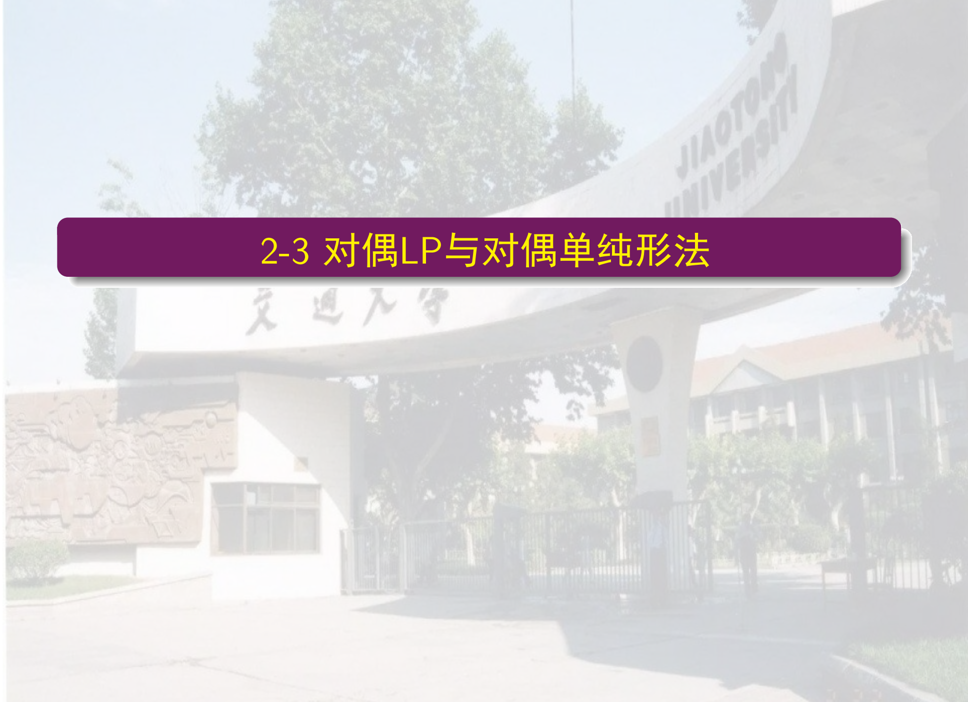

2-3 对偶LP与对偶单纯形法

对偶线性规划

由**对偶理论**，针对LP问题可以构造与之对应的对偶LP问题，分别称为原始问题与对偶问题。

- 从数学角度与经济角度看，线性规划的原始问题和对偶问题都有十分密切的关系。
- 对偶线性规划在求解算法设计中起重要作用。例如内点算法同时利用了线性规划的原始和对偶信息。求解对偶问题相较于原始问题更加方便。

对偶LP问题经济意义

例 2.3.1 生产计划问题

某工厂生产甲乙两种产品，要用A,B,C三种原料；生产1单位甲产品需消耗三种原料分别为1，1，0单位；生产1吨乙产品需消耗三种原料分别为1，2，1单位。现在每天三种原料的供应总量分别为6，8，3单位。又知生产1单位甲乙两种产品的利润分别为300元和400元，问如何安排生产计划使得每天利润最大(单位：百元)？

问题分析: 假设生产甲乙两种产品数量分别为：x_1和x_2单位, 则相应LP问题为：

$$\begin{cases} \max & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 + 2x_2 \le 8 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

对偶LP问题经济意义

假定工厂决策者决定不生产甲乙两种商品，而是将原料出售。问决策者怎样制定原料出售价格才合理？

设$y_j, j = 1, 2, 3$为第j种原料的出售价格，出售1吨甲产品和1吨乙产品的原料所得净收入不应低于两种产品各自的利润，即：

$$y_1 + y_2 \geq 3，\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 4$$

满足约束情形下**出售原料所得收益越少，交易越有可能实现**，因此对应以下对偶LP问题：

$$\begin{cases} \min & 6y_1 + 8y_2 + 3y_3 \\ \text{s.t.} & y_1 + y_2 \geq 3 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 4 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

