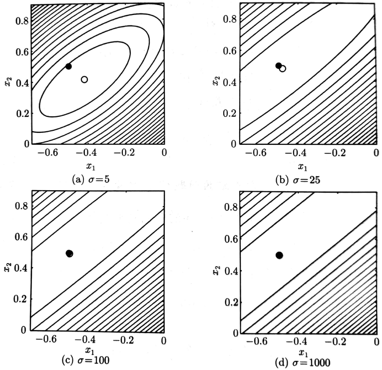
6-4 增广拉格朗日方法

罚函数病态条件

罚函数中参数σ增大将使得罚函数子问题最优解与原约束优化问题最优解趋于一致，同时也带来了对应二阶Hesse矩阵病态的问题特征，不利于算法的稳定性。



建立增广拉格朗日方法思想

外点罚函数方法的主要问题:

- $\sigma_k \to \infty$所引起的无约束最优化问题的病态性。若可以构造出来某种函数, 不要求$\sigma_k \to \infty$;
- 或者只要σ_k足够大, 此函数的极小点为原问题的最优解, 则可以避免病态问题出现.

如何构造这种函数? 假定这种函数形式为$\Phi(\boldsymbol{x}, \sigma)$,其中$\sigma > 0$为给定参数.希望优化如下问题:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}, \sigma)$$

得到原问题的最优解$\boldsymbol{x}^*$。

增广拉格朗日方法

根据无约束最优化问题目标函数在最优解处应满足条件来构造。具体地，在$\boldsymbol{x}^*$处, $\Phi(\boldsymbol{x},\sigma)$应满足一阶最优性条件：

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x}^*,\sigma)=0$$

和二阶最优性条件（基于方向导数）

$$\frac{\partial^2\Phi(\boldsymbol{x}^*,\sigma)}{\partial\boldsymbol{d}^2}>0,\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$$

其中$\boldsymbol{d}$为$\boldsymbol{x}^*$处任意非零方向.

检验罚函数是否满足条件

考虑罚函数

$$\mathrm{P_E}(\boldsymbol{x},\sigma)=f(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}\sigma\sum_{i\in\mathcal{E}}c_i^2(\boldsymbol{x})$$

计算其在可行点$\boldsymbol{x}^*$处的梯度：

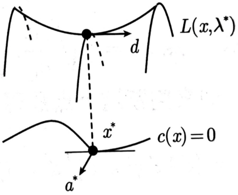
$$\nabla\mathrm{P_E}(\boldsymbol{x}^*,\sigma)=\nabla f(\boldsymbol{x}^*)+\sigma\sum_{i\in\mathcal{E}}\nabla c_i(\boldsymbol{x}^*)c_i(\boldsymbol{x}^*)=\nabla f(\boldsymbol{x}^*)$$

在罚因子固定的情况下, $\nabla f(\boldsymbol{x}^*)\neq 0$, 故$\boldsymbol{x}^*$不是无约束最优化问题的最优解，一般不能够通过求罚函数极小点得到原问题最优解.

检验拉格朗日函数

再看拉格朗日函数$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$:

- 存在KKT点$\boldsymbol{x}^*$与对应的Lagrange乘子$\boldsymbol{\lambda}^*$, 必然满足一阶最优性条件.
- 对含有一个等式约束的问题为例, 二阶条件不成立, 如下图



$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}^*)$在$\boldsymbol{x}^*$处仅沿着:

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) = 0$$

的切线方向$\boldsymbol{d}$的二阶方向导数为正, 其他方向均为负.

增广拉格朗日函数

构造思想：

在$\boldsymbol{x}^*$附近，$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}^*)$沿着方向$\boldsymbol{d}$的函数曲面保持不变，其余部分的函数曲面向上拉起，使得函数在$\boldsymbol{x}^*$处沿着任意方向的二阶方向导数均为正。这相当于当变量离开约束时, 就加大$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}^*)$的函数值. 这正是构造罚函数的思想.

