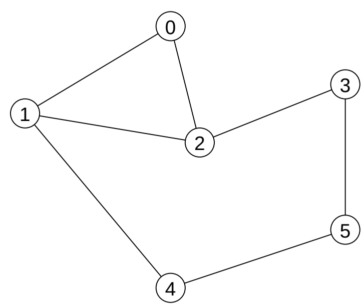
Zadania do wykładów 3 i 4

Każde z poniższych zadań rozwiąż za pomocą metod B&B lub DP w wybranym języku programowania. Proszę, aby każde zadanie było rozwiązane przez co najwyżej jednego studenta. Dopuszczalny czas działania każdego programu wynosi 10 sekund.

1. Załóżmy, że wierzchołki grafu nieskierowanego (ponumerowane od 0 do $n - 1$) reprezentują miejsca, gdzie można postawić stracha na wróble, a krawędzie reprezentują pola. Aby pole było zabezpieczone, należy na co najmniej jednym jego końcu ustawić stracha na wróble. Jaka jest minimalna liczba strachów na wróble wystarczająca do zabezpieczenia wszystkich pól?

   Jeśli na przykład rozkład miejsc oraz pól jest następujący:



   co w formacie *dot* będziemy reprezentowali następująco:

```
graph G {
0;
1;
2;
3;
4;
5;
0 -- 1;
0 -- 2;
1 -- 2;
1 -- 4;
3 -- 2;
3 -- 5;
4 -- 5;
}
```

   to odpowiedzią będzie liczba 3 (np. strachy na wróble ustawione w miejscach: 1, 2 i 5).

   Programy będą testowane na grafach, gdzie $n \leq 50$, a liczba krawędzi nie będzie przekraczała 80.

2. Rozważmy grę dwuosobową, której rekwizytami są liczby całkowite ułożone w ciągu $x_1, x_2, \dots, x_n$. Gracze wykonują naprzemiennie ruch, polegający na usunięciu z tego ciągu pierwszej lub ostatniej liczby. Zyskują przy tym tyle punktów, ile wynosi usunięta liczba. Celem obu graczy jest zdobycie jak największej sumy punktów. Napisz program wyznaczający maksymalną możliwą do zdobycia liczbę punktów przez pierwszego gracza, zakładając, że obaj zawodnicy grają optymalnie. Przyjmij, że $1 \leq n \leq 5000$ oraz $-10^9 \leq x_i \leq 10^9$.

   Dla przykładu niech ciągiem liczb będzie 4, 5, 1, 3. Pierwszy gracz może uzyskać 8 punktów w następujący sposób. Usuwamy 3, drugi gracz z ciągu 4, 5, 1 usuwa albo 4, albo 1, potem usuwamy 5, a na końcu drugi gracz usuwa ostatnią liczbę. 3 + 5 = 8.

3. Dana jest dodatnia liczba całkowita n ($1 \leq n \leq 10^6$). W każdym kroku od bieżącej liczby można odjąć jedną z jej cyfr. Jaka jest minimalna liczba kroków potrzebnych do zredukowania liczby n do zera? Jeśli na przykład $n = 27$, to poprawną odpowiedzią jest 5 ($27 \rightarrow 20 \rightarrow 18 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 0$).

4. Rozważmy kratownicę $n \times n$ ($1 \leq n \leq 100$), której wybrane pola zawierają pułapki. Naszym celem jest wyznaczenie liczby możliwych ścieżek biegnących od lewego górnego rogu do prawego dolnego rogu kratownicy z pominięciem pól pułapek. Dozwolone są tylko przejścia o jedno pole w dół oraz o jedno pole w prawo.

   Przyjmij, że dane wejściowe znajdują się w pliku tekstowym, jak pokazano poniżej.

   ```
   4
   ....
   .*..
   ...*
   *...
   ```

   Dla powyższych danych poprawną odpowiedzią jest liczba 3.

5. W księgarni jest n różnych książek, każda kosztuje c_i złotych i ma s_i stron. Na zakupy możemy przeznaczyć x złotych, kupując co najwyżej jedną książkę tego samego rodzaju. Jaką możemy uzyskać największą sumę liczby stron kupionych książek? Przyjmij, że $n \leq 1000$, $x \leq 10^5$, $1 \leq c_i, s_i \leq 1000$.

