Laboratorium przedmiotu Metody Numeryczne		
Sprawozdanie nr 1: Interpolacja i Aproksymacja		
Data:	Ćwiczenie wykonał:	Ćwiczenie prowadził:
Grupa dziekańska:	Ocena:	

<u>Wprowadzenie do zagadnienia interpolacji</u>

Interpolacja jest metodą pozwalającą na zastąpienie pewnej ciągłej i skomplikowanej funkcji inną, prostszą oraz również ciągłą. Stosujemy tę metodę, gdy oryginalna funkcja ma „niewygodną" postać, np. jest trudna do całkowania/różniczkowania albo posiada punkty osobliwości (tak jak $x=0$ dla funkcji $\frac{1}{x}$). Przykładem takiej funkcji może być:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^{10}}\ .$$

Tak zdefiniowana funkcja jest trudna do scałkowania, np. w celu wyznaczenia: $\int_0^1 f(x)dx$.

W tym celu, możemy zastąpić w zadanym przedziale funkcję oryginalną, np. funkcją wielomianową, która jest dużo łatwiejsza do całkowania. Zastępcza funkcja (np. wielomian) określana jest na podstawie pewnej liczby punktów należących do funkcji oryginalnej. Liczba tych punktów, nazywanych *węzłami interpolacji*, określa m. in. stopień zastępczej funkcji. Zastępcza funkcja nazywana jest *funkcją interpolującą*. Współrzędne x węzłów interpolacji mogą (ale nie muszą) być równo od siebie oddalone. Najważniejsze metody interpolacji, które należy znać to: *interpolacja wielomianem Lagrange'a, interpolacja wielomianem Newtona oraz interpolacja funkcjami trygonometrycznymi*.

Drugim zastosowaniem interpolacji jest wykorzystanie jej do odtworzenia ciągłej funkcji na podstawie znajomości pewnej liczby punktów. Ponownie, jak w przypadku „upraszczania" funkcji, funkcja interpolująca musi przebiegać przez podane węzły interpolacji. Tego typu zagadnienie jest często spotykane w dziedzinie grafiki komputerowej. Często wykorzystywaną metodą interpolacji jest interpolacja krzywymi sklejanymi (ang. *spline interpolation*). Funkcja interpolacyjna jest wtedy złożona ze sklejonych ze sobą funkcji niskiego stopnia (zwykle trzeciego – *cubic spline interpolation*). Ten rodzaj interpolacji nie jest poruszany w ramach tego laboratorium.

<u>Wprowadzenie do aproksymacji</u>

Zadanie aproksymacji polega na znalezieniu pewnej funkcji danego rodzaju (np. wielomianu, albo funkcji wykładniczej), która przebiega „jak najbliżej" aproksymowanego zbioru punktów. Aby określić, co oznacza „jak najbliżej" można użyć różnych kryteriów, jednak najczęściej stosowanym jest kryterium minimalizacji błędu średniokwadratowego. Oznacza to, że poszukujemy takiej funkcji aproksymującej $f(x)$, dla której suma odległości wszystkich N aproksymowanych punktów od przebiegu $f(x)$ jest możliwie najmniejsza. Matematycznie zapisujemy to jako funkcję błędu średniokwadratowego (w tym przykładzie wykorzystujemy funkcję kwadratową):

$$E(a_0,a_1,a_2)=\sum_{i=1}^{N}\left(a_0+a_1x_i+a_2x_i^2-y_i\right)^2,$$

gdzie $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$. Warto zwrócić uwagę, że dziedziną funkcji błędu średniokwadratowego są współczynniki funkcji aproksymującej.

