СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Проекции

ТЕМА №20

Съдържание

Тема 20: Проекции

- Гледна точка
- Движение на гледната точка
- Проекции
- Матрици на проекции

Гледна точка

Припомняне

Припомняне на лекция №4

- Имаше подобен слайд
  (и още си го има)

Дейности преди растеризацията

- Гледна точка – определяне коя част от модела се вижда
  и в каква ориентация
- Проекция – определяне на 2D образ на 3D модел
- Могат да се извършат заедно, но по-лесно е отделно

Гледна точка

Всяка сцена я включва

- Явна или неявна, винаги я има

Използване

- Определя как се вижда сцената
- Движение из тримерен свят
- Плъзгане на образа и приближаване

Неразличимост при въртене в кръг

- Сцената се върти заедно с обектите ѝ
  (като чиния в микровълнова печка)
- Сцената спи, а гледната точка се върти около нея
  (като акула около тюлен)
- Неразличими математически и физически идеи
- Различими от практическа гледна точка
  (при статична сцена нещата са по-прости и по-бързи)

Питане

- Това какво е и на какво е?

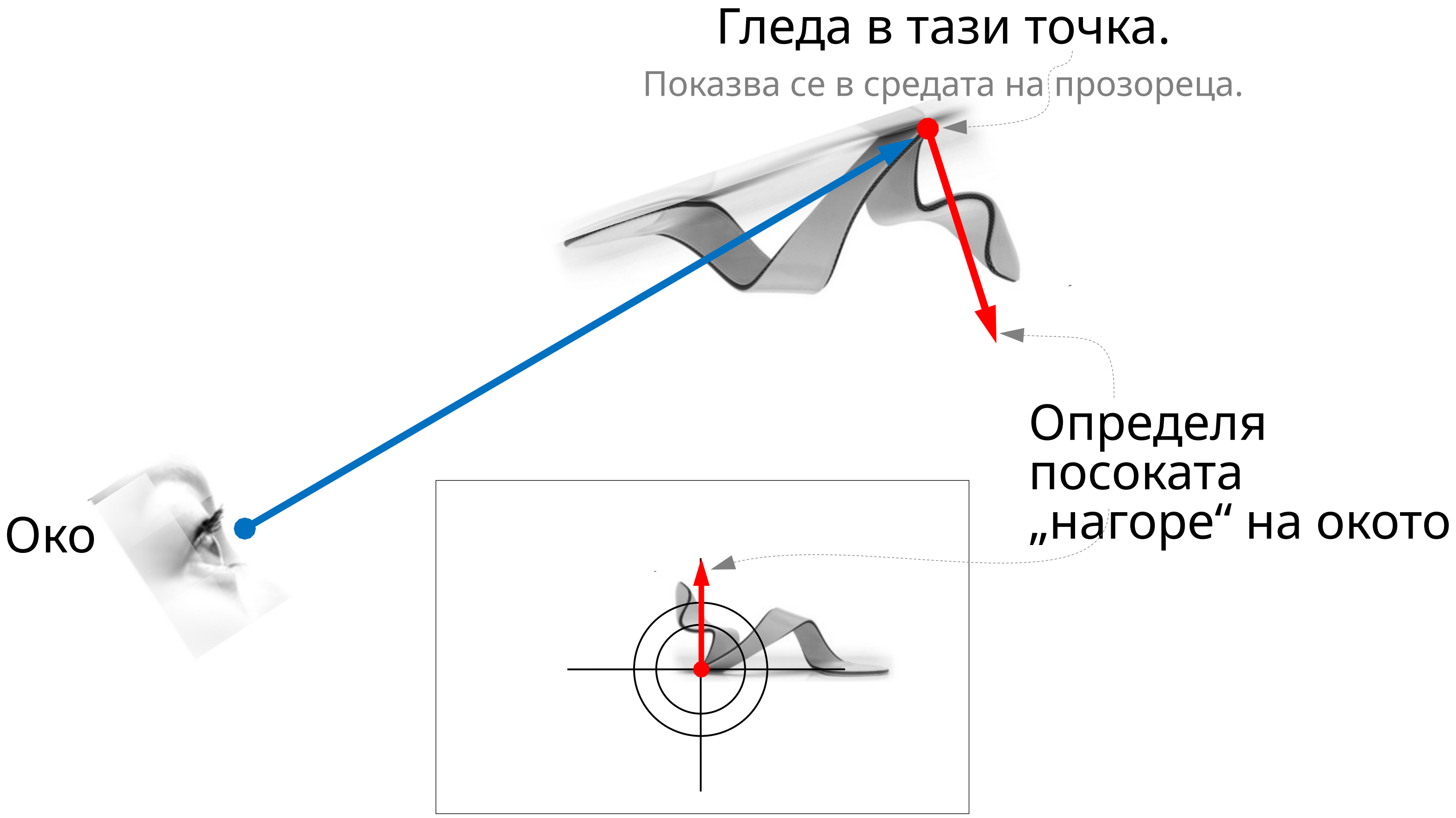
Отговор

– Карта на част от Европа

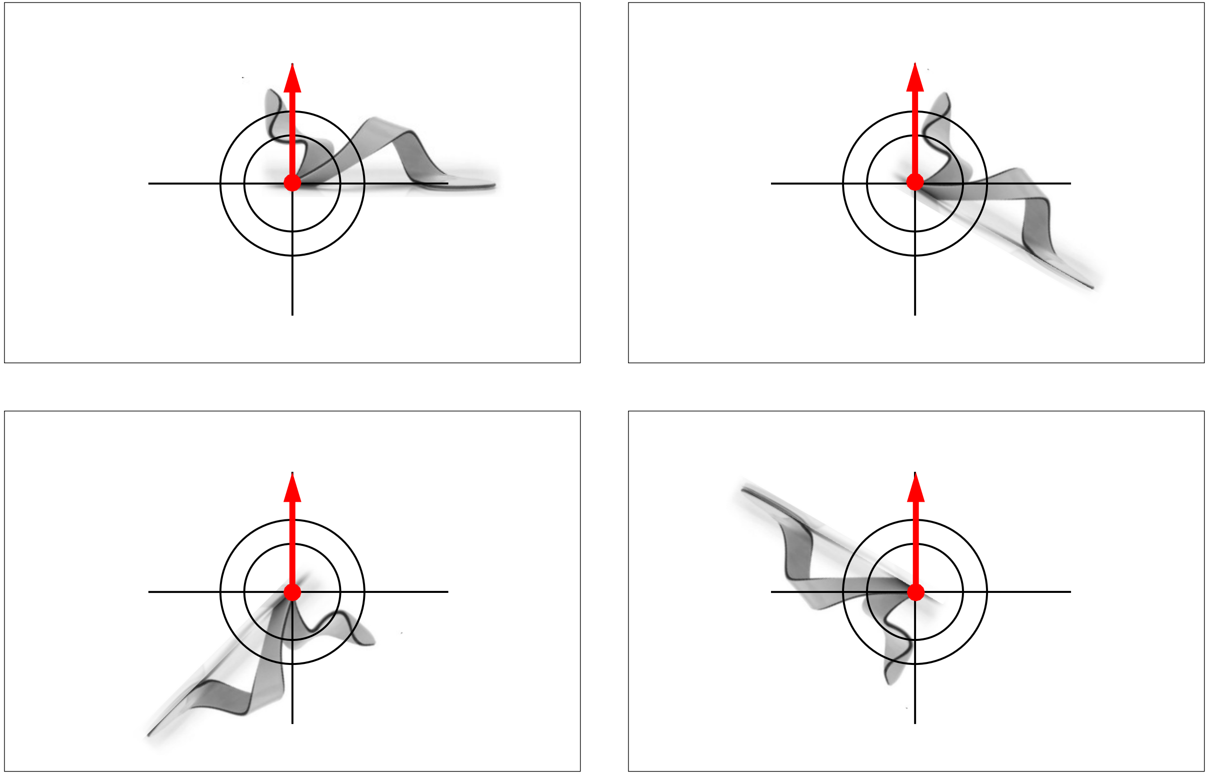
Елементи

Гледната точка не е просто 3D точка

- Определя положението на зрителя спрямо сцената
  (3D точка)
- Определя посоката на гледане
  (друга 3D точка или ненулев вектор до нея)
- Определя ориентацията на образа
  (трета неколинеарна 3D точка или неколинеарен 3D вектор)

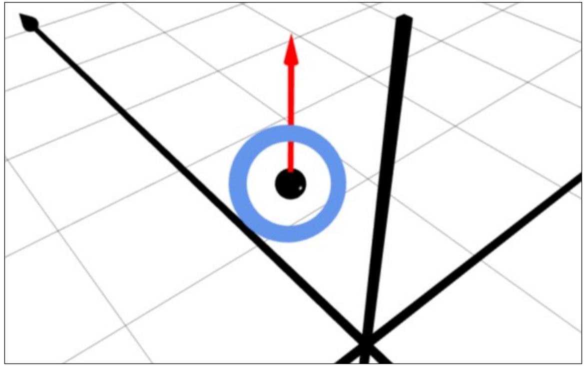

Гледа в тази точка.
Показва се в средата на прозореца.
Определя посоката „нагоре“ на окото
Око

Вектори „нагоре“



Плавен преход към гледна точка

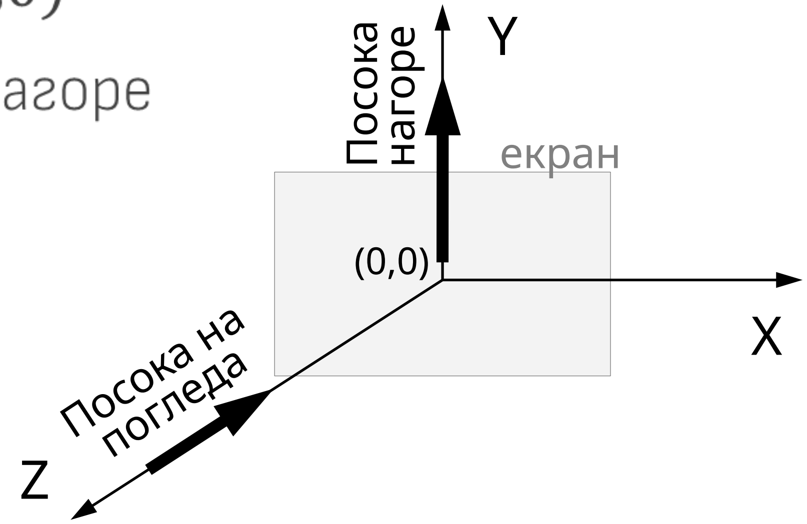
– Демонстрация на гледна точка



Традиционни чертежи

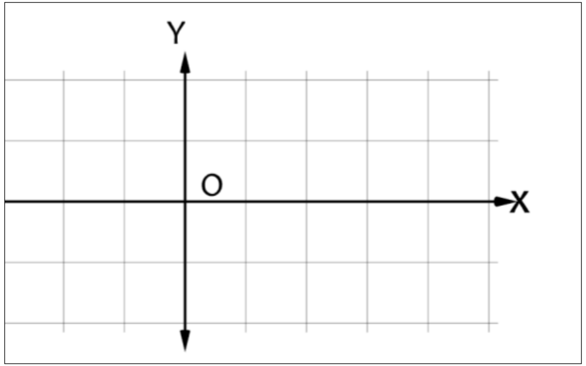
Традиционни 2D чертежи

- В средата на екрана е $(0,0)$
- Оста $\vec{X}$ е надясно, а $\vec{Y}$ е нагоре



Как се постига?

