**Ren rulling på krumt underlag – energibevarelse**

Energibevarelse er slagkraftige saker. Med kjennskap til baneformen $y(x)$ og den 1. og 2. deriverte, hhv $y' = dy/dx$ og $y'' = d^2y/dx^2$, kan vi enkelt bestemme diverse størrelser for et objekt som ruller på den krumme banen. Objektet har et treghetsmoment $I_0 = cMR^2$ mhp rotasjonsaksen, som går gjennom massesenteret (CM). Her er $M$ objektets masse, og $R$ er objektets radius, dvs avstanden mellom CM og kontaktpunktet mellom objekt og bane. Vi antar her at objektet er ei kompakt kule med uniform massefordeling, slik at $c = 2/5$. I praksis bruker vi kuler med masse $M = 31$ g og radius $R = 11$ mm. La oss videre anta at banens krumningsradius overalt er mye større enn kulas radius $R$, slik at vi med god tilnærmelse kan anta at CM følger samme kurve som banen $y(x)$.

Kula starter med null hastighet i høyde $y(0) = y_0$. Da er total mekanisk energi $E = U_0 = Mgy_0$ når vi velger $U = 0$ for $y = 0$. Total kinetisk energi $K$ er summen av translasjonsenergien $Mv^2/2$ og rotasjonsenergien $cMv^2/2$, i det vi antar at kula ruller rent, dvs uten å gli. Dvs, $K = (1 + c)Mv^2/2$ når farten er $v$. Energibevarelse gir da en hastighet

$$v(y) = \sqrt{\frac{2g(y_0 - y)}{1 + c}}$$

når kula er et sted på banen der høyden er $y$. Siden vi kjenner baneformen $y(x)$, kan vi gjerne oppfatte farten som en funksjon av horisontal posisjon $x$:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2g(y_0 - y(x))}{1 + c}}.$$

Det samme vil selvsagt gjelde for alle størrelser i fortsettelsen. Banens krumning $\kappa$, dvs den inverse krumningsradien, er

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Da er sentripetalakselerasjonen umiddelbart gitt som

$$a_\perp = v^2\kappa = \frac{2g(y_0 - y)}{1 + c} \cdot \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Her vil $\kappa$ være positiv der banen krummer oppover og negativ der den krummer nedover. Tilsvarende fortegn vil gjelde for $a_\perp$. Dette er konsistent med positiv $y$-retning oppover: Når banen krummer oppover, har vektoren $\boldsymbol{a}_\perp$ også retning oppover, dvs den har en positiv $y$-komponent. Med $c = 2/5$ blir hastigheten

$$v = \sqrt{\frac{10g(y_0 - y)}{7}}.$$

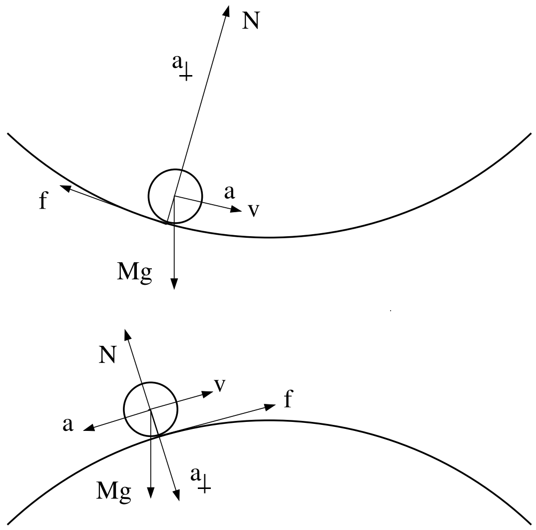
Vi ser i neste omgang på Newtons 2. lov normalt på banen. La oss velge fortegn slik at tyngdens komponent $Mg\cos\beta$ peker i negativ retning mens normalkraften $N$ virker i positiv retning. Her er $\beta$ banens helningsvinkel. Da har vi

$$N - Mg\cos\beta = Ma_\perp,$$

enten banen krummer opp eller ned, slik at

$$N = M(g\cos\beta + a_\perp).$$

Hvis banen krummer opp, peker $a_\perp > 0$ i samme retning som $N$ (dvs oppover), og $N$ blir større enn $Mg\cos\beta$. Hvis banen krummer ned, peker $a_\perp < 0$ i motsatt retning av $N$ (dvs nedover), og $N$ blir mindre enn $Mg\cos\beta$.




