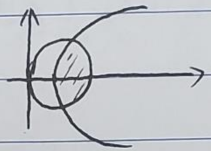
作业 8

1.讨论如下约束条件 $(x_1-1)^2+x_2^2\le 1$，$x_2^2-x_1+1\le 0$ 确定的可行域：顶点处的可行方向集，序列可行方向集以及线性化可行方向集



解：$(1,0)^T$处，设 $d=(a,b)^T$

则 $x+\alpha d=(1+\alpha a,\ \alpha b)^T$

$x+\alpha d\in D$，即 $\begin{cases}\alpha^2a^2+\alpha^2b^2\le 1\\ \alpha^2b^2-\alpha a\le 0\end{cases}$　　$\alpha=0$ 显然成立

$F_D(x)=\{(a,b)^T\in\mathbb{R}^2 \mid a^2+b^2\le 1,\ a\ge\alpha b^2,\ \alpha\ge 0\}$

令 $\alpha>0$，取 $\alpha_k=\frac{\|x_k-x\|}{\alpha}\to 0$，$\{x_k\}$为可行域内点列

$d_k=\alpha\frac{x_k-x}{\|x_k-x\|}\to(\alpha,b)^T$　$F_S(x)=\{(a,b)^T\in\mathbb{R}^2\mid a>0,\ b\in\mathbb{R}\}$

$\nabla c_1(x)=-(2x_1-2,2x_2)$　　$\nabla c_2(x)=(1,-2x_2)$

$d^T\nabla c_1(x)\ge 0$ 恒成立　　$d^T\nabla c_2(x)=a-2bx_2=a\ge 0$.

$F_L(x)=\{(a,b)^T\in\mathbb{R}^2\mid a\ge 0\}$

$(2,0)^T$处，设 $d=(a,b)^T$，$x+\alpha d=(2+\alpha a,\alpha b)^T$

$x+\alpha d\in D$　$\begin{cases}(\alpha a+1)^2+\alpha^2b^2\le 1\\ \alpha^2b^2-\alpha a\le 1\end{cases}$

$F_D(x)=\{(a,b)^T\in\mathbb{R}^2\mid(\alpha a+1)^2+\alpha^2d^2\le 1,\ \alpha^2b^2-\alpha a\le 1\}$

$F_S(x)=\{(a,b)^T\in\mathbb{R}^2\mid a\le 0,\ b\in\mathbb{R}\}$

$F_L(x)=\{(a,b)^T\in\mathbb{R}^2\mid a\le 0,\ b\in\mathbb{R}\}$

对于圆与抛物线两交点，$x_1=\frac{1+\sqrt5}{2}$，$x_2=\sqrt{\frac{\sqrt5-1}{2}}$

$F_D=\{d\in\mathbb{R}^2 \mid (x_1+\alpha a-1)^2+(x_2+ab)^2\le 1,\ (x_2+ab)^2-(x_1+\alpha a)+1\le 0,\ \alpha>0\}$

d_1 该点处抛物线两切线的方向 $d_1=(-2x_2,-1)^T$，$d_2=\begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix}$

$F_S=\{d \mid d=\alpha d_1+(1-\alpha)d_2,\ 0\le\alpha\le1\}$

$F_L=\{d \mid \alpha\le\frac{\sqrt2}{-\sqrt{\sqrt5-1}}b,\ a\ge\sqrt2-\sqrt{\sqrt5-1}\,b\}$.

另一点同上点沿 $x_2=0$ 对称。

2. 求证：若 $\{a_i(x^*),\ i\in\mathcal{A}^*\}$ 线性无关，则 $F_S^*=F_L^*$，即在 x^* 处序列可行方向集与线性化可行方向集相等。

证：$a_i(x^*)=\nabla c_i(x^*)$，$A=(a_1,a_2,\cdots a_m)$

$\dim R(A)$，$\dim\ker(A)=n-m$

令 $Z=(z_1,\cdots z_{n-m})$ 为 $\ker(A)$ 的一组基。

则 $AZ=0$，考虑 $R(x,t)=\begin{pmatrix}c(x)-tAd\\ Z^T(x-x^*-td)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

