



IEL – protokol k projektu

Adam Zvara
xzvara01

14. decembra 2020

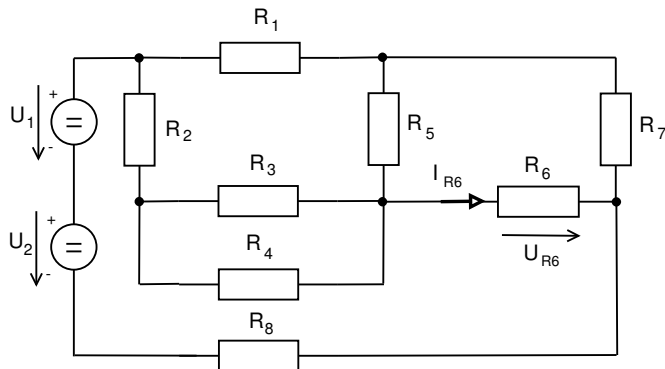
Obsah

1	Příklad 1	2
2	Příklad 2	6
3	Příklad 3	8
4	Příklad 4	11
5	Příklad 5	14
6	Shrnutí výsledků	17

Příklad 1

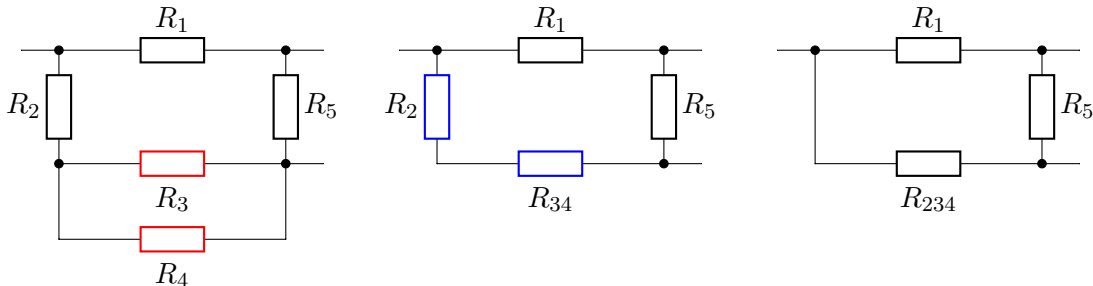
Stanovte napětí U_{R6} a proud I_{R6} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
A	80	120	350	650	410	130	360	750	310	190



Metóda zjednodušovania spočíva v spájaní rezistorov, ktoré sú zapojené paralelne alebo sériovo, využitie zapojenia do hviezdy alebo trojuholníka a prechod medzi nimi. Ak zistíme celkový odpor R_{EKV} , tak zistíme aj celkový prúd tečúci obvodom a z neho potom postupne dopočítame jednotlivé prúdy a napätia v obvode.

Z paralelne zapojených rezistorov R_3 a R_4 vytvorím rezistor R_{34} , ktorý je zapojený sériovo s R_2 .

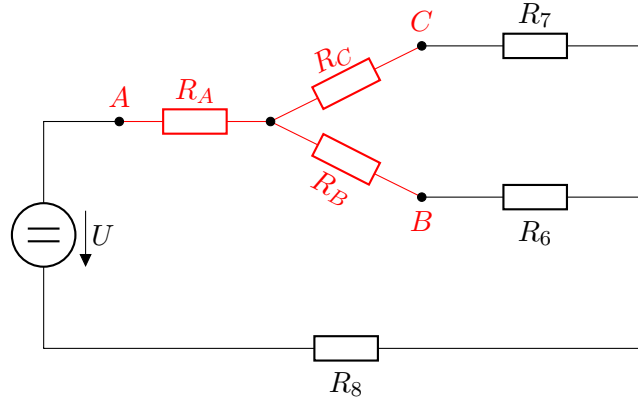


$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{410 \cdot 130}{410 + 130} = \frac{2665}{27} \doteq 98.7037 \text{ } [\Omega]$$

$$R_{234} = R_2 + R_{34} = 650 + \frac{2665}{27} \doteq 748.7037 \text{ } [\Omega]$$

Z rezistorov R_1, R_{234}, R_5 teraz môžeme vytvoriť zapojenie do hviezdy.

