

考试大作业 报告

521021910595 袁翊天

1. Libraries

- mygl3：我远古时期造的OpenGL轮子
 - gcem：拿来做constexpr的数学运算的，其实不用也没啥问题
 - glm：数学库
 - gl3w：OpenGL core profile loader
 - glfw：窗口库
 - stb_image：材质加载
-

2. 操作方法

- 按键S：切换弹珠
 - 按键F：切换火球
 - 不倒翁可以拖动：
 - 若鼠标在重心下则平移
 - 若鼠标在重心上则旋转
-

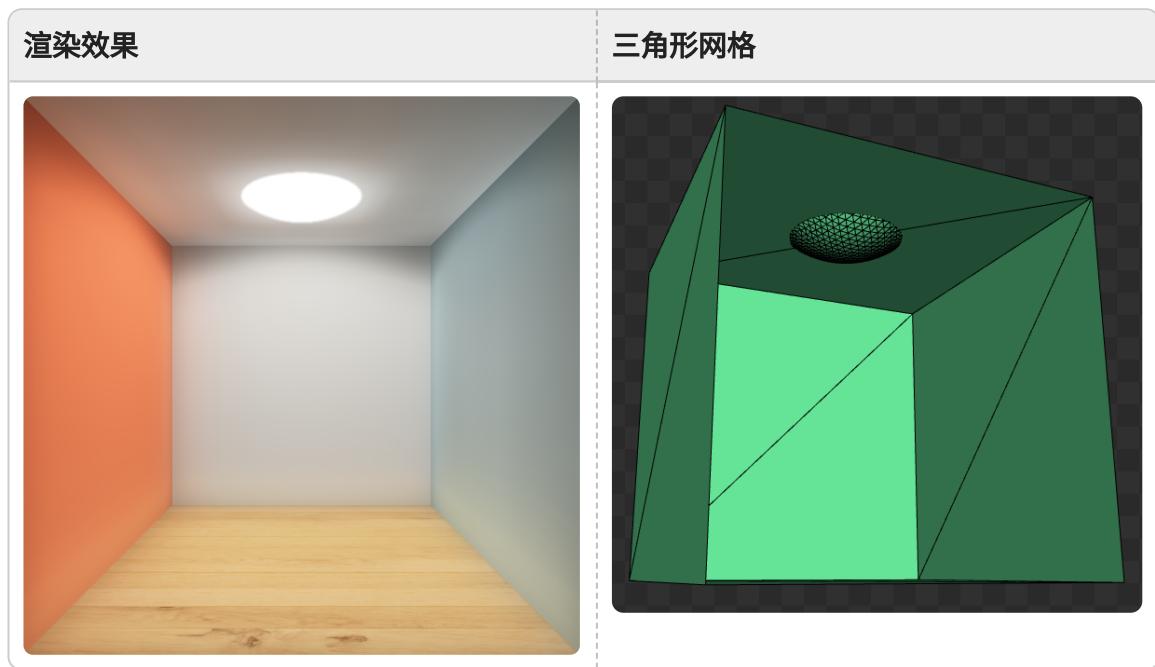
3. 具体工作

1. Cornell Box场景建模
2. 不倒翁的建模

3. 不倒翁与球体的有向距离场 (SDF) 计算
 4. 不倒翁、小球、Cornell Box边界的碰撞检测
 5. 物体碰撞后的物理响应
 6. 基于不倒翁SDF Ray Cast的鼠标选取与交互
 7. 火球、碰撞火花、灰烬的粒子效果
 8. GBuffer延迟渲染
 9. 通过Shadow Map实现阴影
 10. 使用Voxel Cone Tracing实现全局光照效果
 11. 发光体的泛光效果
-

4. Cornell Box场景建模

本次作业中首先构建了经典的Cornell Box场景，如下图所示：



其中左右的墙面分别设置为橙色和天蓝色；地面贴上木纹材质；天花板光源的半球面使用Icosphere生成（取Cornell Box内的三角形面片）。

本次作业中Cornell Box的坐标范围为 $[-1, 1]^3$ ，这是对所有物体的坐标范围限制。

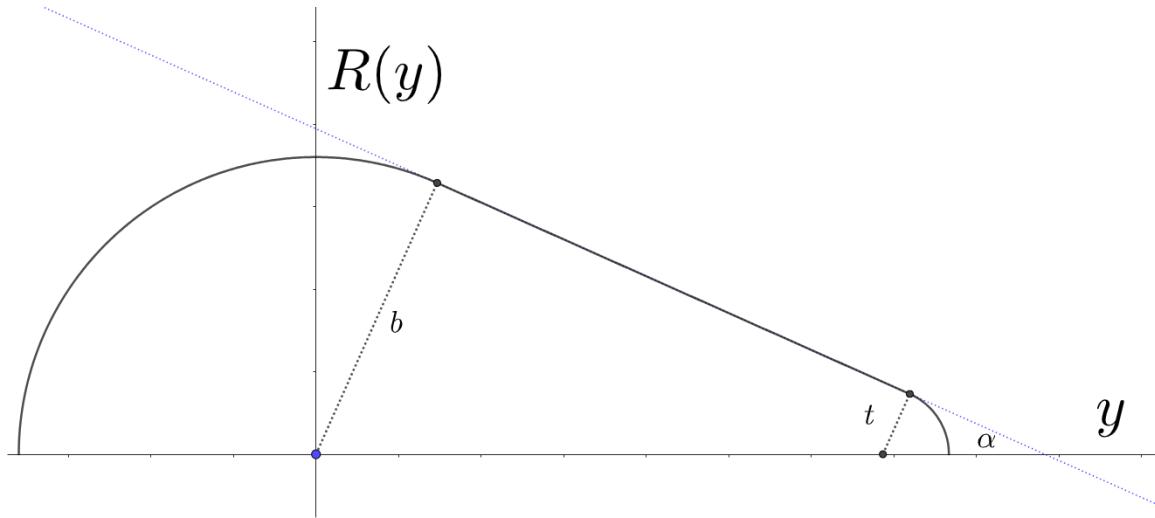
5. 不倒翁的建模

5.1 数学表示

本次作业中使用数学方法对不倒翁进行建模。这是由于不倒翁需要碰撞检测、物理响应、同时与鼠标交互，使用老师提供的不倒翁模型不够灵活高效（可能需要分析Mesh数据，很麻烦）。