则 $R(x^*,0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$　$\frac{\partial R}{\partial x}\Big|_{t=0}=\begin{pmatrix}A\\ Z^T\end{pmatrix}$ 非奇异

由隐函数定理，存在 x^* 与 $t=0$ 的邻域 D_x，D_0 使对 $\forall t\in D_0$

$\exists x_0\in D_x$ s.t. $x=x(t)$ 有唯一解，$\frac{dx}{dt}=-\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial R}{\partial t}\Big|_{D_x,D_0}$

$=\begin{pmatrix}A\\ Z^T\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}A\\ Z^T\end{pmatrix}d=d$

令 $x_k=x(t_k)$，显然 $x_k\in D$，令 $t_k\to0$，有 $x_k\to x^*$

$\frac{x_k-x^*}{\|x_k-x^*\|}\to d$，$d\in F_S$

3. 考虑约束优化问题 $\min -x_1$. s.t. $1-x_1^2-x_2^2 \geq 0$.

$x_2-(x_1-1)^2 \geq 0$.

试证明：$(1,0)^T$ 是KKT点，而 $(0,-1)^T$ 不是KKT点。

证：$(1,0)^T$ 点：$c_1(x^*) = 1-x_1^2-x_2^2 = 0 \geq 0$

$c_2(x^*) = x_2-(x_1-1)^2 = 0 \geq 0$

$\nabla f(x^*) = (-1,0)^T$，$a_1(x^*) = (-2,0)^T$，$a_2(x^*) = (0,0)^T$

则 $\nabla f(x^*) = \frac{1}{2}a_1(x^*) + a_2(x^*)$，则 $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

$c_1(x^*), c_2(x^*) = 0$ $\quad \lambda_i c_i(x^*) = 0$，$i=1,2$ 故 $(1,0)^T$ 是KKT点。

$(0,-1)^T$ 点 $\quad c_1(x^*) = 0 \quad c_2(x^*) = -2 \leq 0$

故 $(0,-1)^T$ 不是KKT点。

4. 求如下问题的KKT点，并判断这些KKT点是否为最优解

$\min (x_1+x_2)^2 + 2x_1 + x_2^2$

s.t. $x_1+3x_2 \leq 4$；$2x_1+2x_2 \leq 3$，$x_1 \geq 0$；$x_2 \geq 0$

解：$L(x,\lambda) = (x_1+x_2)^2 + 2x_1 + x_2^2 - \lambda_1(4-x_1-3x_2) - \lambda_2(3-2x_1-2x_2) - \lambda_3 x_1 - \lambda_4 x_2$

$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1+x_2)+2+\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3 = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_1+x_2)+2x_2+3\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_4 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_3-\lambda_4-4) \\ x_2 = \frac{1}{2}(-2\lambda_1-\lambda_3+\lambda_4+2) \end{cases}$

$4-x_1-3x_2 \geq 0$，$3-2x_1-2x_2 \geq 0$. $x_1 \geq 0$. $x_2 \geq 0$

$\lambda_1(4-x_1-3x_2) = \lambda_2(3-2x_1-2x_2) = \lambda_3 x_1 = \lambda_4 x_2 = 0$.

$\Rightarrow \lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_3-\lambda_4 \geq 4 \quad 2\lambda_1+\lambda_3-\lambda_4 \geq 2$.

$5\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3-2\lambda_4+6\geq 0 \quad \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3+5\geq 0$.

取 $\lambda_1=\lambda_2=x_4=0$. $\lambda_3=2$. $x_1=x_2=0$

不难算出. $(0,0)^T$ 为KKT点.

