8. Бзозовски + Консултация.

Методът на Бзозовски дава чисто алгебричен алгоритъм за получаване на МДКА за един по регулярен израз.

Def

$$a^{-1}(L) \stackrel{def}{=} \{ w \in \Sigma^* \mid a.w \in L \}$$

$$\varepsilon(L) = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & \varepsilon \in L \\ \emptyset & \text{иначе} \end{cases} = L \cap \{\varepsilon\}$$

1) $a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

2) $a^{-1}(\{\varepsilon\}) = \emptyset$

3) $a^{-1}(\{b\}) = \begin{cases} \{\varepsilon\} & a = b \\ \emptyset & a \neq b \end{cases}$

4) $a^{-1}(L_1 \cup L_2) = a^{-1}(L_1) \cup a^{-1}(L_2)$

5) $a^{-1}(L_1 \circ L_2) = a^{-1}(L_1) \cdot L_2 \cup \varepsilon(L_1) \cdot a^{-1}(L_2)$

6) $a^{-1}(L . L) = a^{-1}(L) \cdot L$

7) $a^{-1}(L^*) = a^{-1}(L) \cdot L^*$

$a^{-1}(L).L \cup \varepsilon(L) \cdot a^{-1}(L)$

I сл $\varepsilon \in L$

$a^{-1}(L).L \cup a^{-1}(L)$

$= a^{-1}(L).L$

II сл $\varepsilon \notin L$

$a^{-1}(L).L$

Задача: Постройте МДКА за езика на р.с. ab^*a

Р-е: (алгоритъм в картинка)

	a	b
$\to ab^*a$	b^*a	$\emptyset$
b^*a	$\emptyset^*$	b^*a
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset^*$	$\emptyset$	$\emptyset$

смятаме производните на езика (състоянието)

$$a^{-1}(ab^*a) = a^{-1}((a)\cdot(b^*a)) =$$
$$= a^{-1}(a)\cdot b^*a \cup \varepsilon(a)\cdot a^{-1}(b^*a) =$$
$$= b^*a$$

$$b^{-1}(ab^*a) = b^{-1}((a)\cdot(b^*a)) =$$
$$= b^{-1}(a)\cdot b^*a \cup \varepsilon(a)\cdot b^{-1}(b^*a) =$$
$$= \emptyset$$

