第二章

1.假设x^*为$f(x)$局部极小点，非全局极小点，
由$f(x)$为凸函数知，$\forall \lambda \in (0,1)$，$\exists y \neq x^*$，$f(y) < f(x^*)$
$$f(\lambda x^* + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(y)$$
$$< f(x^*) \quad 与\ x^*局部极小矛盾.$$

~~单~~假设x^*为严格凸函数极小点，$x_0^* \neq x^*$为另一点，
$\forall 0<\lambda<1$，$f(\lambda x^* + (1-\lambda)x_0^*) < \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(x_0^*)$
由于$f(x^*) = f(x_0^*)$，故$f(\lambda x^* + (1-\lambda)x_0^*) < f(x^*)$.
与$f(x^*)$极小矛盾.

4.(2) 求证$\{k^{-k}\}$超线性收敛.
证
$$\lim_{k\to\infty} k^{-k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^k} = 0.$$

$$故 \frac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|} = \frac{\|(k+1)^{-(k+1)}\|}{\|k^{-k}\|} = (1+\frac{1}{k})^{-k} \cdot (k+1)^{-1}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|(k+1)^{-(k+1)}\|}{\|k^{-k}\|} = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{-1}}{k+1} = 0$$，$\{k^{-k}\}$超线性收敛

7.(1) 求函数的稳定点，并确定其类型
$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4$$
$$g(x) = \nabla f(x) = (4x_1^3 + 6x_1^2 + 4x_1 - 2x_2,\ 2x_2 - 2x_1)^T$$
$$g(x) = 0 \Rightarrow x = (0,0)^T \text{ or } (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})^T \text{ or } (-1,-1)$$

$$G(x)=\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}12x_1^2+12x_1+4, & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

$x=(0,0)^T$点、$G(x)=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ 正定，是极小点

$x=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T$点，$G(x)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ 负定，是极大点

$x=(-1,-1)^T$点，$G(x)=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ 正定 极小点

补充1. 试证 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所包围的区域是凸集.

证：记 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\}$

则 $\forall \lambda>0$, (x_1,y_1), $(x_2,y_2)\in\Omega$

$$\begin{cases}x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\\ y=\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\end{cases}\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{a^2}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)^2+\frac{1}{b^2}(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)^2$$

$$=\lambda^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)+(1-\lambda)^2\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\right)+2\lambda(1-\lambda)\left(\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}\right)$$

$$\leq \lambda^2+(1-\lambda)^2+2\lambda(1-\lambda)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\right)\right)$$

$$\leq \lambda^2+2\lambda(1-\lambda)+(1-\lambda)^2=1$$

故 $(x,y)\in\Omega$. 即 Ω 为凸集.

2. 判断以下函数的凸凹性并说明理由

(1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x<0$

(2) $f(x)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+x_1x_2-7x_1-2x_3+12$

解：(1) 设 $x,y<0$ 下计算 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)-\lambda f(x)-(1-\lambda)f(y)$

$$=\frac{1}{\lambda x+(1-\lambda)y}-\frac{\lambda}{x}-\frac{1-\lambda}{y}=\frac{-\lambda(1-\lambda)(x-y)^2}{xy(\lambda x+(1-\lambda)y)}>0,\ \forall\, 0<\lambda<1,\ x\neq y$$

故 $f(x)=\frac{1}{x}$ 为严格凹函数

(2) $\nabla f(x)=(2x_1+x_2-7,\ 4x_2+x_1,\ 2x_3-2)$.

$2>0$, $\begin{vmatrix}2&1\\1&4\end{vmatrix}=7>0$.

$$\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

, $|\nabla^2 f(x)|=(-1)^6\cdot 2\cdot 7=14>0$

故$\nabla f(x)$正定，$f(x)$严格凸

作业2.