6. Na ile sposobów można wypełnić prostokąt o szerokości 2 jednostek i wysokości n ($1 \leq n \leq 100$) jednostek prostokątami o wymiarach całkowitych (w tych samych jednostkach)? Na przykład dla $n = 2$ mamy dokładnie 8 możliwości:

   ```
    _ _    _ _    _ _    _ _    _ _    _ _    _ _    _ _
   |_|_|  |   |  | | |  |_ _|  | |_|  |_| |  |_|_|  |_ _|
   |_|_|  |_ _|  |_|_|  |_ _|  |_|_|  |_|_|  |_ _|  |_|_|
   ```

7. Na ile sposobów można podzielić zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$ ($1 \leq n \leq 500$) na dwa zbiory o równej sumie? Na przykład dla $n = 7$ są cztery takie sposoby:

   - $\{1, 3, 4, 6\}$ oraz $\{2, 5, 7\}$,

- $\{1, 2, 5, 6\}$ oraz $\{3, 4, 7\}$,
- $\{1, 2, 4, 7\}$ oraz $\{3, 5, 6\}$,
- $\{1, 6, 7\}$ oraz $\{2, 3, 4, 5\}$.

8. Dana jest n-elementowa tablica liczb całkowitych. Znajdź długość najdłuższego rosnącego podciągu liczb wybranego z tej tablicy. Przez podciąg rozumiemy ciąg liczb, który może być uzyskany z danej tablicy przez usunięcie niektórych jej elementów, nie zmieniając jednak porządku pozostałych elementów. Niech $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^5$ oraz każda liczba x_i w tablicy będzie z zakresu $1 \leq x_i \leq 10^9$.

9. Mamy n osób, które chcą się dostać windą na górę budynku. Jaka jest minimalna liczba kursów, zakładając, że $1 \leq n \leq 20$, winda ma nośność x kg oraz poszczególne osoby ważą w_i kg ($1 \leq w_i \leq x \leq 10^6$).

10. Rozważmy pewną jednoosobową grę, w której rekwizytami są liczby całkowite ułożone w ciągu. W każdym kroku wybieramy dowolną liczbę oprócz dwóch skrajnych i usuwamy ją z ciągu. Zdobywamy za to tyle punktów ile wynosi suma wybranej do usunięcia liczby i jej dwóch przyległych sąsiadów. Gra kończy się, gdy w ciągu zostają dwie liczby. Naszym celem jest maksymalizacja zdobytych punktów. Oczywiście punkty zdobyte w kolejnych krokach sumują się. Na przykład, dla ciągu 2, 1, 5, 3, 4 możemy uzyskać maksymalnie 31 punktów w następujący sposób: usuwamy 3 (12 pkt) → 2, 1, 5, 4; usuwamy 1 (8 pkt) → 2, 5, 4; usuwamy 5 (11 pkt) → 2, 4. Suma = 12 + 8 + 11 = 31.

    Napisz program wyznaczający maksymalną możliwą do uzyskania sumę punktów. Zakładamy, że długość wejściowego ciągu nie przekroczy 200, a każdy jego element będzie zawierał się w przedziale $[1, 100]$.

11. Na ile sposobów możemy (całkowicie) pokryć szachownicę o wymiarach 3×12 kostkami o wymiarach 1×2 oraz 2×1.

12. Dany jest ciąg liczb całkowitych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($6 \leq n \leq 50$). Podziel go na sześć spójnych podciągów: $x_1, \ldots, x_{i_1}$, $x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_2}$, $x_{i_2+1}, \ldots, x_{i_3}$, $x_{i_3+1}, \ldots, x_{i_4}$, $x_{i_4+1}, \ldots, x_{i_5}$, $x_{i_5+1}, \ldots, x_n$, gdzie $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 < n$, tak aby zminimalizować sumę kosztów podciągów. Koszt każdego podciągu $x_a, \ldots, x_b$ wyznaczany jest ze wzoru $\mathrm{cost}(a, b) = (x_a + x_{a+1} + \cdots + x_b)^2$.