$I(x^*)=\{3,4\} \quad a_3^*=(1,0)^* \quad a_4^*(0,1)^*$

而 $Q_L^*=\{d \mid d\neq 0,\ \alpha_3^{*T}d=0\}=\{(0,d_2)^T \mid d_2>0\}$

而 $\nabla_{xx}L(x^*,x^*)=\begin{pmatrix}2&2\\2&4\end{pmatrix}$, $(0,d_2)\begin{pmatrix}2&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\d_2\end{pmatrix}=4d_2^2>0$

故 $(0,0)^T$ 是最优解

作业9

1. 考虑问题 $\min -x_1x_2x_3 \quad s.t.\ 72-x_1-2x_2-2x_3=0$

求出外点罚函数方法 $x(\sigma)$ 的显式表达式

当 $\sigma\to\infty$ 时，求出问题的最优解以及相应的 Lagrange 乘子

给出 σ 的取值范围，使矩阵 $\nabla_x^2 P_E(x(\sigma),\sigma)$ 正定

解：$P_E(x,\sigma)=-x_1x_2x_3+\frac{1}{2}\sigma(72-x_1-2x_2-2x_3)^2$

$\frac{\partial P}{\partial x_1}=-x_2x_3-\sigma(72-x_1-2x_2-2x_3)=0$

$\frac{\partial P}{\partial x_2}=-x_1x_3-2\sigma(72-x_1-2x_2-2x_3)=0$

$\frac{\partial P}{\partial x_3}=-x_1x_2-2\sigma(72-x_1-2x_2-2x_3)=0$

$\frac{\partial P}{\partial x_2}-\frac{\partial P}{\partial x_3}=x_1(x_2-x_3)=0$

$x_1=0$，则 $72-2x_2-2x_3=0 \Longrightarrow x_2+x_3=36$

代入 $\frac{\partial P}{\partial x_1}=0 \Longrightarrow x_2x_3=0$

故 $x^{(1)}=(0,36,0)^T,\ x^{(2)}=(0,0,36)^T$

$x_2=x_3$，则 $2\frac{\partial P}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}=x_1x_3-2x_2x_3=0$

① $x_2=x_3=0 \Longrightarrow x^{(3)}=(72,0,0)^T$

② $x_1=2x_2=2x_3 \triangleq 2x$

代入 $\frac{\partial P}{\partial x_1}=\frac{\partial P}{\partial x_2}=\frac{\partial P}{\partial x_3}=0 \Longrightarrow x^2-6\sigma x+72\sigma=0$

$x=3\sigma\pm3\sqrt{\sigma^2-8\sigma}$

$x(\sigma)=(\sigma-\sqrt{\sigma^2-8\sigma})(6,3,3)^T$

令 $\sigma\to\infty$，$x^*=(24,12,12)^T$ $\quad L(x,\lambda)=-x_1x_2x_3-\lambda(72-x_1-2x_2-2x_3)$

令 $\frac{\partial L}{\partial x_1}=0$, $72-x_1-2x_2-2x_3=0 \Longrightarrow \lambda^*=144$

$x^*=(24,12,12)^T$, $x_1=2x_2$, $x_2=x_3$, $\lambda=x_2^2$

$L(x,\lambda^*)=-x_1x_2x_3-144(72-x_1-2x_2-2x_3)$

$+\frac{1}{2}\sigma(72-x_1-2x_2-2x_3)^2$ 当 $\sigma>8$ 时, 正定.

2. 对问题 $\min\ 2x_1+3x_2$ s.t. $1-2x_1^2-x_2^2\geq 0$

考虑对数障碍函数方法 当 $\mu\to 0$. ~~且~~求出问题的最优解和相应的 Lagrange 乘子

解: $B(x;\mu)=2x_1+3x_2-\mu\ln(1-2x_1^2-x_2^2)$

令 $\nabla_x B_L=0$ $\begin{cases} 2+\mu\frac{4x_1}{1-2x_1^2-x_2^2}=0 \\ 3+\mu\frac{2x_2}{1-2x_1^2-x_2^2}=0 \end{cases} \Longrightarrow x_2=3x_1$, $x_1=\frac{\mu\pm\sqrt{\mu^2+11}}{11}$

$\mu\to 0$. $x_1=\frac{\sqrt{11}}{11}$ or $-\frac{\sqrt{11}}{11}$, 取 $x^*=(-\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{3}{\sqrt{11}})^T$

$L(x,\lambda)=2x_1+3x_2-\lambda(1-2x_1^2-x_2^2)$

$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2+2\lambda\cdot 2x_1=2+4\lambda x_1=0$. $\frac{\partial L}{\partial x_2}=3+2\lambda x_2=0$.

