Векторно произведение

Работим в геометричното пространство, като считаме че са фиксирани единична отсечка за измерване на дължини и ориентация.

Определение 1 *Векторно произведение на векторите* u *и* v е векторът $u \times v$, дефиниран по следния начин:

а) Ако u и v са колинеарни, то $u \times v = 0$.

б) Ако u и v не са колинеарни, то $u \times v$ е единственият вектор, който удовлетворява условията:
$|u \times v| = |u||v| \sin \sphericalangle(u, v)$,
$u \times v$ е перпендикулярен на u и v,
$(u, v, u \times v)$ е положително ориентиран базис (казва се още *дясна тройка*).

(Дефиницията е коректна, тоест в б) наистина съществува единствен вектор удовлетворяващ трите условия.)

Забележка 1 Друго означение за векторното произведение е $\wedge$, тоест $u \wedge v$.

Забележка 2 Ако $u \neq 0$, $v \neq 0$ и $u \parallel v$, то $\sphericalangle(u, v) = 0$ или π и следователно $\sin \sphericalangle(u, v) = 0$. Така че и в тоя случай е в сила равенството $|u \times v| = |u||v| \sin \sphericalangle(u, v)$. Ако $u = 0$ или $v = 0$, то $\sphericalangle(u, v)$ не е дефиниран. Но тъй като дължината на нулевия вектор е 0, то в тоя случай $|u \times v| = 0 = |u||v| \sin \varphi$ каквото и да е φ. Следователно, ако се уговорим да считаме, че нулевият вектор и другите вектори сключват произволен ъгъл, то тогава $|u \times v| = |u||v| \sin \sphericalangle(u, v)$ за всички вектори u и v.

При същата уговорка нулевият вектор е перпендикулярен на всеки вектор, така че и второто условие в б) е изпълнено при произволни u и v (тоест и при $u \parallel v$).

Но третото условие въобще няма смисъл при $u \parallel v$, защото нулевият вектор не може да бъде елемент на базис.

Теорема 1 (критерий за колинеарност на вектори)
Векторите u *и* v *са колинеарни* $\Leftrightarrow$ $u \times v = 0$.

Теорема 2 *Ако векторите* u *и* v *не са колинеарни, то лицето на успоредника, построен върху* u *и* v, *е* $|u \times v|$, *а лицето на триъгълника, построен върху* u *и* v, *е* $\frac{1}{2}|u \times v|$.

Теорема 3 *Нека* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *е положително ориентиран ортонормиран базис на пространството на геометричните вектори и спрямо него векторите* u *и* v *имат координати* $u(x_1, x_2, x_3)$, $v(y_1, y_2, y_3)$. *Тогава координатите на* $u \times v$ *спрямо* e *са*
$u \times v \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$, *тоест* $u \times v(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$.

Теорема 4 *Векторното произведение има следните свойства:*

1. $v \times u = -u \times v$ *(антисиметричност)*
2. $(u + v) \times w = u \times w + v \times w, \quad u \times (v + w) = u \times v + u \times w$ *(адитивност по двата аргумента)*
3. $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v), \quad u \times (\lambda v) = \lambda(u \times v),$ *където* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(хомогенност по двата аргумента)*

Забележка 3 Свойствата 2. и 3. в горната теорема заедно са еквивалентни на свойството

$$(\lambda u + \mu v) \times w = \lambda(u \times w) + \mu(v \times w), \quad u \times (\lambda v + \mu w) = \lambda(u \times v) + \mu(u \times w)$$

(*линейност по двата аргумента*)

тоест векторното произведение е билинейно.