本次作业中使用上下两个球面和连接两个球面的圆锥面构建不倒翁。又由于不倒翁显然是一个旋转体，所以其数学表示只需考虑旋转曲线。

这里设置三个参数： b, t, α ，其中 b 表示不倒翁下方球面半径、 t 表示不倒翁上方球面半径、 α 为不倒翁侧面与旋转轴的夹角。其曲线如下所示：



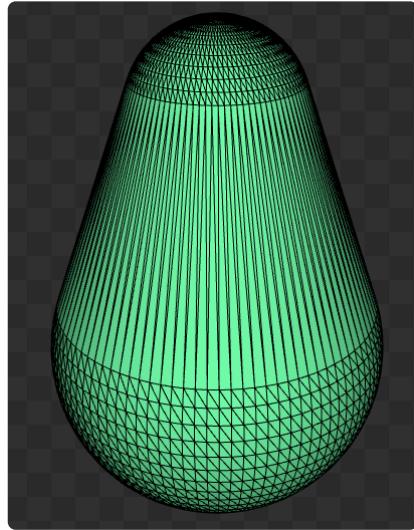
在不倒翁的Local space中指定 y 轴为旋转轴、设定不倒翁下方球面的球心为 $(0, 0, 0)$ ，可以计算出上方球面的球心坐标为 $(0, \frac{b-t}{\sin \alpha}, 0)$ ，设 $y_t = \frac{b-t}{\sin \alpha}$ ，有旋转曲线的解析式如下：

$$R(y) = \begin{cases} \sqrt{b^2 - y^2}, & y \in [-b, b \sin \alpha] \\ -y \tan \alpha + \frac{b}{\cos \alpha}, & y \in [b \sin \alpha, y_t + t \sin \alpha] \\ \sqrt{t^2 - (y - y_t)^2}, & y \in (y_t + t \sin \alpha, y_t + t] \end{cases}$$

在作业中取 $b = 0.2, t = 0.1, \alpha = \frac{\pi}{9}$

5.2 三角形网格生成

不倒翁的三角形网格生成较为简单，即使用UV Sphere方法生成上下两个半球，并通过三角形面片连接两个半球，生成的网格如下：

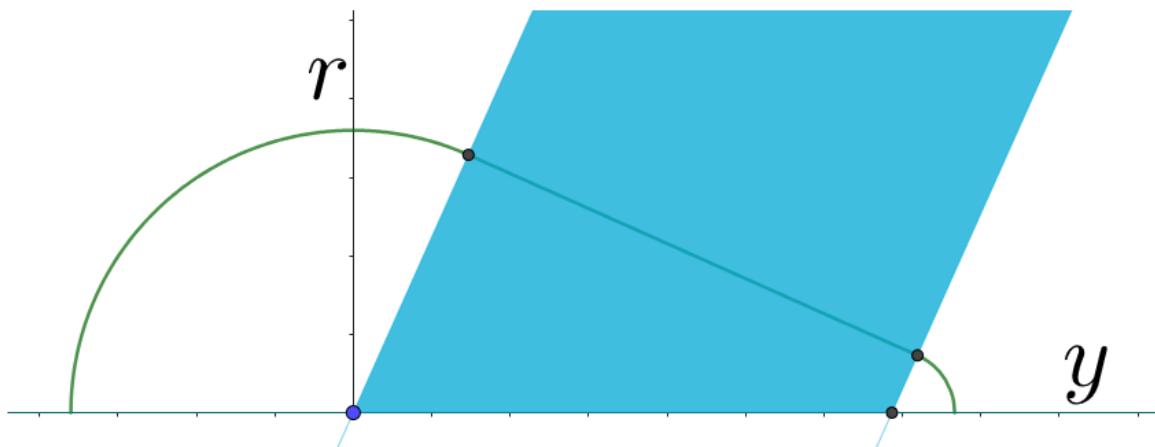


5.3 SDF以及SDF梯度计算

不倒翁的SDF以及SDF梯度可以用于鼠标交互、碰撞检测、碰撞反馈，以下是在不倒翁坐标系（Local space）中计算SDF和SDF梯度的过程：

对于Local space中的坐标 $\vec{p} = (x, y, z)$ ，记 $r = \sqrt{x^2 + z^2}$, $r \geq 0$

观察发现在 $r - y$ 平面中，当 (y, r) 坐标在下图的蓝色范围内时，SDF的值为 (y, r) 到边界直线 $r = -y \tan \alpha + \frac{b}{\cos \alpha}$ 的有向距离，否则为上半球或下半球的SDF值：



因此可以现将 (y, r) 坐标进行旋转变换，即 $\begin{bmatrix} y' \\ r' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix}$ ，使变换后的边界直线为 $r' = b$ ，即可方便地判断坐标点是否在蓝色区域内并求出有向距离。

$$\text{易得 } R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

从而有

$$\text{SDF}_{\text{local}}(\vec{p}) = \begin{cases} \sqrt{r^2 + y^2} - b, & y' < 0 \\ \sqrt{r^2 + (y - y_t)^2} - t, & y' > \frac{y_t}{\tan \alpha}, \\ r' - b, & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix}, r = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$\nabla \text{SDF}_{\text{local}}(\vec{p})$ 的计算方法类似，即分别在三种情况下计算垂直于不倒翁面、方向朝外的单位向量，这里不再赘述。

本次作业中不倒翁会经过旋转和平移变换，World space中的 $\text{SDF}_{\text{world}}$ 与 $\nabla \text{SDF}_{\text{world}}$ 可以通过将World space坐标变换回Local space来得到；SDF梯度还需要再通过旋转矩阵再变换到World space。