- Гледа се от точка $(0,0,n > 0)$
- Гледа се към точка $(0,0,0)$
- Посоката нагоре е $(0,1,0)$



Реализация

Реализация на гледната точка

- Естествено, че чрез матрица

В матрицата са включени

- Транслация
  (за да може гледаната точка да е в средата на екрана)
- Ротации
  (за да нагласят координатните о̀си и посоката „нагоре“)
- Понякога и мащабиране

Движение на гледната точка

Движение

Гледната точка като графичен обект

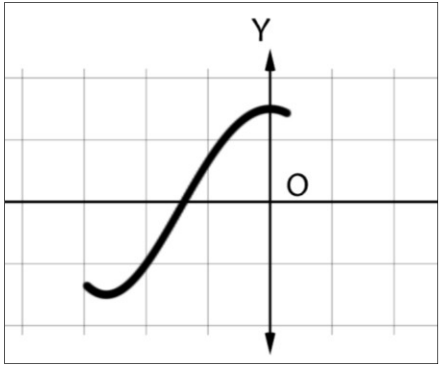
- Може да се променя с времето
- Създава илюзия за движение

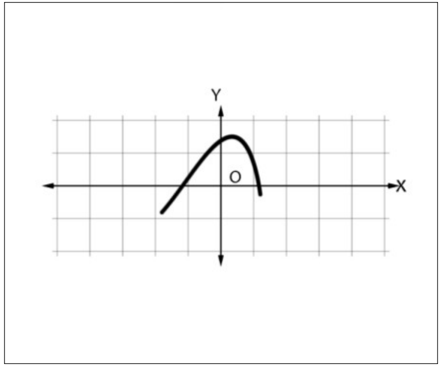
Възприемане от зрителя

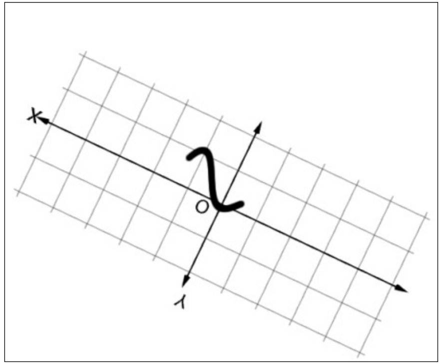
- Промяна на посоката на гледане е като въртене
- Промяна на точката, от която се гледа – преместване

Различни движения в 2D

- Плъзгане – транслация
- Мащабиране
- Ротация



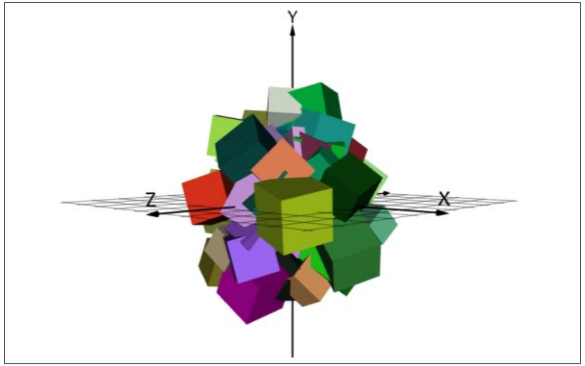


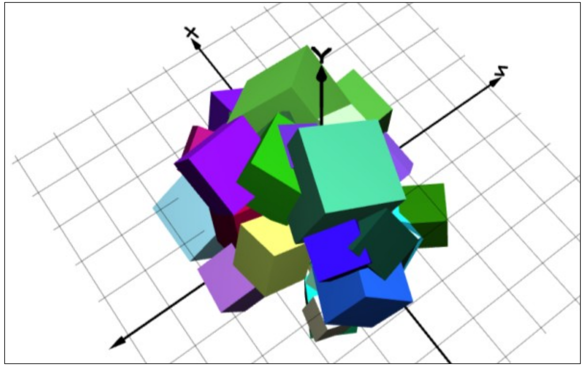


Въртене в кръг

Чрез полярни/сферични координати

– Могат да се наслагват допълнителни движения
(за близост, за издигнатост)





Внимание! Опасност!

