Symulacje Monte Carlo

Przykłady zastosowań w R

Stanisław Ochotny

UBS Credit Methodology – FI / Corporates

Plan zajęć

1. Monte Carlo - wprowadzenie
2. Oferta stażu
3. Wycena instrumentów finansowych
4. Redukcja wariancji

Monte Carlo - wprowadzenie

Monte Carlo - wprowadzenie

Duża część zastosowań metod MC wiąże się z obliczaniem całek lub sum. Typowe zadanie polega na obliczeniu wartości oczekiwanej:

$$\theta = \mathbb{E}_\pi f(X) = \int_{\mathcal{X}} f(x)\pi(dx)$$

gdzie X jest zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa π na przestrzeni $\mathcal{X}$, zaś $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.

Monte Carlo - wprowadzenie

Jeżeli dysponujemy możliwością generowania niezależnych zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa π, za estymator wartości oczekiwanej możemy wziąć średnią z próbki:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Mocne Prawo Wielkich Liczb gwarantuje, że $\hat{\theta} \to \theta$, gdy $n \to \infty$.

Monte Carlo - wprowadzenie

Z centralnego twierdzenia granicznego wnioskujemy, że:

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}-\theta\right) \rightarrow N\left(0, \sigma^2\right)$$

w sensie zbieżności według rozkładu.

Nieobciążonym estymatorem wariancji jest:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\hat{\theta}\right)^2$$

Przedział ufności na poziomie $1-\alpha$ ma postać:

$$\left[\hat{\theta}-\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), \hat{\theta}+\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\right]$$

Przykład – liczba π

Niech $\mathcal{X} = [0,1] \times [0,1]$ i zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na $\mathcal{X}$.

Definiujemy zmienną losową:

$$\mathbf{1}_{X^2+Y^2 \leqslant 1} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } X^2 + Y^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wówczas, wprost z definicji wartości oczekiwanej otrzymujemy:

$$\mathbb{E}\, \mathbf{1}_{X^2+Y^2 \leqslant 1} = \frac{\pi}{4}$$

Korzystając z tego, możemy wyznaczyć liczbę π stosując metodę Monte Carlo.

Przykład – całka oznaczona

Metodę Monte Carlo wykorzystuje się do obliczania całek oznaczonych:

$$I = \int_{\Omega} f(\mathsf{x}) d\mathsf{x}$$

gdzie $\Omega \in \mathbb{R}^m$ ma miarę:

$$V = \int_{\Omega} d\mathsf{x}$$

Niech X ma rozkład jednostajny na Ω.

Generując n niezależnych realizacji zmiennej losowej X, całkę oznaczoną możemy przybliżyć jako:

$$\hat{I} = V \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\mathsf{x}_i)$$

Oferta stażu

Staż w zespole metodologii ryzyka kredytowego

Internship in Credit Methodology team:

Gdzie aplikować: ubs.com/polandcareers

Numer referencyjny: 146947BR

Zasady:

- staż trwa od 3 do 6 miesięcy,
- praca 30-40 godzin w tygodniu,
- stażysta otrzymuje wynagrodzenie.

Wymagania:

- bardzo dobra znajomość R,
- dobra znajomość statystyki i ekonometrii,
- dobra znajomość angielskiego.

Wycena instrumentów finansowych

Wycena instrumentów finansowych

Cenę instrumentu pochodnego wyznacza się jako:

$$\Pi_0 = \exp(-rT)\, \mathbb{E}^Q f(S_T)$$

gdzie f jest funkcją wypłaty zależną od ceny S_T instrumentu bazowego, T jest czasem w którym następuje wypłata, r jest stopą procentową wolną od ryzyka, a Q miarą martyngałową.

Wycena przy pomocy metody Monte Carlo sprowadza się do symulowania przyszłej wartości S_T instrumentu bazowego i przybliżenia wartości oczekiwanej wypłaty w powyższym wzorze przez:

$$\mathbb{E}^Q f(S_T) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(s_T)$$

Europejska opcja kupna

W przypadku europejskiej opcji kupna przyjmuje się:

$$f(S_T) = (S_T - K)^+$$

gdzie K jest ceną wykonania opcji, oraz że przyszłe wartości instrumentu bazowego opisane są zmienną losową:

$$S_T = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\xi\right)$$

gdzie σ jest zmiennością instrumentu bazowego, a $\xi \sim N(0,1)$.

