3-3 多项式插值逼近法

多项式插值逼近法

基本思想: 利用已有的函数信息(比如函数值、梯度值)，构造近似$\varphi(\alpha)$的低次多项式函数(通常不超过三次)，求出其极小点并检验其是否满足非精确线性搜索准则。

插值法: 构造$\varphi(\alpha)$的近似多项式函数的提法如下：

- 已知在$m+1$个不同点$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m (\alpha_i > 0, i = 0, ..., m)$处的函数值为：$\varphi(\alpha_i), i = 0, ..., m$.. 欲求$\varphi(\alpha)$的近似多项式需满足：

$$p(\alpha_i) = \varphi(\alpha_i), i = 0, ..., m$$

- $\alpha_0, ..., \alpha_m$称为插值节点，$p(\alpha)$为插值多项式，$\varphi(\alpha)$为被插函数，上式为插值条件。

适用特点: 当函数具有比较好的解析性质时，比如导数信息可用，插值方法比直接方法(如0.618法或Fibonacci法)效果更好。

方法1：三点二次插值法

搜索区间$[a_0,b_0]$包含$\varphi(\alpha)$的极小点α^*，给定三点$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足

$$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3, \tag{3.3.1}$$

$$\varphi(\alpha_1)>\varphi(\alpha_2)<\varphi(\alpha_3). \tag{3.3.2}$$

三点满足“高-低-高”分布。

利用三点处的函数值$\varphi(\alpha_1)$, $\varphi(\alpha_2)$, $\varphi(\alpha_3)$构造二次函数，满足插值条件

$$\begin{aligned} p(\alpha_1)&=a\alpha_1^2+b\alpha_1+c=\varphi(\alpha_1),\\ p(\alpha_2)&=a\alpha_2^2+b\alpha_2+c=\varphi(\alpha_2),\\ p(\alpha_3)&=a\alpha_3^2+b\alpha_3+c=\varphi(\alpha_3). \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

方法1：三点二次插值法

令$\varphi_i = \varphi(\alpha_i)$，$i = 1, 2, 3$. 解上述方程组得

$$a = -\frac{(\alpha_2 - \alpha_3)\varphi_1 + (\alpha_3 - \alpha_1)\varphi_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\varphi_3}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)}.$$

$$b = \frac{(\alpha_2^2 - \alpha_3^2)\varphi_1 + (\alpha_3^2 - \alpha_1^2)\varphi_2 + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\varphi_3}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)}.$$

二次函数$p(\alpha)$的极小点为

$$\bar{\alpha} = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}\frac{(\alpha_2^2 - \alpha_3^2)\varphi_1 + (\alpha_3^2 - \alpha_1^2)\varphi_2 + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\varphi_3}{(\alpha_2 - \alpha_3)\varphi_1 + (\alpha_3 - \alpha_1)\varphi_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\varphi_3}. \tag{3.3.4}$$

上式称为**三点二次插值公式**。

方法1：三点二次插值法

这个公式也可以直接利用二次拉格朗日插值公式

$$\begin{aligned} L(\alpha) = & \frac{(\alpha-\alpha_2)(\alpha-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}\varphi_1 + \frac{(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_3)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}\varphi_2 \\ & + \frac{(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\varphi_3, \end{aligned}$$

并令$L'(\alpha)=0$得到。

方法1：三点二次插值法

算法3.3.1 – 三点二次插值法

步0 初始化：给出满足'高-低-高'分布的$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$;

步1 由公式(3.3.4)计算$\bar{\alpha}$;

步2 比较$\bar{\alpha}$和α_2的大小，若$\bar{\alpha} > \alpha_2$, 则转步3；否则，转步4。

步3 若$\bar{\varphi} \le \varphi_2$, 则$\alpha_1 \Leftarrow \alpha_2$，$\alpha_2 \Leftarrow \bar{\alpha}$，$\varphi_1 \Leftarrow \varphi_2$，$\varphi_2 \Leftarrow \bar{\varphi}$, 转步5；否则，$\alpha_3 \Leftarrow \bar{\alpha}$，$\varphi_3 \Leftarrow \bar{\varphi}$, 转步5.

