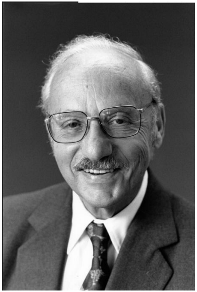
2-2　单纯形法

单纯形方法(美国数学家丹齐格,1947)

基本思想:

- 单纯形方法是一种迭代法，从LP问题可行域的顶点中逐步确定问题的最优解，从一个顶点移动到相邻的更优顶点的迭代过程。
- 由于顶点数是有限的，若每次移动都能使目标函数值下降，则经过有限次移动后必终止于问题的最优顶点。



丹齐格- 线性规划之父

最优性检验

考察标准形LP问题:

$$\begin{cases} \min & f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}, \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0. \end{cases}$$

设$\boldsymbol{x}^{(k)} \in \mathcal{F}$为当前基本可行解

- 相应$\boldsymbol{x}^{(k)}$的基矩阵为B_k,非基矩阵为N_k,
- 相应的基变量为$\boldsymbol{x}_B^{(k)}$, 非基变量为$\boldsymbol{x}_N^{(k)} = 0$。

LP问题的任意可行解$\boldsymbol{x}$可表示为: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{pmatrix}$ 其中:

$$\boldsymbol{x}_B = B_k^{-1}\boldsymbol{b} - B_k^{-1}N_k\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{x}_B^{(k)} - B_k^{-1}N_k\boldsymbol{x}_N \geq 0,\ \boldsymbol{x}_N \geq 0.$$

最优性检验

记$\boldsymbol{x}_B^{(k)} = B_k^{-1}\boldsymbol{b}$. 将$\boldsymbol{x}$代入目标函数得

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = {\boldsymbol{c}_B^{(k)}}^T\boldsymbol{x}_B + {\boldsymbol{c}_N^{(k)}}^T\boldsymbol{x}_N \\ &= {\boldsymbol{c}_B^{(k)}}^T\boldsymbol{x}_B^{(k)} + ({\boldsymbol{c}_N^{(k)}}^T - {\boldsymbol{c}_B^{(k)}}^T B_k^{-1}N_k)\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{y}_k^T\boldsymbol{b} + ({\boldsymbol{c}_N^{(k)}}^T - \boldsymbol{y}_k^T N_k)\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{y}_k^T\boldsymbol{b} + (\hat{\boldsymbol{c}}_N^{(k)})^T\boldsymbol{x}_N \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

其中

- $\boldsymbol{y}_k = B_k^{-T}\boldsymbol{c}_B^{(k)}$称为单纯形乘子;
- $\hat{c}_j^{(k)}, j \in \mathcal{N}_k$(非基变量指标集)为对应非基变量$x_j$的简约价值系数(负的检验数)。

最优性检验

基本可行解$\boldsymbol{x}^{(k)}$ $(\boldsymbol{x}_N = 0)$的取值以及相应的目标函数值为

$$f_k = f(\boldsymbol{x}^{(k)}) = {\boldsymbol{c}_B^{(k)}}^T B_k^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}_k^T \boldsymbol{b}.$$

观察当非基变量由零向正方向变动时目标函数值的变化。

从(2.2.1)可以看出,

- 如果$\hat{c}_j^{(k)} > 0$,增大非基变量x_j将使目标函数值增大;
- 如果$\hat{c}_j^{(k)} = 0$,目标函数值不受x_j变化的影响;
- 如果$\hat{c}_j^{(k)} < 0$,增大x_j将可使目标函数值下降。

最优性检验

最优性判断：

- **情形1：** 对所有$j \in \mathcal{N}_k$有$\hat{c}_j^{(k)} \geq 0$，增大非基变量只能导致目标函数值的增加，因此$x^{(k)}$就是问题的最优解。
- **情形2：** 若有某一简约价值系数$\hat{c}_j^{(k)} < 0$，$j \in \mathcal{N}_k$，则通过增大相应的非基变量x_j的值可使目标函数值得到改善，因而$x^{(k)}$不是问题的最优解。