**Figur 1.** Krefter på ei kule som ruller på et krumt underlag.

Det gjenstår å finne (den statiske) friksjonskraften $f$ fra banen på den rullende kula. La oss velge helningsvinkelens fortegn slik at $\beta < 0$ når kula ruller nedover og $\beta > 0$ når den ruller oppover. Da har stigningstallet $y' = dy/dx = \tan\beta$ riktig fortegn.

Kreftene som virker tangentielt til banen er $f$ og tyngdens tangentialkomponent $-Mg\sin\beta$. Hvis banen heller nedover, er $\beta < 0$, $f < 0$ (dvs $f$ har retning mot venstre) og $a = dv/dt > 0$ (kula får større fart). N2 blir da

$$-Mg\sin\beta + f = Ma.$$

Og hvis det er oppoverbakke: $\beta > 0$, $f > 0$ (dvs $f$ har retning mot høyre) og $a = dv/dt < 0$ (kula får mindre fart). N2 blir da

$$f - Mg\sin\beta = Ma.$$

Med andre ord, samme ligning, enten det er nedover- eller oppoverbakke. Vi trenger dessuten N2 for rotasjon om CM ("spinnsatsen"):

$$fR = -I_0 d\omega/dt,$$

som med $\omega = v/R$ og uttrykket ovenfor for $I_0$ gir

$$f = -cMdv/dt = -cMa.$$

Her blir det riktig med minustegnet inkludert: Utforbakke betyr $a > 0$ og dermed $f < 0$, dvs mot venstre. Og omvendt med oppoverbakke. Vi setter $f = -cMa$ inn i N2 for translasjon:

$$-cMa - Mg\sin\beta = Ma,$$

som gir

$$a = -\frac{g\sin\beta}{1+c},$$

og endelig

$$f = \frac{cMg\sin\beta}{1+c}.$$

Vi ser at fortegnsvalget for helningsvinkelen $\beta$ gir riktig fortegn for $a$ og $f$ i disse uttrykkene: Utforbakke betyr $\beta < 0$, $\sin\beta < 0$ og dermed $a > 0$ og $f < 0$. Med kompakt kule og $c = 2/5$:

$$a = -\frac{5g\sin\beta}{7}$$

og

$$f = \frac{2Mg\sin\beta}{7}.$$

Vi har her *forutsatt* at kula ruller rent, dvs uten å gli (slure) mot underlaget. Den beregnede statiske friksjonskraften $f$ kan imidlertid ikke overstige sin maksimale verdi, gitt ved $|f| = \mu_s|N|$. Her er $\mu_s$ den statiske friksjonskoeffisienten mellom kule og bane. Overflaten på de svarte datamus-kulene er en slags gummi. Banen er en type hard plast, trolig polyetylen eller polypropylen. Det er vel rimelig å anta at verdien av $\mu_s$ vil være minst 0.4 eller deromkring. For en gitt baneform kan en plotte størrelsen $|f/N|$ (evt skrive ut maksimumsverdien av $|f/N|$) og sjekke at antagelsen om ren rulling er oppfylt.