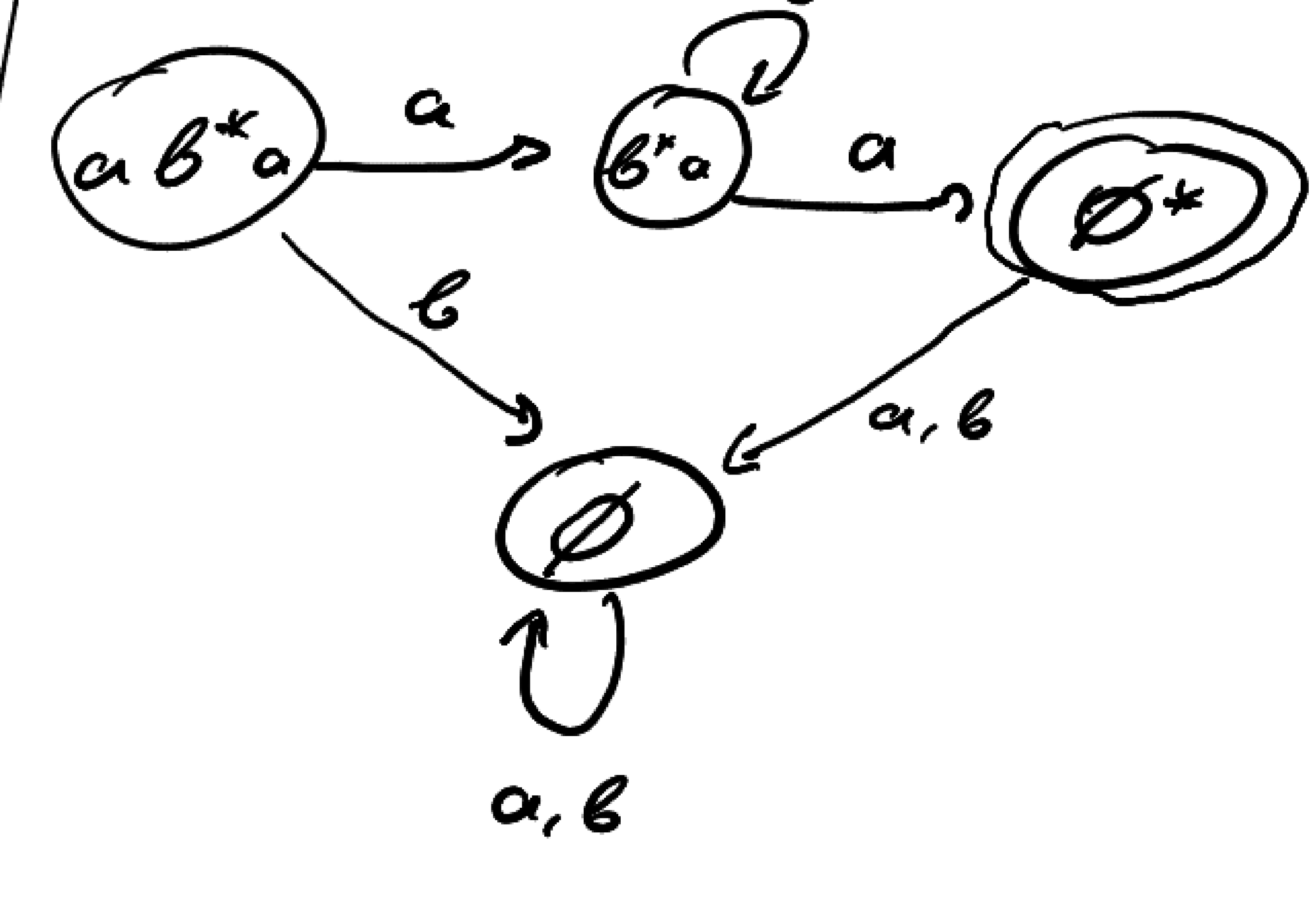
$$a^{-1}(b^*a) = a^{-1}(b^*)\cdot a \cup \varepsilon(b^*)\cdot a^{-1}(a) =$$
$$= a^{-1}(b)b^*a \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} = \emptyset^*$$

$$b^{-1}(b^*a) = b^{-1}(b^*)a \cup \varepsilon(b^*)\cdot b^{-1}(a) =$$
$$= b^{-1}(b)b^*a = \{\varepsilon\}\cdot b^*a = b^*a$$

$$a^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$
$$b^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$a^{-1}(\emptyset^*) = a^{-1}(\emptyset)\emptyset^* = \emptyset\cdot\{\varepsilon\} = \emptyset$$
$$b^{-1}(\emptyset^*) = \dots = \emptyset$$

и така получаваме автомата:



Крайни състояния са тези, чиито езици съдържат ε.

Начално състояние е онзи, за който искаме да направим автомат.

Задачи от консултацията.

Зад. 1 (теоретична от moodle)

Нека Σ е крайна азбука, $w \in \Sigma^*$. Докажете, че МДКА със език $\Sigma^*.\{w\}$ има точно $|w|+1$ състояния.

Решение: Нека $L = \Sigma^*.\{w\}$

Ще разгледаме релацията на Майхил-Нероуд за езика L ($\equiv_L$), тъй като индексът ѝ в Σ^* ни дава броя състояния на МДКА за L.

