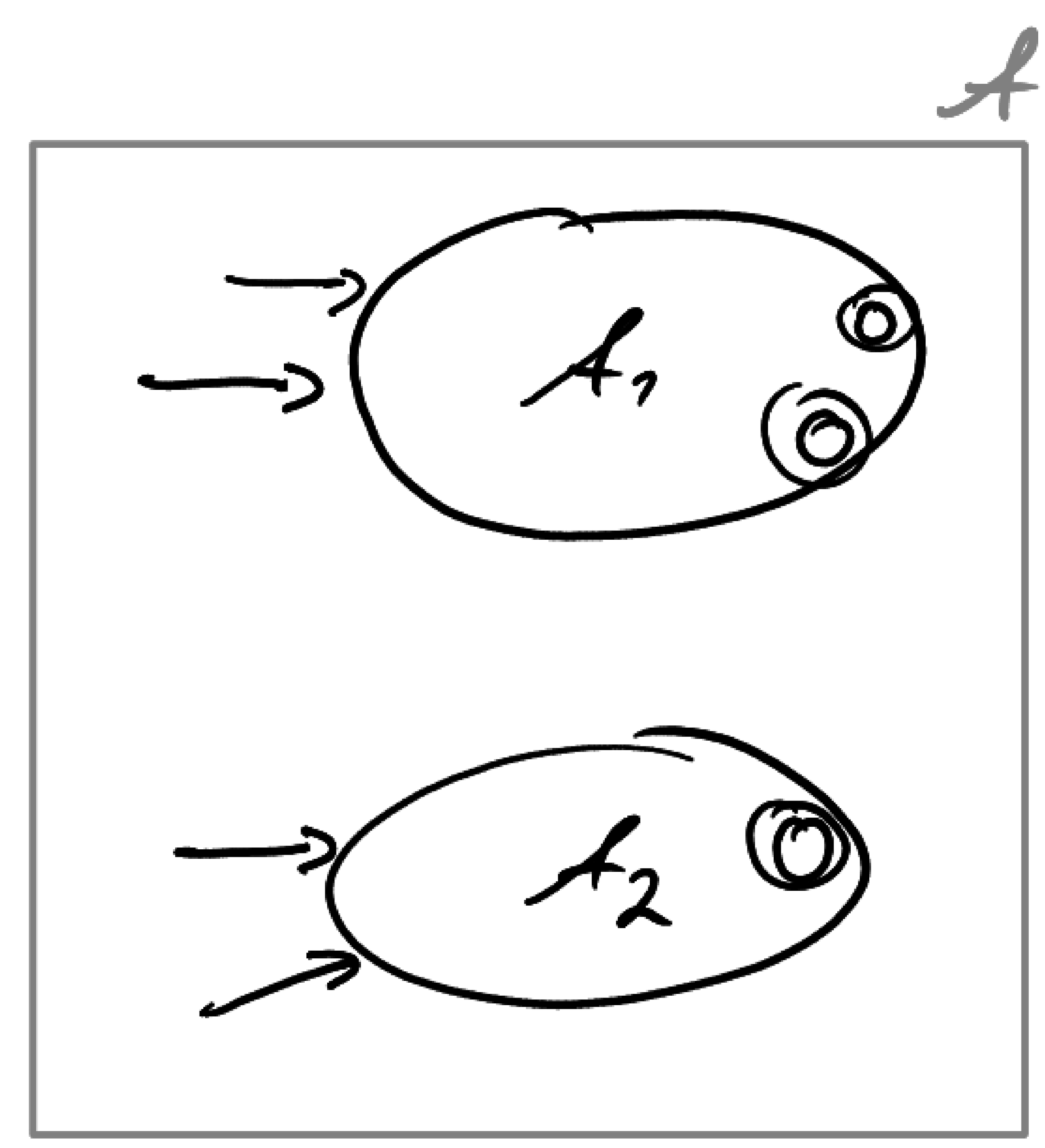
$A_2 = (\Sigma, Q_2, I_2, \Delta_2, F_2)$