经济学上，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$称为**影子价格**，可用于原材料定价。

原始问题与对偶问题形式对比

原始LP问题

$$
\max \quad z = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
$$

$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases}
$$

对偶LP问题

$$
\min \quad w = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}
$$

$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases}
$$

一般LP问题与其对偶LP问题形式：

$$
\begin{cases} \max & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases}
\qquad
\begin{cases} \min & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} & A^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0 \end{cases}
$$

原始问题与对偶问题形式对比

将前面两个LP问题中$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, A$分别用$-\boldsymbol{c}, -\boldsymbol{b}, -A$替代可得：

- 原始问题

$$\begin{cases} \min & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases}$$

- 对偶问题：

$$\begin{cases} \max & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} & A^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq 0 \end{cases}$$

经典LP问题同其对偶LP问题之间的对称关系：

$$\min \Longleftrightarrow \max, \quad A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow A^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} \Longleftrightarrow \boldsymbol{b}.$$

一般LP问题的对偶LP问题形式

将一般形式的LP问题转化为经典LP问题形式：

$$\left\{\begin{array}{ll}\min & f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x},\\ \text{s.t.} & A_1\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b}_1,\\ & A_2\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{b}_2,\\ & A_3\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_3,\\ & \boldsymbol{x}\geq 0,\end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{ll}\min & f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x},\\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{b},\\ & \boldsymbol{x}\geq 0,\end{array}\right.$$

其中:

$$A=\begin{bmatrix}A_1\\ -A_2\\ A_3\\ -A_3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1\\ -\boldsymbol{b}_2\\ \boldsymbol{b}_3\\ -\boldsymbol{b}_3\end{pmatrix}.$$

一般LP问题的对偶LP问题形式

利用经典LP问题对偶形式可得其对偶问题为：

$$\begin{cases} \max & z(\bar{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{b}_1^T \bar{\boldsymbol{y}}_1 - \boldsymbol{b}_2^T \bar{\boldsymbol{y}}_2 + \boldsymbol{b}_3^T \bar{\boldsymbol{y}}_3 - \boldsymbol{b}_3^T \bar{\boldsymbol{y}}_4, \\ \text{s.t.} & A^T \bar{\boldsymbol{y}} = A_1^T \bar{\boldsymbol{y}}_1 - A_2^T \bar{\boldsymbol{y}}_2 + A_3^T \bar{\boldsymbol{y}}_3 - A_3^T \bar{\boldsymbol{y}}_4 \leq \boldsymbol{c}, \\ & \bar{\boldsymbol{y}} \geq 0, \end{cases}$$

其中$\bar{\boldsymbol{y}}^T = (\bar{\boldsymbol{y}}_1^T, \bar{\boldsymbol{y}}_2^T, \bar{\boldsymbol{y}}_3^T, \bar{\boldsymbol{y}}_4^T)$。

对偶问题为:

$$\begin{cases} \max & z(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{b}_1^T \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^T \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{b}_3^T \boldsymbol{y}_3, \\ \text{s.t.} & A_1^T \boldsymbol{y}_1 + A_2^T \boldsymbol{y}_2 + A_3^T \boldsymbol{y}_3 \leq \boldsymbol{c}, \\ & \boldsymbol{y}_1 \geq 0, \quad \boldsymbol{y}_2 \leq 0. \end{cases}$$

原问题约束	对偶问题变量
$\geq$	$\geq$
$\leq$	$\leq$
$=$	无限制

这里$\boldsymbol{y}_1 = \bar{\boldsymbol{y}}_1$，$\boldsymbol{y}_2 = -\bar{\boldsymbol{y}}_2$，$\boldsymbol{y}_3 = \bar{\boldsymbol{y}}_3 - \bar{\boldsymbol{y}}_4$。

标准LP问题的对偶

考虑标准型的线性规划问题

$$\begin{cases} \min & f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}, \\ \text{s.t.} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{cases}$$

根据对偶规则, 其对偶问题为:

$$\begin{cases} \max & z(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}, \\ \text{s.t.} & A^T \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}. \end{cases}$$

LP问题的对偶

例 2.3.2 考虑如下LP问题：

$$\begin{cases} \min & f(\boldsymbol{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ \text{s.t.} & 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ & 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 5, \\ & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 9, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3\text{无限制}. \end{cases}$$

解： 其对偶LP问题为：

$$\begin{cases} \max & z(\boldsymbol{y}) = 6y_1 + 5y_2 + 9y_3, \\ \text{s.t.} & 3y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 1, \\ & -2y_1 - 2y_2 + 3y_3 \geq 2, \\ & y_1 + 3y_2 + 5y_3 = 3, \\ & y_1\text{无限制},\ y_2 \geq 0,\ y_3 \leq 0. \end{cases}$$

因为原线性规划问题中$x_2 \leq 0$, 故上式中第二个不等式为大于等于。

对偶问题的对偶

定理 2.3.1 对偶问题的对偶.