(U_1 a U_2 sú zapojené sériovo a vznikne $U = U_1 + U_2$). Spočítame odpory rezistorov v hviezde, a ďalej ich spájame sériovo alebo paralelne s ďalšími rezistormi až kým nedostaneme R_{EKV}



$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_{234}}{R_1 + R_{234} + R_5} = \frac{350 \cdot 748.7}{350 + 748.7 + 360} \doteq 179.64 \text{ } [\Omega]$$

$$R_B = \frac{R_5 \cdot R_{234}}{R_1 + R_{234} + R_5} = \frac{360 \cdot 748.7}{350 + 748.7 + 360} \doteq 184.78 \text{ } [\Omega]$$

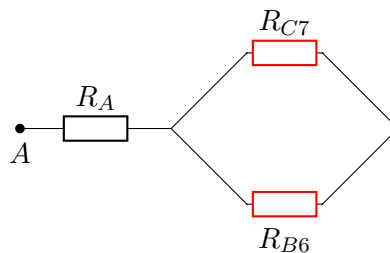
$$R_C = \frac{R_1 \cdot R_5}{R_1 + R_{234} + R_5} = \frac{350 \cdot 360}{350 + 748.7 + 360} \doteq 86.38 \text{ } [\Omega]$$

Rezistory (R_B, R_6) a (R_C, R_7) sú zapojené sériovo:

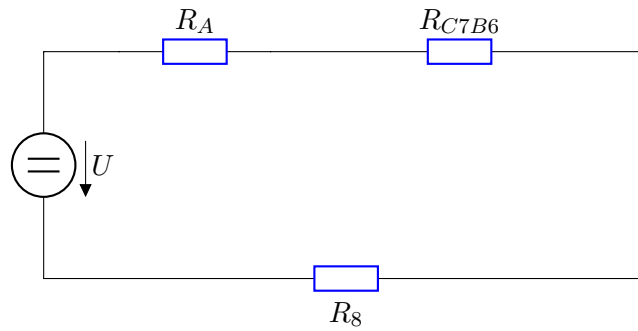
$$R_{C7} = R_C + R_7 = 86.38 + 310 \doteq 396.38 \text{ } [\Omega]$$

$$R_{B6} = R_B + R_6 = 184.78 + 750 \doteq 934.78 \text{ } [\Omega]$$

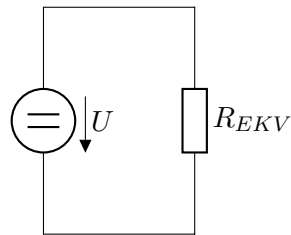
Z paralelného zapojenia rezistorov (R_{C7}, R_{B6}) vzniká:



$$R_{C7B6} = \frac{R_{C7} \cdot R_{B6}}{R_{C7} + R_{B6}} = \frac{396.38 \cdot 934.78}{396.38 + 937.78} \doteq 278.35 \text{ } [\Omega]$$



Zvyšné rezistory sú zapojené sériovo.

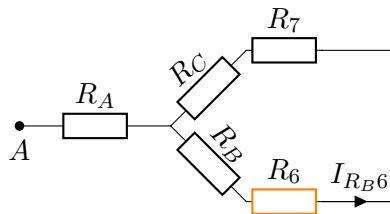


$$R_{EKV} = R_A + R_{C7B6} + R_8 = 179.64 + 278.35 + 190 \doteq 648 \text{ } [\Omega]$$

$$\text{Celkový prúd } I = \frac{U}{R_{EKV}} = \frac{200}{648} = 0.3086 \text{ } [A]$$

Teraz postupujem opačne ako doteraz. Vypočítané hodnoty dosadzujem do predchádzajúcich vzťahov.