Важно: $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

Обединение

$A := (\Sigma, Q_1 \cup Q_2, I_1 \cup I_2, \Delta_1 \cup \Delta_2, F_1 \cup F_2)$

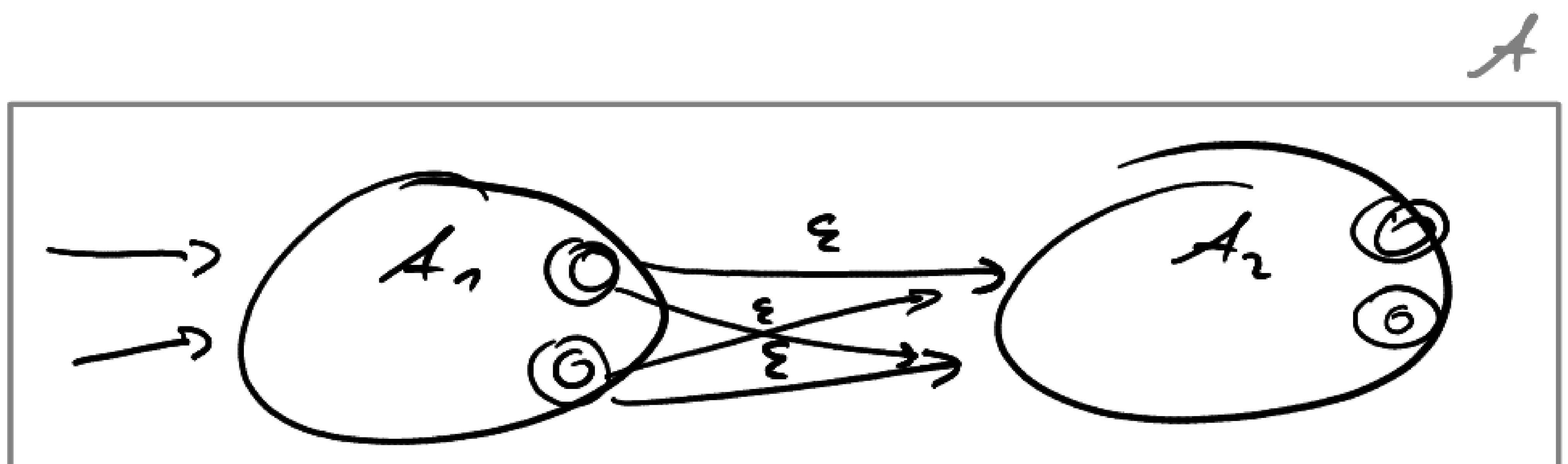
$L(A) = L(A_1) \cup L(A_2)$



Конкатенация

$A := (\Sigma, Q_1 \cup Q_2, I_1,$
$\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s, \varepsilon, f) \mid s \in F_1 \,\&\, f \in I_2\}, F_2)$