Припомнеме дефиницията:

$\forall u, v \in \Sigma^*$

$$u \equiv_L v \overset{def}{\iff} (\forall x \in \Sigma^* : ux \in L \iff vx \in L)$$

Сега трябва да разсъждаваме какви са класовете на еквивалентност за $\equiv_L$. Забелязваме, че ако $\underline{u}$ и $\underline{v}$ завършват с един и същ префикс на $\underline{w}$, то суфиксите $\underline{x}$, за които $ux \in L$ и $vx \in L$ са едни и същи. Нека разгледаме следните мн-ва от думи:

$$L_i = \{\alpha \in \Sigma^*.\{w_1 \ldots w_i\} \mid w_1 \ldots w_i \text{ е най-дългият префикс на } w \text{, който е суфикс на } \alpha\}$$

където $i \in \{0 \ldots |w|\}$

Тук се вижда, че $L_i \cap L_j = \emptyset$ за $i \neq j$

тъй като всяка дума от Σ^* има единствен най-дълъг суфикс, който е префикс на $\underline{w}$.

Ако покажем, че $\Sigma^*/_{\equiv_L} = \{ L_i \mid i \in \{0 \dots |w|\} \}$,

то задачата е решена. Тогава достатъчно е

да докажем, че:

1) $\forall i \in \{0 \dots |w|\} \; \forall u, v \in L_i \quad u \equiv_L v$

2) $\forall i \neq j \in \{0 \dots |w|\} \; \forall u \in L_i \; \forall v \in L_j \quad u \not\equiv_L v$

<u>1)</u> Нека $i \in \{0 \dots |w|\}$, $u, v \in L_i$

Тогава $u = u' \cdot w_1 \dots w_i$
$v = v' \cdot w_1 \dots w_i$

Нека $x \in \Sigma^*$ е произволно.

Тогава $ux \in L \Rightarrow u' w_1 \dots w_i x \in L \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \alpha \in \Sigma^* : \alpha \cdot w = u' w_1 \dots w_i x$

Ако $\underline{\alpha}$ е собствен префикс на u', то за някое u''

$\alpha w = \alpha u'' w_1 \dots w_i x$, като $u'' \neq \varepsilon$. Оттук,

$w = u'' w_1 \dots w_i x$

и така $u'' w_1 \dots w_i$ е префикс на w, по-дълъг от $w_1 \dots w_i$, който е максимален от дефиницията на L_i. $\lightning$

Така $\underline{u'}$ е префикс на $\underline{\alpha}$ и следователно $\underline{w}$ е суфикс на $w_1 \dots w_i x$, откъдето $v' w_1 \dots w_i x$ завършва на $\underline{w}$. Така $vx \in L$.

Доказахме, че $ux \in L \Rightarrow vx \in L$. Обратната посока се доказва аналогично.
Така $ux \in L \Longleftrightarrow vx \in L$ и сл. $u \equiv_L v$

2) Нека $i, j \in \{0 \ldots |w|\}$, $u \in L_i$, $v \in L_j$
Нека Б.О.О. $i < j$. Тогава същ. $u', v' \in \Sigma^*$ т.че

$$u = u' w_1 \ldots w_i$$
$$v = v' w_1 \ldots w_i w_{i+1} \ldots w_j$$

Нека $x = w_{j+1} \ldots w_{|w|}$
Тогава $ux = u' w_1 \ldots w_i w_{j+1} \ldots w_{|w|}$
$vx = v' w$.
Сега възможно ли е ux да завършва на $\underline{\underline{w}}$? Най-дългият префикс на $\underline{\underline{w}}$, който е суфикс на $\underline{\underline{u}}$ е с дължина $\underline{\underline{i}}$. Следователно най-дългият префикс на $\underline{\underline{w}}$, който е суфикс на $\underline{\underline{ux}}$ е с дължина най-много $i + |x| = i + (|w| - j) \overset{i<j}{<} |w| + i - i = |w|$. Следователно $\underline{\underline{w}}$ не е суфикс на $\underline{\underline{u}}x$ и $ux \notin L$. Но $vx = v'w \in L$. Така:

$$\exists w \in \Sigma^* : ux \in L \not\Leftrightarrow vx \in L \text{, т.е. } u \not\equiv_L v$$

