Laboratorium przedmiotu Metody Numeryczne		
Sprawozdanie nr 3: Rozwiązywanie układów równań liniowych		
Data: 09.04.2020	Ćwiczenie wykonał: Adam Suski 286667, Krzysztof Malinowski 291091	Ćwiczenie prowadził: Dr inż. Bartosz Chaber
Grupa dziekańska: 2	Ocena:	

Wprowadzenie

W zagadnieniach technicznych często spotykamy się z układami równań liniowych. Układami równań liniowych nazywamy następujące równanie macierzowe:

$$A \cdot x = b,$$

gdzie A, jest macierzą o znanych elementach, b jest znanym wektorem tzw. prawych stron, natomiast x jest *nieznanym* wektorem rozwiązania układu równań. Zwykle macierz A jest kwadratowa, czyli mamy tyle samo równań (wierszy A), co niewiadomych (kolumn A). Czasem spotykamy też przypadki macierzowych układów równań z większą liczbą równań niż niewiadomych, tzw. układy nadokreślone, jednak w tym ćwiczeniu nie będziemy się nimi zajmować.

Znalezienie wektora rozwiązania znając macierz A i wektor b nie jest tak proste, jak może się wydawać. Teoretycznie, po pomnożeniu obydwu stron równania macierzowego przez odwrotność A otrzymamy szukane rozwiązanie. Jednak samo obliczenie odwrotności macierzy A jest na tyle kosztowne obliczeniowo, że dla dużych macierzy mija się z celem. Dodatkowo, liczba operacji sprawia, że błędy numeryczne kumulują się i otrzymany wynik jest często niedokładny. Dlatego **podczas obliczeń numerycznych unikamy odwracania macierzy za wszelką cenę**. Za to korzystamy z metod alternatywnych: eliminacji Gaussa, rozkładu LU czy metody Choleskiego. Każda z tych metod opiera się na prostym pomyśle: takim przetworzeniu oryginalnego układu równań, aby docelowa forma była mniej kosztowna do rozwiązania bez odwracania macierzy.

I tak:

- podczas eliminacji Gaussa, wykorzystujemy operacje odejmowania wierszy macierzy tak, aby macierz po prawej stronie była macierzą górnotrójkątną;
- w metodzie rozkładu LU rozbijamy macierz A na iloczyn macierzy $A = L \cdot U$, przez co nieznany wektor x znajdujemy jako rozwiązanie dwóch trójkątnych układów równań: $U \cdot x = y$ i $L \cdot y = b$ (ponieważ $A \cdot x = b$ jest równoważne $L \cdot (U \cdot x) = b$);
- w metodzie Choleskiego, dokonujemy również rozłożenia macierzy A na iloczyn macierzy trójkątnych, w tym wypadku: $A = L \cdot L^{conj}$ (gdzie L^{conj} – macierz *sprzężona* z L).

Dlaczego stosujemy macierze trójkątne? Bo układy równań z nimi możemy łatwo rozwiązać za pomocą metody wstecznego podstawienia albo podstawienia w przód. Koszt przetworzenia oryginalnego układu do prostszej postaci oraz rozwiązania uproszczonego zadania jest mniejszy niż koszt odwrócenia macierzy A.

W macierzowych układach równań kolejność wierszy macierzy A jest dowolna. Tak samo możemy zamieniać kolejność kolumn tej macierzy (należy wtedy pamiętać, że *należy też zamienić wtedy kolejność elementów w wektorze* x). Często taka zamiana pozytywnie wpływa na dokładność obliczeń. Jako przykład warto rozważyć, który (równoznaczny sobie!) układ równań zostanie lepiej rozwiązany metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{bmatrix} 0.0000001 & 2 & -4 \\ 13 & 6.3 & 4 \\ -200 & 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -50.74 \\ 800 \end{bmatrix} \text{ czy } \begin{bmatrix} -200 & 0 & 10 \\ 0.0000001 & 2 & -4 \\ 13 & 6.3 & 4 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 800 \\ 0.4 \\ -50.74 \end{bmatrix} \textbf{?}$$

Z tego właśnie powodu stosujemy algorytm wyboru elementu głównego (ang. *partial pivoting*). Warto zaimplementować taki algorytm.