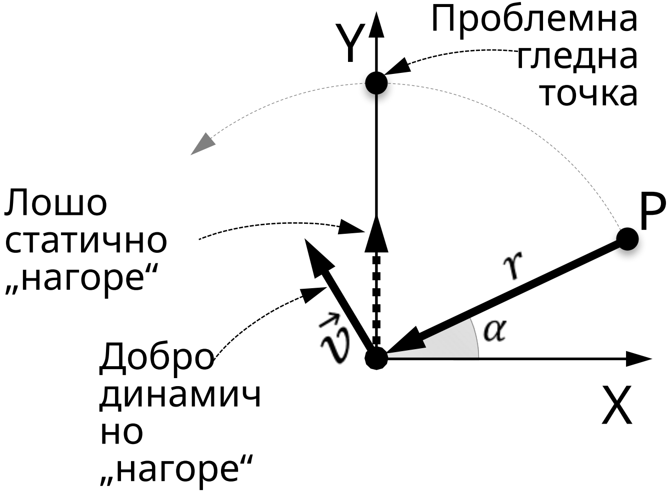
- Ако при движението се „прелети“ над вектора „нагоре“, тогава се получава проблем

Решение

- Посоката „нагоре“ се променя динамично
- Конкретни решения за конкретни случаи

Пример с въртене в равнината XY

— Ако „нагоре“ е $(0,1,0)$, то проблемна точка е $(0, r, 0)$



$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

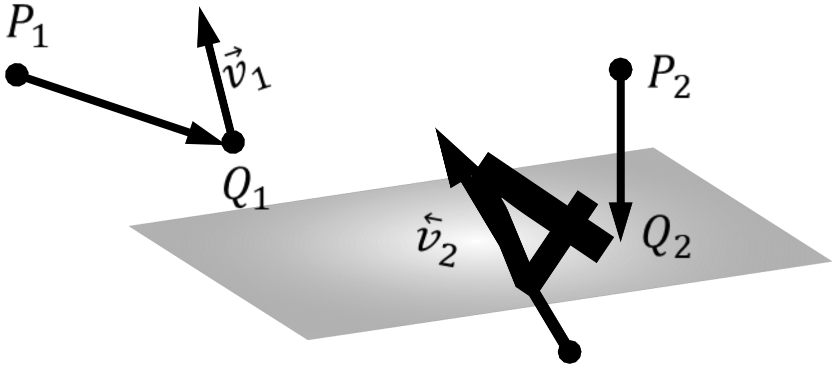
$$\left| \begin{array}{l} p_x = r\cos\alpha \\ p_y = r\sin\alpha \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{c} v_x = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha \\ v_y = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha \end{array} \right.$$

Преход

Плавен преход между гледни точки

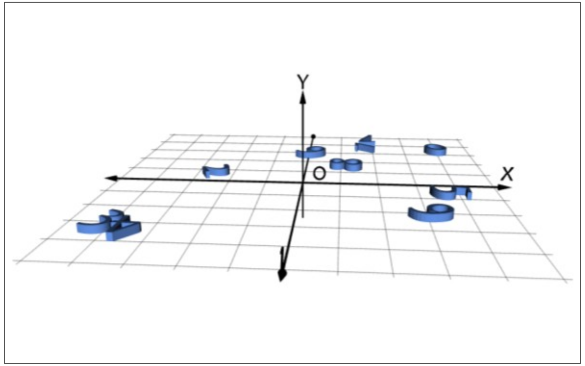
- Чрез линейна комбинация и $k \in [0,1]$
- Може да се меним k линейно, полиномиално или тригонометрично (тема 13, сл. 7, 12)



$$P = (1-k)P_1 + kP_2$$
$$Q = (1-k)Q_1 + kQ_2$$
$$\vec{v} = (1-k)\vec{v}_1 + k\vec{v}_2$$

Плочка с разбъркани цифри

- Последователно доближаване до всяка от тях



Слалом

Последна задача за подтемата

- Минаване на зиг-заг покрай поредица конуси

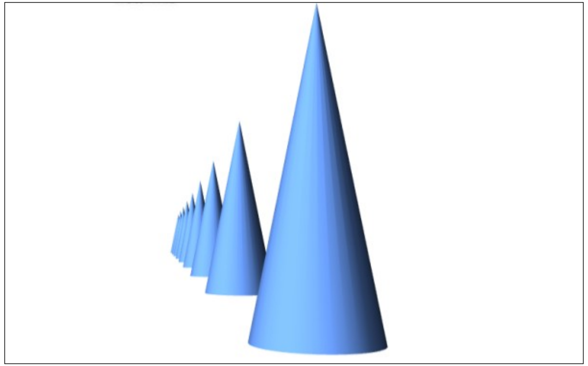
Допълнителен проблем

- Крайно пространство
- Безкрайно движение и то все напред
- Как да се реши това? (бонус 3т.)

Реализация

- Разстоянията между конусите са Δd
- Движенията на гледната точка е само по оста $\boldsymbol{Z}$ и е:

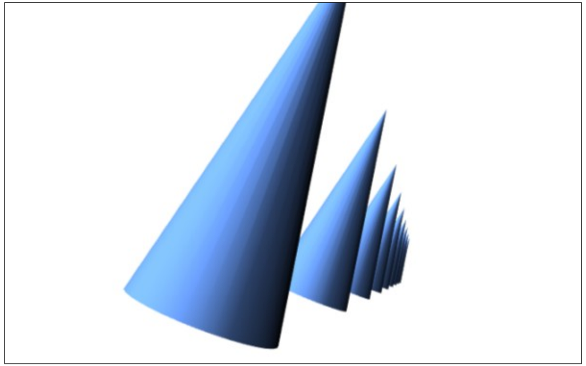
$$z = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\Delta d}t + \frac{\pi}{6}\right)$$



А с накланяне?