换基思想

设基本可行解$\boldsymbol{x}^{(k)}$非最优，**如何产生新基矩阵？**

- 确定一组新的基矩阵和非基矩阵，得到具有**更优目标函数值**的基本可行解。

$$\begin{array}{rcl} B_k & \rightarrow & B_{k+1} \\ N_k & \rightarrow & N_{k+1} \\ \boldsymbol{x}^{(k)} & \rightarrow & \boldsymbol{x}^{(k+1)} \end{array}$$

- 把原非基矩阵N的一列(进基变量)和原基矩阵B的一列(出基变量)交换得到的。

进基变量确定

1) **进基变量选取规则：**

- 选取对应简约价值系数小于零$\hat{c}_p^{(k)} < 0$的非基变量x_p作为进基变量(增大x_p可使目标函数值下降)。
- 把矩阵A中相应于变量x_p的列A_p从N_k移入B_k.

2) **确定进基变量大小**:

- 由于x_p将由非基变量成为基变量，其取值将由零成为正值，而x_N的其余分量保持取零值时:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_B = B_k^{-1}\boldsymbol{b} - B_k^{-1}N_k\boldsymbol{x}_N &= B_k^{-1}\boldsymbol{b} - B_k^{-1}A_p x_p \\
&= b^{(k)} - \hat{A}_p^{(k)} x_p
\end{aligned}
$$

进基变量确定

为保持可行性, x_p的取值应确保$\boldsymbol{x}_B \geq 0$, 即有:

$$x_j = b_j^{(k)} - x_p \hat{a}_{jp}^{(k)} \geq 0, \quad j \in \mathcal{B}_k,$$

其中$\hat{a}_{jp}^{(k)}$是向量$\hat{A}_p^{(k)}$的第j个分量($\mathcal{B}_k$是基变量指标集)。

- 如果$\hat{a}_{jp}^{(k)} < 0$, x_j将随x_p的增大而增大;
- 如果$\hat{a}_{jp}^{(k)} = 0$, $x_j = b_j^{(k)}$在x_p增大时保持不变;
- 如果$\hat{a}_{jp}^{(k)} > 0$, x_j将随x_p的增大而减小。

在$\hat{a}_{jp}^{(k)} > 0$时, 为保持可行性，x_p的取值不能大于$\frac{b_j^{(k)}}{\hat{a}_{jp}^{(k)}}$。$x_p$的取值为:

$$x_p = \frac{b_q^{(k)}}{\hat{a}_{qp}^{(k)}} = \min_{j \in \mathcal{B}_k} \left\{ \frac{b_j^{(k)}}{\hat{a}_{jp}^{(k)}} \,\middle|\, \hat{a}_{jp}^{(k)} > 0 \right\}$$

出基变量确定

出基变量选取规则:

选取x_q为进基变量, 从原来取正值变成为取零值的非基变量，易验证：

$$x_q = b_q^{(k)} - \frac{b_q^{(k)}}{\hat{a}_{pq}^{(k)}} \hat{a}_{pq}^{(k)} = 0$$

换基公式

列交换与换基:

将B_k中的列A_q与N_k中的列A_p交换即得到新的基矩阵和非基矩阵，分别记为B_{k+1}和N_{k+1}.