5.4 转动惯量矩阵计算

不倒翁的刚体物理模拟需要计算转动惯量。

设不倒翁的质量为 m ，根据推导可得Local space的转动惯量：

$$V = \pi \int_{-b}^{y_t+t} R^2(y) dy, \rho = \frac{m}{V}$$

$$I_{xx} = I_{zz} = \rho \frac{\pi}{4} \int_{-b}^{y_t+t} [R^4(y) + 4y^2 R^2(y)] dy$$

$$I_{yy} = \rho \frac{\pi}{2} \int_{-b}^{y_t+t} R^4(y) dy$$

$$I_{\text{local}} = \rho \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

这些积分可以通过数学工具计算，这里不再赘述。

World space中的转动惯量 $I_{\text{world}} = RI_{\text{local}}R^{-1} = RI_{\text{local}}R^T$ ， $R_{3 \times 3}$ 为不倒翁的旋转矩阵。

6. 物理模拟

6.1 刚体运动参数

刚体的运动参数包括线速度 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 、角速度 $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ ，位置 $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ 。

旋转通过四元数 q 和旋转矩阵 $R_{3 \times 3}$ （单位正交， $R^{-1} = R^T$ ）表示，两者可以转化

$$\text{每个时间戳 } \Delta t, \vec{p}' = \vec{p} + \vec{v} \Delta t, q' = (1 + \frac{\Delta t}{2} q_\omega) \cdot q, q_\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ R^{-1} \times \vec{\omega} \end{pmatrix}$$

刚体上任意一点 \vec{p}_i 的点速度 $\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{\omega} \times (\vec{p}_i - \vec{p})$

6.2 Model矩阵

Model变换矩阵 M 首先考虑旋转 R ；而后平移到位置 \vec{p} ，因此有

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & p_x \\ & 1 & p_y \\ & & 1 \\ & & p_z \\ & & & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_{3 \times 3} & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{3 \times 3} & \vec{p} \\ & 1 \end{pmatrix}$$

6.3 基本假设

在模拟不倒翁时，做以下假设：

1. 假设不倒翁的重心为下半球的球心，即Local space的原点
2. 假设不倒翁只在 x, z 轴有平移， $p_y \equiv -1 + b$ ，不会腾空
3. 假设不倒翁在地面做纯滚动、无滑动，即 $v_x = -b \cdot \omega_z, v_z = b \cdot \omega_x$

在模拟球体（包括弹珠、火球）时，做以下假设：

1. 球体质心的机械能（不考虑角速度， $\frac{1}{2}mv^2 + mgh$ ）不会衰减，这样可以一直保持运动状态
2. 弹珠小球受重力影响；火球不受重力影响，可以自由飞行

6.4 冲量

设刚体的质量为 m ，转动惯量矩阵为 I

在 \vec{p}_j 位置对刚体施加冲量 \vec{j} 后，线速度 $\vec{v}' = \vec{v} + \frac{\vec{j}}{m}$

$$\text{刚体的角速度 } \vec{\omega}' = \vec{\omega} + I^{-1} \vec{r} \times \vec{j}, \vec{r} = \vec{p}_j - \vec{p}$$

对于不倒翁，由于假设仅做纯滚动，所以线速度
 $\vec{v}' = (-b\Delta\omega_z, 0, b\Delta\omega_x), \Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}' - \vec{\omega}$

6.5 不倒翁的回复力与摩擦力

本次作业中通过对不倒翁施加恢复力实现“不倒”效果。

在每个时间戳 Δt ，设不倒翁的旋转轴方向为 \vec{d} ，在 $\vec{p}_j = (p_x, p_y + 1, p_z)$ 位置施加 $\vec{j} = -\Delta t \cdot \vec{d}$ 的冲量，即可实现回复效果。

摩擦力能够实现摆动的衰减，若没有摩擦力，倾斜的不倒翁会永远摆动下去。

施加摩擦力十分简单：设地面的摩擦系数为 μ ，重力加速度为 g 。

在每个时间戳 Δt ，

$$\vec{v}' = \hat{v} \cdot \max\{0, ||v|| - \mu g \Delta t\}, \vec{\omega}' = \hat{\omega} \cdot \max\{0, ||\omega|| - \frac{\mu g \Delta t}{b}\}$$

6.6 碰撞检测与响应

6.6.1 不倒翁与边界

不倒翁与边界的碰撞检测较为简单，只需检查不倒翁的上、下两个球体是否与边界相交即可。又由于不倒翁处在地面，因此只需考虑与地面、前后左右边界的碰撞。

当与前后左右边界碰撞时，首先将 \vec{p} 朝墙面法线方向修正以消除碰撞，而后将墙面方向的线速度和角速度反向（可以再乘以一个衰减系数）。

当与地面碰撞时，发生碰撞的必然是不倒翁上面的球体，这时需要修正不倒翁的旋转，同时将角速度与线速度清零以模拟倒地并缓慢回复的效果。

6.6.2 球体与边界

球体与边界的碰撞更为简单，只需测试球心与上下左右前后边界的距离是否小于半径，若发生碰撞则修正球体的位置，并反转相应的线速度（这里不能乘以衰减系数，不然会导致球体机械能减少，违反了假设），同时设置角速度为在墙面纯滚动的角速度。

此外，本次作业也考虑了球体与Cornell Box顶部半球灯的碰撞。处理方法类似，即朝碰撞方向（即半球灯的法向）修正球体位置；并在碰撞方向反射线速度。

6.6.3 球体与不倒翁

球体与不倒翁的碰撞需要借助不倒翁的SDF函数。

设球体的球心坐标为 \vec{p} ，半径为 r 。

球心与不倒翁表面的有向距离为 $d = \text{SDF}_{\text{world}}(\vec{p})$ 。若 $d < r$ 则认为球体与不倒翁发生碰撞。