$L(A) = L(A_1) \circ L(A_2)$

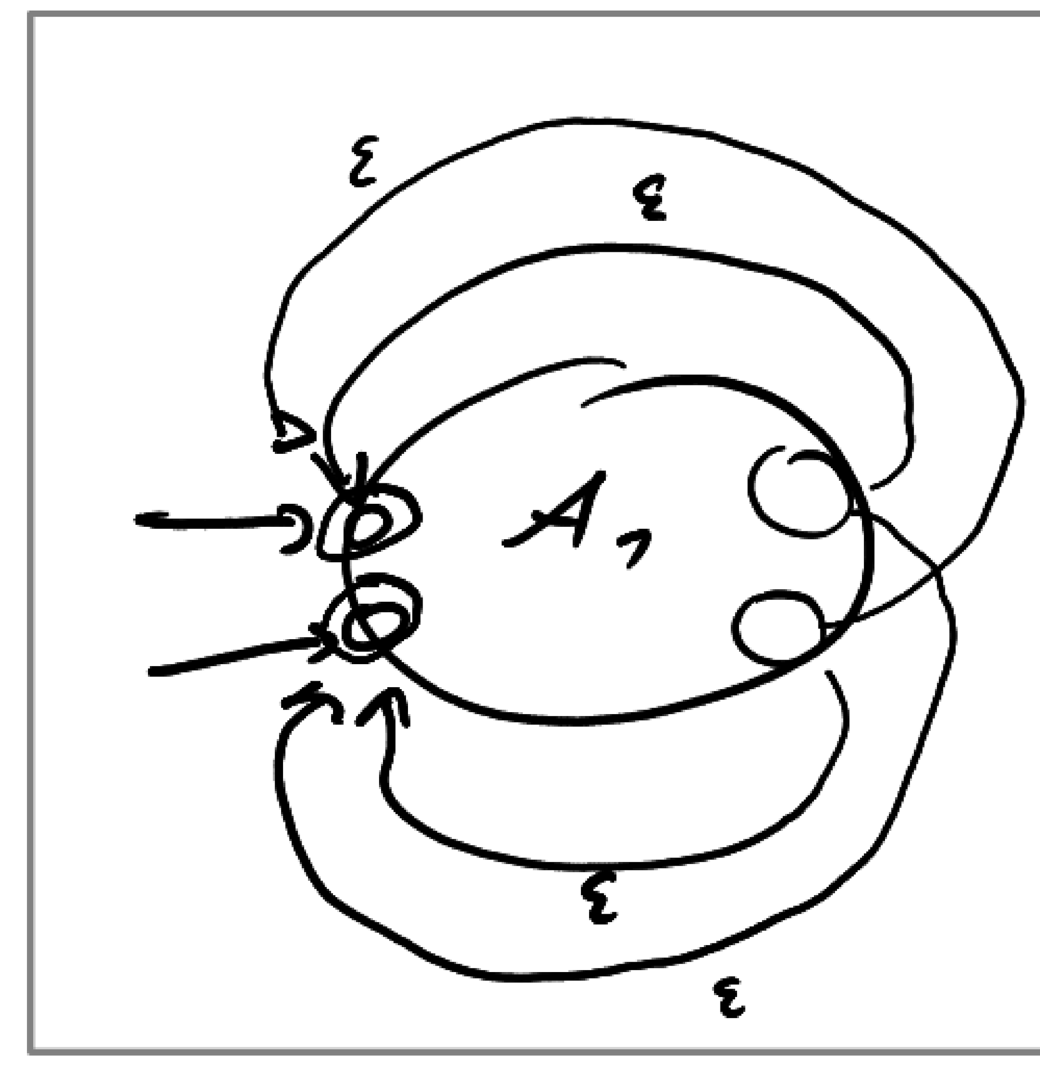


Итерация

$$A := (\Sigma, Q_1, I_1, \Delta, I_1)$$

$$\Delta = \Delta_1 \cup \{(q, \varepsilon, q') \mid q \in F_1 \;\&\; q' \in I_1\}$$

$$L(A) = L(A_1)^*$$



Сечение

$$A := (\Sigma, Q_1 \times Q_2, I_1 \times I_2, \Delta, F_1 \times F_2),$$

където $\Delta = \{((q_1, q_2), a, (q_1', q_2')) \mid a \in \Sigma, (q_1, a, q_1') \in \Delta_1 \;\&\; (q_2, a, q_2') \in \Delta_2\}$

