Отсечки и полупространства

Нека $\mathcal{A}$ е афинно пространство, моделирано върху линейното пространство U.

Нека P_0 и P_1 са различни точки в геометричната равнина или геометричното пространство. Тогава

$$\begin{array}{llcll} P \in & \text{правата} & P_0P_1 & \Leftrightarrow & \exists\lambda \in \mathbb{R}: & \overrightarrow{P_0P} = \lambda\overrightarrow{P_0P_1}, \\ P \in & \text{отворената отсечка} & P_0P_1 & \Leftrightarrow & \exists\lambda \in (0,1): & \overrightarrow{P_0P} = \lambda\overrightarrow{P_0P_1}, \\ P \in & \text{затворената отсечка} & P_0P_1 & \Leftrightarrow & \exists\lambda \in [0,1]: & \overrightarrow{P_0P} = \lambda\overrightarrow{P_0P_1}. \end{array}$$

Това мотивира следната дефиниция.

Определение 1 Нека P_0 и P_1 са различни точки от $\mathcal{A}$.

$$\begin{array}{ll} \textit{Отворена отсечка с краища } P_0 \textit{ и } P_1 \text{ е} & \{P \in \mathcal{A}: \ \exists\lambda \in (0,1): \ \overrightarrow{P_0P} = \lambda\overrightarrow{P_0P_1}\}. \\ \textit{Затворена отсечка с краища } P_0 \textit{ и } P_1 \text{ е} & \{P \in \mathcal{A}: \ \exists\lambda \in [0,1]: \ \overrightarrow{P_0P} = \lambda\overrightarrow{P_0P_1}\}. \end{array}$$

Считаме, че отворената отсечка P_0P_0 е $\emptyset$, а затворената отсечка P_0P_0 е $\{P_0\}$.

Твърдение 1 *Нека P_0 и P_1 са различни точки от $\mathcal{A}$. Тогава отворената и затворената отсечка P_0P_1 са подмножества на правата през P_0 и P_1.*

Твърдение 2 *Нека P_0 и P_1 са различни точки от $\mathcal{A}$, а $O \in \mathcal{A}$ е произволна точка. Тогава:*

$$\begin{array}{lll} \textit{отв. отс. } P_0P_1 & = \{P \in \mathcal{A}: \exists\lambda \in (0,1): & \overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OP_0} + \lambda\overrightarrow{OP_1}\} \\ & = \{P \in \mathcal{A}: \exists\lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_0 + \lambda_1 = 1: & \overrightarrow{OP} = \lambda_0\overrightarrow{OP_0} + \lambda_1\overrightarrow{OP_1}\}, \\ \textit{затв. отс. } P_0P_1 & = \{P \in \mathcal{A}: \exists\lambda \in [0,1]: & \overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OP_0} + \lambda\overrightarrow{OP_1}\} \\ & = \{P \in \mathcal{A}: \exists\lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_0 + \lambda_1 = 1: & \overrightarrow{OP} = \lambda_0\overrightarrow{OP_0} + \lambda_1\overrightarrow{OP_1}\}. \end{array}$$

Следствие 1 *Нека $P_0, P_1 \in \mathcal{A}$. Тогава отворените отсечки P_0P_1 и P_1P_0 съвпадат, а също и затворените отсечки P_0P_1 и P_1P_0 съвпадат.*

Твърдение 3 *Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$ и спрямо нея различните точки P_0 и P_1 имат координати $P_0(x^0)$, $P_1(x^1)$. Тогава спрямо K параметрични уравнения на*

$$\begin{array}{llll} \textit{отворената отсечка} & P_0P_1 & \textit{са} & x = (1-\lambda)x^0 + \lambda x^1, \quad \lambda \in (0,1), \\ \textit{затворената отсечка} & P_0P_1 & \textit{са} & x = (1-\lambda)x^0 + \lambda x^1, \quad \lambda \in [0,1], \end{array}$$

или еквивалентно,

$$\begin{array}{lll} \textit{отворената отсечка} & P_0P_1: & x = \lambda_0x^0 + \lambda_1x^1, \quad \lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0, \ \lambda_0 + \lambda_1 = 1, \\ \textit{затворената отсечка} & P_0P_1: & x = \lambda_0x^0 + \lambda_1x^1, \quad \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \ \lambda_0 + \lambda_1 = 1. \end{array}$$

Ако l е права в геометричната равнина, то тя разделя равнината на две подмножества – отворени полуравнини, така че точките P_0 и P_1 са от различни отворени полуравнини $\Leftrightarrow$ отворената отсечка P_0P_1 пресича l.
Аналогично, ако π е равнина в геометричното пространство, то тя разделя пространството на две подмножества – отворени полупространства, така че точките P_0 и P_1 са от различни отворени полупространства $\Leftrightarrow$ отворената отсечка P_0P_1 пресича π.
Аналогично, ако Q е точка върху геометрична права, то тя разделя правата на две подмножества – отворени лъчи, така че точките P_0 и P_1 са от различни отворени лъчи $\Leftrightarrow$ отворената отсечка P_0P_1 съдържа Q, тоест пресича $\{Q\}$.