Zadanie nr 1

Polecenie 1: znajdź rozwiązanie równania A*x = b metodą Gaussa-Jordana. Polega to na stworzeniu macierzy rozszerzonej Ab i sprowadzenie pierwszych n wierszy i n kolumn do macierzy jednostkowej. Zaimplementuj co najmniej częściowy wybór elementu głównego.

Policz normę L2 z błędu (A*x - b).

Porównaj błąd dla przypadku bez wyboru elementu głównego.
Sprawdź wartość błędów dla następujących rozmiarów macierzy A: 100:10:300.

Narysuj wykres obydwu błędów (z i bez wyboru elementu głównego) od rozmiaru macierzy. Skala y musi być logarytmiczna, skala x może być albo liniowa albo logarytmiczna (trzeba użyć albo `semilogy` lub `loglog`).

Macierz A i wektor b należy wylosować:

A = rand(N, N); b = rand(N, 1); Ab = horzcat(A, b);

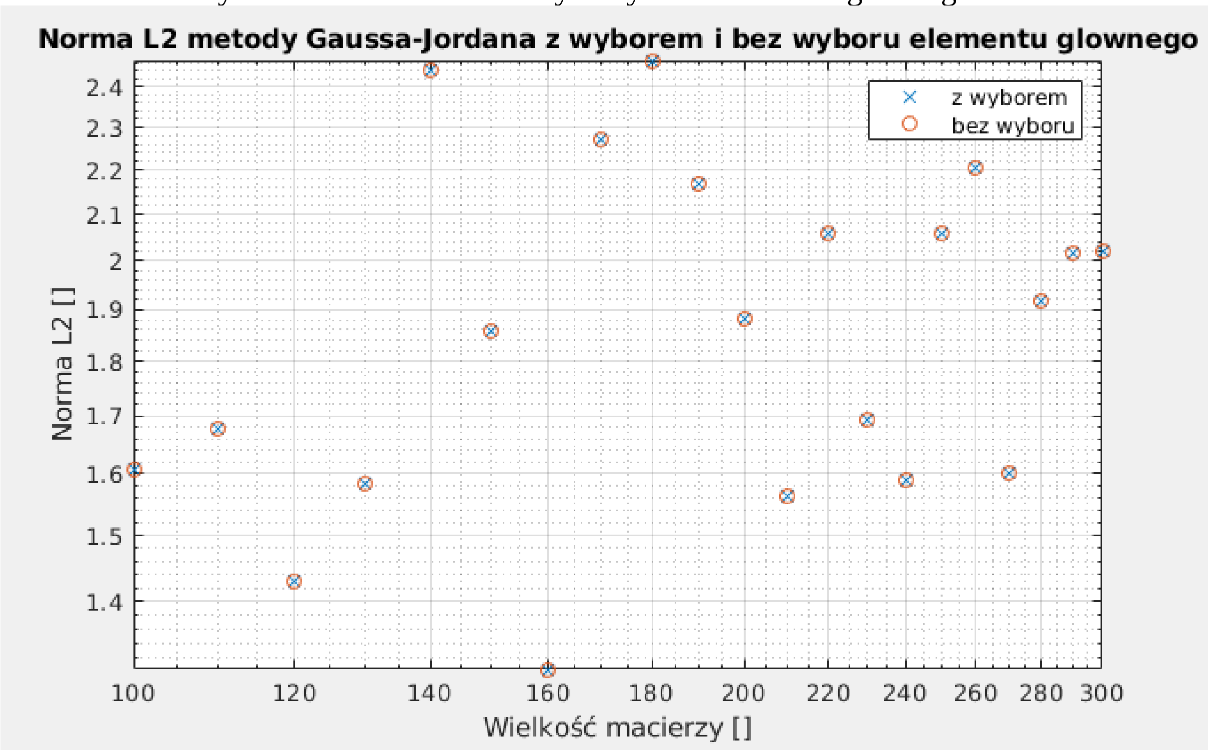
Norma L2:
r = ‖A · x − b‖.