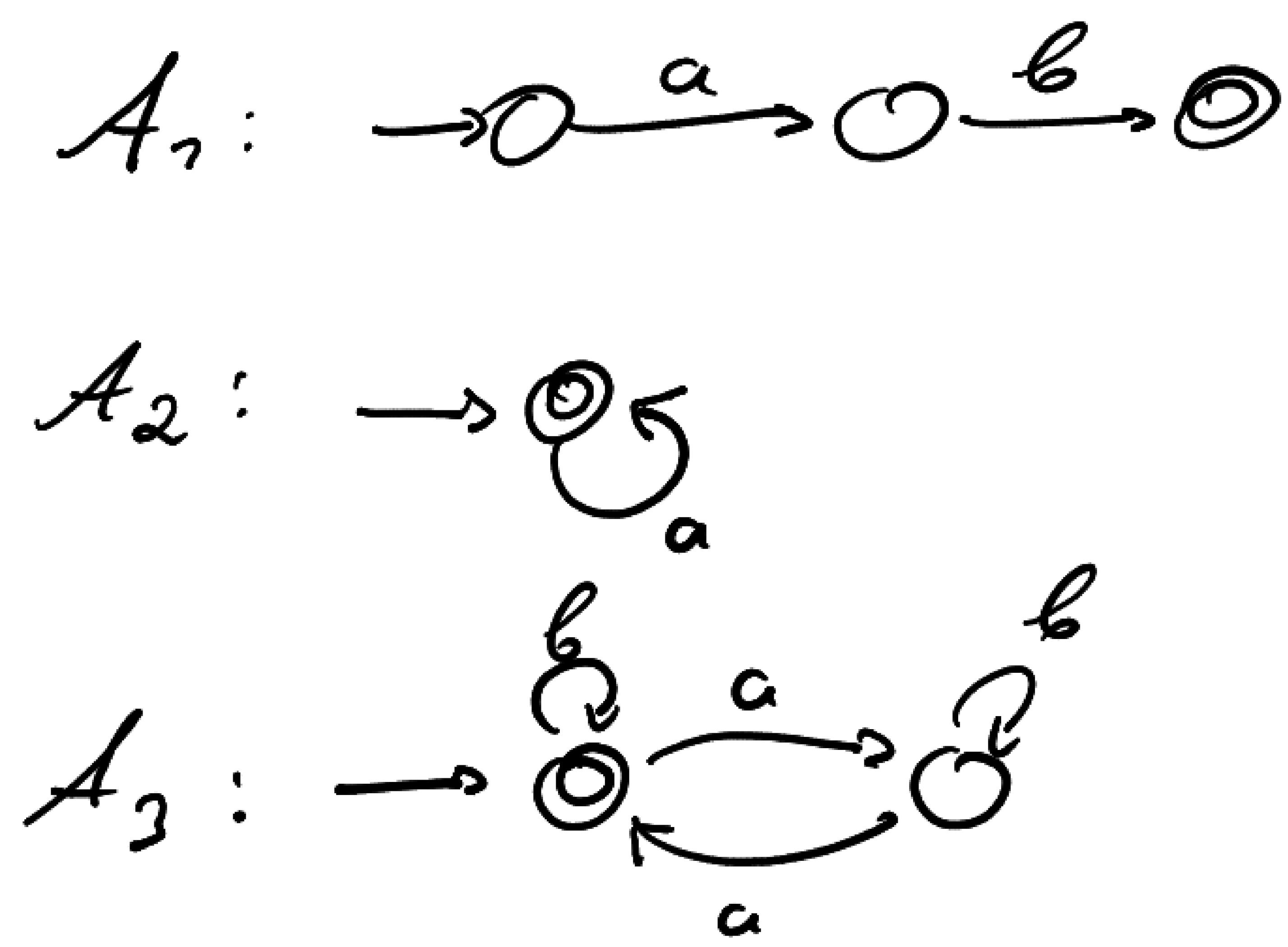
$$\cup \{((q_1, q_2), \varepsilon, (q_1', q_2)) \mid (q_1, \varepsilon, q_1') \in \Delta_1\}$$

$$\cup \{((q_1, q_2), \varepsilon, (q_1, q_2')) \mid (q_2, \varepsilon, q_2') \in \Delta_2\}$$