- Посоката „нагоре“ става променлива
- От къде идват коефициентите?

$$\vec{v}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{\Delta d}t+\frac{5\pi}{6},1,0\right)$$



От тук

- Изборът им е по естетически причини
- Максималният наклон се влияе от $\frac{1}{2}$
- Избързването или забавянето на накланянето спрямо завиването се определя от $\frac{5\pi}{6}$
- Завиването покрай конусите се контролира от $\frac{\pi}{\Delta d}t$ и $\frac{5\pi}{6}$
- Скоростта по оста Z е избрана да е линейната $z(t) = t$, за да са по-леки сметките

Проекции

Етимология

Етимология на „проекция“

- Лат. „projectus“ – (из)хвърлям напред

Разнообразие от производни

- Проект и проектант
- Проектор и проекция
- Прожектор и прожекция
- Инк-джет (принтер), джет (воден)
- Инжекция и инжекцион

Езикови, а не
математически

Цел на проекциите в КГ

- Създаване на 2D модел на 3D обект
- Възпроизвеждане как човек възприема 3D обекти

Кога, къде и как се прави

- След обработването на гледната точка
- Преди растеризирането
- С матрици в хомогенни координати

Координатите

Първични координати с които са дефинирани 3D обектите

Вторични координати след трансформирането според гледната точка. Те са 3D.

Ето там са проекциите

Третични 2D координати при проектирането върху екранната плоскост.

Основни термини

Проекция

- Превръщането на 3D в 2D
- Самият 2D образ на 3D обект

Център на проекция

- Точка, спрямо която се проектира

Проекционна равнина

- Равнина, в която се намира проекцията

Проекционни прави

- Прави, които свързват центъра с точки от 3D обекта
  и 2D проекцията

Убежна точка

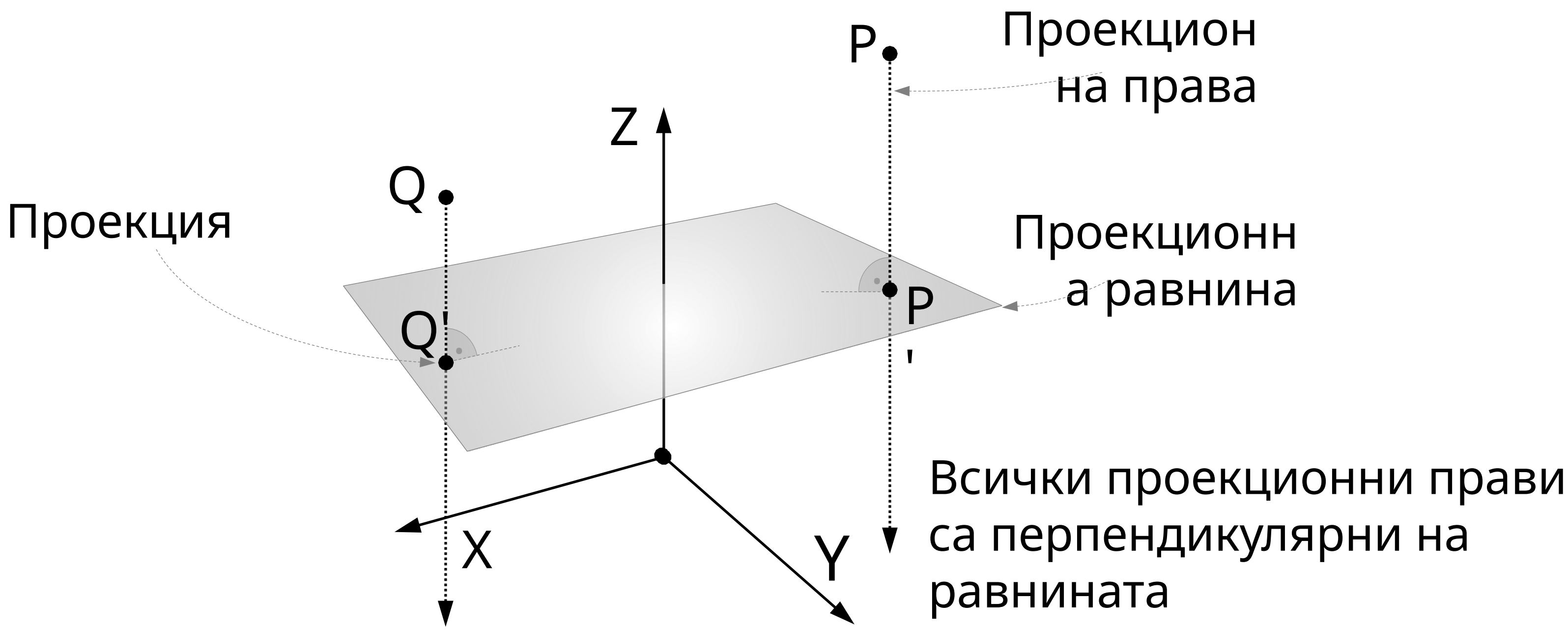
- 2D точка, в която успоредни прави се събират след проектирането си