增广形式：

$$\varPhi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\sigma)=f(\boldsymbol{x})-\lambda^T\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}\sigma\sum_{i\in\mathcal{E}}c_i^2(\boldsymbol{x}). \tag{6.4.1}$$

该函数也可以理解为在罚函数基础上增加了乘子项得到的，故又称为乘子罚函数法.

增广拉格朗日函数变化情况

例6.4.1 考虑等式约束优化问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = 2x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 = 0 \end{aligned}$$

分析： 以上问题的Lagrange函数形式为：

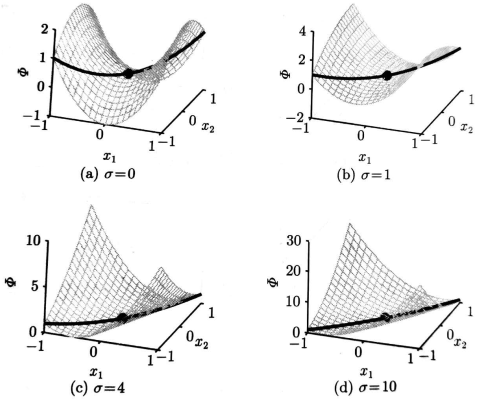
$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = 2x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 - \lambda(x_1 - x_2)$$

KKT对为$\boldsymbol{x}^* = (0,0)^T, \lambda^* = 1$. 在$\lambda^*$处，$L(\boldsymbol{x}, \lambda^*) = 2x_1^2 - x_2^2$为非正定函数. 在$\lambda^*$处的增广Lagrange函数形式：

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{x}, \lambda^*, \sigma) &= 2x_1^2 - x_2^2 + \tfrac{1}{2}\sigma(x_1 - x_2)^2 \\ &= \left(2 + \tfrac{\sigma}{2}\right) x_1^2 - \sigma x_1 x_2 + \left(\tfrac{\sigma}{2} - 1\right) x_2^2 \end{aligned}$$

增广拉格朗日函数变化情况

对应不同σ的增广Lagrange函数$\Phi(\boldsymbol{x},\lambda^*,\sigma)$



增广拉格朗日方法迭代格式

在之前例题中, $\boldsymbol{\lambda}^*$是已知的, 实际上$\boldsymbol{\lambda}^*$需要通过迭代求出. 下面具体确定迭代格式, 在第k步迭代, 当$\sigma_k, \boldsymbol{\lambda}_k$给定时, 由

$$\min_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}_k, \sigma_k)$$

可以得到$\boldsymbol{x}_k$, 并满足$\nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k, \sigma_k) = 0$, 即有

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_k) + A(\boldsymbol{x}_k)[-\boldsymbol{\lambda}_k + \sigma_k c(\boldsymbol{x}_k)] = 0. \tag{6.4.2}$$

这里:

$$A(\boldsymbol{x}_k) = [\nabla c_1(\boldsymbol{x}_k), \cdots, \nabla c_m(\boldsymbol{x}_k)]$$

增广拉格朗日方法

当σ_k足够大时，有

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_k) \approx \nabla f(\boldsymbol{x}^*), \quad A(\boldsymbol{x}_k) \approx A(\boldsymbol{x}^*)$$

结合(6.4.2)与KKT条件$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \nabla c(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{\lambda}^* = 0$，可得到：

$$\boldsymbol{\lambda}^* \approx \boldsymbol{\lambda}_k - \sigma_k \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_k)$$

于是得到求$\boldsymbol{\lambda}^*$的迭代格式：

$$\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_k - \sigma_k \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_k) \tag{6.4.3}$$

增广拉格朗日方法

比较罚函数与增广Lagrange函数的乘子关系，可以分析二者的差别，当k充分大时

- 罚函数

$$c_i(\boldsymbol{x}_k) \approx -\frac{1}{\sigma_k}\lambda_i^*, \quad i \in \mathcal{E} \tag{6.4.4}$$

- 增广Lagrange函数

$$c_i(\boldsymbol{x}_k) \approx \frac{1}{\sigma_k}(\lambda_i^* - \lambda_i^{(k)}), \quad i \in \mathcal{E} \tag{6.4.5}$$

比较这两个式子可以发现，只要σ_k充分大，$\boldsymbol{\lambda}_k$充分接近$\boldsymbol{\lambda}^*$,乘子罚函数方法得到的$\boldsymbol{x}_k$比罚函数方法得到的$\boldsymbol{x}_k$更接近于可行点。

增广拉格朗日函数方法步骤

算法6.4.1 增广拉格朗日函数方法

步1 给定初始点$\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{\lambda}_1$, $\sigma_1 > 0$, $\rho > 1$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $k = 1$.