对偶LP问题的对偶问题是原LP问题。

证明： 为简单起见，只考虑经典的LP问题，已知其对偶形式,将其对偶转换成经典形式得

$$\begin{cases} \min & z(\boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}, \\ \text{s.t.} & -A^T\boldsymbol{y} \geq -\boldsymbol{c}, \\ & \boldsymbol{y} \geq 0, \end{cases}$$

其对偶LP是：

$$\begin{cases} \max & f(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \\ \text{s.t.} & -A\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq 0, \end{cases}$$

经整理即得原线性规划问题。 ■

原始问题和对偶问题最优值之间的关系

定理 2.3.2 弱对偶关系.

设$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$分别是原始问题和对偶问题的可行解, 则有

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = z(\boldsymbol{y}).$$

证明: 根据$\boldsymbol{y}$的对偶可行性有$A^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$. 再由$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0$得:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} = z(\boldsymbol{y}).$$

■

该定理表明: LP问题(极小化)在某可行点处的函数值提供其对偶LP问题(极大化)最优值的一个上界; 或者说, LP问题(极大化)在某可行点处的函数值提供其对偶LP问题(极小化)最优值的一个下界。

两个可行解的函数值之间的差$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$为**对偶间隙**。

弱对偶定理结论

两个有用结论:

- 若互为对偶的两个LP问题中有一个为无界最优解, 则另一个问题必定不可行。因为若后者可行必为其对偶LP问题提供了一个上界或者下界, 与无界性假设相矛盾。
- 若两个LP问题各有一个可行解,且有相同的目标函数值,则这两个可行解各是相应问题的最优解。

弱对偶定理表明: 可不通过求解过程来确定一个可行点是否是最优。

强对偶定理

定理 2.3.3 强对偶关系.

若互为对偶的两个LP问题中一个有最优解，则另一个也有最优解，且两者的最优目标函数值相等。

证明： 考虑标准型LP问题,设$\boldsymbol{x}^*$是为最优解，将其分块为基变量和非基变量两部分：

$$\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B^* \\ \boldsymbol{x}_N^* \end{pmatrix}.$$

对系数矩阵A和价值向量$\boldsymbol{c}$作相应的分块:

$$A = [B \quad N], \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_B \\ \boldsymbol{c}_N \end{pmatrix},$$

易知$\boldsymbol{x}_B^* = B^{-1}\boldsymbol{b}$. 由于$\boldsymbol{x}^*$是最优解，简约价值系数均大于或者等于零，即:$\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T B^{-1} N \geq 0$.

定理2.3.3证明

证明续： 继而有: $\boldsymbol{c}_N \geq N^T B^{-T} \boldsymbol{c}_B$.

令$\boldsymbol{y}^* = B^{-T}\boldsymbol{c}_B$, 则有:

$$A^T\boldsymbol{y}^* = \begin{bmatrix} B^T \\ N^T \end{bmatrix} B^{-T}\boldsymbol{c}_B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_B \\ N^T B^{-T}\boldsymbol{c}_B \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_B \\ \boldsymbol{c}_N \end{pmatrix} = \boldsymbol{c}.$$

这表明$\boldsymbol{y}^*$是对偶可行的.又由于

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{b}^T B^{-T}\boldsymbol{c}_B = \boldsymbol{c}_B^T B^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B^* = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*.$$

根据弱对偶定理知$\boldsymbol{y}^*$是对偶问题的最优解。 ■

强对偶定理表明: 如果线性规划有最优解, 则在最优解处对偶间隙为零。

对偶可行与单纯形法

在单纯形方法的每步迭代中，

- 非最优解处: 简约价值系数$\boldsymbol{c}_N - N^T B^{-T} \boldsymbol{c}_B \geq 0$不成立，对应的乘子向量$\boldsymbol{y} = B^{-T}\boldsymbol{c}_B$不满足对偶LP问题约束, 即

$$A^T\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} B^T \\ N^T \end{bmatrix} B^{-T}\boldsymbol{c}_B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_B \\ N^T B^{-T}\boldsymbol{c}_B \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_B \\ \boldsymbol{c}_N \end{pmatrix} = \boldsymbol{c}$$