碰撞的方向 $\vec{n} = \nabla \text{SDF}_{\text{world}}(\vec{p})$ ，以此可以求出碰撞点 $\vec{h} = \vec{p} - d \cdot \vec{n}$

在 \vec{n} 方向修正球体的位置，并将球体的线速度沿 \vec{n} 反向（这样球体的机械能不变）。

记球体线速度的变化为 $\Delta \vec{v}$ ，在 \vec{h} 位置对不倒翁施加 $\vec{j} = -m \Delta \vec{v}$ 的冲量， m 为球体的质量，以维持碰撞的动量守恒。

6.6.4 不倒翁与不倒翁

直接求解不倒翁碰撞较为复杂，本次作业使用一个近似方法：即分别将一个不倒翁的上下两个球体对另一个不倒翁进行碰撞检测，进行四次球体与不倒翁的碰撞检测，求解出平均碰撞点 \bar{h} 。

而后根据两个不倒翁在 \bar{h} 的SDF梯度 \vec{n}_1, \vec{n}_2 ，算出平均碰撞方向 $\bar{n} = \frac{\vec{n}_1 + \vec{n}_2}{||\vec{n}_1 + \vec{n}_2||}$ 。

接下来需要根据两个不倒翁在 \bar{h} 的点速度 \vec{v}_1, \vec{v}_2 算出需要施加的冲量：

1. 算出 \vec{v}_1, \vec{v}_2 在 \bar{n} 方向的投影 $\vec{v}_{1,n} = \vec{v}_1 \cdot \bar{n}, \vec{v}_{2,n} = \vec{v}_2 \cdot \bar{n}$
2. $\Delta \vec{v}_n = \vec{v}_{1,n} - \vec{v}_{2,n}$
3. 计算出冲量 \vec{j}_1, \vec{j}_2 ，使得两个刚体在 \bar{h} 的点速度分别变化 $-e \Delta \vec{v}_n, e \Delta \vec{v}_n$ ，参数 e 用于控制动量的衰减

冲量的计算过程如下：

- 设 $\Delta \vec{v}_i$ 为施加冲量 \vec{j} 后刚体 i 点的速度变化、刚体中心为 \vec{p} 、质量为 m 、转动惯量为 I 、施加冲量的位置为 \vec{p}_j

- $$\begin{aligned}\Delta \vec{v}_i &= \frac{\vec{j}}{m} + [I^{-1} \cdot (\vec{r}_j \times \vec{j})] \times \vec{r}_j, \vec{r}_j = \vec{p}_j - \vec{p} \\ &= \frac{\vec{j}}{m} - [r_j]_{\times} I^{-1} [r_j]_{\times} \cdot \vec{j}\end{aligned}$$
- ($[r_j]_{\times}$ 为 \vec{r}_j 的反称矩阵, 将向量叉乘变为矩阵运算)
- 记 $K_{3 \times 3} = \frac{1}{m} - [r_j]_{\times} I^{-1} [r_j]_{\times}$, 有 $\Delta \vec{v}_i = K \vec{j}$
- 从而所求的冲量 $\vec{j} = K^{-1} \Delta \vec{v}_i$

(这个碰撞响应不太物理, 但效果还不错)

6.7 弹珠与火球

通过物理模拟, 弹珠与火球的实现都是非常简单的, 只要设置其半径、质量、初始位置、初速度, 而后一切交给物理模拟即可。

至于弹珠碰撞变材质之类的都是一个Callback能解决的问题, 不赘述。

7. 鼠标交互

7.1 不倒翁选取

不倒翁的选取通过SDF Ray Cast实现, 即:

- 通过View Projection矩阵的逆矩阵以及View Position从鼠标位置构造Ray
- 遍历场景中五个不倒翁, 分别做SDF Ray Cast
 - 每次沿射线前进该点SDF值
 - 直到SDF值小于某个阈值 (相交) 或者前进步数过多 (不相交)
- 存在不倒翁与射线相交, SDF Ray Cast前进距离最小的不倒翁为选取到的不倒翁
- 根据前进距离可以求得Ray与不倒翁的交点: 若交点的 y 坐标小于 $-1 + b$, 则认为交点在重心下方, 对不倒翁进行平移; 否则做旋转操作

7.2 平移

首先在记录初始时Ray与不倒翁的交点 \vec{s} 。

当鼠标拖动，计算新的Ray与平面 $y = s_y$ 的交点，作为不倒翁的新位置。

7.3 旋转

转动时直接根据鼠标在屏幕上的拖动唯一对 x, z 轴做旋转，同时也要平移响应的距离以模拟纯滚动。

8. 粒子系统

本次作业中的粒子用纯色球体表示，球体的颜色和半径由粒子的剩余寿命决定。

(一些具体的参数有些丑陋，就不赘述了，这里仅定性描述)

8.1 火焰粒子

- 每秒从火球生成400个火焰粒子，粒子随机分布在火球内部（越靠球心概率越高，以实现）
- 初始寿命设置为0.45秒
- 初速度为一个向上的随机速度和火球的点速度加权
- 粒子的半径和亮度随着寿命的减少而减小
- 效果如下：



