Piotr Olszak, Adam Trybus 28.03.2023r.

Laboratorium 4
Efekt Rungego

1. Wyznacz wielomiany interpolujące funkcje:

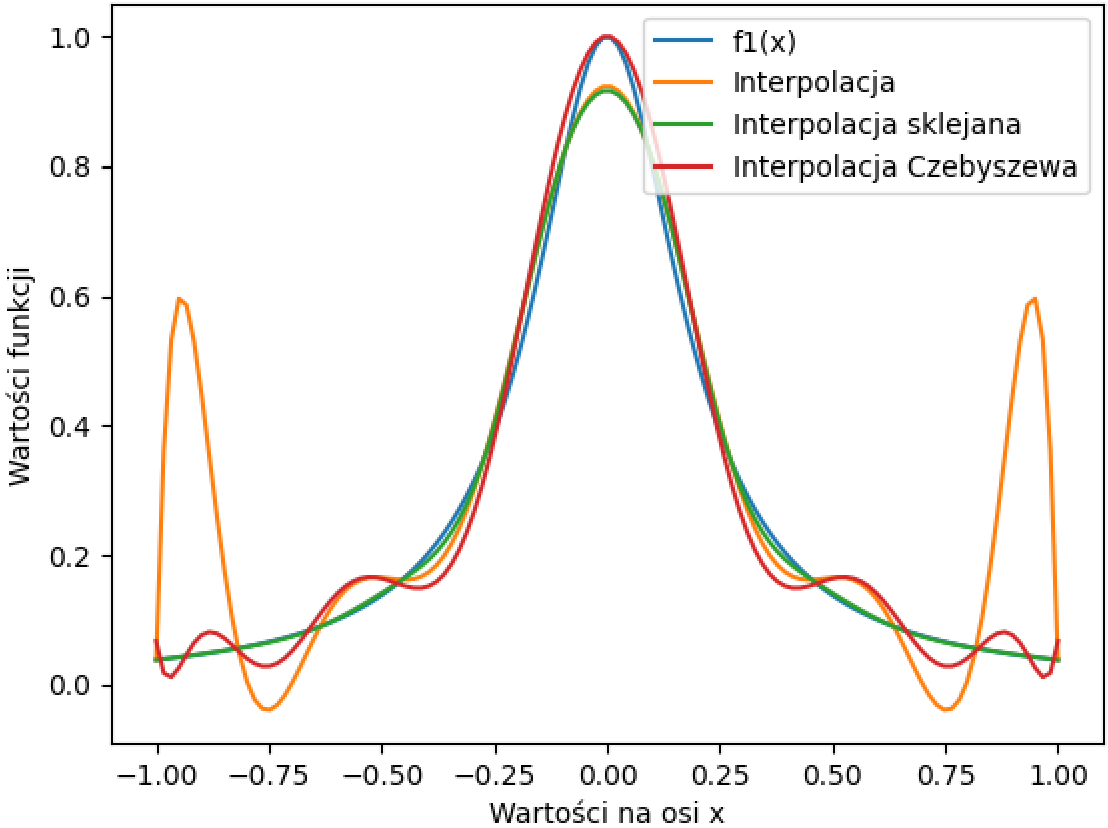
$$f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2} \text{ na przedziale } [-1,1]\,,$$

$$f_2(x) = \exp(\cos(x)) \text{ na przedziale } [0,2\pi]\,,$$

używając: wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami, kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi węzłami, wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa.

