Teoretická informatika (TIN) – 2023/2024
Úkol 3
(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Sestavení zasedacího pořádku na Lenčině svatbě komplikují požadavky hostů na to, kdo s kým chce a nechce sedět. Dokažte, že Lenčin problém sestavení zasedacího pořádku (LP), definovaný následujícím způsobem, je **NP**-úplný: Mějme množinu hostů H, dvě ireflexivní binární relace *musí sedět s*, M, a *nechce sedět s*, N, na H, počet $S \in \mathbb{N}$ stolů, a velikostí $V \in \mathbb{N}$ stolů (počet míst u stolu). Je možné usadit všechny hosty k S stolům tak, aby u každého sedělo maximálně V hostů, aby každý seděl s těmi, s nimiž sedět musí, a zároveň neseděl s těmi, s nimiž sedět nechce?

   (Pozn: Pomůže Vám NP-úplnost některého z problémů uvedených zde:
   `https://en.wikipedia.org/wiki/NP-completeness#NP-complete_problems`
   v odstavci „*NP-complete problems*“.) 14 bodů

2. Uvažujme sekvenci n operací $\mathsf{vlož\_a\_uřež}(k), k \in \mathbb{N}$, provedenou nad oboustranně vázaném lineárním seznamem čísel, který je iniciálně prázdný.

   Operace $\mathsf{vlož\_a\_uřež}(k)$ vloží nový prvek s hodnotou k do seznamu na takovou pozici, před kterou jsou pouze prvky s menší hodnotou než k, a za kterou nejsou prvky s menší hodnotou než k. Následně vypíše a smaže všechny prvky seznamu za vloženým prvkem.

   Navrhněte, jak implementovat $\mathsf{vlož\_a\_uřež}$ tak, aby složitost sekvence n operací běžela v čase $O(n)$. Dokažte, že v sekvenci operací je amortizovaná složitost jedné Vaší operace $\mathsf{vlož\_a\_uřež}$ konstantní.

   (Pozn: Operaci $\mathsf{vlož\_a\_uřež}$ nepopisujte detailně na úrovni aktualizace ukazatelů, snažte se o jednoduše pochopitelný a jasný popis algoritmu s důrazem na hlavní myšlenku, bez rozebírání technikálií se zřejmým řešením. Předpokládejte, že máte funkce s konstantní časovou složitostí, které vrátí ukazatel na začátek/konec seznamu, pro daný ukazatel na prvek seznamu vloží nový prvek s danou hodnotou před/za tento prvek, smažou a vypíší předchozí/následující prvek, posunou ukazatel na následující/předchozí prvek, atd. Porovnání dvou čísel považujte za operaci s konstantní časovou složitostí. Řešení je jednoduché, není třeba vymýšlet nic komplikovaného, používat další datové struktury a pod., je třeba jen chytře využít invariant, který seznam splňuje.)

   14 bodů

3. Formalizujte Tseytinovu transformaci a dokažte, že vrátí formuli lineární velikosti k velikosti vstupní formule. Konkrétněji:

   - Předpokládejte na vstupu pouze formule generované gramatikou $\varphi \to X \mid \neg\varphi \mid (\varphi \vee \varphi)$, kde X je z množiny výrokových proměnných $\{A, B, C, \ldots\}$. Stejně jako na cvičení, velikost $|\varphi|$ formule φ je chápána jako délka slova nad abecedou $\{(,), \neg, \vee\} \cup X$.
   - Pro formalizaci Tseytinovy transformace definujte rekurzivní funkci $\mathtt{Tse}(\varphi, i)$, která pracuje induktivně ke struktuře formule, a pro formuli φ a $i \in \mathbb{N}$ na vstupu vrátí konjunkci klauzulí definujících „pojmenovaní“ podformulí φ, kde samotná φ je pojmenována proměnnou X_i, a její vlastní podformule jsou pojmenovány proměnnými $X_{i+1}, X_{i+2} \ldots$. Funkce $\mathtt{Tse}$ bude využívat funkci $\mathtt{CNF}$, která převede formuli tvaru $X \leftrightarrow \neg Y$ nebo $X \leftrightarrow (Y \vee Z)$ do CNF klasickým způsobem.
   - Lineární velikost výstupní formule dokažte indukcí ke struktuře vstupní formule.

   12 bodů

4. Mějme prvořádovou teorii T_{C} s jazykem, jehož signatura obsahuje binární funkční symbol C. T_{C} definuje význam C jako funkci na $\mathbb{N}$ takovou, že pro všechna $i, j \in \mathbb{N}$,

   $$\mathsf{C}(i,j) = \mathsf{to\_num}(\mathsf{to\_num}^{-1}(i).\mathsf{to\_num}^{-1}(j)) \ ,$$

   kde '.' je konkatenace řetězců a $\mathsf{to\_num}$ je bijektivní funkce z řetězců nad abecedou jazyka T_{C} do $\mathbb{N}$. Můžete předpokládat, že jazyk T_{C} má číslovky, tedy každé číslo $n \in \mathbb{N}$ je vyjádřeno nějakým termem jazyka.

   Aplikací Tarského věty o nevyjádřitelnosti množiny pravdivých výroků dokažte, že pro Vámi zvolené Gödelovo kódování G, množina Gödelových čísel důsledků T_{C}, tedy $\{G(\varphi) \mid \varphi \text{ je věta jazyka } T_{\mathsf{C}} \text{ a } T_{\mathsf{C}} \models \varphi\}$, nemůže být vyjádřitelná v teorii T_{C}.

(Pozn: Je třeba si jen uvědomit, co je co. Instanciovat správně abstraktní formální systém, zvolit Gödelovo kódování, a ukázat, že platí předpoklady Tarského věty, je potom jednoduché.)

10 bodů