

Symulacje w finansach - Część 1 - Notatki

Olga Bączkowska

13 marca 2018

Metoda Monte Carlo - przypomnienie

Najczęstszym sposobem użycia metody Monte Carlo w matematyce finansowej jest obliczanie wartości oczekiwanej zmiennej losowej $\psi(X)$, gdzie $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mając rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X zadany gęstością $f_X(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Estymator takich wartości oczekiwanych ma postać $\hat{\alpha}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi(x_i)$, gdzie x_i są niezależnymi próbkami losowymi z rozkładu f_X .

Przy odpowiednich założeniach:

- Mocne Prawo Wielkich Liczb zapewnia mocną zgodność estymatora to znaczy $\mathbb{E}(\hat{\alpha}_N) \rightarrow \mathbb{E}(\psi(X))$ z prawdopodobieństwem 1.
- Na podstawie Centralnego Twierdzenia Granicznego: $\hat{\alpha}_N \xrightarrow{d} N\left(\mathbb{E}(\psi(X)), \frac{\sigma(\psi(X))}{\sqrt{N}}\right)$. To samo zachodzi gdy zastąpimy (często nieznane) $\sigma(\psi(X))$ odchyleniem standardowym próbki $\psi(x_i)$ - s_N . Wyrażenie $\frac{s_N}{\sqrt{N}}$ nazywamy błędem standardowym. Możemy wyznaczyć przedział ufności dla $\mathbb{E}(\psi(X))$ na poziomie δ :

$$\left(\hat{\alpha}_N - z_{\delta/2} \frac{s_N}{\sqrt{N}}, \hat{\alpha}_N + z_{\delta/2} \frac{s_N}{\sqrt{N}} \right), \text{ gdzie } z_{\delta} : N(z_{\delta}) = 1 - \delta.$$

Symulacja ścieżek procesu Wienera

Standardowy proces Wienera (ruch Browna) $(W_t)_{t \geq 0}$ to proces stochastyczny spełniający następujące warunki:

1. $W(0) = 0$;
2. odwzorowanie $t \rightarrow W(t)$ jest ciągle z prawdopodobieństwem 1;
3. przyrosty $W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_k) - W(t_{k-1})$ są niezależne dla każdego k i każdego $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq T$;
4. $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$ dla dowolnych $0 \leq s \leq t$;

Z definicji wiemy, że $W(t) \sim N(0, t)$. Żeby wysymulować n realizacji procesu Wienera w punkcie t (np. na potrzeby wyceny opcji typu europejskiego) wystarczy więc wylosować n próbek ze standardowego rozkładu normalnego i przeskalować o \sqrt{t} .

Często pojawia się potrzeba dyskretyzacji i symulacji całych ścieżek procesów np. do:

- wyceny opcji o wypłacie zależnej od ścieżek (np. azjatyckich, amerykańskich),
- wyceny w modelach krótkiej stopy procentowej,
- wyznaczania profili ekspozycji kredytowej.

Niech $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$ będzie podziałem odcinka $[0, T]$.

Bezpośrednio z definicji wiemy, że przyrosty $W(t_{i+1}) - W(t_i)$, $i = 0, \dots, n-1$ są od siebie niezależne i mają rozkłady $N(0, t_{i+1} - t_i)$. Mamy więc

$$W(t_{i+1}) = W(t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad Z_{i+1} \text{ i.i.d. } N(0, 1).$$

Taka dyskretyzacja jest dokładna w tym sensie, że łączny rozkład $[W(t_1), \dots, W(t_n)]$ jest taki sam jak odpowiadającego mu procesu Wienera w punktach t_1, \dots, t_n .