8.2 碰撞火花粒子

火花粒子在火球与物体碰撞时出现。

- 该粒子在碰撞点周围生成；初始寿命设置为1秒（加了一点随机抖动）
- 初速度根据碰撞方向随机分布
- 受重力影响
- 粒子的半径和亮度随着寿命的减少而减小

8.3 灰烬粒子

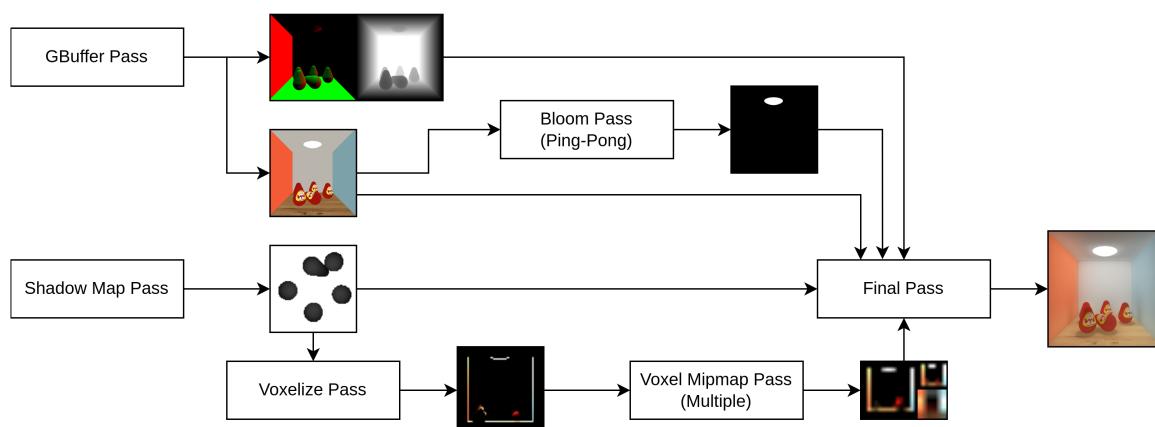
灰烬粒子在火球与弹珠碰撞时出现以实现弹珠燃烧殆尽的效果。

- 该粒子在弹珠的位置生成
- 初始寿命设置为1秒（加了一点随机抖动）
- 初速度与弹珠的线速度成比例
- 受重力影响，同时粒子的速度会随机抖动以模拟灰烬飘落的效果
- 粒子的半径和亮度随着寿命的减少而减小，当半径小于一个阈值时会迅速从高亮度粒子变为黑色，模拟灰烬冷却的效果

9. 渲染

9.1 管线概述

本次作业的渲染管线如下图所示：

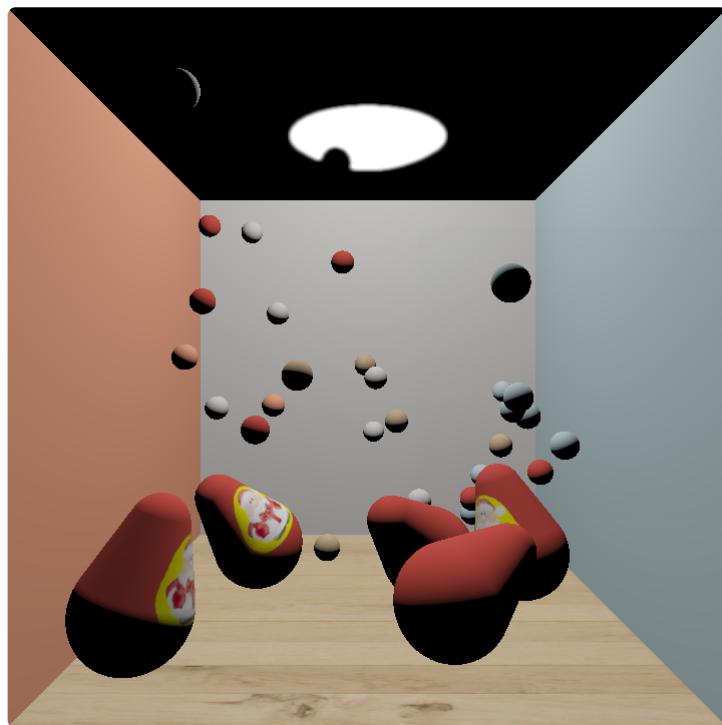


- GBuffer Pass：绘制场景中的所有物体，将颜色、法线、深度存储到三个 Texture中
- Shadow Map Pass：从顶部光源的视角绘制场景中的遮挡物（不倒翁和弹珠，火球因为是发光体就不算在里面），将深度图存储到Texture
- Voxelize Pass：绘制Cornell Box、不倒翁、火球，借助Shadow Map计算 Direct Light，体素化存储到3D Texture (64^3) 中
- Voxel Mipmap Pass：将Voxelize得到的3D Texture降采样，以便于Voxel Cone Tracing
- Bloom Pass：截取GBuffer颜色中的高光部分做Gaussian Blur，存储到 Textre
- Final Pass：绘制最终的图像到屏幕

9.2 Direct Light

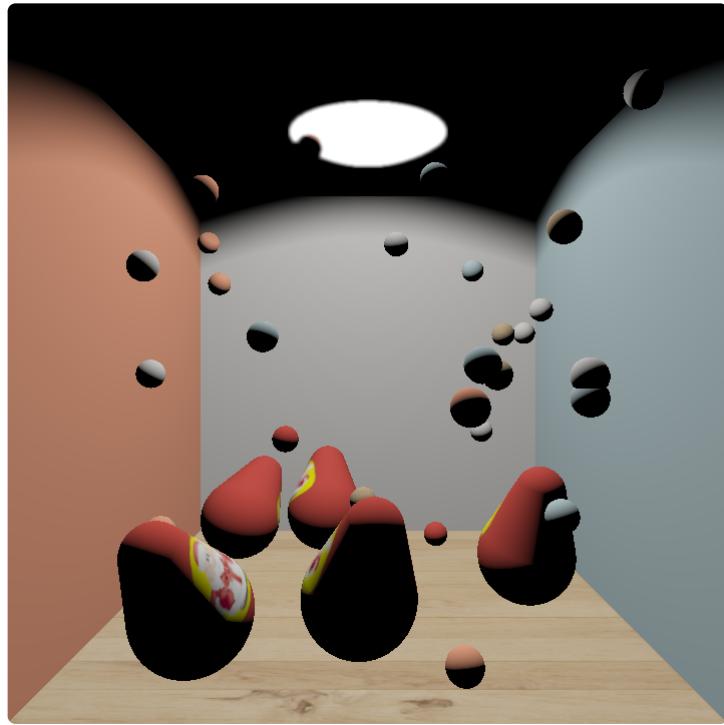
9.2.1 Diffuse

本次作业中假设除了发光体，所有表面均为漫反射表面；场景中光源为Cornell Box顶部的半球灯，近似于点光源。使用 $I_{\text{diff}} = k_d I_l \cos \theta$ 计算，效果如下：