  不成立，所以$\boldsymbol{y} = B^{-T}\boldsymbol{c}_B$不是对偶可行的。此时的基本可行解(原问题)为对偶不可行的。

- 最优解处: 基本可行解也是对偶可行的。

单纯形的迭代降低当前基本可行解的对偶不可行性。

对偶单纯形法

算法思想： 从原始问题不可行但对偶可行的基本解出发，减少该解的不可行性保持对偶可行性，最终找到最优解。

考虑标准形式LP问题:

$$\min\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\geq 0\right\} \quad \text{(P)}$$
$$\max\left\{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} | A^T\boldsymbol{y}\leq \boldsymbol{c}\right\} \quad \text{(D)}$$

根据LP最优性准则，若基本可行解$\boldsymbol{x}$对应的简约价值向量：

$$\hat{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}-A^TB^{-T}\boldsymbol{c}_B=\boldsymbol{c}-A^T\boldsymbol{y}\geq 0$$

则$\boldsymbol{x}$为最优解，记$\boldsymbol{y}=B^{-T}\boldsymbol{c}_B$，以上不等式代表**对偶变量可行性**。

对偶单纯形法

观察原问题的基阵B, 若

$$\boldsymbol{c}_N - N^T B^{-T} \boldsymbol{c}_B \geq 0 \rightarrow A^T \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$$

则称B为对偶可行基。基阵B可能情形:

(a) 仅为原始可行基; (b) 仅为对偶可行基;

(c) 两者都不是; (d) 两者都是

若基阵B同时为原始可行和对偶可行，则：

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u} = B^{-T} \boldsymbol{c}_B$$

分别为原始问题与对偶问题最优解。

对偶单纯形法

假定$\boldsymbol{x}^{(k)}$为当前的一个对偶可行基本解，相应基阵为B_k，非基矩阵为N_k，则有：

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_B^{(k)} \\ \boldsymbol{x}_N^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_k^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}^{(k)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_B^{(k)} \\ \boldsymbol{c}_N^{(k)} \end{pmatrix}$$

由对偶可行性知，当前基本解的简约价值系数非负，即有：

$$\hat{\boldsymbol{c}}_N^{(k)} = \boldsymbol{c}_N^{(k)} - N_k^T B_k^{-T} \boldsymbol{c}_B^{(k)} \geq 0$$

对偶单纯形法

情形1： 若$\boldsymbol{x}^{(k)}$也满足原始可行性，有$\boldsymbol{b}^{(k)} \geq 0$(即$\boldsymbol{x}_B^{(k)} \geq 0$), 即$\boldsymbol{x}^{(k)}$为最优基本可行解。

情形2： 若$\boldsymbol{x}^{(k)}$不满足原始可行性，故其基变量中存在负的分量，假定$x_q^{(k)} = b_q^{(k)} < 0$, 将该基变量值从负值增加到零变为非基变量。

由约束方程$A_k\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{b}^{(k)}$, 有：

$$\boldsymbol{x}_B^{(k)} + B_k^{-1}N_k\boldsymbol{x}_N^{(k)} = B_k^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{(k)}$$

考虑第q行对应基变量$x_q^{(k)}$的方程为：

$$x_q^{(k)} + \sum_{j\in\mathcal{N}_k} \hat{a}_{qj}^{(k)} x_j^{(k)} = b_q^{(k)}$$

选择非基变量中某个分量$x_p^{(k)}, p \in \mathcal{N}_k$作为基变量(取值从零变为正值, 其余分量仍然取零)，使得:

$$x_q^{(k)} = b_q^{(k)} - \hat{a}_{qp}^{(k)} x_p^{(k)} = 0 \rightarrow x_p^{(k)} = \frac{b_q^{(k)}}{\hat{a}_{qp}^{(k)}} > 0,$$