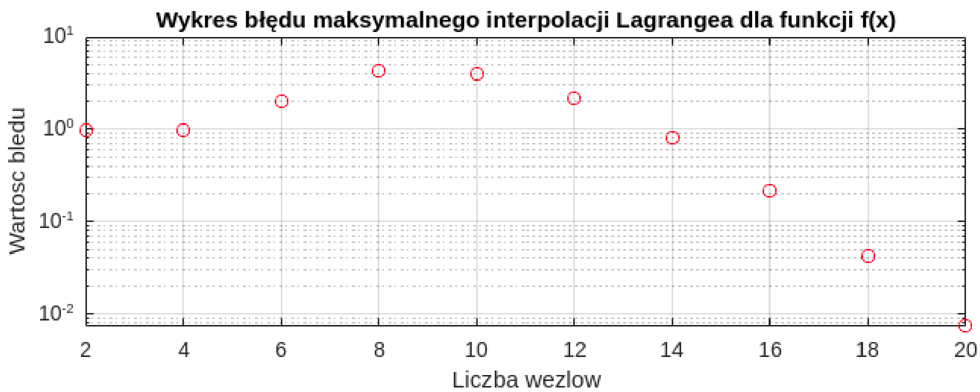
Znalezienie takiego zbioru współczynników a_0, a_1, a_2 dla których $E(a_0, a_1, a_2)$ jest możliwie najmniejsze, polega na wykorzystaniu pochodnych funkcji błędu względem jej argumentów. Najmniejszą wartość błędu otrzymamy, gdy $\frac{\partial E}{\partial a_0}=\frac{\partial E}{\partial a_1}=\frac{\partial E}{\partial a_2}=0$. Jest to analogiczna metoda do poszukiwania minimum funkcji jednej zmiennej poprzez znalezienie miejsca, gdzie pochodna tej funkcji równa się zeru. Należy zwrócić uwagę, że ogólnie szukając współczynników, dla których pochodna błędu jest zero możemy znaleźć ekstremum tej funkcji (minimum, albo maksimum), natomiast intuicyjnie wiemy, że nie ma konkretnej wartości maksymalnego błędu (może być on nieskończenie wielki). Z tego powodu zakładamy, że znaleziony zestaw współczynników zapewnia nam minimalny błąd średniokwadratowy – czyli funkcję najlepiej opisującą aproksymowany zbiór punktów.

Na podstawie $\frac{\partial E}{\partial a_0}=\frac{\partial E}{\partial a_1}=\frac{\partial E}{\partial a_2}=0$ (w przypadku aproksymacji funkcją kwadratową) powstaną nam trzy równania. Możemy zapisać je w postaci macierzowej $A\cdot x=b$, gdzie A jest macierzą 3×3, której wartości są wyliczone na podstawie zbioru punktów podlegających aproksymacji, $x=[a_0, a_1, a_2]^T$ jest wektorem kolumnowym nieznanych współczynników, natomiast b jest również wektorem kolumnowym o trzech elementach, wyliczonych na podstawie zbioru punktów podlegających aproksymacji. Wartości elementów A ib zależą od rodzaju funkcji aproksymującej oraz od współrzędnych ze zbioru punktów aproksymowanych. Wyznaczenie wzorów i programu budującego takie macierze pozostawia się do wykonania studentom. Wymagana wiedza to: umiejętność obliczenia pochodnej złożonej $\frac{\partial E}{\partial a_j}$, umiejętność rozbicia sumy $\sum_{i=1}^{N} b x_i + c x_i^2$ jako $\sum_{i=1}^{N} b x_i + \sum_{i=1}^{N} c x_i^2$oraz umiejętność zapisania sumy $a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 - r = 0$ w postaci macierzowej $[p_0, p_1, p_2]\cdot[a_0, a_1, a_2]^T = r$.
W powyższym przykładzie, poszukiwaliśmy funkcji wielomianowej. Funkcje zmiennej x przy współczynnikach nazywamy *funkcjami bazowymi*. Wielomianowe funkcje bazowe nie są jedynymi, które możemy wykorzystać. Innymi funkcjami bazowymi mogą być wielomiany Legendre, wielomiany Czebyszewa czy funkcje trygonometryczne.