完整公式:

$$
\begin{cases}
x_p^{(k+1)} = \alpha_k = \min\left\{ \dfrac{b_j^{(k)}}{\hat{a}_{jp}^{(k)}} \;\middle|\; \hat{a}_{jp}^{(k)} > 0, \quad j \in \mathcal{B}_k \right\} \\
x_q^{(k+1)} = 0, \quad x_j^{(k+1)} = 0, \; j \in \mathcal{N}_k, \; j \neq p, \\
x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} - x_p^{(k+1)} \hat{a}_{jp}^{(k)}, \quad j \in \mathcal{B}_k, \; j \neq q,
\end{cases}
$$

$$
f_{k+1} = y_k^T b + \hat{c}_p x_p^{(k+1)}.
$$

重复上述过程, 直至确定最优解或者无有界最优解。

单纯形法步骤

单纯形法:

第1步: 给定初始基本可行解$\boldsymbol{x}^{(1)}$, 记迭代次数$k=1$;

第2步: 计算单纯形乘子$\boldsymbol{y}_k = B_k^{-T} c_B^{(k)}$和简约价值系数向量$\hat{\boldsymbol{c}}_N^{(k)} = \boldsymbol{c}_N^{(k)} - N_k^T \boldsymbol{y}_k$;

第3步: 最优性检验: 计算$\hat{c}_p^{(k)} = \min\{\hat{c}_j^{(k)} \mid j \in \mathcal{N}_k\}$. 如果$\hat{c}_p^{(k)} \geq 0$,则$x^{(k)}$为最优解,停止迭代; 否则选$x_p$为进基变量;

第4步: 确定出基变量:计算$\hat{A}_p^{(k)} = B_k^{-1} A_p$.如果对所有$j \in B_k$有$\hat{a}_{jp}^{(k)} \leq 0$, 则问题无有界的最优解,停止迭代;否则确定出基变量指标

$$\frac{b_q^{(k)}}{\hat{a}_{qp}^{(k)}} = \min\left\{\frac{b_j^{(k)}}{\hat{a}_{jp}^{(k)}},\ \hat{a}_{jp}^{(k)} > 0,\ j \in \mathcal{B}_k\right\};$$

第5步: 交换B_k的列A_q与N_k的列A_p得新的基矩阵B_{k+1}和非基矩阵N_{k+1}, 计算新的基本可行解$x^{(k+1)}$,置$k := k+1$后转步2.

初始单纯形表

原始表格：

基变量	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{x}_N$	右端项
负函数值	$\boldsymbol{c}_B^T$	$\boldsymbol{c}_N^T$	$(-f)$
$\boldsymbol{x}_B$	B	N	$\boldsymbol{b}$

变换表格：

$$[B \quad N \quad \boldsymbol{b}] \to [I \quad B^{-1}N \quad B^{-1}\boldsymbol{b}], \qquad \boldsymbol{c}_B \to 0$$

初始表格:

基变量	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{x}_N$	右端项
负函数值	0	$\hat{\boldsymbol{c}}_N = \boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T B^{-1} N$	$-\boldsymbol{c}_B^T B^{-1}\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{x}_B$	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}\boldsymbol{b}$

初始单纯形表

观察前面表格：

(1) 右端项$B^{-1}\boldsymbol{b}$为当前基本可行解$\boldsymbol{x}$的取值，非基变量$\boldsymbol{x}_N$则取零值。

(2) 检验$\hat{\boldsymbol{c}}_N = \boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T B^{-1} N$判断最优性。

- 如$\hat{\boldsymbol{c}}_N$有负分量，取相应于最负分量的变量作为进基变量；检查同该变量对应的$B^{-1}N$相应列$\hat{A}_p$的各分量。
  - (a) 如果所有分量都非正,则问题无有界的最优解,迭代可以终止。
  - (b) 否则，计算列$\hat{A}_p$的正分量同$B^{-1}b$的相应分量的比值确定出基变量，确定高斯消去的主元$\hat{a}_{qp}^{(k)}$.
- 否则，找到最优基本可行解，输出结果。