Inny przykład "dokładnej" dyskretyzacji

Geometryczny ruch Browna (proces cen akcji w modelu Blacka-Scholesa) jest określony równaniem

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad S(0) = S_0, \quad r, \sigma - \text{stałe},$$

o rozwiązaniu

$$S(t) = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\}$$

Możemy więc skorzystać z faktu, że

$$\begin{aligned} S(t_{i+1}) &= S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_{i+1} - t_i + t_i) + \sigma (W(t_{i+1}) - W(t_i) + W(t_i)) \right\} \\ &= S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_{i+1} - t_i) + \sigma (W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right\} \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t_i + \sigma W(t_i) \right\} \\ &= S(t_i) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (t_{i+1} - t_i) + \sigma Z_{i+1} \right\}, \\ &\quad i = 0, \dots, n-1, \quad Z_{i+1} \text{ i.i.d. } N(0, 1) \end{aligned}$$

Ogólne metody dyskretyzacji

Rozważmy ogólny przypadek procesu $(X_t)_{t \geq 0}$ zadanego równaniem

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t), \quad X(0) = X_0.$$

O a i b zakładamy, że spełniają warunki konieczne dla istnienia unikalnego rozwiązania.

Mamy

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(X(u))du + \int_0^t b(X(u))dW(u)$$

czyli

$$X(t+h) - X(t) = \int_t^{t+h} a(X(u))du + \int_t^{t+h} b(X(u))dW(u).$$

Biorąc rozwinięcie Taylora pierwszego rzędu

$$(1) = \int_t^{t+h} a(X(u))du \approx a(X(t))h,$$

$$(2) = \int_t^{t+h} b(X(u))dW(u) \approx b(X(t)) (W(t+h) - W(t)),$$

Dostajemy **schemat Eulera**:

$$\begin{aligned} \hat{X}(t_{i+1}) &= \hat{X}(t_i) + a(\hat{X}(t_i))(t_{i+1} - t_i) + b(\hat{X}(t_i))\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1} \\ i &= 0, \dots, n-1, \quad Z_{i+1} \text{ i.i.d. } N(0, 1) \end{aligned}$$

Żeby uzyskać lepszą aproksymację całki (2) zastosujemy wzór Ito do $b(X_t)$:

$$db(X_t) = \left(b'(X(t))a(X(t)) + \frac{1}{2}b''(X(t))b^2(X(t)) \right) dt + b'(X(t))b(X(t))dW(t).$$

Wykorzystując teraz schemat Eulera do $b(X(t))$ mamy

$$\begin{aligned} b(X(t+h)) &= b(X(t)) + \left(b'(X(t))a(X(t)) + \frac{1}{2}b''(X(t))b^2(X(t)) \right) h \\ &\quad + b'(X(t))b(X(t))(W(t+h) - W(t)) \\ &\approx b(X(t)) + b'(X(t))b(X(t))(W(t+h) - W(t)). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} (2) &\approx b(X(t))(W(t+h) - W(t)) + b'(X(t))b(X(t)) \int_t^{t+h} W(u) - W(t) dW(u) \\ &= \frac{1}{2}((W(t+h) - W(t))^2 - 1). \end{aligned}$$

Podstawiając to wyrażenie za całkę (2) otrzymujemy **schemat Milsteina**:

$$\begin{aligned} \hat{X}(t_{i+1}) &= \hat{X}(t_i) + a(\hat{X}(t_i))(t_{i+1} - t_i) + b(\hat{X}(t_i))\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1} \\ &\quad + \frac{1}{2}b'(\hat{X}(t_i))(t_{i+1} - t_i)(Z_{i+1}^2 - 1), \\ i &= 0, \dots, n-1, \quad Z_{i+1} \text{ i.i.d. } N(0, 1) \end{aligned}$$

Aby porównać błąd aproksymacji metod Eulera i Milsteina dla ułatwienia przyjmijmy, że mamy podział odcinka $[0, T]$ na n równych części o kroku h , tzn.

$$t_1 = h, \quad t_2 = 2h, \quad \dots, \quad t_n = nh$$

To samo zachodzi przy dowolnych podziałach kiedy $\max_{i=0,\dots,n-1}(t_{i+1} - t_i)$ zbiega do 0 wraz z n . Przez silną zbieżność rzędu γ metody numerycznej rozumiemy, że

$$\mathbb{E}(|X(T) - \hat{X}(hn)|) \leq c_T h^\gamma,$$

gdzie c_T jest stałą zależną od T , a X jest dokładnym rozwiązaniem równania.