9.2.2 Directional Light

理论上 (?) Cornell Box中的光源不是点光源（因为球体的大部分是被遮挡的），因此墙壁上方应该有一定的阴影，类似Direction Light。作业中从光源方向与 $(0, 1, 0)$ 的夹角计算一个衰减量来模拟这个效果，如下：

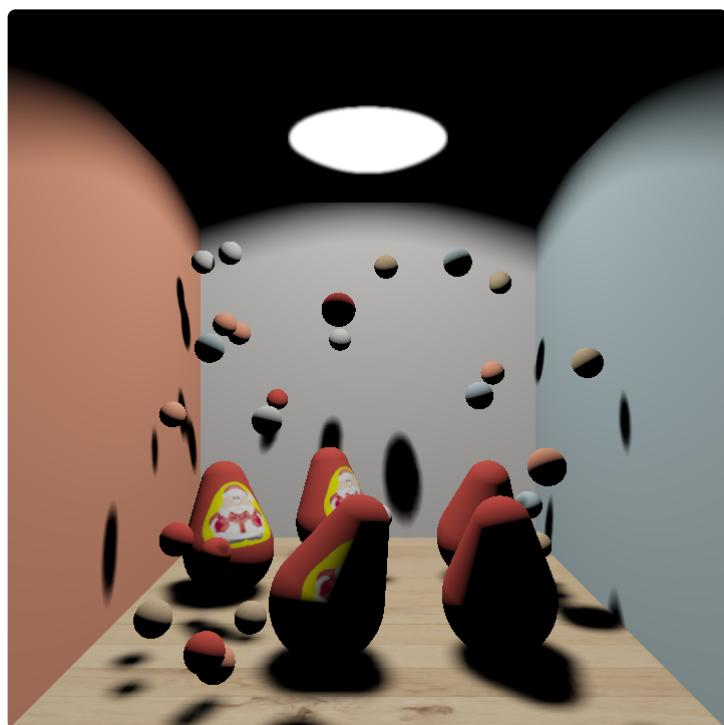


9.2.3 Shadow Mapping

本次作业使用传统的Shadow Mapping。

由于点光源（位置为Cornell Box顶部半球灯的球心）在 $[-1, 1]^3$ 外，一个Shadow Map Texture足够涵盖 $[-1, 1]^3$ 范围内的所有物体，无需使用Cubemap Texture。

在Final Pass中使用 5×5 PCF采样实现软阴影，效果如下：



9.3 基于体素的全局光照

(Cornell Box没有全局光照就如同西方没有耶路撒冷)

9.3.1 Why Voxels?

编写程序时考虑过以下方案：

	Voxel Cone Tracing	Path Tracing
优点	1. 渲染结果平滑，无需降噪 2. 渲染结果不依赖Temporal Data，对动态物体支持较好 3. 作业场景只需很小的3D Texture，渲染性能较好	全局光照渲染结果准确
缺点	全局光照渲染的近似度一般	1. 采样和Denoise大概率有性能问题 2. 需要Temporal Filter + Denoise，对动态物体不友好，且容易产生画面波动
	SSDO	Baked Light Probe
优点	渲染性能较好	1. 渲染性能较好 2. 不考虑动态物体时渲染结果比较准确
缺点	1. 全局光照渲染的近似度较差 (大概率连天花板都照不亮) 2. Screen-Space技术对动态场景容易产生不稳定的结果	不支持动态物体与场景的光影交互

最终选定了Voxel Cone Tracing。

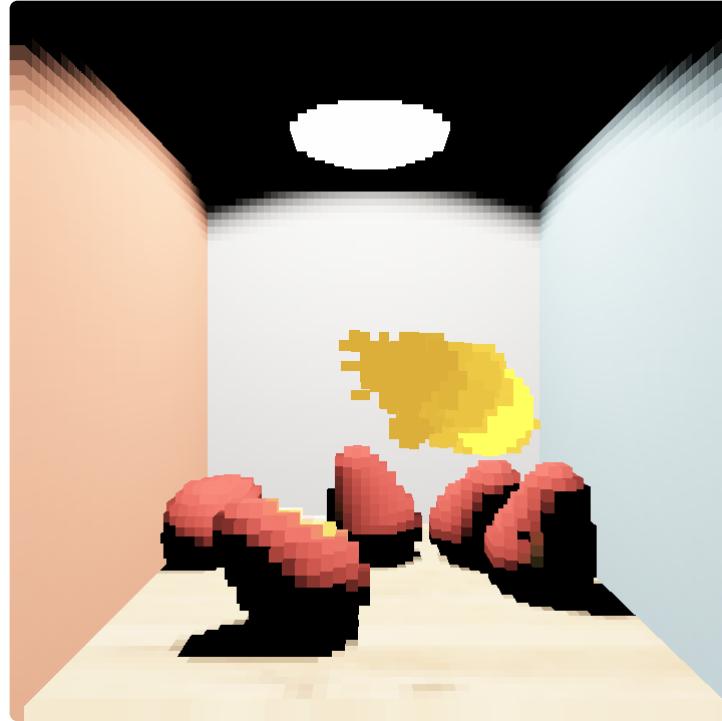
9.3.2 场景体素化

本次作业使用经典的GPU体素化算法将场景体素化，体素用 64^3 的3D Texture存储，体素的值为该点的Radiance：

- 由于场景是动态的，每帧需要重新体素化，因此先将3D Texture清空
- 对于几何法向量为 $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 的三角形，将其投影到
$$\text{axis} = \operatorname{argmin}_{a \in \{x, y, z\}} |n_a|$$
所对应的平面（在Geometry Shader完成）

- 做光栅化，计算Direct Light作为Radiance（同样借助Shadow Map，但不做PCF采样），存储在Fragment对应的体素坐标
- 在体素化时使用低精度Mesh可以有效提升性能
- 粒子等动态发光体也要体素化，以产生动态全局光照效果