$$\text{Pre napätie platí } U_{R_{C7B6}} = R_{C7B6} \cdot I = 278.35 \cdot 0.30864 \doteq 85.91 \text{ } [V] = U_{R_{B6}}$$



$$I_{RB6} = \frac{U_{RB6}}{R_{B6}} = \frac{85.91}{934.78} \doteq 0.0919 \text{ } [A]$$

$$U_{R6} = I_{RB6} \cdot R_{R6} = 0.0919 \cdot 750 \doteq 68.9292 \text{ } [V]$$

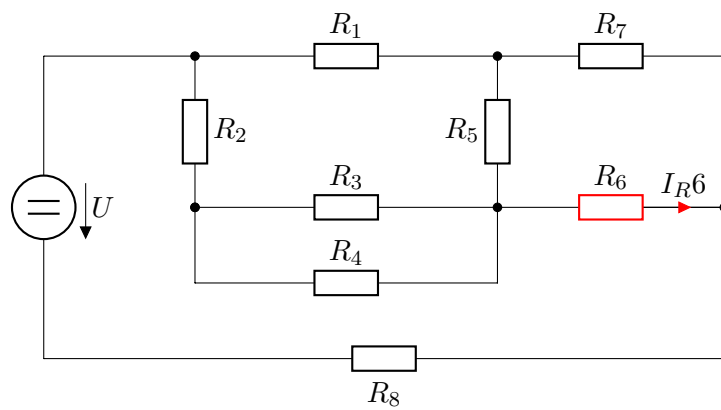
Kontrola: ak sa $U_{R_{B6}} = U_{R_{C7}}$, tak potom platí podľa Ohmovho zákona $I_{R_{C7}} = \frac{U_{R_{C7}}}{R_{C7}}$

$$I_{RC7} = \frac{85.91}{396.38} \doteq 0.2167 \text{ } [A]$$

Podľa I.KZ platí, že $I = I_{RC7} + I_{RB6}$

$$0.3086 = 0.2167 + 0.0919$$

Ak sa teraz pozriem na pôvodný obvod

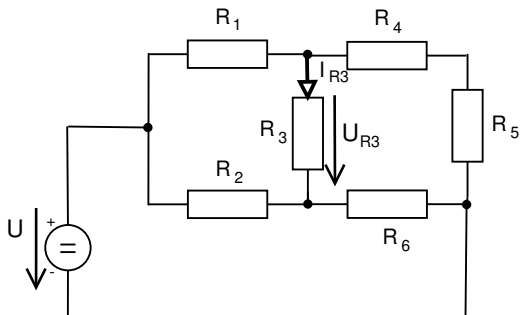


$$\text{Tak } I_{R_6} = \frac{U_{R_6}}{R_6} = \frac{68.93}{750} \doteq 0.0919 \text{ [A]}$$

Příklad 2

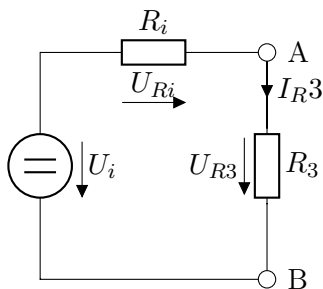
Stanovte napětí U_{R3} a proud I_{R3} . Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]
G	180	250	315	615	180	460	350



Riešenie obvodu podľa Théveninovej vety spočíva v zapojení hľadanej časti obvodu do obvodu s reálnym zdrojom napätia. Následne skratujeme zdroje napätia a zistíme odpor v pôvodnom obvodu po odpojení hľadanej časti obvodu. Zistíme napätie medzi odpojenými svorkami v pôvodnom obvodu a hľadanú časť dopočítame v obvodu s reálnym zdrojom napätia.

Vetvu, na ktorej potrebujem vypočítať napätie a prúd si zapojím do obvodu s reálnym zdrojom napätia.

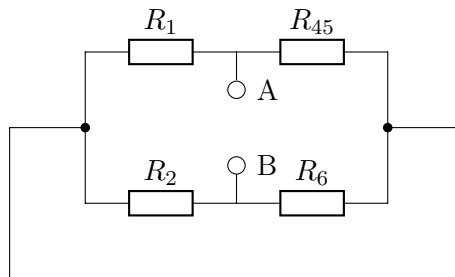
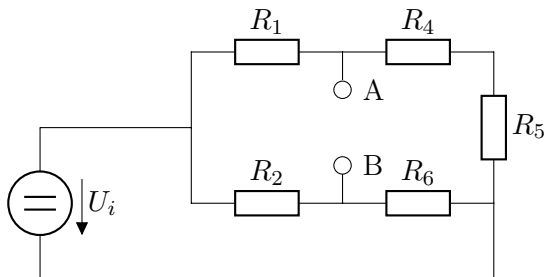