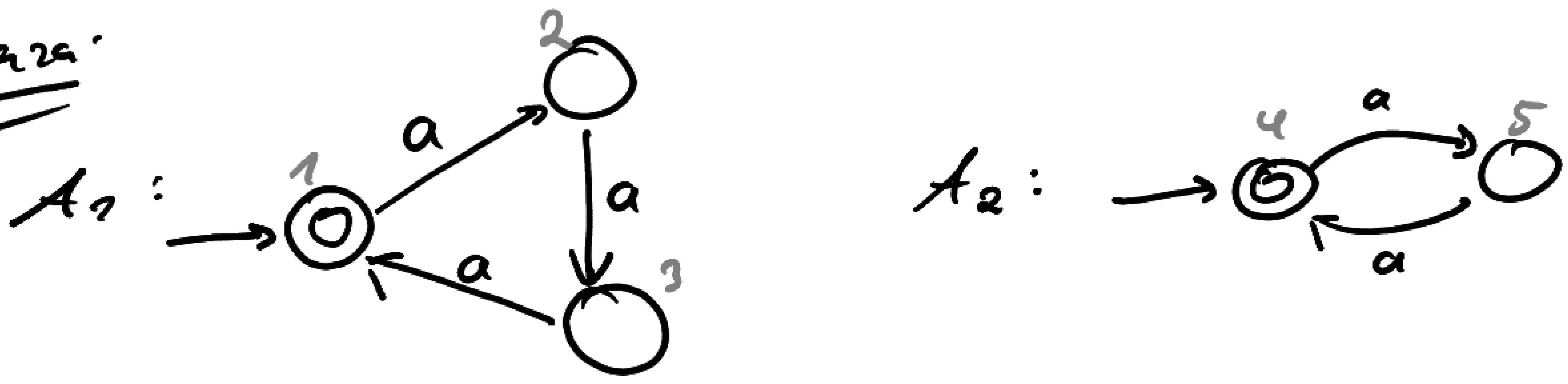
Задача:

Конструирайте автомат с езици:

1) $L(A_1) \cup L(A_2)$
2) $L(A_1) \cdot L(A_3)$
3) $L(A_2) \cap L(A_3)$
4) $L(A_1)^*$
5) $L(A_3)^*$



Задача:



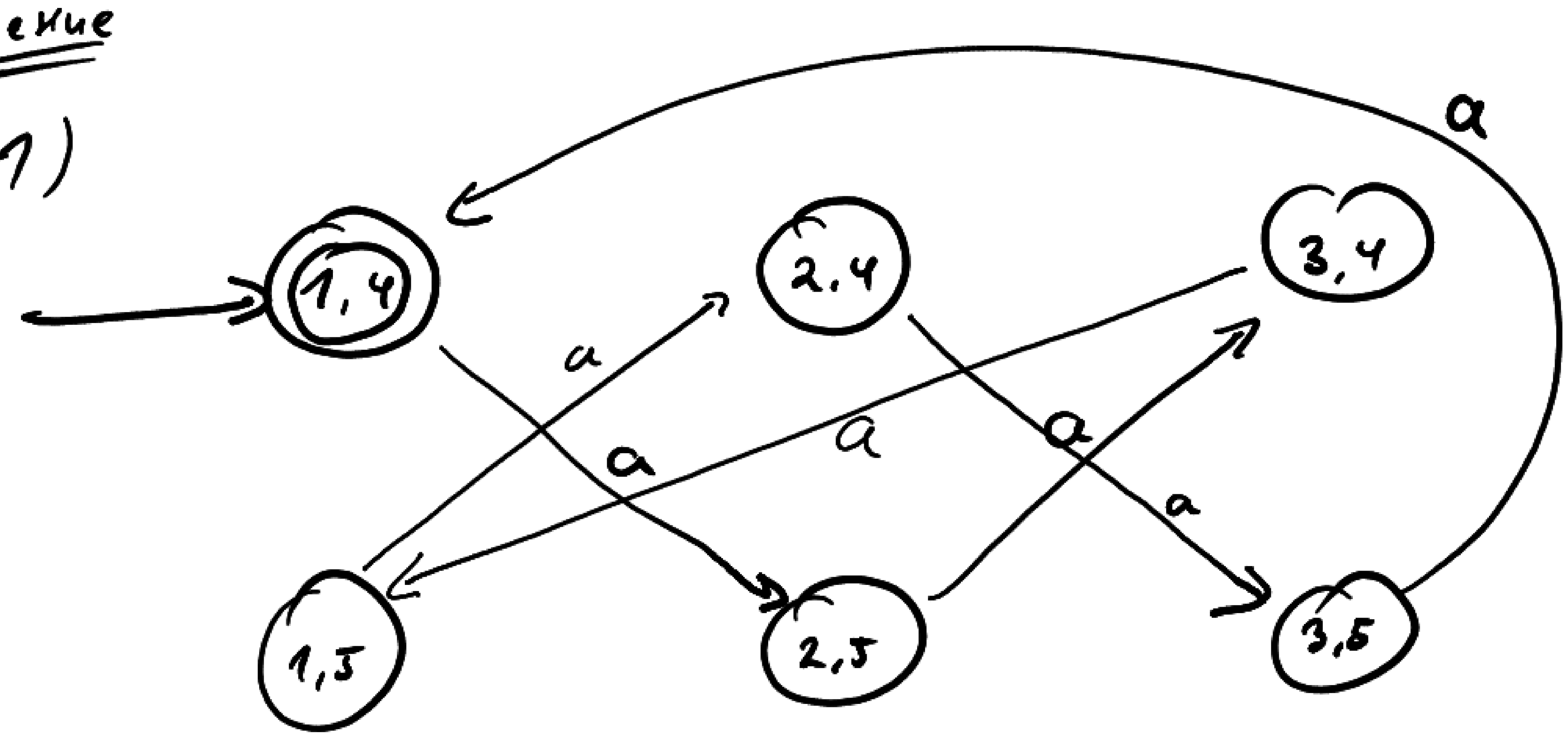
Конструирайте автомат A с език:

