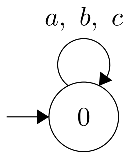
Vysoké učení technické v Brně
Fakulta informačních technologií

TIN
Úloha 1

24. října 2023 Adam Zvara (xzvara01)

1. Dôkaz (ne)regularity jazykov:

$L_1 \cap L_2$ - zamyslime sa nad tým, ako vyzerá prienik jazykov - konkrétne aké sú počty písmen v reťazcoch pôvodných jazykov. Jazyk L_2 obsahuje reťazce, ktorých $\#_a(w)$ a $\#_b(w)$ je nepárny. Ak sa pozrieme na počet písmen reťazcov jazyka L_1, tak určite platí, že je párny, pretože ku každému *jadru* reťazca w pripojíme reverzáciu w^R a teda ak $\#_a(w) = x$, tak $\#_a(ww^R) = 2x$, čo je určite deliteľné 2 (rovnako aj pre písmeno b). Teda ich prienikom je $\emptyset$ (L_1 obsahuje len reťazce s párnym počtom znakov $\{a, b, c\}$ a L_2 obsahuje len reťazce s nepárnym počtom znakov $\{a, b\}$ a obsahujú aspoň 1 písmeno a a b - teda nemusíme riešiť reťazce obsahujúce iba písmená c), ktorý **je regulárny** a prijímaný konečným automatom:



$$L = L_1 \cup L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid (w = xx^R \wedge x \in \{a, b, c\}^*) \vee (\#_a(w) \, mod \, 2 = \#_b(w) \, mod \, 2 = 1)\}$$

Dôkaz sporom: Predpokladajme, že $L \in \mathcal{L}_3$ a platí pre neho P.L. Predpokladajme ľubovoľné $k > 0$, pre ktoré si zvolíme reťazec $w = a^k b^k b^k a^k$. Určite platí, že $w \in L$ (pretože patrí do L_1) a zároveň $|w| = 4k \geq k$. Potom akékoľvek rozdelenie reťazca w na podreťazce x, y, z (pre ktoré platia podmienky P.L.) bude v tvare:

$$x = a^{\varphi_1}$$

$$y = a^{\varphi_2}$$

$$z = a^{k-\varphi_1-\varphi_2} b^k b^k a^k$$

pre ktoré platia podmienky:

$$\varphi_1 + \varphi_2 \leq k \wedge \varphi_2 \neq 0 \tag{1}$$

Môžeme si zvoliť $i = 0$ a podľa P.L. by reťazec $xy^0z \in L$, čo ale neplatí, pretože

$$xy^0z = a^{\varphi_1} a^{k-\varphi_1-\varphi_2} b^k b^k a^k = a^{k-\varphi_2} b^k b^k a^k$$

ale z podmienky 1 vyplýva, že:

$$k - \varphi_2 \neq k$$

teda vymazali sme aspoň jeden znak a zo začiatku reťazca, čím sme porušili, že reťazec patrí do L (porušili sme, že patrí do L_1 ale nepatrí ani do L_2, pretože $\#_b(w)$ je deliteľný 2). Teda dokázali sme, že jazyk $L = L_1 \cup L_2 \notin \mathcal{L}_3$.

* * *

2. Zostrojenie BKG a ZA pre jazyk $L_3 = \{\, puvw \,|\, p, v \in \{a, b\}^*, u, w \in \{c, d\}^*, (p = v^R \vee u = w^R)] \,\}$:

a) Zostrojenie bezkontextovej gramatiky G_3, pre ktorú platí $L(G_3) = L_3$

Ako teda vyzerajú príklady reťazcov z jazyka L_3? Buď reťazec obsahuje nejakú postupnosť znakov $\{a,\ b\}$, pričom sa ďalej nachádza reverzácia tejto sekvencie (oddelená ľub. sekvenciou $\{c,\ d\}$, ktorá môže byť aj na konci) alebo obsahuje postupnosť znakov $\{c,\ d\}$, ktoré sú opäť oddelené ľub sekvenciou $\{a,\ b\}$ (táto sekvencia môže byť aj na začiatku).