Z druhého Kirchhoffovho zákona platí: $U_{Ri} + U_{R3} - U_i = 0$

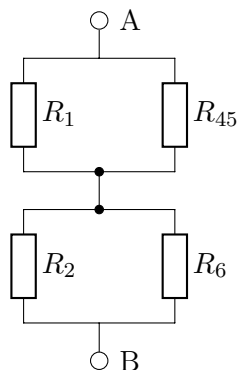
$$U_i = U_{Ri} + U_{R3} = I_{R3} \cdot R_i + I_{R3} \cdot R_3 = I_{R3} \cdot (R_i + R_3)$$

$$I_{R3} = \frac{U_i}{R_i + R_3}$$

R_i dopočítam tak, že si obvod prekreslím bez R_3 a skratujem zdroj(e) napätia.



R_4 a R_5 sú sériovo zapojené rezistory: $R_{45} = R_4 + R_5 = 180 + 460 = 640 \text{ } [\Omega]$ Obvod prekreslím:



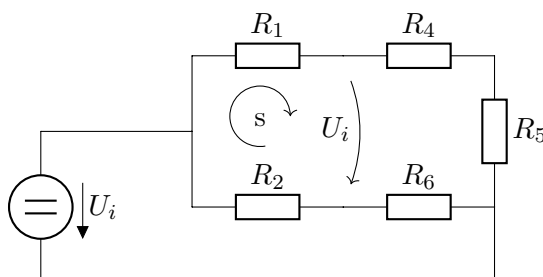
A teda z tohto zapojenia je vidieť, že dvojice rezistorov R_1 , R_{45} a R_2 , R_6 sú zapojené paralelne.

$$R_{145} = \frac{R_1 \cdot R_{45}}{R_1 + R_{45}} = \frac{250 \cdot 640}{250 + 640} \doteq 179.78 \text{ } [\Omega]$$

$$R_{26} = \frac{R_2 \cdot R_6}{R_2 + R_6} = \frac{315 \cdot 350}{315 + 350} \doteq 165.79 \text{ } [\Omega]$$

$$R_i = R_{145} + R_{26} = 179.78 + 165.79 \doteq 345.56 \text{ } [\Omega]$$

Ďalší krok je určenie napätia medzi A,B v prekreslenom obvode.



Teda pre smyčku s platí: $U_{R1} + U_i - U_{R2} = 0$

$$U_i = U_{R2} - U_{R1}$$

Napätie na jednotlivých rezistoroch určím pomocou napäťového deliča:

$$U_{R1} = U \cdot \frac{R1}{R1+R_{45}} \quad U_{R2} = U \cdot \frac{R2}{R2+R_6}$$

$$U_{R1} = 180 \cdot \frac{250}{250 + 640} \doteq 50.56 \text{ } [V]$$

$$U_{R2} = 180 \cdot \frac{315}{315 + 350} \doteq 85.26 \text{ } [V]$$

$$U_i = 85.26 - 50.56 \doteq 34.70 \text{ } [V]$$

Dosadením všetkých zistených hodnôt do vzorca $I_{R3} = \frac{U_i}{R_i+R_3}$ získam výsledok:

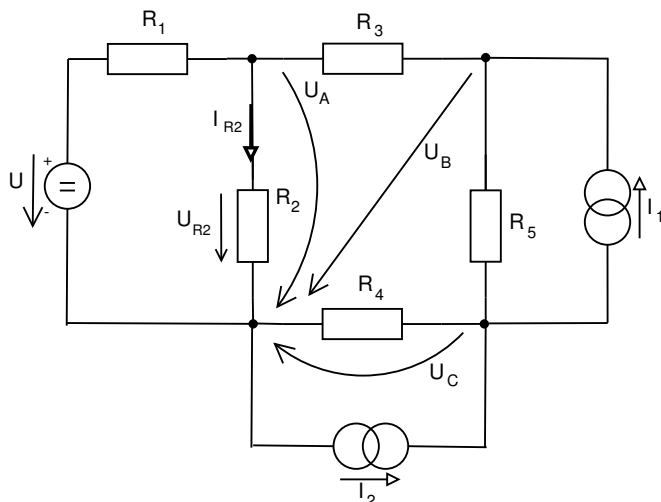
$$I_{R3} = \frac{34.70}{345.56 + 615} \doteq 0.0361 \text{ } [A]$$