1) $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$

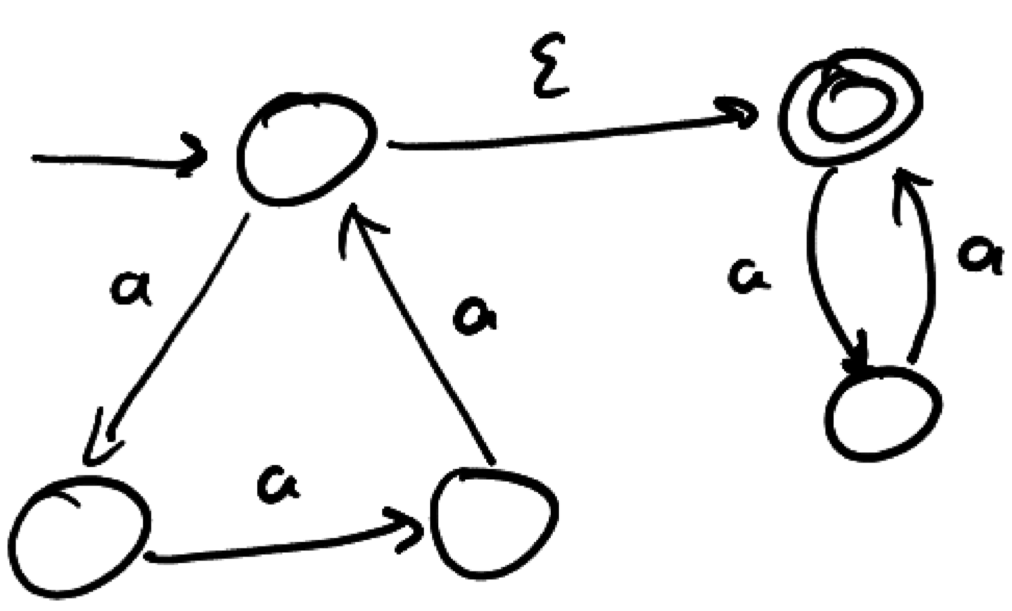
2) $L(A) = L(A_1) \cdot L(A_2)$

Решение

1)