步4 若$\bar{\varphi} \le \varphi_2$, 则$\alpha_3 \Leftarrow \alpha_2$，$\alpha_2 \Leftarrow \bar{\alpha}$，$\varphi_3 \Leftarrow \varphi_2$，$\varphi_2 \Leftarrow \bar{\varphi}$, 转步5；否则，$\alpha_1 \Leftarrow \bar{\alpha}$，$\varphi_1 \Leftarrow \bar{\varphi}$, 转步5.

步5 若收敛准则满足，停止迭代；否则，转步1，在新搜索区间$[\alpha_1, \alpha_3]$上按公式(3.3.4) 计算$\bar{\alpha}$.

方法1：三点二次插值法

终止准则： 令$\bar{\varphi} = \varphi(\bar{\alpha})$

- 情形1：端点函数值绝对值较大时

$$|\varphi_2 - \bar{\varphi}| \leq \varepsilon_1 |\varphi_2|, \quad 当|\varphi_2| > \varepsilon_2时，$$

- 情形2：端点函数值绝对值较小时

$$|\varphi_2 - \overline{\varphi}| \leq \varepsilon_1, \quad 当|\varphi_2| < \varepsilon_2时,$$

以上两种情形之一成立被认为收敛准则满足。如果$\bar{\varphi} < \varphi_2$, 则极小点估计为$\bar{\alpha}$, 否则为$\alpha_2$. 这里通常取$\varepsilon_1 = 10^{-3}$, $\varepsilon_2 = 10^{-5}$。

若终止准则不满足，则从$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$和$\bar{\alpha}$中选出相邻的三个点，将原来的搜索区间例如$[\alpha_1, \alpha_3]$缩小。

可以证明: 如果$\varphi(\alpha)$四阶连续可微, α^*满足$\varphi'(\alpha^*) = 0$, $\varphi''(\alpha^*) \neq 0$, 则三点二次插值法(3.3.4)产生的序列$\{\alpha_k\}$的收敛阶约为1.32.

三点二次插值法-算例

例3.3.1 用三点二次插值法求：

$$\min_{t\geq 0}\varphi(t)=t^3-3t+2$$

的近似最优解(精确解为$t^*=1$). 设初始搜索区间为$[0,3]$, 初始插值点为$t_0=2$, 终止误差为$\varepsilon=0.05$。

解： 取初始三点为：$\alpha_1^{(0)}=a=0, \alpha_2^{(0)}=t_0=2, \alpha_3^{(0)}=b=3$

第一次迭代： 计算三点函数值分别为：

$$\varphi(\alpha_1^{(0)})=2, \varphi(\alpha_2^{(0)})=4, \varphi(\alpha_3^{(0)})=20,$$

利用公式(3.3.4)计算得到：

$$\bar{\alpha}^{(0)}=0.9.$$

由于$|\bar{\alpha}^{(0)}-\alpha_2^{(0)}|=1.1>\varepsilon$, 继续迭代。由于$\bar{\alpha}^{(0)}=0.9\leq\alpha_2^{(0)}=2$，且$\varphi(\bar{\alpha}^{(0)})=0.029\leq\varphi(\alpha_2^{(0)})=4$, 故令：

$$\alpha_1^{(1)}:=\alpha_1^{(0)}=0, \alpha_2^{(1)}:=\bar{\alpha}^{(0)}=0.9, \alpha_3^{(1)}:=\alpha_2^{(0)}=2$$

三点二次插值法-算例

第二次迭代： 重新计算三点函数值分别为：

$$\varphi(\alpha_1^{(1)})=2,\varphi(\alpha_2^{(1)})=0.029,\varphi(\alpha_3^{(1)})=4,$$

利用公式(3.3.4)计算得到：$\bar{\alpha}^{(1)}=0.82759$. 由于$|\bar{\alpha}^{(1)}-\alpha_2^{(1)}|=0.07241>\varepsilon$, 继续迭代。由于$\bar{\alpha}^{(1)}=0.82759\le\alpha_2^{(1)}=2$，且$\varphi(\bar{\alpha}^{(1)})=0.08405\ge\varphi(\alpha_2^{(1)})=0.029$, 故令：

$$\alpha_1^{(2)}:=\bar{\alpha}^{(1)}=0.82759,\alpha_2^{(2)}:=\alpha_2{}^{(1)}=0.9,\alpha_3^{(2)}:=\alpha_3^{(1)}=2$$