Видове проекции

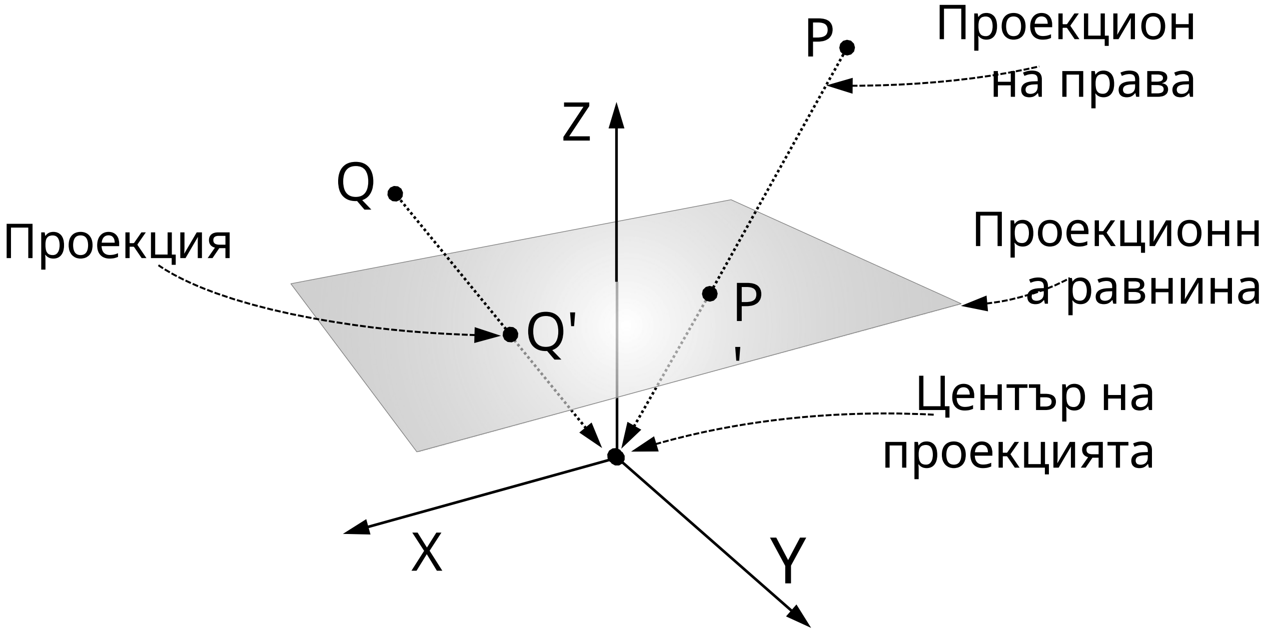
Някои видове проекции

- Централна – центърът е крайна точка
- Паралелна – проекционните прави са успоредни, центърът е безкрайна точка
- Ортогонална – паралелна проекция с проекционни прави перпендикулярни на проекционната равнина