$$L_3 = \{\epsilon, a, b, c, d, aa, bb, cc, dd, abab, \ldots, aca, abcba, acbc, abdccd, \ldots\}$$

Poznámka: na poslednú podmienku definície jazyka si treba dávať pozor, ak reťazec obsahuje znaky z oboch množín {a, b} a {c, d} ... Teda napríklad do jazyka patrí reťazec "a", pretože $u = w = \epsilon \wedge u = w^R$.

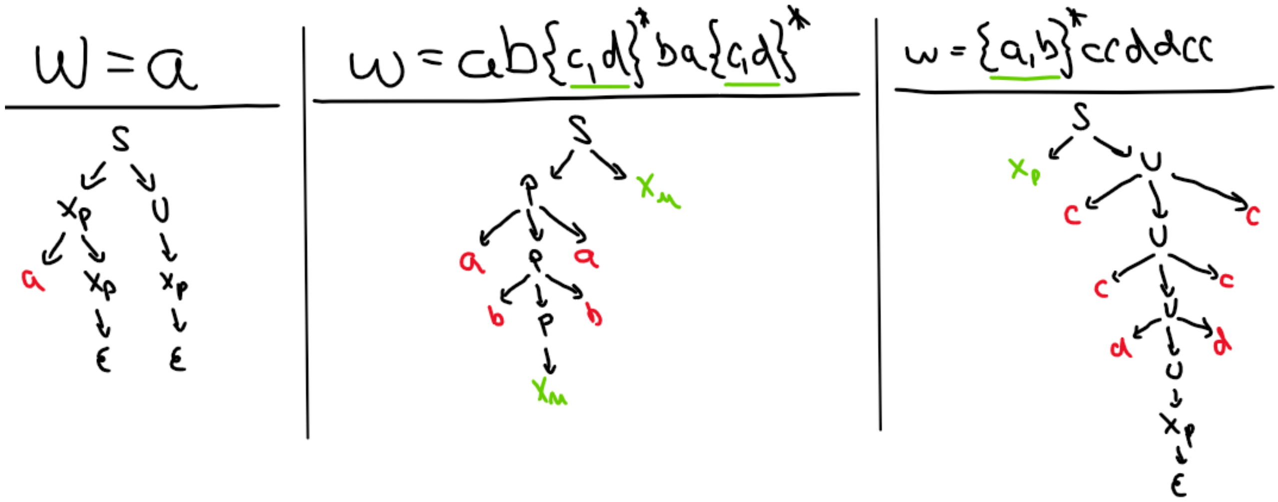
Teda gramatika generujúca takýto jazyk je daná následovne:

$$G_3 = (\{S, P, U, X_u, X_p\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$$

pričom množina pravidiel P je daná ako:

$$
\begin{aligned}
S &\to PX_u \mid X_pU \\
P &\to aPa \mid bPb \mid X_u \\
U &\to cUc \mid dUd \mid X_p \\
X_u &\to cX_u \mid dX_u \mid \epsilon \\
X_p &\to aX_p \mid bX_p \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

Niektoré príklady derivačných stromov:



b) Zostrojenie zásobníkového automatu Z_3, pre ktorý platí $L(Z_3) = L_3$

Môžeme využiť algoritmus na prevod bezkontextovej gramatiky z bodu a) na zásobníkový automat, ktorý prijíma s vyprázdnením zásobníku (analýza zhora dole).