步2 以$\boldsymbol{x}_{k-1}$为初始点, 求解:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}_k, \sigma_k)$$

得$\boldsymbol{x}_k$, 且满足:

$$\|\nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k, \sigma_k)\| < \varepsilon_1.$$

步3 $\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_k - \sigma_k \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_k)$;

步4 若$\|\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}_k)\| \leq \varepsilon$, 则停止迭代，得近似解$\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}$; 否则, $k := k + 1$, 取$\sigma_{k+1} = \rho\sigma_k$, 转步2.

定理 6.4.1 等式约束最优解充分条件与必要条件.

设$\boldsymbol{x}^*$是等式约束优化问题(6.3.1)的严格局部最优解, $\boldsymbol{\lambda}^*$为对应的最优拉格朗日乘子, 在$\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*$处最优性的二阶充分条件满足, 则存在$\sigma^* \geq 0$, 对给任何$\sigma \geq \sigma^*$, $\boldsymbol{x}^*$是增广拉格朗日函数$\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \sigma)$的严格局部极小点; 反之, 若$c_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 (i = 1, \ldots, m)$, $\boldsymbol{x}^*$是$\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \sigma)$的局部极小点，则$\boldsymbol{x}^*$是等式约束优化问题(6.3.1)的局部极小点。

证明：由$\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma)$的定义知：

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma) = \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) + \sigma A(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) \tag{a1}$$

$$\nabla^2_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma) = \nabla^2_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) + \sigma A(\boldsymbol{x}) A(\boldsymbol{x})^T + \sigma \sum_{i \in \mathcal{E}} c_i(\boldsymbol{x}) \nabla^2 c_i(\boldsymbol{x}). \tag{a2}$$

定理6.4.1证明

证明续：因为$\boldsymbol{x}^*$为严格局部最优解，由KKT条件与$\boldsymbol{x}^*$的可行性有：

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \sigma) = \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0$$

$$\nabla^2_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \sigma) = \nabla^2_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) + \sigma A(\boldsymbol{x}^*) A(\boldsymbol{x}^*)^T.$$

由约束优化二阶最优性充分条件有：

$$\boldsymbol{d}^T \nabla^2_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \boldsymbol{d} > 0, A(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{d} = 0, \boldsymbol{d} \neq 0.$$

由教材引理7.3(202页)知，存在$\sigma^* \geq 0$，对任意$\sigma \geq \sigma^*$，有$\nabla^2_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) + \sigma A(\boldsymbol{x}^*) A(\boldsymbol{x}^*)^T$正定，从而$\boldsymbol{x}^*$是$\min \Phi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \sigma)$的严格局部最优解。

反之，已知$\boldsymbol{x}^*$是可行点，设$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{x}^*$充分接近，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$，则有：

$$\Phi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \sigma) \leq \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \sigma)$$

定理6.4.1证明

证明续：由$\boldsymbol{x}^*$与$\boldsymbol{x}$的可行性知：

$$\Phi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \sigma) = f(\boldsymbol{x}^*), \quad \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*, \sigma) = f(\boldsymbol{x}).$$

则对与$\boldsymbol{x}^*$充分接近的$\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$, 有：

$$f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x}),$$

即$\boldsymbol{x}^*$是问题(6.3.1)的局部最优解。 ■

例题分析

重新考虑**例** 6.3.1, 其增广拉格朗日函数为:

$$\Phi(\boldsymbol{x},\lambda,\sigma)=f(\boldsymbol{x})-\lambda(x_1-x_2)+\frac{1}{2}\sigma(x_1-x_2)^2$$