Така $\{L_i\}_{i=1}^{|w|}$ са точно класовете на еквивалентност за $\equiv_L$ в Σ^* и $|\Sigma^*/_{\equiv_L}| = |\{0 \ldots |w|\}| = |w| + 1$

$\square$

Зад. 2 $\Sigma = \{a, b, c\}$

$\varphi : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ е деф. така:

$\varphi(\sigma) = \sigma\sigma$ за вс. $\sigma \in \Sigma$

$\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta)$ за вс. $\alpha, \beta \in \Sigma^*$

а) $h : 2^{\Sigma^*} \longrightarrow 2^{\Sigma^*}$ е деф. така:

$h(L) = \{ u \in \Sigma^* \mid \varphi(uuu) \in L \}$

Вярно ли е, че за всеки $L \subseteq \Sigma^*$ - регулярен, $h(L)$ също е регулярен?

б) $L = \{ \varphi(uuu) \mid u \in \Sigma^* \}$

L регулярен ли е?

Решение

б) Н. Pumping Lemma:

Ще док, че $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \alpha \in (\Sigma^{2n} \cap L)\ \forall x, y, z \in \Sigma^*$ т.че $|xy| \leq n$, $|y| \geq 1$, $xyz = \alpha$ $\exists i \in \mathbb{N}$ т.че $xy^iz \notin L$.

Нека $\underline{n}$ е произволно. Нека $\alpha = a^{2n} b^{2n} a^{2n} b^{2n} a^{2n} b^{2n} =$

$= \varphi(a^n b^n a^n b^n a^n b^n) \in L$.

Нека $x, y, z \in \Sigma^*$ са произволни т.че $xyz = \alpha$, $|xy| \leq n$, $|y| > 0$

Тогава $\underline{\underline{x}}$ и $\underline{\underline{y}}$ са съставени само от $\underline{\underline{a}}$-та.

$x = a^p$ $y = a^k$, $z = a^{2n-p-k} b^{2n} a^{2n} b^{2n} a^{2n} b^{2n}$

Така за $i = 2$ $xy^in = a^{2n+k} b^{2n} a^{2n} b^{2n} a^{2n} b^{2n} = \beta$

Ако $\beta \neq \varphi(u)$ за вс. $u \in \Sigma^*$, то $\beta \notin L$

Ако има $u \in \Sigma^*$ т.че $\varphi(u) = \beta$, то $u = a^{n+\frac{k}{2}} b^n a^n b^n a^n b^n$, което не е тройно повторение на никоя дума. Така $\beta \notin L$.

Доказахме, че L не е регулярен.

а) $h(L) = \{ u \mid \varphi(uuu) \in L \}$

Нека $A_L = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$ е ДКА с

език $L(A_L) = L$.