Metoda Gaussa-Jordana do rozwiązywania układów równań opera się na tym samym pomyśle co metoda eliminacji Gaussa - tutaj jednak dążymy do takiego przekształcenia macierzy, aby macierz współczynników była macierzą jednostkową. W ten sposób macierz wyrazów wolnych przedstawia od razu wektor rozwiązań układu bez stosowania metody wstecznego podstawienia. W naszym przypadku wybór elementu głównego to wybór to takie przestawienie rzędów aby na diagonali był element największy co do wartości bezwzględnej w kolumnie.

Norma L2 bez wyboru:
1.3076e-14

Norma L2 z wyborem:
1.3076e-14

W naszym przypadku wybór elementu głónwego nie ma wpływu na jakość rozwiązania. Może to świadczyć o nie do końca dokładnym wyborze elemnetu głównego.



Wykres 1. Norma L2 Gaussa-Jordana

Wnioski:

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana jest dobrą metodą rozwiązywania układu równań. Nie trzeba wyznaczać macierzy odwrotnej co zmniejsza obciążenie pamięciowe potrzeben na obliczenie rozwiązania.

Norma L2 dla metody Gaussa-Jordana jest bliska zeru. Świadczy to o tym, że ta metoda jest dobra do rozwiązywania liniowych układów równań.

Zadanie nr 2

Polecenie 2: rozwiąż równanie zdefiniowane w macierzy blue.mat dokonując rozkładu macierzy A na L i U.

Zaimplementuj co najmniej częściowy wybór elementu głównego. Policz błąd rozwiązania (norma L2 z błędu A*x - b). Policz błąd rozkładu macierzy (jako normę Frobeniusa z modułu różnicy elementów macierzy wejściowej i macierzy L, U).

Norma L2:
$r = \|A \cdot x - b\|$.

Rozwiązanie układu, po rozkładzie na macierz L i R, nastąpiło według sposobu z książki *Metody numeryczne Wykłady na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej* autorstwa Tomasza Markiewicza, Roberta Szmurło i Stanisława Wincenciaka. W pierwszym kroku, przez podstawienie w przód, wyznaczyliśmy wektor **y**, który posłużył do kroku drugiego. Przy pomocy wektora y, przez podstawianie w tyłu, udało nam się wyznaczyć rozwiązanie układu **x**.

BŁĄD ROZWIĄZANIA TO:

3.1356E-12

BŁĄD ROZKŁADU TO:

1.7691E-12

WNIOSKI:
ROZKŁAD LU METODĄ CROUTA-DOOLITTLE'A JEST METODĄ NIE WYMAGAJĄCYH SKOMPLIKOWANYCH OPERACJI I OBLICZEŃ. JEJ WIELOETAPOWOŚĆ MOŻE BYĆ NA POCZĄTKU TRUDNA DO ZROZUMIENIA. JEDNAK ZASTOSOWANIE JEJ POZWALA NA ROZŁOŻENIE MACIERZY WEJŚCIOWEJ NA DWIE MACIERZE TRÓJKĄTNE. UŁATWIA TO W ZNACZNYM STOPNIU ROZWIĄZANIE UKŁADU (ROZWIĄZANIE PRZEZ PODSTAWIENIE W PRZOD I W TYŁ). DODATKOWO MOŻNA WYSZNACZAĆ WIELE ROZWIĄZAŃ DLA RÓŻNYCH WEKTORÓW PRAWYCH STRON **B** BEZ KONIECZNOŚCI WYZNACZANIA MACIERZY **L** I **R**.
DOKŁADNOŚĆ ROZWIĄZANIA JEST DOBRA, PONIEWAŻ JEST BLISKA ZERU. MOŻNA UZNAĆ TO ROZWIĄZANIE ZA DOBRE.