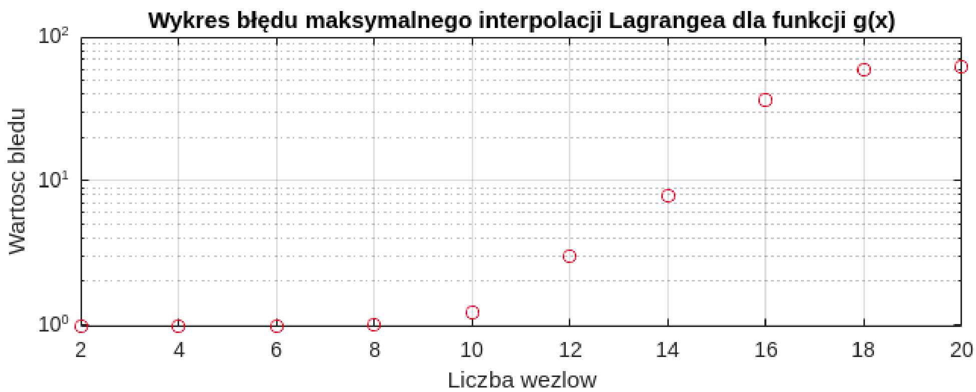
Aproksymację stosujemy wtedy, gdy posiadamy zbiór punktów, które chcemy przybliżyć ciągłą funkcją o znanej postaci (natomiast nieznanych współczynnikach). Jest to częsty przypadek w inżynierskich zagadnieniach, kiedy posiadamy dane pomiarowe (obarczone niepewnościami pomiarowymi). Przykładem z elektrotechniki może być wyznaczenie rezystancji elementu obwodu elektrycznego na podstawie serii pomiarów spadku napięcia na tym elemencie przy znanym prądzie płynącym przez niego. Analogiczne zadanie informatyczne, korzystające z aproksymacji to analiza czasu działania algorytmu w celu przybliżenia jego złożoności czasowej.

Zadanie nr 1

Zad. 1) Zbadać czy występuje efekt Rungego podczas interpolacji węzłów wielomianem Lagrange'a (lub Newtona) powstałych na podstawie jednej z dwóch funkcji (funckje przedstawione w pliku z poleceniami do zadania). Należy napisać program, który zbada zależność błędu maksymalnego od liczby węzłów. Sprawdzić, wartość wielomianu interpolującego należy wyliczyć w 101 punktach z dziedziny badanych funkcji. Narysować wykresy błędów maksymalnych (w skali logarytmicznej względem y).



Rysunek 1. Wykres błedów maksymalnych interpolacji funkcji f(x) za pomocą wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a o stopniach: 2, 4, …, 20 (węzły równooddalone)



Rysunek 2. Wykres błedów maksymalnych interpolacji funkcji g(x) za pomocą wielomianów interpolacyjnych Lagrange'a o stopniach: 2, 4, …, 20 (węzły równooddalone)