### Tidsutviklingen

Når prinsippet om bevaring av mekanisk energi utledes fra Newtons 2. lov, forsvinner tidsaspektet på magisk vis. Dvs, tiden $t$ inngår ikke lenger i ligninger og uttrykk. Dermed må vi som regel tilbake til Newtons 2. lov dersom vi ønsker å bestemme tidsutviklingen, dvs kulas posisjon (og eventuelt andre størrelser som hastigheten og kreftene som virker på kula) som funksjon av $t$. Vi skal skissere hvordan dette kan gjøres numerisk, med en enkel og lettfattelig metode ("forward Euler"). I vårt konkrete problem, der kula er tvunget til å rulle på en bane med en bestemt form $y(x)$, er det en enda enklere måte å bestemme tidsutviklingen på: Energibevarelse gir oss hastigheten $v$ uttrykt som en funksjon av høyden $y$, og dermed som en funksjon av kulas horisontale posisjon $x$, via baneformen $y(x)$. Da er tiden $dt$ som kula bruker på en liten horisontal forflytning $dx$ direkte gitt som $dt = dx/v_x$, for hastighetens komponent i $x$-retningen er jo *definert* som $v_x = dx/dt$.

*Metode 1: Newtons 2. lov og forward Euler (med fast tidssteg dt)*

Vi tok utgangspunkt i Newtons 2. lov og fant at kulas baneakselerasjon er $a = -(5g/7)\sin\beta$ når banens helningsvinkel er $\beta$. Banens form $y(x)$ og stigningstallet $dy/dx = \tan\beta$ er kjente størrelser. Med andre ord, vi kjenner $\beta = \arctan(dy/dx)$ og dermed $a$ langs hele banen. Ideen i Eulermetoden er da slik: Anta at kula starter i posisjon $(x_0, y_0)$ med starthastighet $v_0 = 0$ ved tidspunktet $t_0 = 0$. Siden $a = dv/dt$, vil kula i løpet av et lite tidssteg $dt$ endre sin hastighet med $dv = a\,dt$. Og siden $v = ds/dt$, vil kula i løpet av tiden $dt$ endre sin posisjon (langs banen) med $ds = v\,dt$. Med de aktuelle startbetingelsene gir dette mellom $t_0 = 0$ og $t_1 = dt$ en forflytning $v_0\,dt = 0$ og en hastighetsendring $-(5g/7)\sin\beta_0\,dt$, slik at $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$ og $v_1 = -(5g/7)\sin\beta_0\,dt$. Siden kula ikke flyttet seg i det første tidssteget, har vi selvsagt fremdeles samme helningsvinkel, dvs $\beta_1 = \beta_0$. I tidssteg nr 2 blir forflytningen langs banen $ds_2 = v_1\,dt$, forflytningen horisontalt $dx_2 = ds_2\cos\beta_1$, og ny horisontal posisjon blir $x_2 = x_1 + dx_2 = x_1 - (5g/7)\sin\beta_1\cos\beta_1(dt)^2$. Ny vertikal posisjon kan fastlegges fra baneformen: $y_2 = y(x_2)$. Litt mer generelt: Når posisjonen $(x_n, y_n)$ og hastighetens horisontale komponent $v_{x,n}$ ved tidspunktet $t_n = n\,dt$ er kjent, har vi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + v_{x,n}dt \\ y_{n+1} &= y(x_{n+1}) \\ v_{n+1} &= v_n + a_n dt \\ t_{n+1} &= (n+1)dt \end{aligned}$$

ved neste tidspunkt $t_{n+1}$. Dette gjentar vi inntil vi når ønsket maksimale horisontale posisjon.

*Metode 2: Energibevarelse og $dt = dx/v_x$* (med fast romlig steg $dx$)

