Adam Zvara (xzvara01)

23.02.2023

6. Nech je M ľubovoľná množina a $P(M)$ jej potenčná množina. Dokážte, že $|M| < |P(M)|$.
(strana 5)

Dôkaz

Dôkaz vychádza z vlastností zobrazení, konkrétne z pojmu **bijekcia**, ktorá laicky povedané predstavuje zároveň injekciu a **surjekciu**, ktorá je hlavným oporným bodom dôkazu. Riešenie úlohy je nasledovné:

1. Kedže potrebujeme dokázať $|M| < |P(M)|$. Pri porovnávaní 2 čísel môžu nastať 3 situácie ($<$, $>$, $=$). $|M| > |P(M)|$ nemôže nastať, kedže potenčná množina $P(M)$ obsahuje všetky prvky pôvodnej množiny M. Ostáva nám teda prípad $|M| \leq |P(M)|$.
2. Potrebujeme dokázať, že sa ich kardinality nerovnajú, na čo využijeme dôkaz sporom.

Predpoklad: existuje také zobrazenie $f : M \to P(M)$, ktoré je bijekciou (vieme, že pri bijekcií je kardinalita množín rovnaká).

Definujme si množinu A:

$$A = \{m \in M : m \notin f(m)\}$$

Táto množina obsahuje všetky také prvky množiny M, ktoré sa nevyskytujú vo výsledku zobrazenia f. Teda $A \subseteq M$.

Kedže je zobrazenie f bijekciou (a teda **surjekciou**), musí existovať taký prvok $x \in M; f(x) = A$. Je prvok x v množine A?

1. ak **nie**, tak z definície množiny A vyplýva $x \in f(x)$, teda prvok **patrí** do množiny A $\Rightarrow$ SPOR
2. ak **áno**, tak $x \notin f(x)$ a x **nepatrí** do množiny A $\Rightarrow$ SPOR

Z toho môžeme povedať, že zobrazenie $f : M \to P(M)$ nie je bijekciou a teda kardinality ich množín sa nerovnajú z čoho nám ostáva posledná možnosť:

$$|M| < |P(M)|$$