Zadania do wykładów 7 i 8

Każde zadanie rozwiązać za pomocą metody SMT. Podpunkty (a), (b), (c) itd. należy traktować jak oddzielne zadanie.

1. (5 pkt.) Znajdź całkowite a oraz b, takie że funkcja $f : N_{12} \to N_{12}$ określona wzorem $f(x) = (ax + b) \bmod 12$ jest bijektywna oraz $f^{-1} = f$.

2. (4 pkt.) Paczki pocztowe mają długość x_1 mm, szerokość x_2 mm oraz wysokość x_3 mm. Żadna z tych wartości nie może przekroczyć 4200. Dodatkowo, obwód paczki (wyznaczany ze wzoru $2(x_2 + x_3)$) łącznie z jej długością nie może być większy niż 9200 mm. Określ optymalne wymiary paczki w pełnych milimetrach, zakładając, że naszym celem jest maksymalizacja jej objętości.

3. (3 pkt.) Znajdź najmniejszą sumę $x + y + z$ takich trzech liczb całkowitych, żeby $x > y > z > 0$ oraz żeby wszystkie następujące liczby: $x - y$, $x + z$, $x - z$, $y + z$ i $y - z$ były liczbami kwadratowymi.

4. (3 pkt.) Dla całkowitych $x, y \geq 30000$ znajdź najmniejszą sumę $x + y$, tak aby było spełnione równanie $x^2 + x + 1 = 3y^2$.

5. (4 pkt.) Znajdź liczby rzeczywiste dodatnie x i y spełniające warunki: $y - x < 2$, $2x + 3y < 1$ oraz $(0.2 - y)/(1.3 - x) - \sin(x)/x < -1.1008$.

6. (4 pkt.) Ułamkiem łańcuchowym nazywamy wyrażenie

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}}$$

   gdzie a_0 jest liczbą całkowitą, a wszystkie pozostałe liczby a_i ($i \neq 0$) są całkowite dodatnie. Ze względów typograficznych równość tę zwyczajowo zapisuje się w następujący sposób:

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots].$$

   Ponieważ znany jest algorytm szybkiego wyliczania przybliżeń x za pomocą kolejnych wartości a_i, ułamki łańcuchowe mają duże znaczenie w metodach numerycznych. Wiadomo na przykład, że $1 + \sqrt{2} = [2; 2, 2, 2, \ldots]$. Znajdź ułamek łańcuchowy dla $\sqrt{5}$.

7. (4 pkt.) Rozwiąż równanie $x^y \equiv 16779582829584320111 \mod 2^{64}$, zakładając, że $x \geq 2$ i $y \geq 2$ są liczbami całkowitymi.

8. (3 pkt.) Dodatnie liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_7$ spełniają następujące warunki: $x_6 = 144$ oraz $x_{n+3} = x_{n+2}(x_{n+1} + x_n)$ dla $n = 1, 2, 3, 4$. Znajdź te liczby.

9. (4 pkt.) Ustaw na szachownicy osiem hetmanów w taki sposób, aby się wzajemnie nie atakowały.

10. (5 pkt.) Dany jest generator liniowy

$$X_{i+1} = 68909602460261 \cdot X_i \bmod 2^{48}.$$

Dla jakiej wartości X_0 uzyskamy największe k o tej własności, że $X_j \bmod 47 = 42$ dla $j = 0, 1, \ldots, k$.

11. (4 pkt.) Rozważmy macierz o wymiarach 3×3. Wypełnij ją liczbami od 1 do 9 w taki sposób, aby:

    - suma liczb w każdym wierszu, każdej kolumnie i na każdej z dwóch przekątnych była taka sama oraz
    - każda liczba była użyta dokładnie raz.

12. (3 pkt.) Wyznacz $\sqrt[3]{7}$ z dokładnością 100 cyfr po kropce dziesiętnej.

13. (5 pkt.) Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ została zrealizowana za pomocą działań: dodawania, odejmowania i mnożenia, z wykorzystaniem argumentów: x, y oraz stałych: 0 i 1. Jeśli wiemy, że:

    $f(2, 5) = 9,$
    $f(3, 1) = 2,$
    $f(2, 2) = 3,$
    $f(4, 3) = 11,$

    to łatwo wyliczyć $f(7, 6) = 41$, zauważając, że $f(x, y) = xy - 1$. Jaka funkcja kryje się za poniższym f?

    $f(2, 3) = 8,$
    $f(3, 7) = 27,$
    $f(4, 5) = 32,$
    $f(5, 8) = 60,$
    $f(6, 7) = 72,$
    $f(7, 8) = ?,$

14. (3 pkt.) Trzema różnymi liczbami naturalnymi spełniającymi równanie

    $$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

    są $x = 3$, $y = 6$, $z = 15$. Znajdź trzy inne takie liczby naturalne, gdzie $x < y$ oraz $y < z$.

15. (4 pkt.) W koszyku znajduje się x jabłek. Pięciu przyjaciół zgaduje, ile jest jabłek w koszyku. Podali oni następujące wartości: 22, 24, 29, 33, 38. Żaden z nich nie odgadł prawidłowej liczby. Pomylili się o 1, 8, 6, 3 i 8 (kolejność przypadkowa, tj. nie wiadomo, który z nich pomylił się o 1, który o 8 itd.). Wyznacz x.

16. (3 pkt. za każdy podpunkt) Dla każdego z poniższych problemów napisz program z wykorzystaniem biblioteki Z3.

    (a) SET COVERING (`https://en.wikipedia.org/wiki/Set_cover_problem`)
    (b) VERTEX COVER (`https://en.wikipedia.org/wiki/Vertex_cover`)
    (c) KNAPSACK (`https://en.wikipedia.org/wiki/Knapsack_problem`)
    (d) STREE (`https://en.wikipedia.org/wiki/Minimum_degree_spanning_tree`)
    (e) DOMINATING SET (`https://en.wikipedia.org/wiki/Dominating_set`)

17. (5 pkt.) Dane są dwie zmienne, x oraz y, typu **ulong** (64 bitowy nieoznakowany typ całkowity). Wykaż, że następujący ciąg instrukcji:

    $x = x$ xor y;
    $y = y$ xor x;
    $x = x$ xor y;

    spowoduje zamianę wartości, tzn. że po ich wykonaniu w zmiennej y będzie początkowa wartość x, a w x będzie początkowa wartość y.