对$\lambda^*=1$, 有:

$$\begin{aligned}
&\Phi(\boldsymbol{x},\lambda^*,\sigma)=2x_1^2-x_2^2+\tfrac{1}{2}\sigma(x_1-x_2)^2,\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=(4+\sigma)x_1-\sigma x_2,\\
&\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=(\sigma-2)x_2-\sigma x_1
\end{aligned}$$

当$\sigma>4$时, $\nabla_x^2\Phi(\boldsymbol{x},\lambda^*,\sigma)$正定, 显然$\boldsymbol{x}^*=(0,0)^T$是$\Phi(\boldsymbol{x},\lambda^*,\sigma)$的严格局部极小点.

例题分析

反之, $\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma)$的局部极小点为:

$$x_1 = \frac{1-\lambda}{\sigma-4}, \quad x_2 = 2\frac{1-\lambda}{\sigma-4}$$

若要满足约束条件, 只有:

$$\lambda = 1, \text{即} x_1^* = x_2^* = 0$$

是约束优化问题的最优解.

一般约束优化问题松弛

引入松弛变量$\boldsymbol{s}_i, i \in \mathcal{I}$, 化一般约束优化问题(6.1.1)为松弛问题：

$$\begin{aligned}
\min \quad & F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) = f(\boldsymbol{x}) & & \quad (6.4.11a)\\
\text{s.t.} \quad & c_i(\boldsymbol{x}) = 0, & i \in \mathcal{E}, & \quad (6.4.11b)\\
& c_i(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{s}_i = 0, & i \in \mathcal{I} & \quad (6.4.11c)\\
& \boldsymbol{s}_i \geq 0, & i \in \mathcal{I} & \quad (6.4.11d)
\end{aligned}$$

不考虑松弛变量的非负约束，则增广拉格朗日函数为：

$$\bar{\Phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma) = f(x) - \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i c_i(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\sigma \sum_{i \in \mathcal{E}} c_i^2(\boldsymbol{x}) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \bar{\phi}_i \quad (6.4.12)$$

其中

$$\bar{\phi}_i = -\lambda_i(c_i(\boldsymbol{x}) - s_i) + \frac{1}{2}\sigma(c_i(\boldsymbol{x}) - s_i)^2$$

增广拉格朗日函数方法

带松弛变量非负约束的增广拉格朗日函数最优化问题为：

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}} \quad & \bar{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\lambda},\sigma), \\ \text{s.t.} \quad & s_i \ge 0, i \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{6.4.13}$$

以上问题增加了$m-m'$个变量，需要将该问题化简，消去所有松弛变量。考虑等价问题：

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \min_{\boldsymbol{s}} \quad & \bar{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\lambda},\sigma), \\ \text{s.t.} \quad & s_i \ge 0, i \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{6.4.14}$$

通过求解以下问题：

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{s}} \quad & \bar{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\lambda},\sigma), \\ \text{s.t.} \quad & s_i \ge 0, i \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{6.4.15}$$

得到$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$的解析表达式。

增广拉格朗日函数方法

将$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$代入$\bar{\Phi}$，就可以消去$\boldsymbol{s}$，使得：

$$\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma) = \bar{\Phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\lambda}, \sigma)$$

易验证，在问题(6.4.15)中，$\bar{\Phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma)$是关于$\boldsymbol{s}$的凸函数. $\bar{\Phi}$关于s的稳定点即为极小点，所以由$\nabla_{\boldsymbol{s}}\bar{\Phi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma) = 0$，即：

$$\frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial s_i} = \lambda_i - \sigma c_i(\boldsymbol{x}) + \sigma s_i = 0, \quad i \in \mathcal{I}$$