Ортогонална проекция

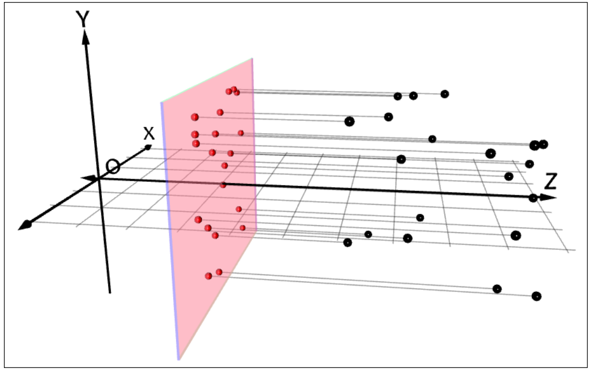


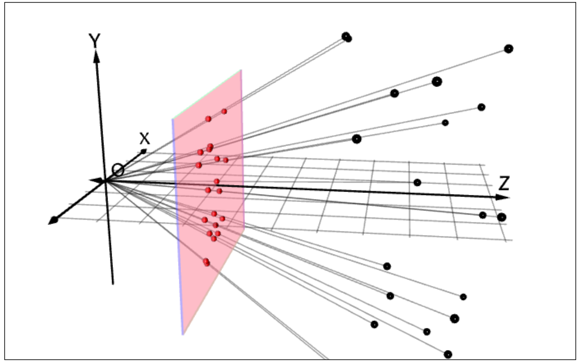
Централна проекция



Двете проекции в движение

- Ортогонална проекция
- Централна проекция

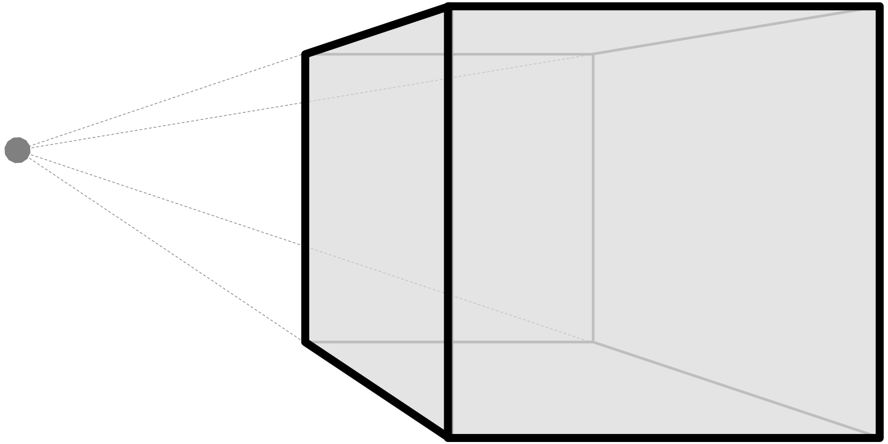




Перспективни проекции

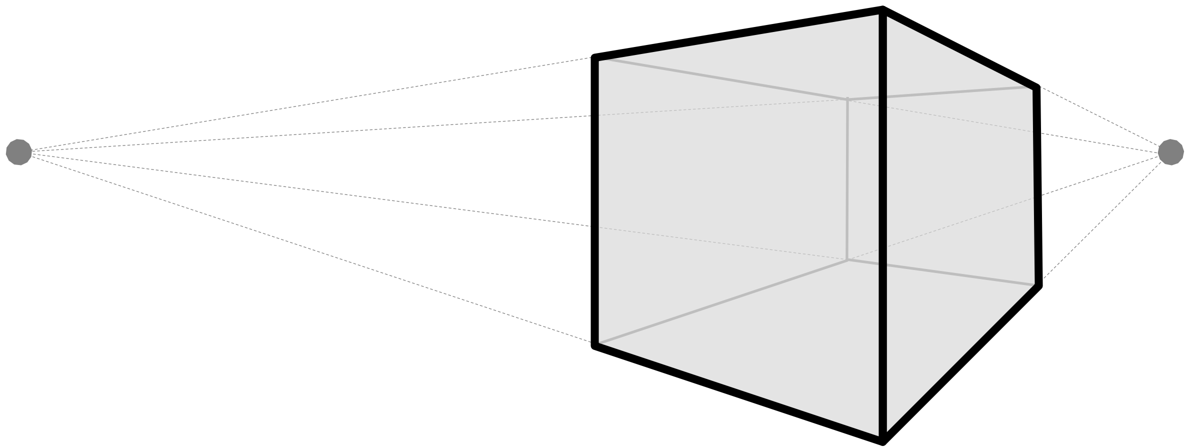
Едноточкова – една убежна точка

- Безкрайна 3D точка се проектира в крайна 2D точка



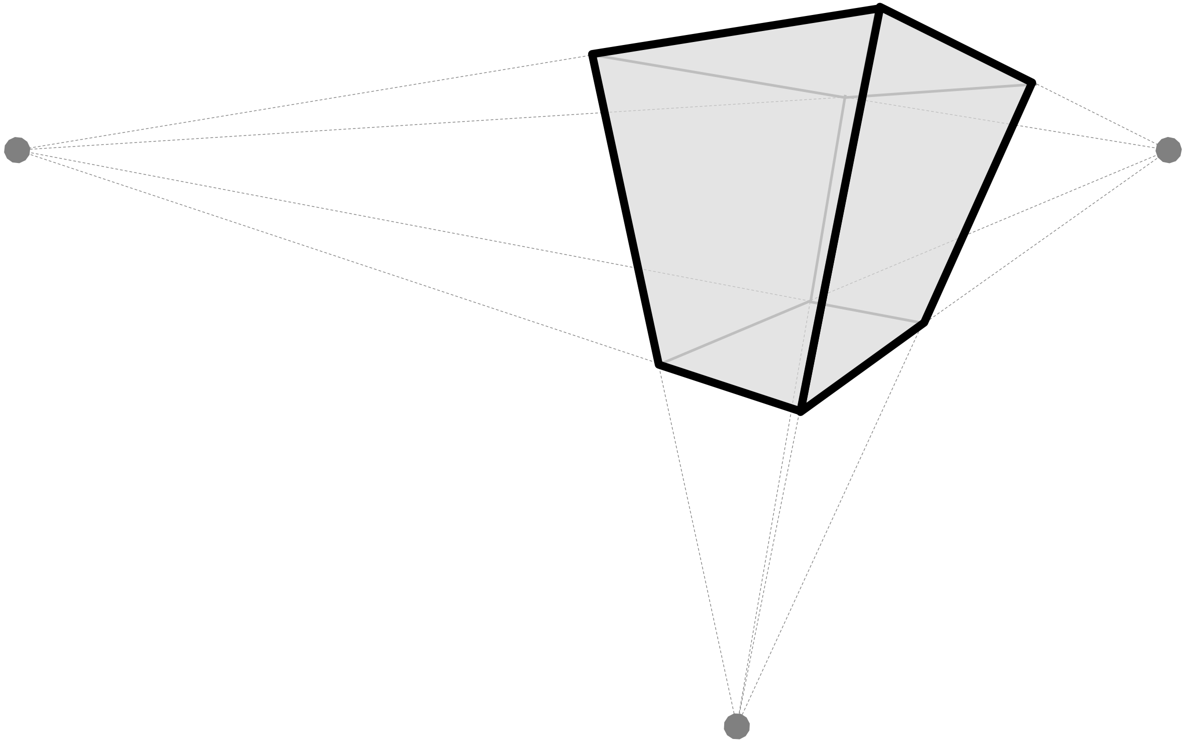
Двуточкова перспектива

- Вертикалните линии са все още успоредни
- Помежду си и спрямо екрана



Триточкова перспектива

– Представяне на сгради в анимационни филми



Матрици
на проекции

Ортогонална проекция

За удобство предполагаме

- Проективната равнина е успоредна на равнината XY и на разстояние f от нея
- Проективните лъчи са успоредни на оста Z

Проектиране на точка

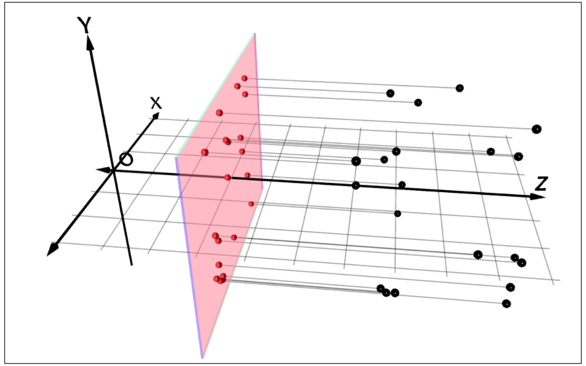
- Проектирането е тривиално: $P(x, y, z) \to P'(x, y, f)$

– А като матрица?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{0} & \color{red}{f} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \color{red}{f} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Забележете как първо се занулява z, а после се на f ва

– А като програма?