$$U_{R3} = R_3 \cdot I_{R3} = 615 \cdot 0.0361 \doteq 22.2175 \text{ } [V]$$

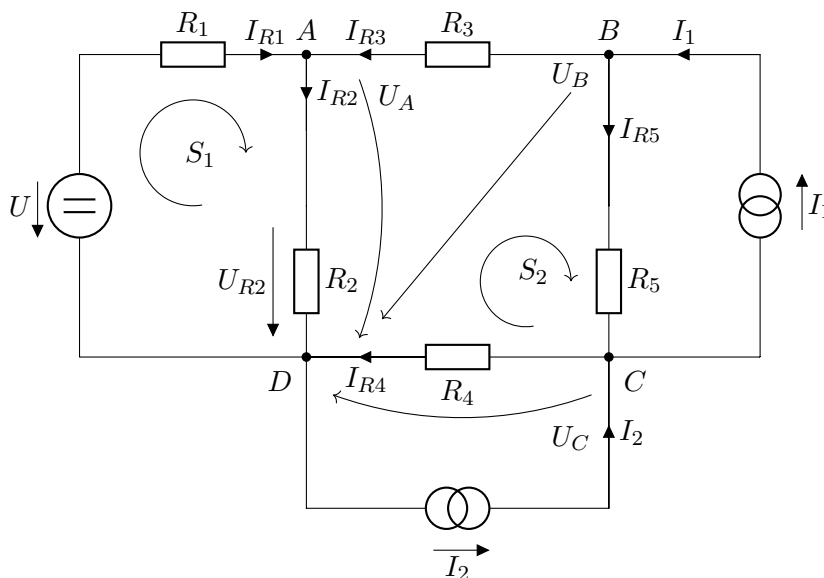
Příklad 3

Stanovte napětí U_{R2} a proud I_{R2} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
C	110	0.85	0.75	44	31	56	20	30



Metódou uzlových napětí zostavím rovnice prúdu pomocou II. Kirchhoffovho zákona. Zvolím si referenčný uzol D , ku ktorému budú smerovať všetky napätia U_A, U_B, U_C . Následne si určím smery prúdov v jednotlivých smyčkách, zostavím 3 rovnice o 3 neznámých. Zo smyčiek si vyvodím rovnice pre jednotlivé prúdy, ktoré dosadím do daných rovníc a vypočítam napätia.



Vyjadrim si súčty prúdov v jednotlivých uzloch A, B, C .

$$\begin{aligned}
 A: \quad & I_{R1} + I_{R3} - I_{R2} = 0 \\
 B: \quad & I_1 - I_{R3} - I_{R5} = 0 \\
 C: \quad & I_2 + I_{R5} - I_1 - I_{R4} = 0
 \end{aligned}$$

Z jednotlivých smyčiek si vyjadrím prúdy.

$$I_{R1} \cdot R_1 + U_A - U = 0 \rightarrow \boxed{I_{R1} = \frac{U - U_A}{R_1}}$$

$$I_{R2} \cdot R_2 - U_A = 0 \rightarrow \boxed{I_{R2} = \frac{U_A}{R_2}}$$

$$-I_{R3} \cdot R_3 + (U_B - U_C) + U_C - U_A = 0 \rightarrow \boxed{I_{R3} = \frac{U_B - U_A}{R_3}}$$

$$I_{R4} \cdot R_4 - U_C = 0 \rightarrow \boxed{I_{R4} = \frac{U_C}{R_4}}$$

$$I_{R5} \cdot R_5 - (U_B - U_C) = 0 \rightarrow \boxed{I_{R5} = \frac{U_B - U_C}{R_5}}$$

Dosadím rovnice pre prúdy do rovníc pre jednotlivé uzly.

$$\begin{aligned} \frac{110 - U_A}{44} + \frac{U_B - U_A}{56} - \frac{U_A}{31} &= 0 \\ 0.85 - \frac{U_B - U_A}{56} - \frac{U_B - U_C}{30} &= 0 \\ 0.75 + \frac{U_B - U_C}{30} - 0.85 - \frac{U_C}{20} &= 0 \end{aligned}$$

Ak všetky zlomky rozpíšem a následne všetky napätia vyberiem pred zátvorku, môžem rovnice zapísať do matice.