由此解出$\boldsymbol{s}$，即：

$$s_i = c_i(x) - \eta_i, \quad i \in \mathcal{I}$$

其中$\eta_i = \lambda_i/\sigma$。

增广拉格朗日函数方法

考虑s_i的非负约束，问题(6.4.15)的解析表达式为：

$$s_i = \max\{c_i(x) - \eta_i, 0\}, \quad i \in \mathcal{I} \tag{6.4.16}$$

令$\phi_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma) = \bar{\phi}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\lambda}, \sigma)$，则有：

$$\phi_i = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sigma\eta_i^2 & c_i(\boldsymbol{x}) - \eta_i \geq 0 \\ \frac{1}{2}\sigma\left[(c_i(\boldsymbol{x}) - \eta_i)^2 - \eta_i^2\right] & c_i(\boldsymbol{x}) - \eta_i < 0 \end{cases} \tag{6.4.17}$$

由此得到化简后的增广拉格朗日函数：

$$\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{i\in\mathcal{E}} \lambda_i c_i(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\sigma \sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(\boldsymbol{x}) + \sum_{i\in\mathcal{I}} \phi_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \sigma) \tag{6.4.18}$$

增广拉格朗日函数方法乘子迭代格式

假定第k步迭代已知$\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k, \sigma_k$，求$\boldsymbol{\lambda}_{k+1}$的迭代格式如下：

$$
\begin{aligned}
\lambda_i^{(k+1)} &= \lambda_i^{(k)} - \sigma_k c_i(\boldsymbol{x}_k), && i \in \mathcal{E} \\
\lambda_i^{(k+1)} &= \lambda_i^{(k)} - \sigma_k [c_i(\boldsymbol{x}_k) - s_i^{(k)}], && i \in \mathcal{I}
\end{aligned}
$$

进一步化简后，有：

$$\lambda_i^{(k+1)} = -\sigma_k \min\left\{(c_i(\boldsymbol{x}_k) - \eta_i^{(k)}, 0)\right\} \qquad (6.4.19)$$

这里$\eta_i^{(k)} = \frac{\lambda_i^{(k)}}{\sigma_k}$.

增广拉格朗日函数方法乘子终止准则

由等式约束最优化终止准则：

$$\left[\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(\boldsymbol{x}_k) + \sum_{i\in\mathcal{I}} \left(c_i(\boldsymbol{x}_k) - s_i^{(k)}\right)^2\right]^{1/2} \leq \epsilon \tag{6.4.20}$$

简化后有：

$$\left[\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(\boldsymbol{x}_k) + \sum_{i\in\mathcal{I}} \min\left\{c_i(\boldsymbol{x}_k), \eta_i^{(k)}\right\}^2\right]^{1/2} \leq \epsilon \tag{6.4.21}$$

数值实验

考虑以下三个约束优化问题：

问题 1

$$\begin{aligned} &\min f(x) = -1, \\ &\text{s.t. } x_1^2 + x_2^2 - 25 = 0, \\ &\qquad x_1 x_2 - 9 = 0. \end{aligned}$$

问题 2

$$\begin{aligned} &\min f(x) = -x_1, \\ &\text{s.t. } x_2 - x_1^3 - x_3^2 = 0, \\ &\qquad x_1^2 - x_2 - x_4^2 = 0. \end{aligned}$$

问题 3

$$\begin{aligned} &\min f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 7x_1 - 7x_2, \\ &\text{s.t. } 25 - 4x_1^2 - x_2^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

无约束优化算法：BFGS方法与非精确强Wolfe线性搜索，终止准则$|f_{k-1} - f_k| \leq 10^{-8}$

数值实验

问题	方法	ite	feva	μ_k	$\|x^{(k)}-x^*\|_\infty$
问题 1	外点罚函数方法	4	76	1.0e − 03	2.7076e − 01
	增广 Lagrange 函数方法	5	68	1.0e − 04	2.7076e − 01
问题 2	外点罚函数方法	10	137	1.0e − 10	1.1502e − 08
	增广 Lagrange 函数方法	6	93	1.0e − 06	4.8881e − 12
问题 3	障碍函数方法	9	178	1.0e − 09	3.9048e − 06
	增广 Lagrange 函数方法	4	274	1.0e − 04	9.4892e − 06

总体来讲，增广拉格朗日方法需要较少的外层迭代次数, 与罚函数法相比，需要更少的函数值计算次数。