1.图解法分析 LP问题最优解

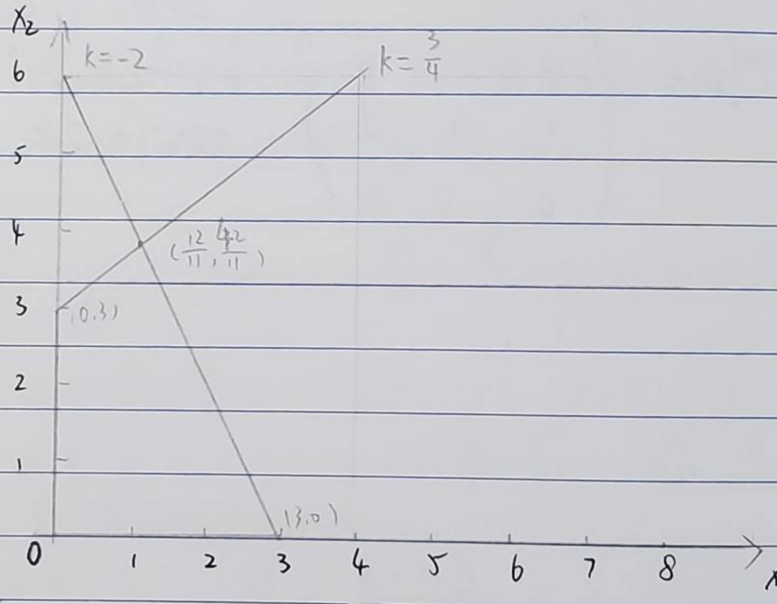
$$\min \quad x_1+\beta x_2$$

$$\text{s.t.} \quad -3x_1+4x_2\le 12$$

$$2x_1+x_2\le 6$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0 .$$

解:



当 $-\frac{1}{\beta}\in(0,\frac{3}{4})$ 即 $\beta<-\frac{4}{3}$ 时,最优解 $(\frac{12}{11},\frac{42}{11})$

$\min x_1+\beta x_2=\frac{12+42\beta}{11}$

当 $\beta=-\frac{4}{3}$, $\min x_1+\beta x_2=-4$, 当 $\beta=0$, $\min x_1+\beta x_2=0$

当 $-\frac{1}{\beta}>\frac{3}{4}$, 即 $\beta\in(-\frac{4}{3},0)$, $\min x_1+\beta x_2=3\beta$, 最优解 $(0,3)$

当 $-\frac{1}{\beta}\in(-2,0)$, 即 $\beta>\frac{1}{2}$ 时, 最优解 $(0,0)$, $\min=0$

当 $-\frac{1}{\beta}<-2$, 即 $0<\beta<\frac{1}{2}$ 时, 最优解 $(0,0)$, $\min=0$.

综上, 当 $\beta\ge 0$ 时,最优解 $(0,0)$, $-\frac{4}{3}<\beta<0$ 时, 最优解 $(0,3)$

$\beta=-\frac{4}{3}$时，最优解 $-3x_1+4x_2=12$，$x_1\in(0,\frac{12}{11})$上所有点.

$\beta<-\frac{4}{3}$时，最优解$(\frac{12}{11},\frac{42}{11})$

2. 用单纯形法求以下线性规划问题的最优解

$$\min\ 3x_1-2x_2+x_3$$

$$\begin{aligned} s.t.\ & 2x_1+2x_2-x_3\le 2 \\ & -3x_1-x_2+2x_3\le -2 \\ & x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\ \ x_3\ge 0 . \end{aligned}$$

解：引入松弛变量 x_4，剩余变量 x_5 化标准形

$$\begin{cases} \min\ 3x_1-2x_2+x_3 \\ s.t.\ \ 2x_1+2x_2-x_3+x_4=2 \\ \quad\ \ 3x_1+x_2-2x_3-x_5=2 \\ \quad\ \ x_i\ge 0,\ i=1\cdots 5 . \end{cases}$$

原始单纯形表为

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
$-f$	3	-2	1	0	0	0
x_4	2	2	-1	1	0	2
x_1	3	1	-2	0	-1	2

引入人工变量辅助LP

$$\begin{cases} \min -a_1-a_2 \\ s.t.\ 2x_1+2x_2-x_3+x_4 \quad +a_1 \quad =2 \\ \quad 3x_1+x_2-2x_3 \quad -x_5 \quad +a_2 =2 \\ \quad x_i\geq 0 \quad i=1,\cdots 5 \quad a_1\geq 0,\ a_2\geq 0 \end{cases}$$

辅助问题可行解 $a_1=2$, $x_4=2$. 其余为0.

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	右端项
$-f$	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_4	2	2	-3	1	0	1	0	2
a_1	3	1	-2	0	-1	0	1	2

a_1与x_4对应基阵为单位阵，非基变量价值系数 $C_B^T=(0,0,0,0,0)$

此时 $c_6=-1$, $c_4=0$ 非最优解

$-1=\min\{-1,\ \}$. 取a_1为基变量

初始表格.

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右
$-f$	3	-2	1	0	0	0
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_4	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

初始基本解 $x=(\frac{2}{3},0,0,\frac{2}{3},0)$

$C_2=-2$，相应 x_2 作为进基变量

$\min\{2, \frac{1}{2}\}=\frac{1}{2}$ 对应 x_4 所在行比值最小，x_4 为出基变量

主元 $\hat{a}_{22}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右
$-f$	3	-2	1	0	0	0
x_1	1	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

此时 c_j-z_j 为 $0, 0, \frac{13}{4}, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}$ 均非负

故 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}$ 为最优基本可行解，其余为0

$f(x^*)=3\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times2+1\times0=\frac{1}{2}$