第三次迭代： 继续计算三点函数值分别为：

$$\varphi(\alpha_1^{(2)})=0.08405,\varphi(\alpha_2^{(2)})=0.029,\varphi(\alpha_3^{(2)})=4,$$

利用公式(3.3.4)计算得到：$\bar{\alpha}^{(2)}=0.96577$. 由于$|\bar{\alpha}^{(2)}-\alpha_2^{(2)}|=0.06577>\varepsilon$, 继续迭代。由于$\bar{\alpha}^{(2)}=0.96577\ge\alpha_2^{(2)}=0.9$，且$\varphi(\bar{\alpha}^{(2)})=0.00347\le\varphi(\alpha_2^{(2)})=0.029$, 故令：

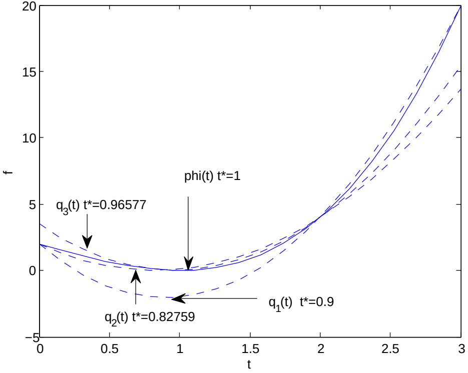
$$\alpha_1^{(3)}:=\alpha_2^{(2)}=0.9,\alpha_2^{(3)}:=\bar{\alpha}^{(2)}=0.96557,\alpha_3^{(3)}:=\alpha_3^{(2)}=2$$

三点二次插值法-算例

第四次迭代： 再次计算三点函数值分别为：

$$\varphi(\alpha_1^{(3)}) = 0.029, \varphi(\alpha_2^{(3)}) = 0.00347, \varphi(\alpha_3^{(3)}) = 4,$$

利用公式(3.3.4)计算得到：$\bar{\alpha}^{(3)} = 0.98308$. 由于$|\bar{\alpha}^{(3)} - \alpha_2^{(3)}| = 0.01731 < \varepsilon$, 停止迭代，输出近似最优解: $\bar{\alpha}^{(3)} = 0.98308$。



方法2：两点二次插值法(I)

给出不同的两点α_1,α_2,函数值$\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2)$,及导数值$\varphi'(\alpha_1)$或($\varphi'(\alpha_2)$),构造二次插值多项式

$$p(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c, \tag{3.3.5}$$

取$p(\alpha)$的极小点为$\varphi(\alpha)$的极小点的近似值。显然，令$p'(\alpha)=2a\alpha+b=0$, 得$p(\alpha)$的极小点为:

$$\bar{\alpha}=-\frac{b}{2a}. \tag{3.3.6}$$

考虑插值条件

$$\begin{aligned} p(\alpha_1)=&a\alpha_1^2+b\alpha_1+c=\varphi(\alpha_1),\\ p(\alpha_2)=&a\alpha_2^2+b\alpha_2+c=\varphi(\alpha_2),\\ p'(\alpha_1)=&2a\alpha_1+b=\varphi'(\alpha_1). \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

方法2：两点二次插值法(I)

记$\varphi_i=\varphi(\alpha_i)$, $\varphi_i'=\varphi'(\alpha_i)$, $i=1,2$. 解上述方程组,得:

$$a=\frac{\varphi_1-\varphi_2-\varphi_1'(\alpha_1-\alpha_2)}{-(\alpha_1-\alpha_2)^2}, \tag{3.3.8}$$

$$b=\varphi_1'+2\alpha_1\frac{\varphi_1-\varphi_2-\varphi_1'(\alpha_1-\alpha_2)}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}. \tag{3.3.9}$$

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}=-\frac{b}{2a}&=\alpha_1+\frac{1}{2}\frac{\varphi_1'(\alpha_1-\alpha_2)^2}{\varphi_1-\varphi_2-\varphi_1'(\alpha_1-\alpha_2)}\\&=\alpha_1+\frac{1}{2}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\frac{\varphi_1-\varphi_2}{\varphi_1'(\alpha_1-\alpha_2)}-1}\\&=\alpha_1-\frac{1}{2}\frac{(\alpha_1-\alpha_2)\varphi_1'}{\varphi_1'-\frac{\varphi_1-\varphi_2}{\alpha_1-\alpha_2}}.\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