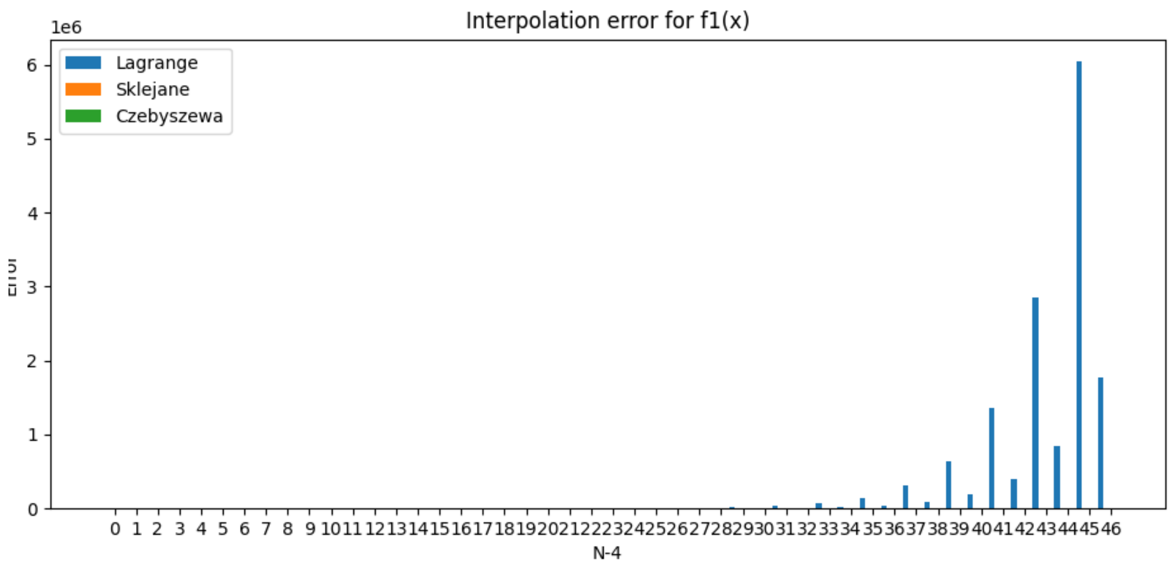
a) Zadanie polega na stworzeniu wykresu dla funkcji Rungego f1(x) oraz wyznaczonych wielomianów interpolacyjnych i funkcji sklejanej, używając 12 węzłów interpolacji. Aby uzyskać lepszą jakość wykresu, należy przeprowadzić próbkowanie funkcji f1(x) i wielomianów interpolacyjnych na zbiorze o 10-krotnie większej gęstości. W tym celu musimy stworzyć f1, f2 oraz stabilną numerycznie funkcje lagrange_interpolation

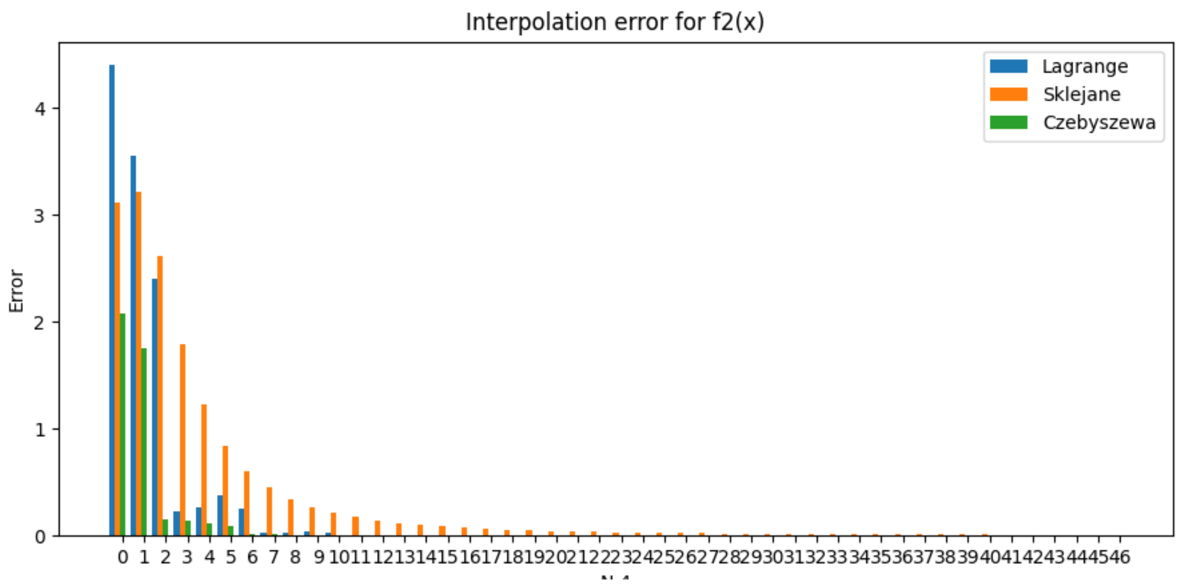
```python
def f1(x):
    return 1 / (1 + 25*x**2)

def f2(x):
    return exp(cos(x))


def lagrange_interpolation(x, y, x_interp):
    n = len(x)
    m = len(x_interp)
    y_interp = np.zeros(m)

    for i in range(m):
        # Wyliczenie wartości wielomianu interpolacyjnego w punkcie x_interp[i]
        sum = 0
        for j in range(n):
            # Wyliczenie i-tego wielomianu Lagrange'a
            L = 1
            for k in range(n):
                if k != j:
                    L *= (x_interp[i] - x[k]) / (x[j] - x[k])
            sum += y[j] * L
        y_interp[i] = sum

    return y_interp
```