Нека $A_h = (\Sigma, Q^3, I_h, \Delta_h, F_h)$ е автомат,

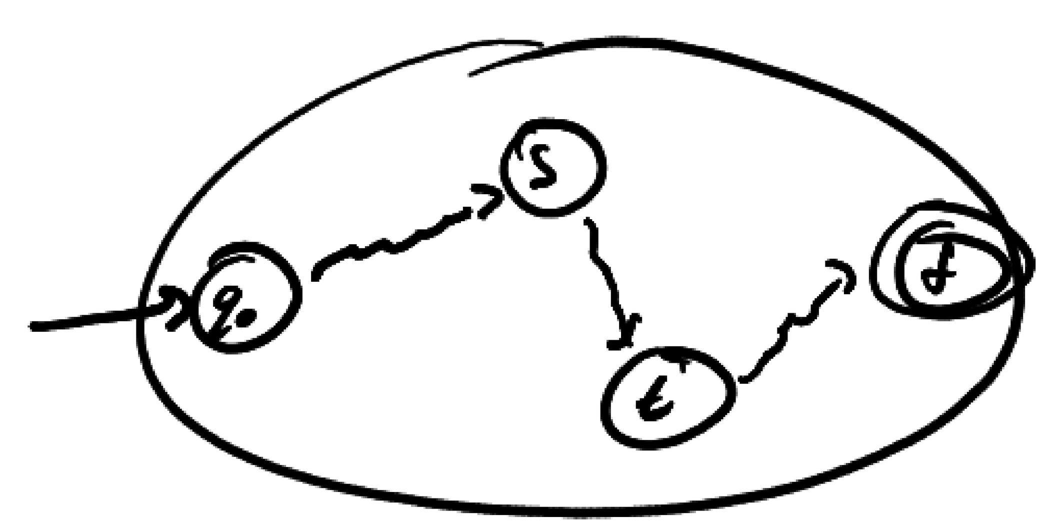
където

$((a, b, c, s, t), \sigma, (a', b', c', s, t)) \in \Delta_h$ т.с.т.к.

$\exists a'', b'', c'' \in Q$ т.че
$$\delta(a, \sigma) = a'' \text{ и } \delta(a'', \sigma) = a'$$
$$\delta(b, \sigma) = b'' \text{ и } \delta(b'', \sigma) = b'$$
$$\delta(c, \sigma) = c'' \text{ и } \delta(c'', \sigma) = c'$$

$I = \{ (q_0, s, t, s, t) \mid s, t \in Q \}$

$F = \{ (s, t, f, s, t) \mid s, t \in Q, f \in F \}$



Нека $u \in L(A_h)$. Тогава има път в A_h:

$$\Pi_h : \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ s \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{u_1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ s \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{u_2} \dots \xrightarrow{u_{|u|}} \begin{pmatrix} a_{|u|} \\ b_{|u|} \\ c_{|u|} \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad (*)$$

, където

$b_0 = s, \ c_0 = t, \ a_0 = q_0, \ a_{|u|} = s, \ b_{|u|} = t, \ c_{|u|} \in F$

Тогава в A_L има път:

$$\Pi_A : \begin{aligned} q_0 = a_0 &\xmapsto{u_1 u_1} a_1 \xmapsto{u_2 u_2} \dots \xmapsto{u_{|u|} u_{|u|}} a_{|u|} = s \\ s = b_0 &\xmapsto{u_1 u_1} b_1 \xmapsto{u_2 u_2} \dots \xmapsto{u_{|u|} u_{|u|}} b_{|u|} = t \\ t = c_0 &\xmapsto{u_1 u_1} c_1 \xmapsto{u_2 u_2} \dots \xmapsto{u_{|u|} u_{|u|}} c_{|u|} \in F \end{aligned} \quad (**)$$

Така $\varphi(uuu) \in L$ и следователно

$$L(\mathcal{A}_h) \subseteq h(L)$$

Сега обратно, Нека $u \in h(L)$, т.е. $\varphi(uuu) \in L(\mathcal{A}_L)$

Тогава има $f \in F$ т.че

$$q_0 \xmapsto{\varphi(u)\varphi(u)\varphi(u)} f$$

Сл. $\exists\, s, t \in Q$ т.че

$$q_0 \xmapsto{\varphi(u)} s \xmapsto{\varphi(u)} t \xmapsto{\varphi(u)} f$$

Оттук $\exists\, a_0 \dots a_{|u|}$, $b_0 \dots b_{|u|}$, $c_0 \dots c_{|u|} \in Q$ т.че пътя π_h от $(**)$ съществува и е успешен в $\mathcal{A}_L$.

оттук по дефиницията на Δ_h пътя в $(*)$ съществува в $\mathcal{A}_h$ и е успешен, т.е. $u \in L(\mathcal{A}_h)$.

Така $L(\mathcal{A}_h) \supseteq h(L)$

С това $L(\mathcal{A}_h) = h(L)$ и $h(L)$ е регулярен за всеки регулярен L.