Rozwiązanie analityczne:

$$C = \Phi(d_1)S_0 - \Phi(d_2)K\exp(-rT)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, d_2 = d_1 - \sigma T$$

Redukcja wariancji

Zmienne antytetyczne

Estymujemy wielkość $\theta = \mathbb{E}_\pi f(X)$. Jeżeli mamy zmienne losowe X i X' o jednakowym rozkładzie π, które nie są niezależne, to:

$$\mathrm{Var}\,\frac{f(X)+f(X')}{2} = \frac{1}{2}\sigma^2_{f(X)}(1+\rho_{f(X),f(X')})$$

Widać więc, że w przypadku, gdy $\rho_{X,X'} < 0$, to wariancja w powyższym wzorze jest mniejsza niż w przypadku niezależności zmiennych X i X'.

Zatem, stosując estymację metodą Monte Carlo, zamiast generować n niezależnych realizacji zmiennej losowej X, lepiej generować pary realizacji zmiennej X, które będą ujemnie skorelowane.

Zmienne kontrolne

Estymujemy wielkość $\theta^{(1)} = \mathbb{E}_\pi f(X)$. Załóżmy, że znamy także wielkość $\theta^{(2)}$, skorelowaną z $\theta^{(1)}$, którą potrafimy zarówno symulować metodą Monte Carlo, jak i wyznaczyć analitycznie.

Wówczas $\theta^{(1)}$ możemy estymować przy pomocy schematu:

$$\left\{\hat{\theta}_i^{(1)} + \beta\left(\hat{\theta}_i^{(2)} - \theta^{(2)}\right), i = 1, \ldots, n\right\}$$

Wariancja w tym przypadku wynosi:

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}^{(1)} + \beta\left(\hat{\theta}_i^{(2)} - \theta^{(2)}\right)\right) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}^{(1)}) + \beta^2\mathrm{Var}(\hat{\theta}^{(2)}) + 2\beta\mathrm{Cov}\left(\hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}\right)$$

Zmienne kontrolne

Metoda poprawia wariancję estymatora $\hat{\theta}^{(1)}$ gdy:

$$\beta^2 \mathrm{Var}(\hat{\theta}^{(2)}) + 2\beta \mathrm{Cov}\left(\hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}\right) < 0$$

Optymalną wartość $\beta*$ parametru β znajdujemy przez jako:

$$\beta^* = \frac{-\mathrm{Cov}\left(\hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}\right)}{\mathrm{Var}(\hat{\theta}^{(2)})}$$

Podstawiając $\beta*$, wariancję estymatora $\hat{\theta}^{(1)}$ znajdujemy jako:

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\theta}^{(1)} + \beta\left(\hat{\theta}_i^{(2)} - \theta^{(2)}\right)\right) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}^{(1)})\left(1 - \rho^2_{\hat{\theta}^{(1)}, \hat{\theta}^{(2)}}\right)$$

Zmienne kontrolne

W przypadku opcji azjatyckiej, opcja wypłaty przyjmuje postać:

$$f(S_t) = \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} S_{t_j} - K \right)^+$$

W tym przypadku nie znamy rozwiązania analitycznego, więc do wyceny opcji musimy użyć metody Monte Carlo. Jako zmienną kontrolną możemy użyć opcji azjatyckiej na średnią geometryczną, gdzie wzory analityczne wyglądają następująco:

$$\theta^{(2)} = S_0 \exp\left((a - r)T\right) \Phi(d_1) - K \exp(-rT) \Phi(d_2)$$

gdzie:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (a + \sigma_a^2/2)T}{\sigma_a \sqrt{T}}, d_2 = d_1 - \sigma_a \sqrt{T}, a = \frac{r - \sigma^2/6}{2}, \sigma_a = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}$$