新旧基阵对比

新基阵同旧基矩阵只相差一列,在当前的单纯形表上以$\hat{a}_{qp}^{(k)}$为主元用行变换将x_p对应的列变成单位向量即可得新的基本可行解。

旧单纯形表
$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \hat{c}_{m+1} & \cdots & \hat{c}_p & \cdots & \hat{c}_n & -f \\ 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \hat{a}_{1,m+1} & \cdots & \hat{a}_{1,p} & \cdots & \hat{a}_{1,n} & \hat{b}_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \hat{a}_{q,m+1} & \cdots & \underline{\hat{a}_{q,p}} & \cdots & \hat{a}_{q,n} & \hat{b}_q \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \hat{a}_{m,m+1} & \cdots & \hat{a}_{m,p} & \cdots & \hat{a}_{m,n} & \hat{b}_m \end{bmatrix}$$

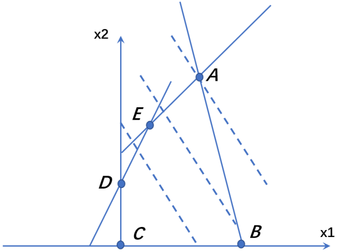
新单纯形表
$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \hat{c}'_q & \cdots & 0 & \hat{c}'_{m+1} & \cdots & 0 & \cdots & \hat{c}'_n & -f' \\ 1 & \cdots & \bar{a}_{1,q} & \cdots & 0 & \bar{a}_{1,m+1} & \cdots & 0 & \cdots & \bar{a}_{1,n} & \hat{b}'_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{a}_{q,q} & \cdots & 0 & \bar{a}_{q,m+1} & \cdots & 1 & \cdots & \bar{a}_{q,n} & \hat{b}'_q \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{a}_{m,q} & \cdots & 1 & \bar{a}_{m,m+1} & \cdots & 0 & \cdots & \bar{a}_{m,n} & \hat{b}'_m \end{bmatrix}$$

例 2.2.1 考虑如下线性规划问题：

$$\begin{cases} \min & -2x_1 - 3x_2, \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 \leq 3, \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ & 4x_1 + x_2 \leq 16, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

解： 引入松弛变量x_3, x_4, x_5化标准形

$$\begin{cases} \min & -2x_1 - 3x_2, \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ & -2x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ & 4x_1 + x_2 + x_5 = 16, \\ & x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$



第一次迭代

初始单纯形表为：

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
$-f$	-2	-3	0	0	0	0
x_3	-1	1	1	0	0	3
x_4	-2	1	0	1	0	2
x_5	4	1	0	0	1	16

选取初始基本可行解: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3,\ x_4 = 2,\ x_5 = 16$, 对应于可行域顶点$D$.

最优性检验： 非基变量x_3, x_4, x_5对应基阵已是单位阵。目标函数中对应非基变量价值系数$c_B^T = (0, 0, 0)$, 直接进行最优性检验。由于非基变量x_1, x_2对应的简约价值系数:

$$c_1 = -2,\ c_2 = -3$$

取负值, 当前基本可行解非最优解。

第一次迭代

确定进基变量和出基变量：

- 比较非基变量对应的负的简约价值系数:
$$-3=\min\{-2,-3\}$$
对应于x_2的简约价值系数最小，故取x_2为进基变量。
- 比较表中右端项的列与x_2所在列各正分量的比值:
$$\frac{2}{1}=\min\left\{\frac{3}{1},\frac{2}{1},\frac{16}{1}\right\}$$
对应于x_4所在行比值取得最小，故确定x_4为出基变量。

选定的主元$\hat{a}_{22}$:

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
$-f$	-2	-3	0	0	0	0
x_3	-1	1	1	0	0	3
x_4	-2	$\underline{1}$	0	1	0	2
x_5	4	1	0	0	1	16

第二次迭代

采用行变换将x_2所在列变成为单位向量：

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
$-f$	-8	0	0	3	0	6
x_3	$\underline{1}$	0	1	-1	0	1
x_2	-2	1	0	1	0	2
x_5	6	0	0	-1	1	14

新基变量取值分别为: $x_2 = 2,\ x_3 = 1,\ x_5 = 14$,相应于顶点$E$.