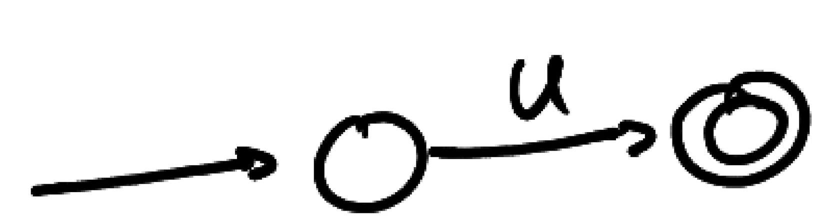


2)



Елементарни автомати

$L(A) = u \quad , \quad u \subseteq \Sigma$



$L(A) = u^* \quad , \quad u \subseteq \Sigma$

$L(A) = \{w\} \quad w \in \Sigma^*$

Регулярни изрази

Def Регулярни изрази:

Нека Σ - азбука, $+, *, \emptyset, (,) \notin \Sigma$

Регулярни изрази над Σ наричаме думите над азбуката $\Sigma \cup \{+, *, \emptyset, (,)\}$, дефинирани така:

1) $\emptyset$ е регулярен израз

$(\forall a \in \Sigma)$ a е регулярен израз

2) Ако r_1, r_2 са регулярни изрази, то $(r_1 r_2)$ и $(r_1 + r_2)$ са регулярни изрази.

3) Ако r е регулярен израз, то r^* е регулярен израз

Def Език на рег. израз:

1) $L(\emptyset) = \emptyset$

$(\forall a \in \Sigma)$ $L(a) = \{a\}$

2) $L((r_1 + r_2)) = L(r_1) \cup L(r_2)$

$L((r_1 r_2)) = L(r_1) \circ L(r_2)$

3) $L(r^*) = L(r)^*$

Примери $L(\varnothing^*) = \{\varepsilon\}$

$L(ab^*) = \{a\} \cdot \{b\}^* = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Def Език $L \subseteq \Sigma^*$ наричаме регулярен, ако е език на някой рег. израз над Σ

Тв Автоматни езици = Регулярни езици.

Задача
Конструирайте автомат A, т.че
$$L(A) = L((a+b+c)^* ab (a+b+c)^*)$$

Задача Съставете рег. израз над азбуката $\Sigma = \{a, b, c\}$ с език ...; Обосновете отговора си.

1) $L_1 = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2) $L_2 = \{b a^n b^k \mid n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$
3) $L_3 = \{w \mid w$ може да бъде валиден имейл адрес$\}$
4) двоичните представяния на естествените числа
5) $L_5 = \{w \mid$ в $\underline{\underline{w}}$ няма съседни "a"$\}$
6) $L_6 = \{w \mid$ в $\underline{\underline{w}}$ има четен брой "b"$\}$
7) $\overline{L_1}$
8) $\overline{L_5}$
9) $\overline{L_6}$

– Има ли нерегулярни езици?

– Регулярен ли е езикът на поредиците от правилно поставени скоби?

Пример

Нека $L_1 = \{a^n \mid 2|n\}$, $L_2 = \{a^n \mid 3|n\}$

Искаме да направим автомат с език $L_1 \cdot L_2$.

Нека допуснем, че не е очевидно как да се конструират автомати за L_1 и L_2, за които да приложим конструкцията за конкатенация.

Разглеждаме $L = \{a^n \mid 2|n\} \cdot \{a^m \mid 3|m\} =$

$\stackrel{def}{=} \{a^{n+m} \mid 2|n \;\&\; 3|m\} = \{a^{2k+3q} \mid k, q \in \mathbb{N}\}$

сега проверяваме очевидните случаи

сега ще докажем по индукция, че за вс. $n \geq 2$ $a^n \in L$

И.Б: $a^2 \in L$, $a^3 \in L$

И.П. нека за вс. $2 \leq k < n$ $a^n \in L$.