$\lambda(1-2x_1^2-x_2^2)=0$.

$1-2x_2-x_2^2\geq 0$. $\lambda\geq 0$.

代入 x^*, 有 $\lambda^*=\frac{\sqrt{11}}{2}$.

3. 对倒数障碍函数 $B_I(x,\mu)$，证明：

在点 $x_k^{(k)}$ 处，Lagrange 乘子估计为：

$$\lambda_i^{(k)} = \frac{\mu_k}{(c_i^{(k)})^2} \quad i\in I.$$

由此证明：$x^{(k)}\to x^*$，$\lambda^{(k)}\to\lambda^*$，若 $i\notin I^*$，则 $\lambda_i^{(k)}\to 0$

且 x^*,λ^* 为 KKT 对。

证：$B_L(x_k,\mu_k) = f(x_k) + \mu_k \sum_{i\in I} \frac{1}{c_i(x_k)}$

$\nabla_x B_L(x_k,\mu_k) = g(x_k) - \mu_k \sum_{i\in I} \frac{a_i(x_k)}{c_i^2(x_k)}$

记 $\lambda_k = \sum_{i\in I} \frac{\mu_k}{c_i^2(x_k)}$ $\quad A_k = (a_1(x_k), \cdots, a_m(x_k))$

则 $\nabla_x B_L(x_k,\mu_k) = g(x_k) - \lambda_k^T A_k$ 令 $k\to\infty$，有 $g(x^*) = x^{*T} A_k$

由内点障碍法的特性，x_k，x^* 必为可行点

$c_i(x^*)\geq 0$，显然 $\mu_k \geq 0$，则 $\lambda_k^{(i)} \geq 0$，$\lambda_i^* \geq 0$

由 $\lim_{k\to\infty} \mu_k \sum_{i\in I} c_i(x_k)^{-1} = 0$，有 $\lim_{k\to\infty} \sum_{i\in I} \lambda_k^{(i)} c_i(x_k) = 0$

故 $\lambda_i^* c_i(x^*) = 0$，$i\in I$

那么当 $i\notin I^*$，必然有 $\lambda_i^{(k)}\to 0$，由上知，x^*,λ^* 为 KKT 对。

作业10.

1、考虑等式约束优化问题

$$\min\ x_1^2+x_2^2+x_3^2$$
$$\text{s.t.}\ \ x_1+2x_2-x_3-4=0$$
$$x_1-x_2+x_3+2=0$$

用变量消去法、Lagrange 法解决此问题.

解：变量消去法

$G=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ $g=(0,0,0)^T$, $A^T=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

$b=(4,-2)^T$ 取 $B=\{1,3\}$ $N=\{2\}$

则 $x_1=-\frac{1}{2}x_2+1$, $x_3=\frac{3}{2}x_2-3$.

则 $\hat{q}(x_N)=\frac{1}{4}x_2^2-x_2+1+x_2^2+\frac{9}{4}x_2^2-9x_2+9$

$=\frac{7}{2}x_2^2-10x_2+10$.

极小点为 $x_2^*=-\frac{10}{7}$ 故 $x^*=(\frac{2}{7},\frac{10}{7},-\frac{6}{7})^T$.

$x^*=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/7\\6/7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\frac{10}{7}\right]=\begin{pmatrix}-\frac{2}{7}\\\frac{6}{7}\end{pmatrix}$

Lagrange 法:

$A^T\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{3}\\0&1&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 故 $N(A^T)$ 一组基为 $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1)^T$

$z^TGz=\frac{14}{9}$, 显然正定 KKT方程组为.

$Gx-A\lambda=-g$ $A^Tx=b$

$\Rightarrow x^*=(\frac{2}{7},\frac{10}{7},-\frac{6}{7})^T$ $\lambda^*=(-\frac{2}{7},\frac{6}{7})^T$