13. Załóżmy, że dla danej macierzy $n \times n$ należy wybrać n liczb, tak aby ich suma była największa, ale każda wybrana liczba powinna być jedyną wybraną w swoim wierszu i swojej kolumnie oraz liczba wybrana z drugiego wiersza nie może być mniejsza od liczby wybranej z pierwszego wiersza, liczba wybrana z trzeciego wiersza nie może być mniejsza od liczby wybranej z drugiego wiersza i tak dalej, aż do liczby wybranej z ostatniego wiersza, która nie może być mniejsza od liczby wybranej z przedostatniego wiersza. Na przykład dla macierzy:

```
  7  53 183 439
627 343 773 959
347 283 463  29
217 623   3 399
```

można osiągnąć maksymalną sumę wynoszącą 1272. Liczbami, które ją tworzą są: 183, 343, 347 i 399. Znajdź liczby (o ile taki wybór jest możliwy) tworzące maksymalną sumę dla macierzy:

```
  7  53 183 439 863 497 383 563  79 973 287  63 343 169 583
627 343 773 959 943 767 473 103 699 303 957 703 583 639 913
447 283 463  29  23 487 463 993 119 883 327 493 423 159 743
217 623   3 399 853 407 103 983  89 463 290 516 212 462 350
960 376 682 962 300 780 486 502 912 800 250 346 172 812 350
870 456 192 162 593 473 915  45 989 873 823 965 425 329 803
973 965 905 919 133 673 665 235 509 613 673 815 165 992 326
322 148 972 962 286 255 941 541 265 323 925 281 601  95 973
445 721  11 525 473  65 511 164 138 672  18 428 154 448 848
414 456 310 312 798 104 566 520 302 248 694 976 430 392 198
184 829 373 181 631 101 969 613 840 740 778 458 284 760 390
821 461 843 513  17 901 711 993 293 157 274  94 192 156 574
 34 124   4 878 450 476 712 914 838 669 875 299 823 329 699
815 559 813 459 522 788 168 586 966 232 308 833 251 631 107
813 883 451 509 615  77 281 613 459 205 380 274 302  35 805
```

14. Mamy N listewek ($1 \leq N \leq 100$). Ich długości d_j ($1 \leq j \leq N$) są znane, podane w pełnych centymetrach, a najdłuższa z nich nie przekracza 250 cm. Każdą z nich można rozciąć na dwie części, uzyskując w ten sposób dwie listewki o długości oryginalnej listewki. Takiego rozcięcia można dokonać co najwyżej raz (tzn., że żadnej z dwóch uzyskanych cieńszych listewek po raz kolejny już rozcinać nie możemy). Dana jest docelowa długość $\sum_{j=1..N} d_j \leq P \leq 50000$ też wyrażona w pełnych centymetrach. Czy ze wszystkich listewek da się poskładać jeden długi prosty ciąg listewek o długości P?

15. Dane są trzy tablice, a, b i c, o tej samej długości n ($1 \leq n \leq 10^5$). We wszystkich tablicach znajdują się liczby całkowite dodatnie ≤ 100. Należy skonstruować czwartą tablicę, d, też o tej samej długości n, która spełnia następujące własności dla wszystkich $0 \leq i < n$ oraz $0 \leq j < n - 1$:

    - $d[i] = a[i]$ lub $d[i] = b[i]$ lub $d[i] = c[i]$,
    - jeśli $d[j] = a[j]$, to $d[j+1] = b[j+1]$ lub $d[j+1] = c[j+1]$,
    - jeśli $d[j] = b[j]$, to $d[j+1] = a[j+1]$ lub $d[j+1] = c[j+1]$,
    - jeśli $d[j] = c[j]$, to $d[j+1] = a[j+1]$ lub $d[j+1] = b[j+1]$,
    - suma liczb w tablicy d jest możliwie najmniejsza.

16. Dany jest wyraz złożony z małych liter alfabetu angielskiego. Na wyrazie tym możemy wykonać dowolną liczbę operacji. Pojedyncza operacja polega na usunięciu dowolnej części wyrazu. Usuwany fragment musi być palindromem. Pozostałe części są sklejane w nowy wyraz z zachowaniem ich dotychczasowej kolejności. Twoim zadaniem jest całkowite usunięcie wyrazu.

    Palindrom jest to wyraz, który czytany od lewej strony do prawej brzmi tak samo jak czytany od prawej strony do lewej np. kajak.

Na wejściu znajduje się wyraz złożony z małych liter alfabetu angielskiego, którego długość nie przekracza 400 liter. Na wyjściu należy wypisać liczbę całkowitą równą minimalnej liczbie operacji, które trzeba wykonać, żeby usunąć cały wyraz. Na przykład dla łańcucha *addbcba* tą najmniejszą liczbą jest 2.