Централна проекция

За удобство се предполага

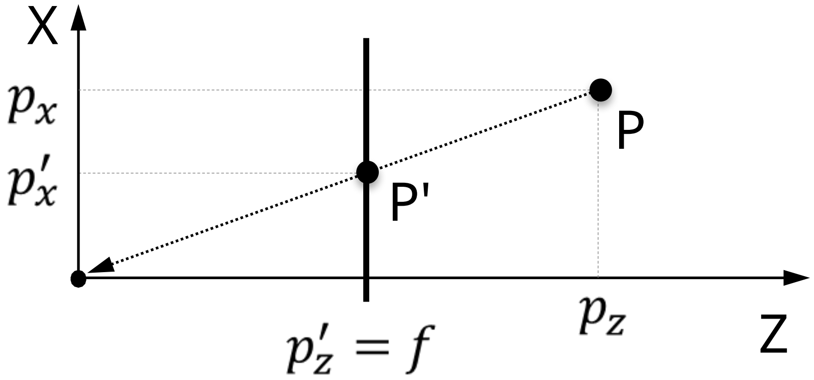
- Проективната равнина е успоредна на равнината XY и на разстояние f от нея
- Центърът на проекцията е $(0,0,0)$

Проектиране на точка

- Проектирането $P(x,y,z) \rightarrow P' = \frac{f}{z}P$ в хомогенни координати става $P' = \left(\frac{f}{z}x, \frac{f}{z}y, f, 1\right) = \left(x, y, z, \frac{z}{f}\right)$

– Защо $P^{'} = \frac{f}{z} P$?

$$\frac{p_x^{'}}{p_x} = \frac{p_z^{'}}{p_z} = \frac{f}{p} \Rightarrow p_x^{'} = \frac{f}{p_z} p_x$$



– Аналогично се получава $p_y^{'} = \frac{f}{p_z} p_y$ и $p_z^{'} = \frac{f}{p_z} p_z = f$

– Матрицата на проекцията е тази

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z/f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/f \end{pmatrix}$$

– Абсолютно напълно брутално негодна. Защо?

Защото

– В матрицата участва координата $\boldsymbol{z}$

– Матрицата трябва да е всеобща и да не зависи от точките, над които се прилага

Справяне с матрицата

- От последния ред на лошата матрица

$$\frac{z}{f} = [0]x + [0]y + [0]z + \left[\frac{z}{f}\right]1$$

Иска се

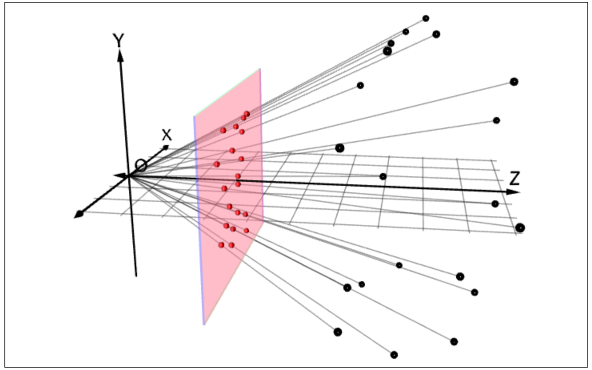
- В квадратните скоби да няма x, y или z
- Използва се, че има още едно z
- Елементарно и хитро: $\frac{z}{f} = [0]x + [0]y + \left[\frac{1}{f}\right]z + [0]1$

Новата матрица

– Без зависимост от точките

– Добре е да се провери дали е добре

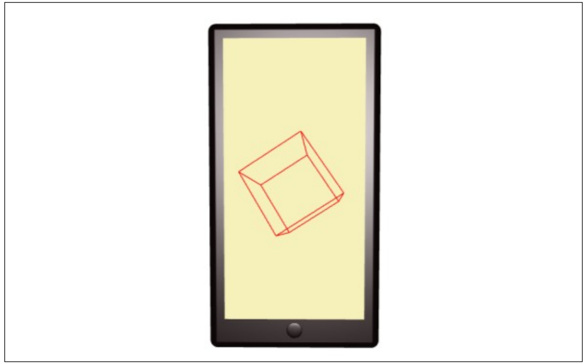
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1/f} & \color{red}{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/f \end{pmatrix}$$



По-сложен пример

Простоват смартфон

- Показва перспективна проекция на куб, който се върти някъде пред екрана



В резюме за матриците

Трансформационна и проективна

Ротация, мащабиране, отражение, скосяване

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Транслация

Глобално мащабиране

Перспектива

(при $\mathbf{a}_{41}, \mathbf{a}_{42}, \mathbf{a}_{43} \neq 0$ се получават 1/2/3-точкови перспективи)

Сложност на проекциите

- Често матриците са доста по-сложни
- Включени са допълнителни действия

Примерно

- Координатата z не се нулира, а се запазва за Z-Buffer
- 3D сцената се изрязва до дадена зона (frustum)
- Дълбочината се нормализира до $[-1,1]$
- Центърът на проекцията не е $(0,0,0)$
- Матрицата е вградена в друга матрица

Въпроси?

Повече информация

ALZH	гл. 5	**LENG**	стр. 111-131
AGO1	стр. 161-166	**MORT**	стр. 313-321
BAGL	стр. 136-137	**PARE**	стр. 31-39, 46-48
KLAW	стр. 121-128	**SEAK**	стр. 34
VINC	стр. 103-105	**AGO2**	стр. 111-121, 138
ZHDA	стр. 247-252		

А също и:

- Perspective projections
  http://web.iitd.ac.in/~hegde/cad/lecture/L9_persproj.pdf
- Perspective and Orthographic Projection Matrix
  http://www.scratchapixel.com/lessons/3d-advanced-lessons/perspective-and-orthographic-projection-matrix/

Край