因为$b_q^{(k)} < 0$, 所以要求$\hat{a}_{qp}^{(k)} < 0$。
同原始单纯形法类似，以$\hat{a}_{qp}^{(k)}$为旋转元做高斯消去法，使得$x_p^{(k)}$对应约束矩阵的列成为单位向量, 故有新的简约价值系数为:

$$\hat{c}_j^{(k+1)} = \hat{c}_j^{(k)} - \frac{\hat{a}_{qj}^{(k)}}{\hat{a}_{qp}^{(k)}} \hat{c}_p^{(k)} \qquad j \in \mathcal{N}_{k+1}$$

问题： $\mathcal{N}_k$与$\mathcal{N}_{k+1}$的差别？

对偶单纯形法

为保持对偶可行性，则要求新的简约价值系数仍然大于等于零，即$\hat{c}_j^{(k+1)} \geq 0$，故有：

$$\hat{c}_j^{(k)} \geq \frac{\hat{a}_{qj}^{(k)}}{\hat{a}_{qp}^{(k)}} \hat{c}_p^{(k)}$$

上面不等式对于$\hat{a}_{qj}^{(k)} \geq 0$始终成立(右边小于零)，故对于所有$\hat{a}_{qj}^{(k)} < 0, j \in \mathcal{N}_k$，必有下式成立：

$$\left| \frac{\hat{c}_j^{(k)}}{\hat{a}_{qj}^{(k)}} \right| \geq \left| \frac{\hat{c}_p^{(k)}}{\hat{a}_{qp}^{(k)}} \right|$$

故选取非基变量中满足$\hat{a}_{qj}^{(k)} < 0$且比值$\left| \frac{\hat{c}_j^{(k)}}{\hat{a}_{qj}^{(k)}} \right|$最小的分量$x_p^{(k)}$作为进基变量。

对偶单纯形法迭代步骤

第1步： 记迭代步数为$k=1$。选取初始对偶可行基B_1，相应的对偶可行解为$\boldsymbol{x}^{(k)}$。

第2步： 若B_k是原始可行基，即$B_k^{-1}\boldsymbol{b}\geq 0$，则终止，原问题最优解与对偶对偶最优解分别为：

$$\boldsymbol{x}^*=\begin{pmatrix} B_k^{-1}\boldsymbol{b} \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}^T=\boldsymbol{c}_B^TB_k^{-1}$$

否则，令$b_q^{(k)}=\min\left\{b_i^{(k)}|i=1,\ldots,m\right\}$，确定出基变量为$x_q^{(k)}$。

第3步： 若对$\forall j=1,\ldots,n$，均有$\hat{a}_{qj}\geq 0$，则原问题无可行解，停止。

第4步： 确定进基变量:

$$\min\left\{\left|\frac{\hat{c}_j}{\hat{a}_{qj}}\right|\middle|\hat{a}_{qj}<0,j\in\mathcal{N}_k\right\}\triangleq\frac{\hat{c}_p}{\hat{a}_{qp}}$$

第5步： 交换出基向量A_q与进基向量A_p，则新基阵为$B_{k+1}=B_k\cup\{A_p\}\backslash\{A_q\}$。

新旧基阵对比

新基阵同旧基矩阵只相差一列,在当前的单纯形表上以$\hat{a}_{qp}^{(k)}$为主元用行变换将x_p对应的列变成单位向量即可得新的基本可行解。

$$
\text{旧单纯形表}\quad
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \hat{c}_{m+1} & \cdots & \hat{c}_p & \cdots & \hat{c}_n & -f \\
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \hat{a}_{1,m+1} & \cdots & \hat{a}_{1,p} & \cdots & \hat{a}_{1,n} & \hat{b}_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \hat{a}_{q,m+1} & \cdots & \underline{\hat{a}_{q,p}} & \cdots & \hat{a}_{q,n} & \hat{b}_q \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \hat{a}_{m,m+1} & \cdots & \hat{a}_{m,p} & \cdots & \hat{a}_{m,n} & \hat{b}_m
\end{bmatrix}
$$

$$
\text{新单纯形表}\quad
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & \hat{c}'_q & \cdots & 0 & \hat{c}'_{m+1} & \cdots & 0 & \cdots & \hat{c}'_n & -f' \\
1 & \cdots & \bar{a}_{1,q} & \cdots & 0 & \bar{a}_{1,m+1} & \cdots & 0 & \cdots & \bar{a}_{1,n} & \hat{b}'_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \bar{a}_{q,q} & \cdots & 0 & \bar{a}_{q,m+1} & \cdots & 1 & \cdots & \bar{a}_{q,n} & \hat{b}'_q \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \bar{a}_{m,q} & \cdots & 1 & \bar{a}_{m,m+1} & \cdots & 0 & \cdots & \bar{a}_{m,n} & \hat{b}'_m
\end{bmatrix}
$$