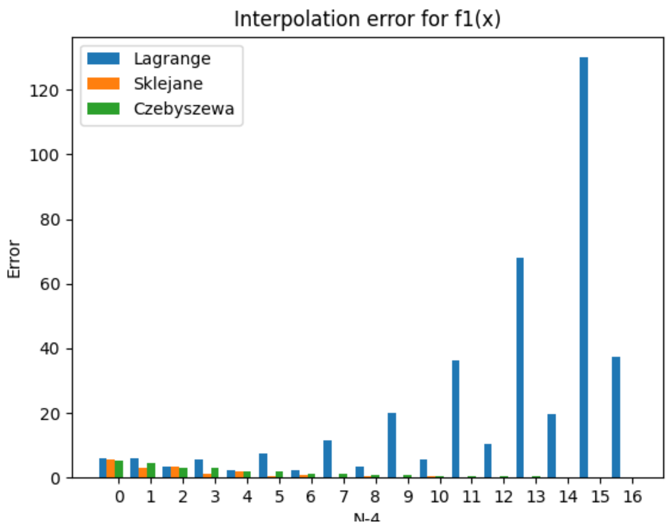
1. Zestawienie uzyskanych interpolacji

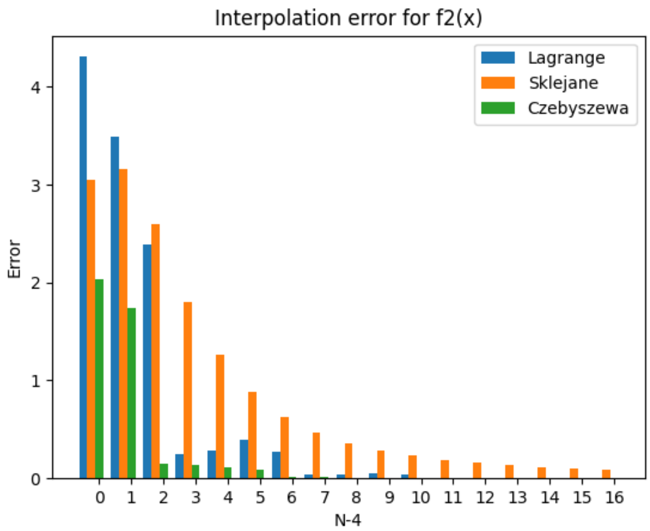
b) Wykonaj interpolację funkcji f1(x) i f2(x) węzłami interpolacji n=4,5,...,50 Ewaluację funkcji, wielomianów interpolacyjnych oraz funkcji sklejanych przeprowadź na zbiorze 500 losowo wybranych punktów z dziedziny funkcji. Stwórz dwa rysunki, jeden dla f1(x), drugi dla f2(x). Na każdym rysunku przedstaw razem wykresy normy wektora błędów (czyli długości wektora) na tym zbiorze punktów w zależności od liczby węzłów interpolacji, n, dla każdej z trzech metod interpolacji.





Sprawdzamy dla n = 21:





Jak widzimy dla funkcji f1 błąd, przy interpolacji sklejanej i za pomocą węzłów Czebyszewa, występuje jednak jest nieporównywalnie mniejszy niż błąd interpolacji przy metodzie lagrange'a z równo odległymi węzłami.

Wnioski:

Najbardziej dokładną metodą interpolacji dla funkcji f1 oraz f2, według naszych rezultatów, jest interpolacja Lagrange'a z węzłami Czebyszewa, a najmniej dokładna jest interpolacja lagrange'a z równo odległymi węzłami.

Duży błąd interpolacji wielomianowej Lagrange'a dla dużej ilości węzłów wynika z tzw. efektu Rungego. Efekt ten polega na tym, że dla niektórych funkcji i rosnącej liczby węzłów interpolacji, błąd interpolacji wielomianowej Lagrange'a rośnie wraz z liczbą węzłów interpolacji, zamiast maleć.

Przyczyną tego zjawiska jest fakt, że dla niektórych funkcji, zwłaszcza tych o gwałtownych zmianach, zwiększanie liczby węzłów interpolacji może prowadzić do tworzenia oscylacji wielomianowych w obszarach o wysokim gradiencie funkcji. Te oscylacje, zwane efektem Rungego, prowadzą do dużej wartości błędu interpolacji wielomianowej Lagrange'a dla dużych wartości n.

Bibliografia:

https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon
https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_nodes
https://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=MN11