最优性判断: 由于$\hat{c}_1^{(2)} = -8 < 0$, 该基本可行解非最优解。

确定进基变量与出基变量： 取x_1为进基变量, 比较表中右端项的列与变量x_1所在列各正分量的比值：

$$\frac{1}{1} = \min\left\{\frac{1}{1}, \frac{14}{6}\right\}$$

应取x_3为出基变量。新主元为$\hat{a}_{11}$。

第三次迭代

采用行变换将x_1所在列变成为单位向量：

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
$-f$	0	0	8	-5	0	14
x_1	1	0	1	-1	0	1
x_2	0	1	2	-1	0	4
x_5	0	0	-6	$\underline{5}$	1	8

新基变量取值为：$x_1 = 1$，$x_2 = 4$和$x_5 = 8$，相应于顶点A.

最优性判断： 由于$\hat{c}_4^{(3)} = -5 < 0$，当前基本可行解非最优解。

确定进基变量与出基变量： 取x_4为进基变量,比较表中右端项的列与x_4所在列各正分量的比值：

$$\left\{\frac{8}{5}\right\}$$

取x_5为出基变量(主元为$\hat{a}_{34} = 5$).

采用行变换将x_1所在列变成为单位向量：

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
$-f$	0	0	2	0	1	22
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{13}{5}$
x_2	0	1	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{28}{5}$
x_4	0	0	$-\frac{6}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$

对所有非基变量指标$j \in \mathcal{N}_4$都有简约价值系数：

$$\hat{c}_j^{(4)} \geq 0$$

最优基本可行解为：

$$x_1 = \frac{13}{5},\ x_2 = \frac{28}{5}, x_3 = 0, x_4 = \frac{8}{5},\ x_5 = 0$$

相应于可行域的顶点A, 最优函数值为22的负值, 即为-22。

初始基本可行解困难性

考察左下线性规划问题，引入松弛变量x_3和乘余变量x_4将其化成右边的标准形。

$$\left\{\begin{array}{ll}\min & -x_1 \\ \text{s.t.} & 2x_2+3x_2=7, \\ & 2x_1-3x_2\leq 6, \\ & 4x_1+x_2\geq 4, \\ & x_1\geq 0, \quad x_2\geq 0,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll}\min & -x_1 \\ \text{s.t.} & 2x_2+3x_2 \qquad\qquad\quad =7, \\ & 2x_1-3x_2 \;+x_3 \qquad =6, \\ & 4x_1+x_2 \qquad\quad -x_4 \;=4, \\ & x_1\geq 0, \quad x_2\geq 0,\end{array}\right.$$

很容易选取x_3可作为基变量, 难于确定其它两个基变量。

处理初始可行解的常规方法有：

- 两阶段法
- 大M法

两阶段法

第一阶段: 引入人工变量构造辅助LP, 比如前面LP问题引入a_1和a_2有:

$$\begin{cases} \min & a_1 + a_2, \\ \text{s.t.} & 2x_2 + 3x_2 \qquad\qquad + a_1 \qquad = 7, \\ & 2x_1 - 3x_2 \ + x_3 \qquad\qquad\qquad = 6, \\ & 4x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad + a_2 \ = 4, \\ & x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ x_4 \geq 0, \ a_1 \geq 0, \ a_2 \geq 0, \end{cases}$$

- 辅助问题的初始基本可行解满足:

  $$a_1 = 7, \ x_3 = 6, \ a_2 = 4$$

  其它变量取零;
- 若原问题有可行解,则上述辅助问题的最优目标函数值为零; 若辅助问题的最优目标函数值大于零,则原问题无可行解。

迭代开始时, 所有人工变量都包括在初始基本可行解中。

两阶段法

在迭代进行中：

- 人工变量逐步成为出基变量,而原问题的变量中有一些逐步选为进基变量成为基变量。
- 对于某人工变量,一旦它被选为出基变量成为非基变量(取零值),可从上述辅助问题中删除。
- 只要原问题有可行解, 所有人工变量都将逐步被删除, 最后得到的基本可行解就可用作求原问题的初始基本可行解。

