

## Teoretická informatika (TIN) – 2023/2024

### Úkol 2

(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Rozhodněte a dokažte, zda je jazyk  $L_{prime} = \{w \in \Sigma^* : |w| \text{ je prvočíslo}\}$  nad abecedou  $\Sigma = \{a, b\}$  bezkontextový. Pro důkaz bezkontextovosti sestavte gramatiku či zásobníkový automat. Pro důkaz nebezkontextovosti použijte pumping lemma nebo uzávěrové vlastnosti.

10 bodů

2. Uvažujte jazyk  $L_{BKG} = \{\langle M \rangle \# \langle G \rangle : M \text{ je TS}, G \text{ je BKG}, L(G) \subseteq L(M)\}$  nad abecedou  $\{0, 1, \#\}$  ( $\langle G \rangle$  je kódování BKG  $G$  do binárního řetězce). Rozhodněte a dokažte, zda jazyk  $L_{BKG}$  (a) je rozhodnutelný, (b) je nerozhodnutelný, ale částečně rozhodnutelný, (c) není ani částečně rozhodnutelný. Pro důkaz (a) popište princip činnosti TS, který jazyk rozhoduje (není třeba sestavovat detailně přechodový diagram), pro důkaz (b) nebo (c) použijte redukci.

15 bodů

3. Plný binární strom je graf  $T = (V, E_L, E_R)$ , kde  $V$  je množina vrcholů,  $E_L, E_R: V \rightarrow V$  jsou injektivní totální zobrazení *levého* a *pravého* následníka taková, že  $img(E_L) \cap img(E_R) = \emptyset$ , kde  $img(f)$  značí *obor hodnot* zobrazení  $f$ . Dále platí, že existuje právě jeden vrchol  $r \in V$  takový že,  $\nexists u \in V : (u, r) \in E_L \cup E_R$  a  $\forall v \in V : (r, v) \in (E_L \cup E_R)^{RT}$ , kde  $A^{RT}$  značí reflexivně-tranzitivní uzávěr relace  $A$ .

- (a) Dokažte, že množina  $V$  je spočetně nekonečná (tj. existuje bijekce mezi  $V$  a  $\mathbb{N}$ ).
- (b) Nechť *obarvení stromu*  $T$  je funkce, která přiřazuje každému vrcholu  $v \in V$  barvu  $c(v) \in \{red, black\}$ . Dokažte pomocí diagonalizace, že množina všech obarvení stromu  $T$  je nespočetně nekonečná.

10 bodů

4. Navrhněte algoritmus, který pro bezkontextovou gramatiku  $G = (N, \Sigma, P, S)$  a symbol  $a \in \Sigma$  spočítá množinu

$${}_a N_a = \{A \in N \mid \exists w \in \Sigma^* : A \Rightarrow_G^+ w \wedge \exists u \in \Sigma^* : w = au a\}.$$

V algoritmu můžete využít množinu  $N_\epsilon = \{A \in N \mid A \Rightarrow_G^+ \epsilon\}$ . Doporučujeme nadefinovat si další vhodné množiny neterminálů a algoritmicky popsat jejich výpočet (u  $N_\epsilon$  popis výpočtu není potřeba).

Ilustrujte použití algoritmu na příkladě gramatiky s pravidly

$$S \rightarrow aWU \mid UWa \quad W \rightarrow YacU \mid Xa \quad Y \rightarrow X \mid \epsilon \quad X \rightarrow aXa \quad U \rightarrow bcaYY \mid Ucb$$

15 bodů