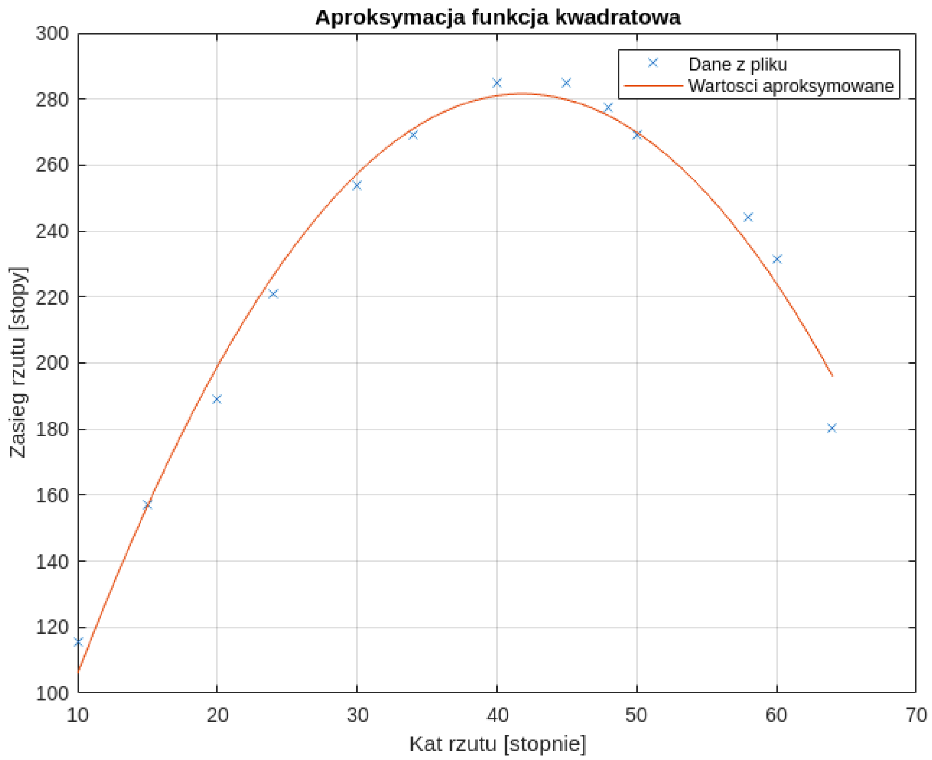
Wnioski:

Wykres błędu maksymalnego dla funkcji f(x) pokazuje, że dla liczby węzłów większej niż 10 wartość błędu znacząco spada. Dla liczby węzłów równej 20 błąd maksymalny jest w okolicy 2-giego miejsca po przecinku. Pozwala to traktować jako rozsądną formę interpolacji.

Natomiast, wykres funckji błędu pokazuje, że dla funkcji g(x) liczba węzłów równa 10 jest graniczna dla błędu, który pozwala traktować interpolację jako skuteczną metode. Dla większej ilości węzłów zauważalny jest efekt Runy'ego (wysokie oscylacje). Dla funkcji g(x) należałoby rozważyć interpolację metodą funckji sklejanych w celu rozsądnej interpolacji funckji dla większej ilośći węzłów.

Zadanie nr 2

Zad. 2) Zaproksymować funkcją kwadratową zbiór danych dane_baseball.mat (w iSOD). Zawieraon dane o kącie rzutu (w stopniach) i zasięgu (w stopach). Narysować wykres z zaznaczonymiwęzłami oraz funkcją aproksymującą wyliczoną dla stopni w przedziale aproksymacji (10stopni – 64stopnie z krokiem 0.5stopnia). Wypisać na ekran współczynniki aproksymacji a,b,c. Policzyć błąd średnio kwadratowy. Znaleźć wartość kąta maksymalizującego dystans (na podstawie znalezionejfunkcji kwadratowej).



RYSUNEK 3. Wynik aproksymacji funkcją kwadratową zbioru danych `dane_baseball.mat`

Wspolczynniki aproksymacji: a: -0.173714, b: 14.521171, c: -21.897745.
Blad sredniokwadratowy wynosi: 50.122558.
Maksymalny kąt rzutu wynosi: 41.796176

Wnioski:

Wykres zaznaczony kolorem czerwonym przedstawia wielomian otrzymany w wyniku aproksymacji funkcją kwadratową. Patrząc na wykres, można dostrzec, że linia odbiega od niektórych wartości danych. Błąd średniokwadratowy jest znaczący (liczba 2 cyfrowa). Dodatkowo patrząc na wykres i dane podane do zadania można sobie wyobrazić, że kąt rzutu który da największy zasięg rzutu jest większy. Biorąc pod uwagę obydwa spostrzeżenia, można dojść do wniosku, że aproksymacja nie była najlepsza.