$$\begin{aligned} U_A(-\frac{1}{44} - \frac{1}{56} - \frac{1}{31}) + U_B(\frac{1}{56}) &= -\frac{110}{44} \\ U_A(\frac{1}{56}) + U_B(-\frac{1}{56} - \frac{1}{30}) + U_C(\frac{1}{30}) &= 0.85 \\ U_B(\frac{1}{30}) + U_C(-\frac{1}{30} - \frac{1}{20}) &= 0.1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{44} - \frac{1}{56} - \frac{1}{31} & \frac{1}{56} & 0 & -\frac{110}{44} \\ \frac{1}{56} & -\frac{1}{56} - \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & -0.85 \\ 0 & \frac{1}{30} & -\frac{1}{30} - \frac{1}{20} & 0.1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1391}{19096} & \frac{1}{56} & 0 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{56} & -\frac{43}{840} & \frac{1}{30} & -0.85 \\ 0 & \frac{1}{30} & -\frac{1}{12} & 0.1 \end{array} \right)$$

Maticu upravujeme na trojuholníkový tvar ...

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{341}{1391} & 0 & 34.320632 \\ 0 & 1 & -\frac{2782}{3907} & 31.249296 \\ 0 & 0 & 1 & 15.7998716 \end{array} \right)$$

$$U_C \doteq 15.7998716 \text{ [V]}$$

$$U_B = 31.249296 + \frac{2782}{3907} \cdot 15.7998716 \doteq 42.49967808 \text{ [V]}$$

$$U_A = 34.320632 + \frac{341}{1391} \cdot 42.49967808 \doteq 44.73931656 \text{ [V]}$$

Napätie rezistoru R_2 sa bude rovnat napätiu U_A , pretože rezistor sa ako jediný nachádza v danej smyčke.

$$U_{R2} = U_A = 44.7393 \text{ [V]}$$

Prúd I_{R2} vypočítame buď dosadením do rovnice pre I_{R2} , ktorú sme si zostavili predtým:

$$I_{R2} = \frac{U_A}{R_2} = \frac{44.73931}{31} \doteq 1.4432 \text{ [A]}$$

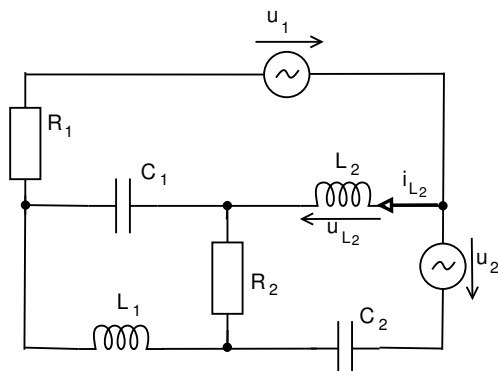
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{L_2} = U_{L_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$ určete $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
A	35	55	12	14	120	100	200	105	70



Úlohu riešime tak, že najprv vypočítame uhlovú rýchlosť ω a impedancie jednotlivých prvkov v obvode. Potom zostavíme rovnice pre jednotlivé smyčkové prúdy, z ktorých zistíme ich veľkosť. Vyjadríme si veľkosť prúdu I_{L_2} a následne aj napätie a fázový posun pre L_2 .

Vypočítam uhlovú rýchlosť ω :

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 70 = 140\pi \text{ [rad]}$$

Vypočítam jednotlivé impedancie prvkov v obvode (pozor na správne prevedené jednotky):

$$Z_L = j \cdot X_L = j \cdot \omega \cdot L$$

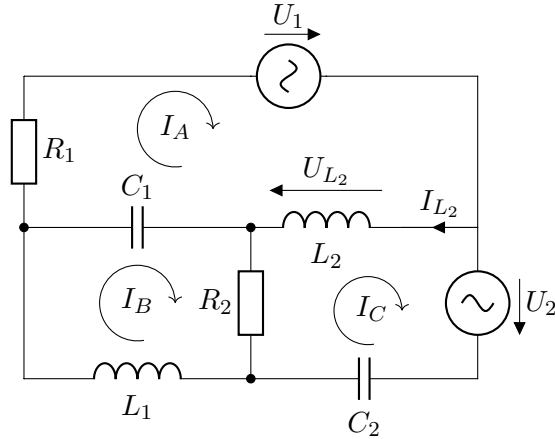
$$Z_C = -j \cdot X_C = \frac{-j}{\omega \cdot C}$$