第二阶段： 继续对原问题进行单纯形迭代, 求得最优解或者无有界最优解。

最优解的唯一性

设$\boldsymbol{x}^*$是LP问题的最优解,其中：基变量为$\boldsymbol{x}_B^* \geq 0$,非基变量为$\boldsymbol{x}_N^* = 0$, 相应的基矩阵与非基矩阵为$B$与$N$,目标函数的价值向量为$\boldsymbol{c}_B$和$\boldsymbol{c}_N$。

任意可行解$\boldsymbol{x}$可表示为:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}\boldsymbol{b} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B^{-1}N \\ I \end{pmatrix} \boldsymbol{x}_N,$$

可行解$\boldsymbol{x}$的目标函数可表示为：

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^T B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T B^{-1}N)\boldsymbol{x}_N = f(\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{x}_N^T \hat{\boldsymbol{c}}_N^*.$$

其中: $\hat{\boldsymbol{c}}_N^* = \boldsymbol{c}_N - N^T B^{-T} \boldsymbol{c}_B$.

最优解的唯一性

由$\boldsymbol{x}$的可行性知：$\boldsymbol{x}_N \geq 0$. 另外，$\boldsymbol{x}^*$的简约价值系数$\hat{\boldsymbol{c}}_N^*$的所有分量均非负。

- 如果$\hat{\boldsymbol{c}}_N^*$的所有分量均为正, 则$\boldsymbol{x}_N$的任何分量由零向正值的微小变化都会使目标函数值增大, 因而$\boldsymbol{x}^*$是LP问题的唯一局部最优解, 也是它的全局最优解。
- 如果向量$\hat{\boldsymbol{c}}_N^*$有零分量, 设$\hat{c}_j^* = 0$, 增大相应的非基变量x_j并保持其它非基变量取零值，直至另一个基本可行解(可行域的另一顶点), 相应的函数值为：
$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^*) + x_j \hat{c}_j^* = f(\boldsymbol{x}^*)$$
也是最优的，因而x^*不是唯一最优解。

不难证明： 若线性规划的最优顶点不止一个,则存在无穷多个最优解。(最优顶点凸组合仍然是最优解。)

有限终止性定理

定理2.2.1 有限终止性.

设单纯形法迭代过程中的每一个基本可行解都是**非退化的**, 则经过有限次迭代，单纯形法或者确定问题的一个最优解, 或者判定问题无有界的最优解。

证明： 设$\boldsymbol{x}^{(k)}$为当前迭代点, 若满足：$\hat{\boldsymbol{c}}_N^{(k)} \geq 0$, 则$\boldsymbol{x}^{(k)}$即为最优解; 否则, 有$\hat{c}_p^{(k)} < 0$, 选择$x_p$为进基变量。

如果$\hat{A}_p^{(k)}$的所有分量非正, 则可以断定问题无有界的最优解; 否则可确定变量x_p的取值为:

$$x_p = \alpha_k = \min\left\{ \frac{b_j^{(k)}}{\hat{a}_{jp}^{(k)}} \;\middle|\; \hat{a}_{jp}^{(k)} > 0 \right\}.$$

由于$\boldsymbol{x}^{(k)}$是非退化的, 因而$\forall j \in \mathcal{B}_k$有$b_j^{(k)} > 0$.

定理2.2.1证明

证明续： 由此得$\alpha_k > 0$, 而相应新点的目标函数值为

$$f_{k+1} = f_k + \alpha_k \hat{c}_p^{(k)},$$

由于$\hat{c}_p^{(k)} < 0$, $\alpha_k > 0$, 得

$$f_{k+1} < f_k,$$

也就是目标函数值严格单调下降, 保证了迭代过程中的基矩阵不可能出现循环。

由于线性规划只有有限个基本可行解, 因每一个迭代点都是非退化的, 单纯形迭代必经有限次迭代后终止。 ■