于是得到如下迭代格式

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{1}{2}\frac{(\alpha_k - \alpha_{k-1})\varphi'_k}{\varphi'_k - \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\alpha_k - \alpha_{k-1}}}. \tag{3.3.11}$$

特别取$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_0$,则有

$$\overline{\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\varphi'(0)\alpha_0^2}{\varphi(\alpha_0) - \varphi(0) - \varphi'(0)\alpha_0}. \tag{3.3.12}$$

方法2：两点二次插值法(II)

给出不同的两点α_1,α_2,函数值$\varphi(\alpha_1)$,及导数值$\varphi'(\alpha_1)$，$\varphi'(\alpha_2)$，构造二次插值多项式。要求插值多项式满足插值条件

$$\begin{aligned} p(\alpha_1) =& a\alpha_1^2 + b\alpha_1 + c = \varphi(\alpha_1), \\ p'(\alpha_1) =& 2a\alpha_1 + b = \varphi'(\alpha_1), \\ p'(\alpha_2) =& 2a\alpha_2 + b = \varphi'(\alpha_2). \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

令$\varphi_i = \varphi(\alpha_i)$, $\varphi_i' = \varphi'(\alpha_i)$, $i = 1, 2$.

类似于前面的讨论可以得到

$$\bar{\alpha} = -\frac{b}{2a} = \alpha_1 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\varphi_1' - \varphi_2'}\varphi_1'. \tag{3.3.14}$$

方法2：两点二次插值法(II)

上式可写成迭代格式

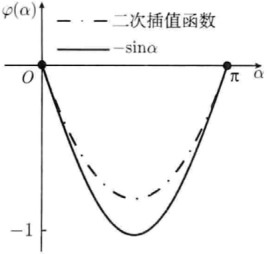
$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{\varphi'_k - \varphi'_{k-1}} \varphi'_k. \tag{3.3.15}$$

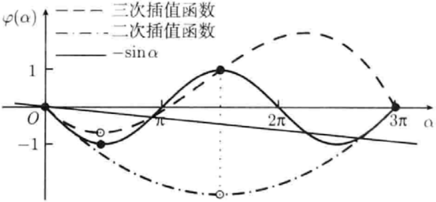
上式也称为**割线公式**。

可以证明： 两点二次插值法(3.3.11)与(3.3.15)的收敛阶约为1.618，即具有超线性收敛速度。

二次插值与三次插值对比

左图： 对$\varphi(\alpha) = -\sin\alpha$, 在$0, \pi$两点进行二次插值，**右图：** 在$0, 3\pi$进行二次插值，在$0, \frac{3}{2}\pi, 3\pi$三点进行三次插值





图中直线表示：$f_k + \rho_k g_k^T d_k \alpha$，在二次插值函数极小点处，不满足非精确搜索的下降条件，但三次插值极小点处满足。

方法3：三点三次插值法

已知三个点$0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$三点可知四个插值数据：

$$\varphi(0), \varphi'(0), \varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1)$$

设插值函数为：

$$p(\alpha) = a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d$$

由插值条件: $d = \varphi(0), c = \varphi'(0)$及：

$$a\alpha_0^3 + b\alpha_0^2 + \varphi'(0)\alpha_0 = \varphi(\alpha_0)$$

$$a\alpha_1^3 + b\alpha_1^2 + \varphi'(0)\alpha_1 = \varphi(\alpha_1)$$

解如下方程组得到a, b：

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_0^2\alpha_1^2(\alpha_1 - \alpha_0)} \begin{bmatrix} \alpha_0^2 & -\alpha_1^2 \\ -\alpha_0^3 & \alpha_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(\alpha_1) - \varphi(0) - \varphi'(0)\alpha_1 \\ \varphi(\alpha_0) - \varphi(0) - \varphi'(0)\alpha_0 \end{bmatrix}$$

方法3：三点三次插值法

由$p'(\alpha)=0$可求得极小点α_2.

下一步迭代的插值数据可选为：

- $\varphi(0), \varphi'(0), \varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2)$
- 或者从$0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$中选$\varphi(\alpha_i)$具有“高-低-高”特性的三个点.

下图为对函数$-\sin\alpha$在$0, \frac{1}{2}\pi, \pi$三点进行三次插值情形：