$$P = (\{q\}, \Sigma_{G_3}, N_{G_3} \cup \Sigma_{G_3}, \delta, q, S, \emptyset)$$

kde δ je definované ako:

$$
\begin{aligned}
\delta(q, \epsilon, S) &= \{(q, PX_u), (q, X_pU)\} \\
\delta(q, \epsilon, P) &= \{(q, aPa), (q, bPb), (q, X_u)\} \\
\delta(q, \epsilon, U) &= \{(q, cUc), (q, dUd), (q, X_p)\} \\
\delta(q, \epsilon, X_u) &= \{(q, cX_u), (q, dX_u), (q, \epsilon)\} \\
\delta(q, \epsilon, X_p) &= \{(q, aX_p), (q, bX_p), (q, \epsilon)\} \\
\delta(q, a, a) &= \{(q, \epsilon)\} \\
\delta(q, b, b) &= \{(q, \epsilon)\} \\
\delta(q, c, c) &= \{(q, \epsilon)\} \\
\delta(q, d, d) &= \{(q, \epsilon)\}
\end{aligned}
$$

* * *

3. Rozhodnutie a dokázanie tvrdení:

a) $\exists L_1 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$ taký, že jeho doplnok $\overline{L_1}$ je konečný jazyk. Predpokladajme, že tvrdenie platí. Ak vieme, že $\overline{L_1}$ je konečný jazyk, tak určite platí $\overline{L_1} \in \mathcal{L}_3$. Z uzáverových vlastností regulárnych jazykov môžeme usúdiť, že $\overline{\overline{L_1}} \in \mathcal{L}_3 = L_1 \in \mathcal{L}_3$ čo je spor s pôvodným tvrdením, že $L_1 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$. Z toho vyplýva že tvrdenie **neplatí**.

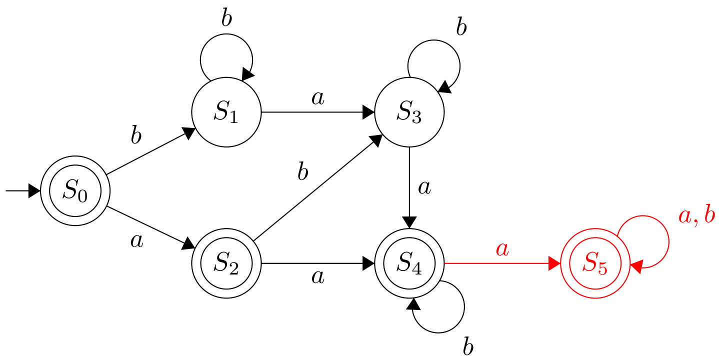
b) $\exists L_1 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$ taký, že $\forall L_2 \in L_3 : L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$. Tvrdenie **neplatí**. Ak si zvolíme ľubovoľný jazyk $L_1 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$ tak jeho prienik s jazykom $L_2 = \emptyset$ je určite $\emptyset$ a teda regulárny, čo je ale v spore s pôvodným tvrdením, že $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$.

c) $\exists L_1 \in \mathcal{L}_3$ taký, že $\forall L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 : L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$. Tvrdenie **platí**. Zvoľme si $L_1 = \Sigma^*$. Potom je $L_1 \cap L_2 = L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$.

* * *

4. Zostrojenie relácie pravej kongruencie s podmienkami:

Na zostrojenie relácie pravej kongruencie, ktoré spĺňa podmienky zo zadania si vytvorím úplný minimálny DKA, ktorý prijíma jazyk L a pridám do neho jeden nadbytočný stav (s_5):



Relácia pravej kongruencie je daná predpisom:

$$
\begin{aligned}
u \sim v \iff & (u = v = \epsilon) \lor && (S_0)\\
& (u, v \in b^+) \lor && (S_1)\\
& (u, v \in a) \lor && (S_2)\\
& (u, v \in b^+ab^* + ab^+) \lor && (S_3)\\
& (u, v \in ((b^+ab^* + ab^+)a + aa)b^* \lor && (S_4)\\
& (u, v \in ((b^+ab^* + ab^+)a + aa)b^*a(a + b)^* && (S_5)
\end{aligned}
$$