$$Z_{L1} = j \cdot 140\pi \cdot 0.12 = 52.778756j \text{ } [\Omega]$$

$$Z_{L2} = j \cdot 140\pi \cdot 0.1 = 43.982297j \text{ } [\Omega]$$

$$Z_{C1} = \frac{-j}{140\pi \cdot 0.0002} = -11.368212j \text{ } [\Omega]$$

$$Z_{C2} = \frac{-j}{140\pi \cdot 0.000105} = -21.653734j \text{ } [\Omega]$$



Zostavím si rovnice pre jednotlivé smyčkové prúdy.

$$U_1 + Z_{L_2} \cdot (I_A - I_C) + Z_{C_1} \cdot (I_A - I_B) + R_1 \cdot I_A = 0$$

$$R_2 \cdot (I_B - I_C) + Z_{L_1} \cdot I_B + Z_{C_1} \cdot (I_B - I_A) = 0$$

$$U_2 + Z_{C_2} \cdot I_C + R_2 \cdot (I_C - I_B) + Z_{L_2} \cdot (I_C - I_A) = 0$$

Vyberiem jednotlivé prúdy pred zátvorky a sčítam ich.

$$I_A \cdot (Z_{L_2} + Z_{C_1} + R_1) + I_B \cdot (-Z_{C_1}) + I_C \cdot (-Z_{L_2}) = -U_1$$

$$I_A \cdot (-Z_{C_1}) + I_B \cdot (R_2 + Z_{L_1} + Z_{C_1}) + I_C \cdot (-R_2) = 0$$

$$I_A \cdot (-Z_{L_2}) + I_B \cdot (-R_2) + I_C \cdot (Z_{C_2} + R_2 + Z_{L_2}) = -U_2$$

Rovnice prepíšem do matice a dosadím do nich vypočítané hodnoty.

$$\begin{pmatrix} 12 + 32.61408j & 11.36821j & -43.982297j & -35 \\ 11.36821j & 14 + 41.410556j & -14 & 0 \\ -43.98229j & -14 & 14 + 22.3285634j & -55 \end{pmatrix}$$

Maticu upravím na trojuholníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1.48227 - 1.4954j \\ 0 & 1 & 0 & -0.31136 + 0.841999j \\ 0 & 0 & 1 & -1.58762 - 1.2826j \end{pmatrix}$$

Vypočítam prúd I_{L_2} :

$$I_{L_2} = I_A - I_B = (-1.48227 - 1.4954j) - (-1.58762 - 1.2826j) = 0.10535 + 0.2128j \text{ [A]}$$

A teda aj napätie na cievke:

$$U_{L_2} = I_{L_2} \cdot Z_{L_2} = (0.10535 + 0.2128j) \cdot (0 + 43.982297j) = 9.35943 + 4.63354j$$

Amplitúda napätia získam z veľkosti výsledného komplexného čísla napätia na cievke:

$$|U_{L_1}| = \sqrt{Re(U_{L_2})^2 + Im(U_{L_2})^2} = \sqrt{9.35943^2 + 4.63354^2} = 10.4436 \text{ [V]}$$

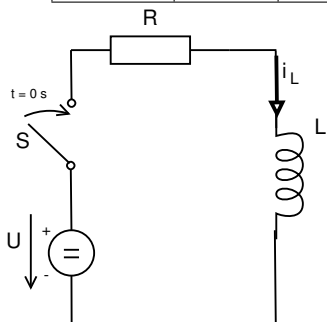
A nakoniec vypočítam fázový posun

$$\varphi_{L_2} = \arctan\left(\frac{Im(U_{L_2})}{Re(U_{L_2})}\right) = \arctan\left(\frac{4.63354}{9.35943}\right) = 0.459693 \text{ [rad]}$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0[\text{s}]$ sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $i_L = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	L [H]	R [Ω]	$i_L(0)$ [A]
H	18	50	40	5