结果如下图所示（此图为Voxel Ray March得到的）：

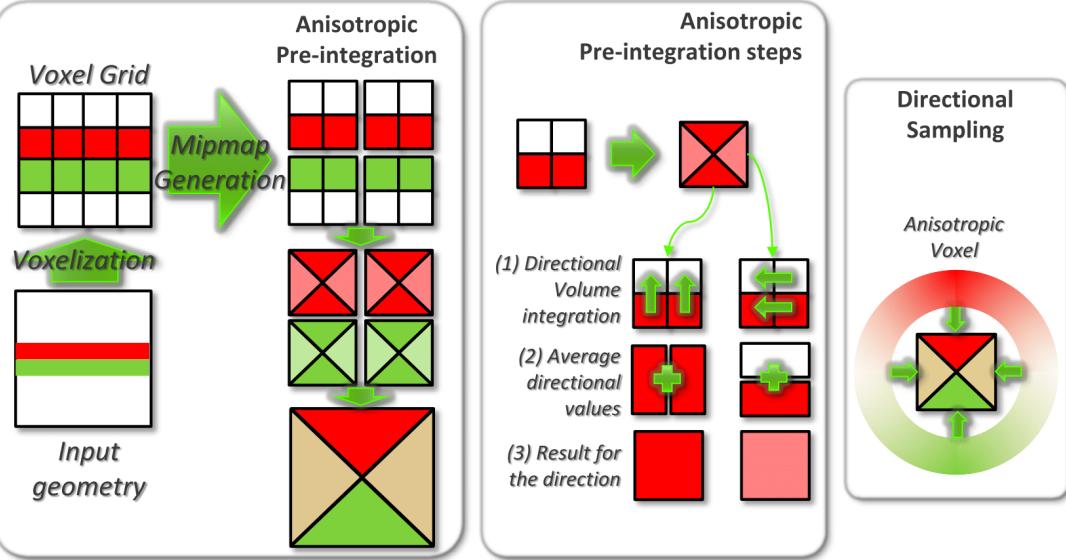


9.3.3 体素Mipmap生成

Voxel Cone Tracing需要采样不同范围内体素的平均Radiance，在存储体素的3D Texture做Mipmap可以支持这一流程。

传统的Mipmap仅计算 2^3 个像素的平均值，没有考虑Cone Tracing时不同Ray Direction的采样问题，可能导致采样时临近的体素权重过大以至于产生**自遮挡**。

解决方法是从 $-x, +x, -y, +y, -z, +z$ 六个方向做各向异性的Mipmap（在 2^3 个体素中增加方向上的 2^2 个体素的权重），存在六张3D Texture中，而后在采样时根据Ray Direction对 x, y, z 方向的Mipmap做加权。



这张图很好地解释了各项异性Mipmap和采样的方法

<https://research.nvidia.com/sites/default/files/publications/GIVoxels-pg2011-authors.pdf>