Jeśli mamy zbieżność metody numerycznej rzędu γ i zmniejszamy krok czasowy k razy, to błąd aproksymacji zmniejsza się k^γ razy. To znaczy, że jeśli rząd wynosi 1, jeśli chcemy zmniejszyć błąd 100 razy musimy zmniejszyć krok symulacji 100 razy, jeśli rząd wynosi 0.5, to musimy zmniejszyć krok $100^2 = 10000$ razy.

Przy odpowiednich założeniach dotyczących funkcji a i b (np. istnienie i ciągłość pochodnych, warunek Lipschitza):

- Schemat Eulera jest mocno zbieżny z rzędem 0.5.
- Schemat Milsteina jest mocno zbieżny z rzędem 1.

Przykład Dla procesu Coxa-Ingersola-Rubensteina (CIR) zadanego równaniem

$$dX(t) = \kappa(\theta - X(t))dt + \sigma\sqrt{X(t)}dW(t), \quad \kappa, \theta, \sigma - \text{stałe}$$

dyskretyzacja Eulera ma postać

$$\begin{aligned} \hat{X}(t_{i+1}) &= \hat{X}(t_i) + \kappa(\theta - \hat{X}(t_i))(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{\hat{X}(t_i)}\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1} \\ i &= 0, \dots, n-1, \quad Z_{i+1} \text{ i.i.d. } N(0, 1) \end{aligned}$$

a dyskretyzacja Milsteina

$$\begin{aligned} \hat{X}(t_{i+1}) &= \hat{X}(t_i) + \kappa(\theta - \hat{X}(t_i))(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{\hat{X}(t_i)}\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1} \\ &\quad + \frac{1}{4}\sigma^2(t_{i+1} - t_i)(Z_{i+1}^2 - 1) \\ i &= 0, \dots, n-1, \quad Z_{i+1} \text{ i.i.d. } N(0, 1) \end{aligned}$$

Symulacja ścieżek skorelowanych procesów Wienera

Niech $(W_1(t))_{t \geq 0}$ i $(W_2(t))_{t \geq 0}$ oznaczają dwa niezależne od siebie procesy Wienera i niech $\rho \in [-1, 1]$. Wtedy

$$\begin{aligned} \tilde{W}_1 &= W_1, \\ \tilde{W}_2 &= \rho W_1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_2 \end{aligned}$$

są procesami Wienera skorelowanymi ze współczynnikiem korelacji ρ

W ogólnym przypadku, korzystając z faktu, że

$$Z \sim N_k(0, I) \Rightarrow X = JZ \sim N_k(0, JJ^T),$$

chcąc symulować próbki z wielowymiarowego rozkładu normalnego z macierzą kowariancji Σ musimy znaleźć J , takie że $JJ^T = \Sigma$.

Co możemy przenieść na procesy Wienera: $[\tilde{W}_1(t), \dots, \tilde{W}_k(t)]^T = J[W_1(t), \dots, W_k(t)]^T$ są skorelowane a ich macierz kowariancji jest Σ jeżeli J jest takie, że $JJ^T = \Sigma$

Metody wyznaczania "pierwiastka" z macierzy:

- dekompozycja Cholesky'ego: Dla dodatnio-określonej, symetrycznej macierzy A istnieje rzeczywista macierz L taka, że $A = L^T L$. Macierz L jest dolną macierzą trójkątną, a jej konstrukcja jest opisana algorytmem Cholesky'ego-Banachiewicza.
- dekompozycja głównych składowych (SVD): Symetryczną, nieujemnie określoną macierz A można przedstawić w postaci

$$A = V S V^T$$

gdzie U jest macierzą ortonormalną ($V^T = V^{-1}$), której kolumny są wektorami własnymi A , a macierz $S = \text{diag}([s_1, \dots, s_l, s_i]$ to macierz diagonalna złożona z wartości własnych A . Wtedy

$$J = V S^{1/2} V^T, \quad S^{1/2} = \text{diag}[(\sqrt{s_1}, \dots, \sqrt{s_k})]$$

jest symetryczną, nieujemnie określoną macierzą taką, że $A = J J^T$.

Bibliografia

- [1] P. Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2003.
- [2] P. Jäckel, *Monte Carlo Methods in Finance*, Wiley, 2002.