Programmet `cubicspline.py` beregner $y(x)$ for 1401 jevnt fordelte $x$-verdier, dvs for hver hele mm, fra og med $x_0 = 0$ til og med $x_{1400} = 1.400$ m. Hastigheten $v_n$ og helningsvinkelen $\beta_n$ i posisjon $(x_n, y_n)$ er kjente størrelser. Da kan vi regne ut hvor lang tid $\Delta t_n$ kula har brukt på intervallet mellom $x_{n-1}$ og $x_n$ ($n = 1, 2, \ldots, 1400$). Horisontal komponent av hastigheten i posisjon $x_n$ er $v_{x,n} = v_n \cos \beta_n$. Gjennomsnittlig horisontalkomponent av hastigheten på intervall nr $n$ er da (med god tilnærmelse)

$$\langle v_x \rangle_n = \frac{1}{2} \left( v_{x,n-1} + v_{x,n} \right).$$

Fra den grunnleggende definisjonen $\langle v_x \rangle_n = \Delta x_n / \Delta t_n$ har vi dermed

$$\Delta t_n = \frac{\Delta x_n}{\langle v_x \rangle_n} = \frac{2 \Delta x_n}{v_{x,n-1} + v_{x,n}},$$

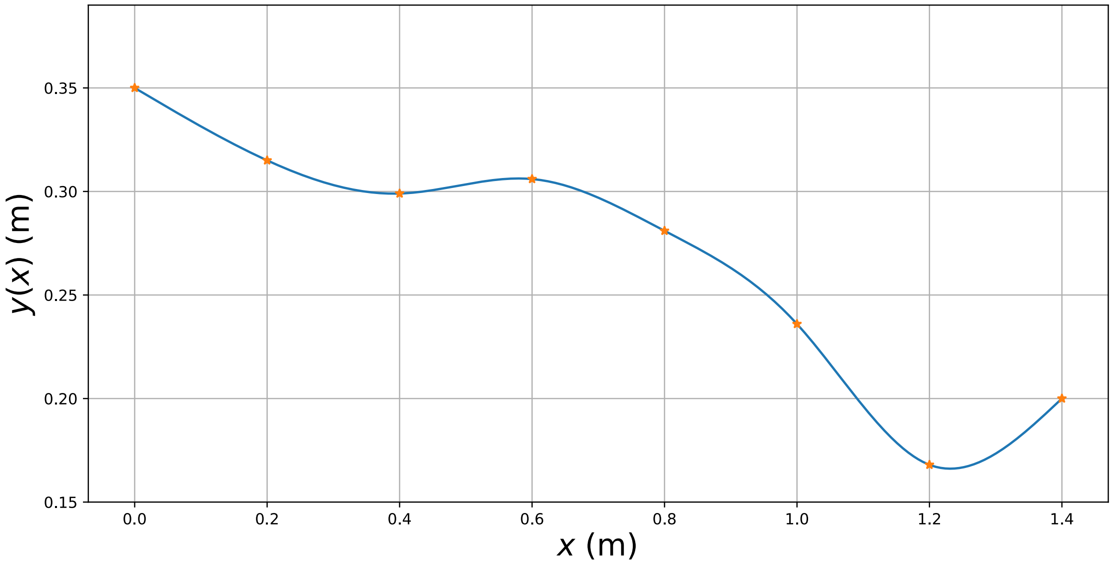
med konstant romlig steg $\Delta x_n = x_n - x_{n-1} = 1$ mm. Kula (dvs kulas massesenter) starter i posisjon $(x_0, y_0)$ med starthastighet $v_0 = 0$ ved tidspunktet $t_0 = 0$ og passerer posisjonene $(x_n, y_n)$ med hastigheter $v_n$ ved tidspunktene