原始单纯形法与对偶单纯形法之间对称关系

原始单纯形法	对偶单纯形法
$\downarrow$	$\downarrow$
简约价值系数$\hat{c}_j$	右端向量符号b_j
$\downarrow$	$\downarrow$
决定进基变量x_p	决定出基变量x_q
$\downarrow$	$\downarrow$
由变形后A的第p列中正元素与其对应的右端分量的比值最小者	由变形后A的第q行中负元素与其对应的简约价值向量分量的比值.绝对值中最小者
$\downarrow$	$\downarrow$
决定出基变量x_q	决定进基变量x_p

算法步骤十分对称!!!

原始单纯形法与对偶单纯形法之间对称关系

原始单纯形法:	对偶单纯形法:
从一个基本可行解开始, 在保持其原始问题可行解的前提下, 向对偶可行解方向迭代.	从一个对偶可行解开始, 保持对偶问题可行解的前提下, 向原始可行解方向迭代.
从原始可行基向另一个原始可行基迭代, 并达到对偶可行基	从对偶可行基向另一个对偶可行基迭代, 并达到原始可行基

原始可行与对偶可行对称性!!!

对偶单纯形法算例

例 2.3.3 求解线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & -x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3, \geq 0 \end{aligned}$$

解： 增加剩余变量x_4, x_5后得到初始单纯形表为:

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
$-f$	1	1	1	0	0	0
x_4	-3	-1	-1	1	0	-1
x_5	1	-4	-1	0	1	-2

取x_4, x_5作为基变量, 对应基阵为单位阵, 对应的基本解为$(0, 0, 0, -1, -2)^T$, 所有简约价值系数大于零, 所以对偶可行，但对原问题不可行。

对偶单纯形法算例

取右端最负的分量为出基变量，$-2 < -1$，所以选取x_5为出基变量；进一步考虑比值

$$\min\left\{\left|\frac{1}{-4}\right|,\left|\frac{1}{-1}\right|\right\} = \left|\frac{\hat{c}_2}{\hat{a}_{22}}\right| = \frac{1}{4}$$

所以选取x_2为进基变量.

基变量	x_1	x_2^*	x_3	x_4	x_5	右端项
$-f$	1	1	1	0	0	0
x_4	-3	-1	-1	1	0	-1
x_5^*	1	-4^*	-1	0	1	-2^*

以$\hat{a}_{22}$为旋转元旋转后的第2张单纯形表

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
$-f$	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_4	$-\frac{13}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

对偶单纯形法算例

对应对偶可行基本解为：$(0,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0)^T$，但非原问题可行解。右端仍然有负分量$-\frac{1}{2}$, 故选取$x_4$为出基变量, 计算比值：

$$\min\left\{\left|\frac{5/4}{-13/4}\right|,\left|\frac{3/4}{-3/4}\right|,\left|\frac{1/4}{-1/4}\right|\right\}=\left|\frac{\hat{c}_1}{\hat{a}_{11}}\right|=\frac{5}{13}$$

选取x_1为进基变量.

基变量	x_1^*	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
$-f$	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
x_4^*	$-\frac{13}{4}^*$	0	$-\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}^*$
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

以$\hat{a}_{11}$为旋转元旋转后的第3张单纯形表:

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
$-f$	0	0	$\frac{6}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{2}{13}$	$-\frac{9}{13}$
x_1	1	0	$\frac{3}{13}$	$-\frac{4}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$
x_2	0	1	$\frac{4}{13}$	$-\frac{1}{13}$	$-\frac{3}{13}$	$\frac{7}{13}$

对偶可行基本解$(\frac{2}{13},\frac{7}{13},0,0,0)^T$原问题最优解,对应最优值为$\frac{9}{13}$.