Ще намерим аналог на тия неща в n-мерно афинно пространство.

Твърдение 4 *Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$ и спрямо нея хиперравнината B има общо уравнение $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$. Означаваме $F(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$. Нека нележащите в B точки P_0 и P_1 имат спрямо K координати $P_0(x^0)$, $P_1(x^1)$. Тогава отворената отсечка P_0P_1 пресича $B \Leftrightarrow F(x^0)F(x^1) < 0$ и не пресича $B \Leftrightarrow F(x^0)F(x^1) > 0$.*

Определение 2 Нека B е хиперравнина в $\mathcal{A}$. За нележащите в B точки P_0 и P_1 пишем $P_0 \sim P_1$, ако отворената отсечка P_0P_1 не пресича B. (Това е временно означение — докато стигнем до определението на полупространствата Определение 3.)

Твърдение 5 *Нека B е хиперравнина в $\mathcal{A}$. Тогава:*

1. *Дефинираната по-горе релация $\sim$ е релация на еквивалентност в $\mathcal{A} \setminus B$.*

2. *Класовете на еквивалентност относно $\sim$ са два: ако $P_0 \notin B$ е фиксирана точка, то те са $[P_0] = \{P \notin B : P \sim P_0\}$ и $\{P \notin B : P \not\sim P_0\}$.*

Определение 3 Нека B е хиперравнина в $\mathcal{A}$. Класовете на еквивалентност относно дефинираната по-горе релация $\sim$ се наричат *отворени полупространства относно B*. *Затворено полупространство относно B* е множество, състоящо се от точките на отворено полупространство относно B и от точките на B.

Забележка 1 От горната дефиниция получаваме, че $P_0 \sim P_1 \Leftrightarrow P_0$ и P_1 са от едно и също отворено полупространство относно B.

Теорема 1 *Нека $K = Oe_1 \dots e_n$ е афинна координатна система в $\mathcal{A}$ и спрямо нея хиперравнината B има общо уравнение $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$, а точките P_0 и P_1 имат координати $P_0(x^0)$, $P_1(x^1)$. Означаваме $F(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$. Тогава:*

1. *P_0 и P_1 са от различни отворени полупространства спрямо $B \Leftrightarrow F(x^0)F(x^1) < 0$ (тоест когато $F(x^0)$ и $F(x^1)$ имат различни знаци).*
   P_0 и P_1 са от едно и също отворено полупространство спрямо $B \Leftrightarrow F(x^0)F(x^1) > 0$ (тоест когато $F(x^0)$ и $F(x^1)$ имат еднакви знаци).

2. *Отворените полупространства относно B са множествата $\{P(x) \in \mathcal{A} : F(x) > 0\}$ и $\{P(x) \in \mathcal{A} : F(x) < 0\}$.*

Съответните твърдения за затворени полупространства са същите, като вместо > 0 и < 0 се пише ≥ 0 и ≤ 0.

Частни случаи:

1. $n = 2$.

   Теорема 1′ *Същата като Теорема 1, като координатите са две и вместо хиперравнина се пише права, а вместо полупространство – полуравнина.*

2. $n = 3$.

   Теорема 1″ *Същата като Теорема 1, като координатите са три и вместо хиперравнина се пише равнина.*

3. $n = 1$.

   В 1-мерно афинно пространство (тоест права) хиперравнините са 0-мерни, тоест са едноточкови множества. Върху геометрична права множествата, на които дадена точка разделя правата, се наричат лъчи, тоест в тоя случай полупространствата са лъчите (виж коментара преди Твърдение 4). Това мотивира следната дефиниция.

   Определение 4 Върху права, тоест 1-мерно афинно пространство, отворените (съответно затворените) полупространства, тоест полуправите, се наричат отворени (съответно затворени) лъчи.

   Теорема 1‴ *Същата като Теорема 1, като координатата е една и вместо „хиперравнината B има общо уравнение $a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b = 0$“ се пише „точката Q се задава с уравнението $ax+b = 0$ (тоест $Q\left(-\frac{b}{a}\right)$)“, а вместо полупространство – лъч.*

Забележка 2 Многомерни хиперравнини (и по-общо – афинни подпространства) и полупространства се появяват например в задачата на линейното оптимиране. При нея се търси минимум или максимум на линейна функция върху многомерно изпъкнало многостенно множество, тоест върху множество, което се получава като сечение на краен брой полупространства. Един от класическите методи за решаване на тая задача е така нареченият симплекс-метод.