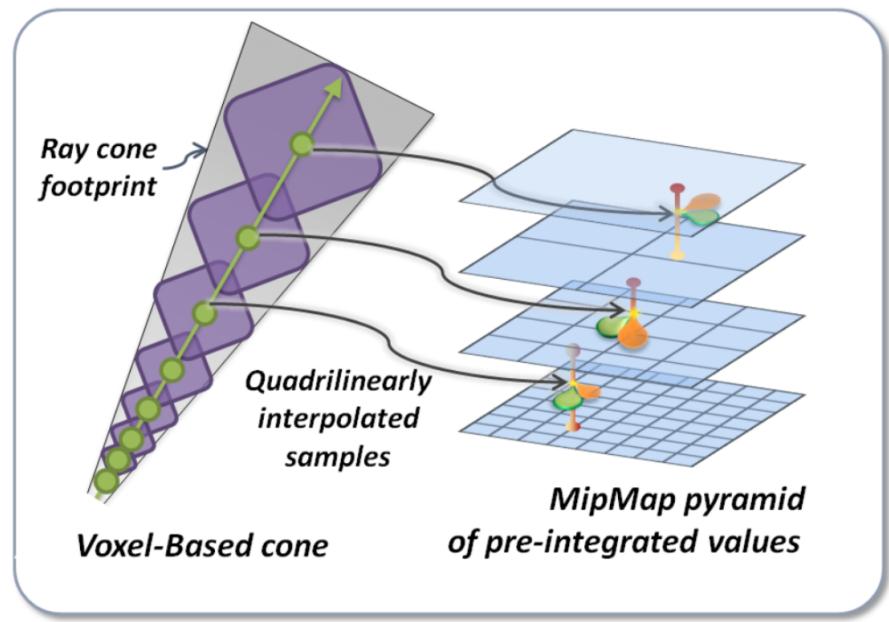
其效果如下：



显然借助传统Mipmap渲染的图像物体自遮挡非常严重（天花板和右墙面很明显），导致整体偏暗；使用各项异性Mipmap完美地改善了这个问题。

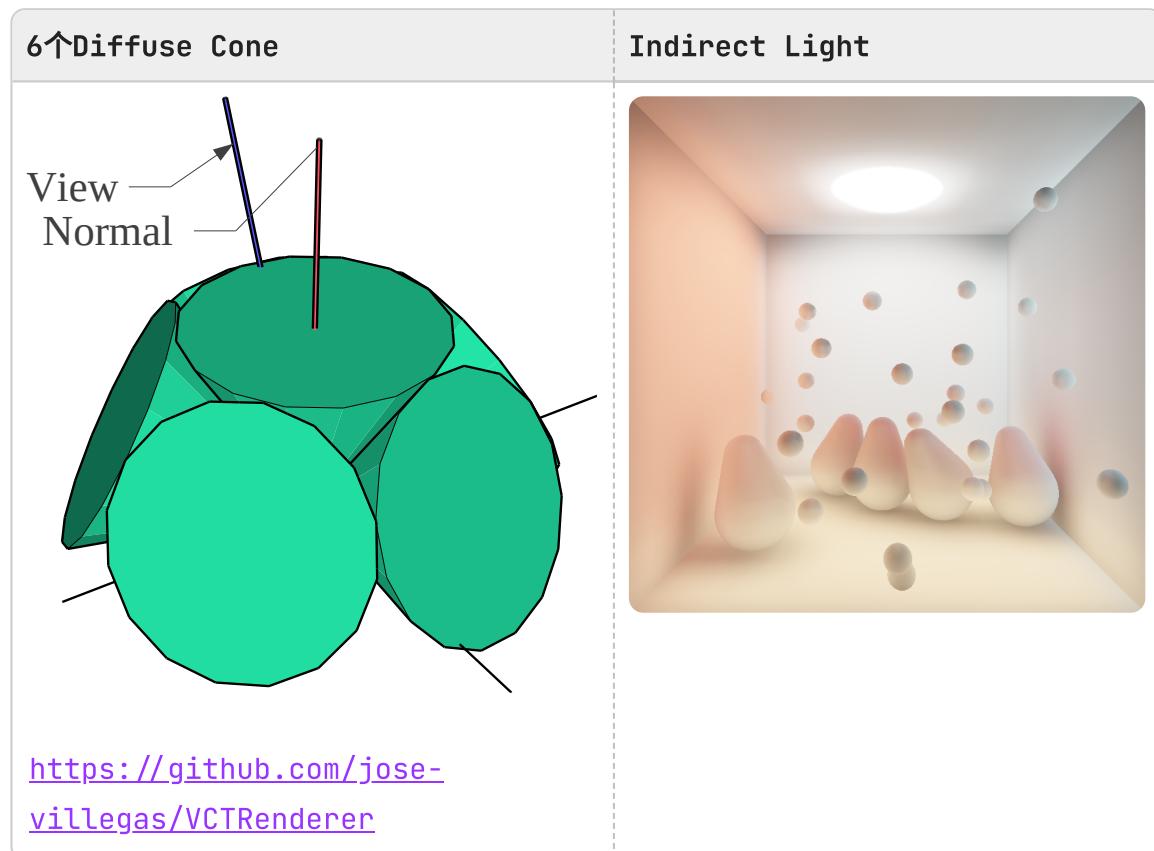
9.3.4 Voxel Cone Tracing

Voxel Cone Tracing即在一个圆锥体中进行体素采样（四线性插值：3D + Mipmap）以获得圆锥体内的Radiance给该点的光照，如下图所示：



<https://research.nvidia.com/sites/default/files/publications/GIVoxels-pg2011-authors.pdf>

本次作业中对每个表面做6个Cone Trace，以实现Diffuse Global Illumination的效果，如下图所示：



此外，Voxel Cone Tracing还能实现镜面反射、Multiple Bounce GI等效果，但这些效果的Computational Cost较大，且对渲染效果的提升一般，因此本次作业没有实现。

9.4 泛光

本次作业的场景中有大量的发光体（Cornell Box灯、火球、粒子），实现泛光效果能够增强其表现力。

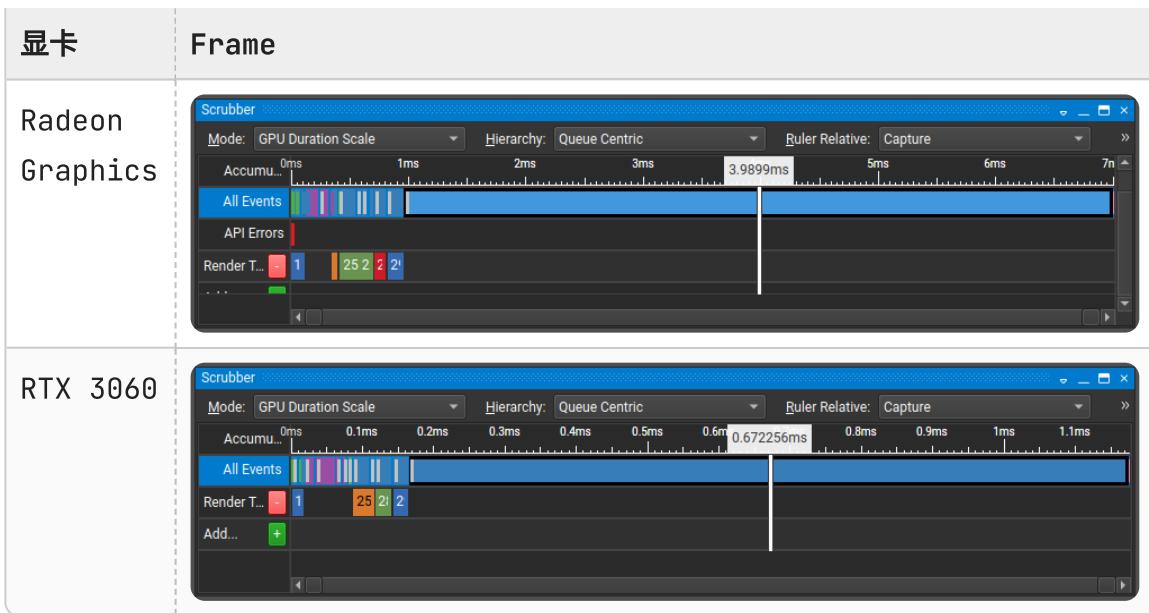
泛光的实现比较简单，提取GBuffer颜色中的高光部分做 9×9 Gaussian Blur即可，效果如下：



10. 性能分析

分别在RTX 3060独显和Radeon Graphics（Ryzen 9 5900HX）的集成显卡上进行测试（窗口大小为 720×720 ）：

显卡	Frame



- 可见即使在集成显卡，Frame Time也在10ms以内，基本没有性能问题
- 每帧80%以上的时间都消耗在Final Pass，这是由于Voxel Cone Tracing计算量较大