И.С: Нека $n > 3$

$$a^n = \underbrace{a^{(n-2)}}_{\substack{n-2 \geq 2 \\ \Rightarrow \in L}} \cdot a^2 = a^{2 \cdot k_0 + 3 \cdot q_0} \cdot a^2 = a^{2(k_0+1) + 3q_0} \in L$$

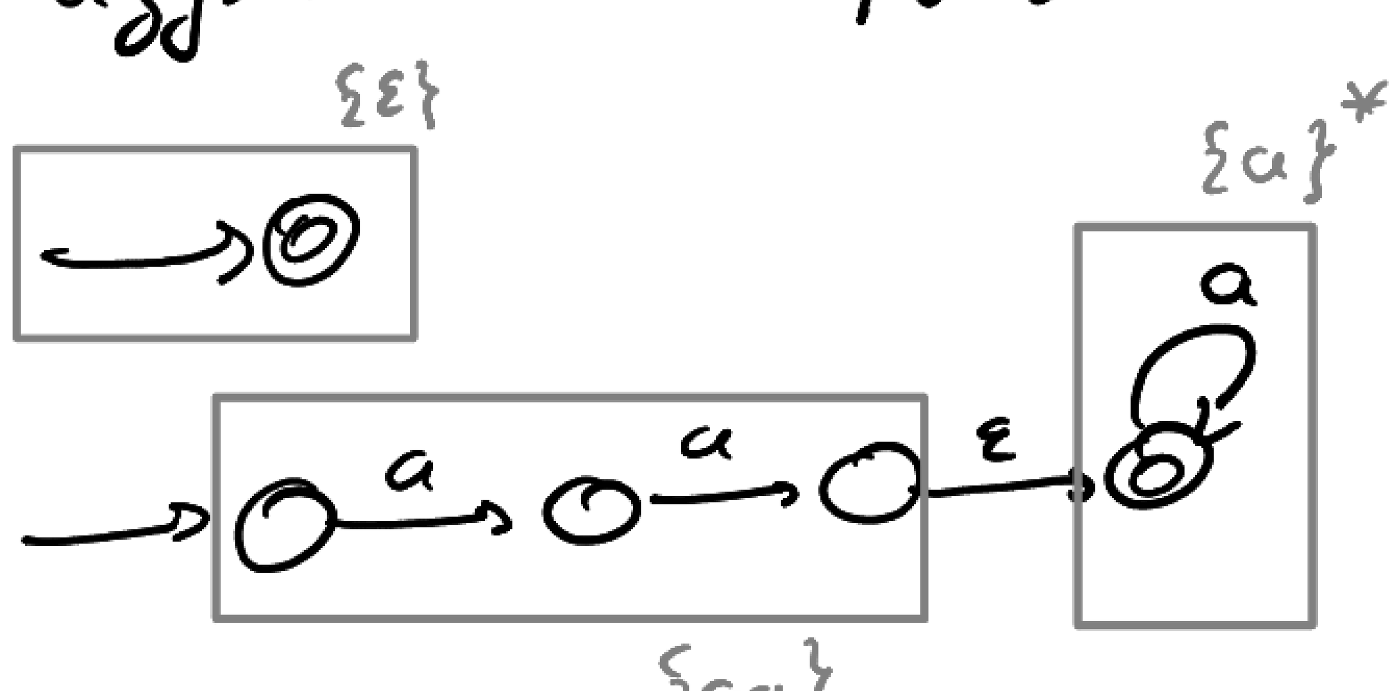
освен това $\varepsilon = a^0 \in L$ и $a = a^1 \notin L$

Тогава $L = \{\varepsilon\} \cup \{a^n \mid n \geq 2\} = \{\varepsilon\} \cup \{aa\} \cdot \{a\}^* =$

$= L(\emptyset^* + aaa^*)$

Оттук чрез изучените конструкции лесно конструираме автомата

$\underline{\underline{A}}$:



Забележка

Обърнете внимание, че в една от предните задачи вече конструирахме автомат, еквивалентен на този, но неговата структура беше по-сложна.

Разглеждането на езиците като множества преди алгоритмичното строене на автомати понякога води до по-прости автомати и съответно по-малко сметки.