Podľa II. Kirchhoffovho zákona si vyjadrím napätie v smyčke a vyjadrím aj vzťah pre napätie na cievke:

$$u_R + u_L - u = 0$$

$$i_L \cdot R + u_L = u$$

$$u_L = u - R \cdot i_L$$

Výsledok dosadím do rovnice pre prúd prechádzajúci cievkou:

$$i_L' = \frac{u_L}{L} \quad i_L'(0) = 5$$

$$i_L' = \frac{u - R \cdot i_L}{L}$$

$$i_L' = \frac{18 - 40 \cdot i_L}{50}$$

$$i_L' + \frac{4}{5}i_L = \frac{9}{25} \quad i_L'(0) = 5 \quad (1)$$

Zapíšem všeobecný tvar riešenia obvodu:

$$i_L(t) = k(t)e^{\lambda t} \quad (2)$$

Vypočítam λ z charakteristickej rovnice:

$$\lambda + \frac{R}{L} = 0$$

$$\lambda = -\frac{R}{L} = -\frac{40}{50} = -\frac{4}{5}$$

Výsledok dosadím do všeobecného rovnice 2 a zderivujem ju:

$$i_L(t) = k(t)e^{-\frac{4}{5}t} \quad (3)$$

$$i'_L(t) = k'(t)e^{-\frac{4}{5}t} - \frac{4}{5}k(t)e^{-\frac{4}{5}t} \quad (4)$$

Vyjadrené rovnice 3, 4 dosadím do rovnice 1 a vyjadrím $k(t)$:

$$k'(t)e^{-\frac{4}{5}t} - \frac{4}{5}k(t)e^{-\frac{4}{5}t} + \frac{4}{5}k(t)e^{-\frac{4}{5}t} = \frac{9}{25}$$

$$k'(t)e^{-\frac{4}{5}t} = \frac{9}{25}$$

$$k'(t) = \frac{9}{25}e^{\frac{4}{5}t}$$

$$\int k'(t)dt = \frac{9}{25}e^{\frac{4}{5}t}$$

$$k(t) = \frac{9}{20}e^{\frac{4}{5}t} + C$$

Dosadím opäť do všeobecného tvaru riešenia (rovnica 2):

$$i_L(t) = \left(\frac{9}{20}e^{\frac{4}{5}t} + C\right) \cdot e^{-\frac{4}{5}t}$$

$$i_L(t) = \frac{9}{20} + Ce^{-\frac{4}{5}t} \quad (5)$$

Vypočítam konštantu dosadením počiatočnej hodnoty zo zadania:

$$i_L(0) = \frac{9}{20} + Ce^{-\frac{4}{5} \cdot 0}$$

$$i_L(0) = \frac{9}{20} + C$$

$$5 = \frac{9}{20} + C$$

$$C = \frac{91}{20}$$

Výsledok doplním do rovnice 5:

$$i_L(t) = \frac{9}{20} + \frac{91}{20}e^{-\frac{4}{5}t}$$

Overenie výpočtu dosadením zistených rovníc do rovnice 1

$$i_L' + \frac{4}{5}i_L = \frac{9}{25}$$

$$i_L(t) = \frac{9}{20} + \frac{91}{20}e^{-\frac{4}{5}t}$$

$$i_L'(t) = -\frac{91}{25}e^{-\frac{4}{5}t}$$

$$-\frac{91}{25}e^{-\frac{4}{5}t} + \frac{4}{5}\left(\frac{9}{20} + \frac{91}{20}e^{-\frac{4}{5}t}\right) = \frac{9}{25}$$

$$-\frac{91}{25}e^{-\frac{4}{5}t} + \frac{9}{25} + \frac{91}{25}e^{-\frac{4}{5}t} = \frac{9}{25}$$

$$\frac{9}{25} = \frac{9}{25}$$

$$0 = 0$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky	
1	A	$U_{R6} = 68.9292 \text{ [V]}$	$I_{R6} = 0.0919 \text{ [A]}$
2	G	$U_{R3} = 22.2175 \text{ [V]}$	$I_{R3} = 0.0361 \text{ [A]}$
3	C	$U_{R2} = 44.7393 \text{ [V]}$	$I_{R2} = 1.4432 \text{ [A]}$
4	A	$ U_{L2} = 10.4436 \text{ [V]}$	$\varphi_{L2} = 0.4597 \text{ [rad]}$
5	H	$i_L(t) = \frac{9}{20} + \frac{91}{20}e^{-\frac{4}{5}t}$	