$$t_n = \sum_{j=1}^{n} \Delta t_j \quad ; \quad n = 1, \ldots, 1400.$$

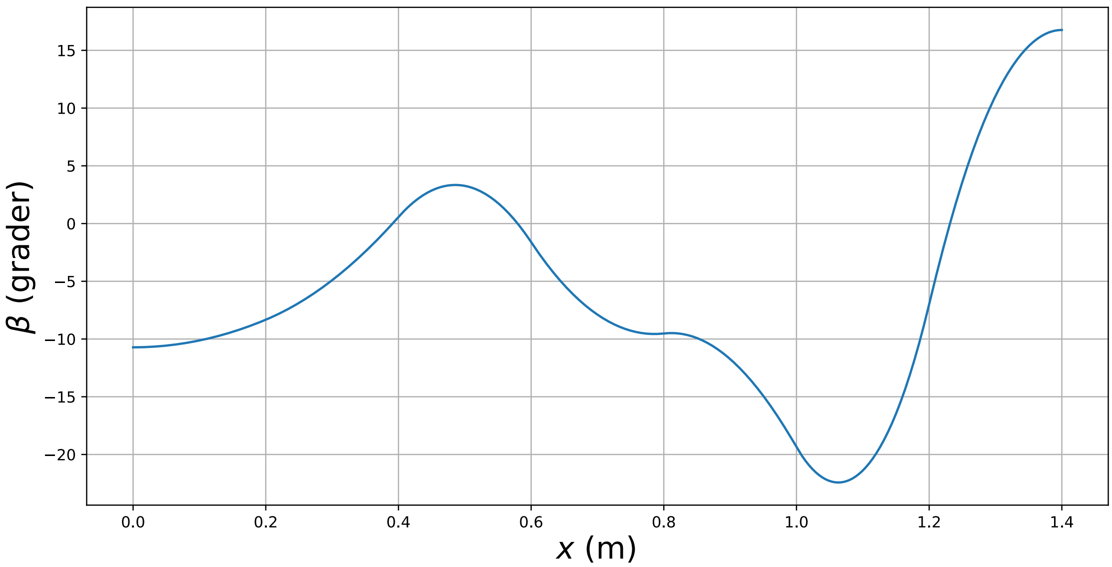
Velg selv om dere vil bruke den ene eller den andre metoden for å bestemme tidsutviklingen.

**Eksempel**

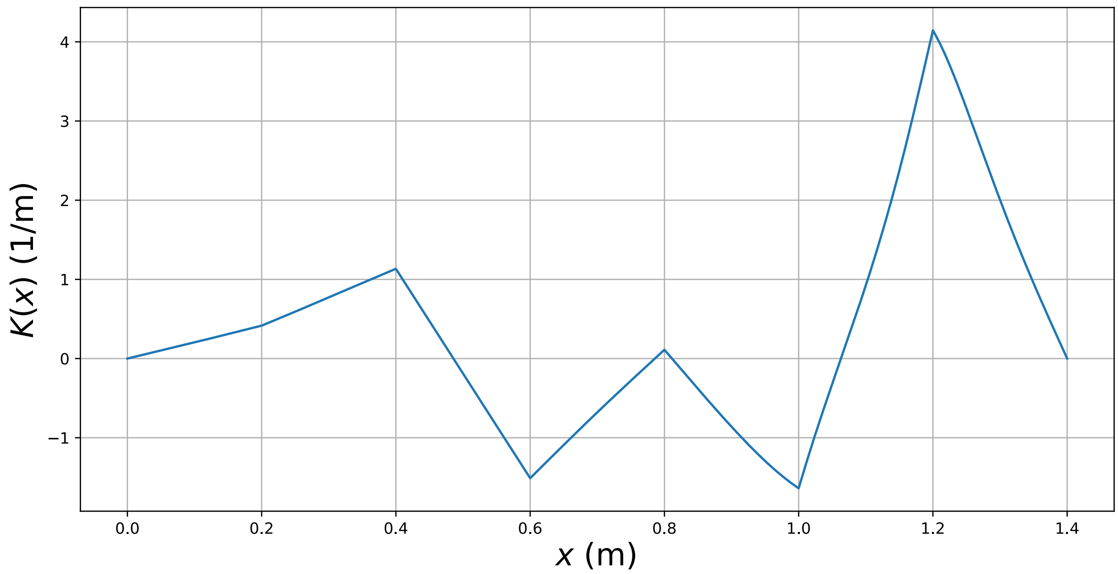
En bane $y(x)$ kan se slik ut:



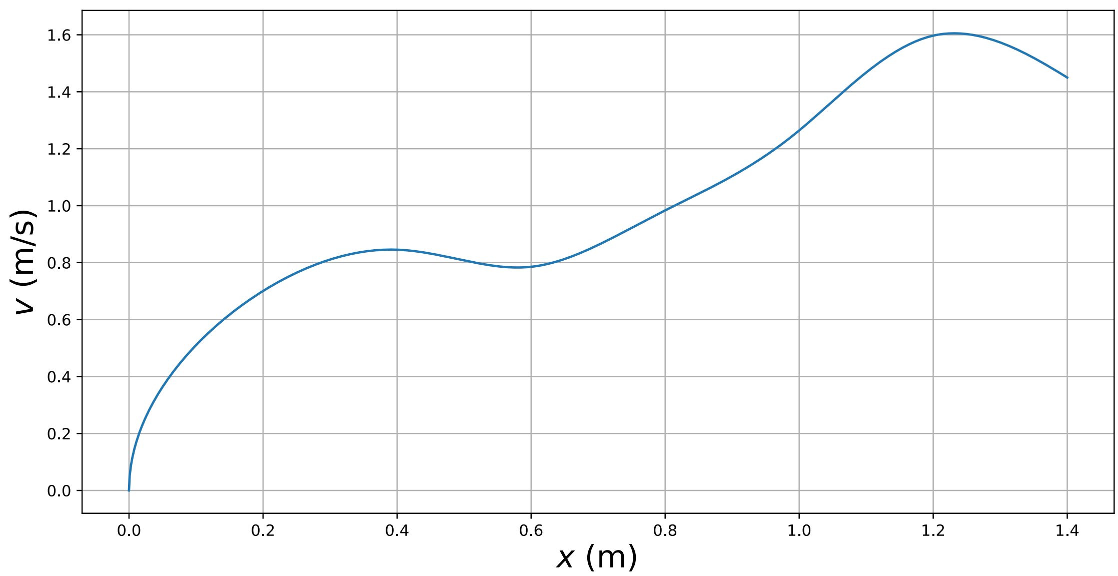

Her er starthøyden $y_0 = 350$ mm. Laveste festepunkt, ved $x = 1.2$ m, er i høyden $y = 168$ mm. Banens helningsvinkel $\beta$ overstiger ikke $22.4°$ i absoluttverdi:



Banens krumning ligger mellom -1.6 og +4.1 pr m, slik at minste krumningsradius er ca 24 cm:

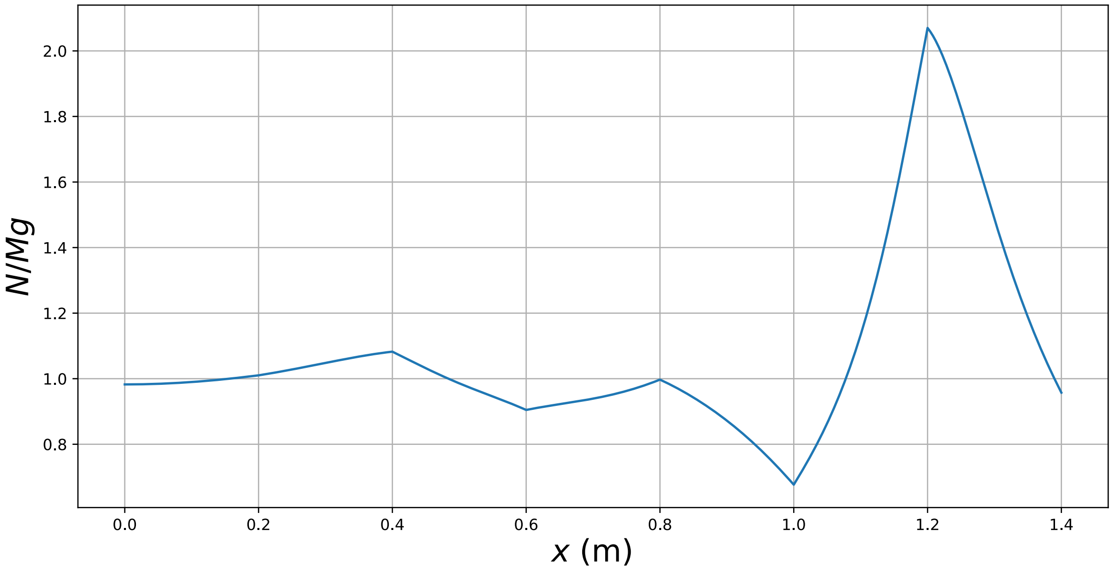



Med ei kompakt kule ($c = 2/5$) blir fartsgrafen $v(x)$ slik:

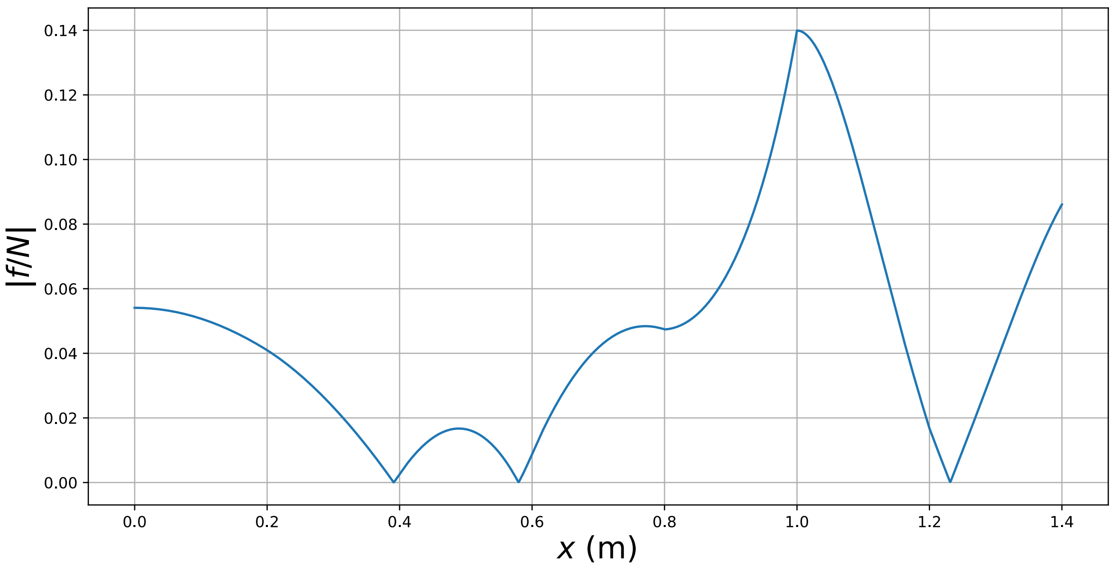



Maksimal hastighet oppnås som ventet i banens bunnpunkt, ved $x$ i overkant av 1.2 m.

Grafen for normalkraften $N(x)$ (her i enheter av kulas tyngde $Mg$) ligner kvalitativt på grafen for banens krumning:

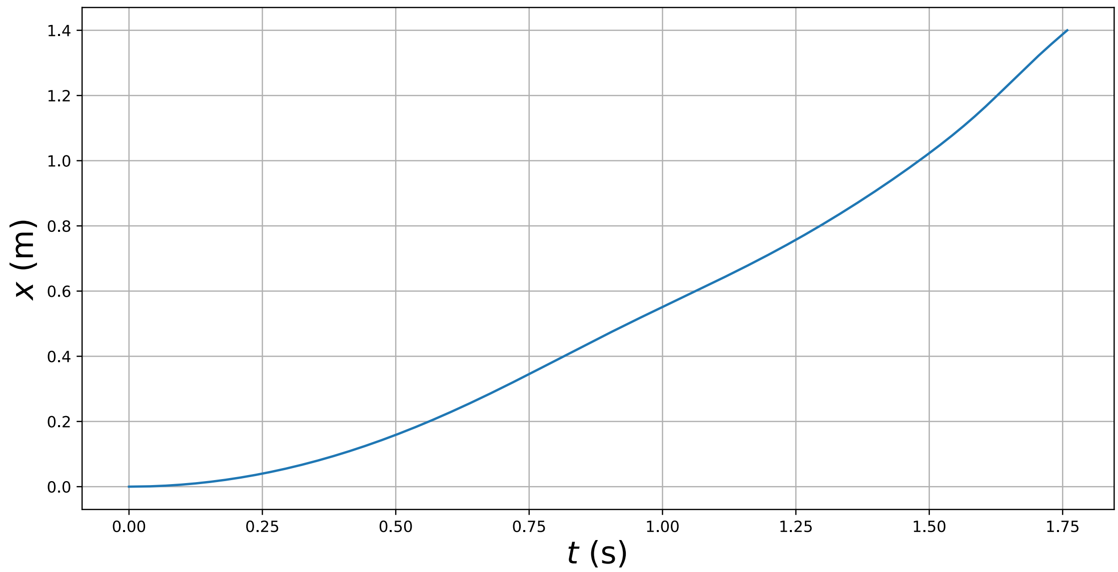



Forholdet mellom friksjonskraften $f$ og normalkraften $N$ overstiger ikke verdien 0.14:



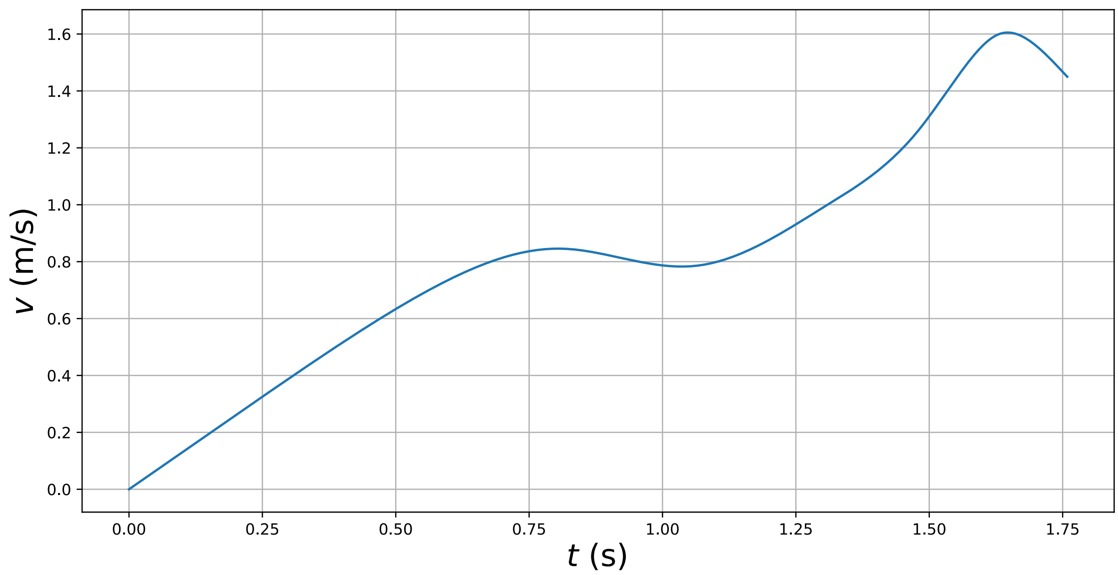

Dersom statisk friksjonskoeffisient er større enn 0.14, vil kula rulle rent uten å gli.

Neste figur viser horisontal posisjon $x$ som funksjon av tiden $t$:




Vi ser at hele reisen tok ca 1.75 sekunder.

Siste figur viser hastigheten $v$ som funksjon av tiden $t$:




Grafen er som ventet ganske lik grafen for $v(x)$. Banens bunnpunkt nås etter ca 1.65 sekunder.

31.01.2021 J. A. Støvneng