

Support de Cours

Mécanique des solides

Le document qui suit est le support du cours dispensé en deuxième année (niveau BAC+2) à l'ESISAR - INPG. Le volume horaire est de 15 h de cours de 13 h 30 de TD et de 6 h de TP.

Laurent Granjon

3 février 2000

Copyright : utilisation de ces documents libre pour tout usage personnel. Utilisation autorisée pour tout usage public non commercial, à condition de citer son auteur (Laurent Granjon, ESISAR, INPG, mel : Laurent.Granjon@esisar.inpg.fr) et de me signaler tout usage intensif. Utilisation commerciale interdite sans accord écrit de ma part.

Sommaire

Titre et notice de copyright	I
Sommaire	II
Bibliographie	IV
Introduction à la mécanique des solides	1
Notion de système - Notion de modèle	1
Hypothèses utilisées en mécanique classique	1
Limites de la mécanique classique	2
Applications	2
Méthodologie d'étude	2
Savoir et savoir-faire nécessaires à la résolution d'un problème de mécanique	4
Plan d'étude d'un système mécanique	5
Rappel de calcul vectoriel	6
Produit scalaire	6
Bases orthonormées	6
Produit vectoriel	8
Produit mixte	8
Eléments du cadre mathématique	10
Espaces	10
Repérages	10
Vecteur libre	11
Vecteur lié	13
Ensemble de vecteurs liés	13
Torseurs	14
Action mécanique - Statique	15
Action mécanique	15
Définitions utiles pour la modélisation	15
Action mécanique exercée sur un solide ou un ensemble de solides	17
Principe fondamental de la statique	17
Principe d'action et de réaction - actions mécaniques réciproques	19
Nombre d'équations	20
Méthode d'étude d'un problème de statique	20
Les liaisons parfaites	22
Définition	22
Les principales liaisons parfaites	22
Schématisation normalisée des liaisons	28
Créer et recréer des liaisons	30
Cinématique	31
Définition	31
Hypothèses	31
Position d'un point par rapport à un repère	32
Point lié à un solide	32
Trajectoire d'un point par rapport à un repère choisi	33
Vecteur rotation d'un solide ou d'un repère	34
Dérivée cinématique d'un vecteur	36
Vitesse d'un point par rapport à un repère	36
Accélération d'un point par rapport à un repère	38

Géométrie des masses	39
Eléments de définition d'un solide en dynamique	39
Masse	39
Centre de masses	40
Moments d'inertie	41
Produits d'inertie	41
Matrice d'inertie	42
Remarque	42
Théorèmes relatifs aux symétries	43
Matrices centrales d'inertie de quelques solides élémentaires	44
Autre définition du moment d'inertie	48
Théorèmes relatifs aux moments d'inertie	49
Théorèmes d'Huygens	49
Changement de repère	52
Diagonalisation des matrices d'inertie	53
Eléments d'inertie principaux et centraux	54
Méthode pratique de calcul	55
Dynamique	56
Principe fondamental de la dynamique	56
Repère galiléen	56
Torseur dynamique d'un système mécanique	57
Torseur dynamique d'un solide	57
Torseur cinétique d'un solide	58
Calcul du moment dynamique en fonction du moment cinétique	59
Points privilégiés pour le calcul du moment dynamique	59
Calcul des moments cinétiques	60
Calcul pratique des moments cinétiques	62
Rappel sur les moments cinétiques et dynamiques	63
Méthode pratique de calcul	63
Retour sur la méthode générale de résolution d'un problème de dynamique	64
Equations de liaison	66
Liaisons géométriques	66
Liaisons cinématiques	67
Liaisons expérimentales	69

Bibliographie

GAILLARD, RAFFY - *Mécanique générale*, Tome I et II - EYROLLES 1990

PERES - *Mécanique générale* - quatrième édition - MASSON, 1994

AGATI, BREMONT et DELVILLE - *Mécanique du solide (applications industrielles)* DUNOD 1986

BERTIN, FAROUX, RENAULT - *Cours de physique, Mécanique 2, Classes préparatoires et premier cycle universitaire*, DUNOD 1996

KRAIGE, MERIAM - *Mécanique de l'ingénieur, Statique*, REYNALD GOULET inc 1996

BONE, BOUCHER et MOREL - *Mécanique générale (cours et applications)* - DUNOD UNIVERSITE, 1984

COIFFET - *La robotique, principes et applications* - HERMES. 1986

CRAVERO - *Eléments de mécanique classique et statique*, EYROLLES, 1988

HENRIOT - *Traité théorique et pratique des engrenages* - DUNOD - Tomes I et II, 1960

Introduction à la mécanique des solides

1 Notion de système - Notion de modèle

Pour étudier de manière efficace le monde qui l'entoure, l'homme s'est aperçu qu'il est possible de fragmenter l'espace qui nous entoure en différents « *systèmes* » qui « *interagissent* » entre eux.

Exemples de système : une voiture, une balle de tennis, un marcheur, un touret à meuler,.....

Exemple d'interactions entre systèmes : le courant électrique crée un champ magnétique, l'arbre s'appuie sur les paliers, l'eau dissout le sel,....

Le monde qui nous entoure est rempli d'objets, d'éléments matériels, qui interagissent entre eux et avec nous. Le nombre de ces interactions est très grand, souvent infini, et toutes ne peuvent être prises en compte dans l'étude d'un système matériel.

Pour l'étude des systèmes matériels, l'homme a donc été amené à ne considérer que certaines interactions, en négligeant les autres. Suivant les résultats qui l'intéressent, il a séparé l'étude des systèmes physiques en différentes disciplines (électricité, chimie, thermique, mécanique,....).

Au sein de chaque discipline, nous sommes amenés à faire des hypothèses sur les systèmes étudiés, et à limiter notre étude dans l'espace et dans le temps. Nous sommes donc amené à construire des modèles des systèmes, et il ne faut jamais perdre de vue qu'une modélisation n'est pas la réalité, mais seulement une interprétation (généralement basée sur des lois mathématiques) de la réalité, fondée sur des hypothèses plus ou moins justes, plus ou moins précises.

N'oublions jamais qu'un modèle n'est qu'une représentation (très) imparfaite de la réalité.

Dans le cadre de ce cours, nous allons nous intéresser uniquement aux relations mécaniques entre les solides, les relations mécaniques étant celles qui modifient l'état de repos ou de mouvement d'un système matériel ou de certaines de ses parties

2 Hypothèses utilisées en mécanique classique

En mécanique classique, nous allons étudier :

◇ des systèmes matériels (dont le contenu matériel est ou non variable) qui existent pendant un intervalle donné de temps dans un espace réel à trois dimensions.

◇ On admettra que, à chaque instant, le système matériel considéré est constitué d'éléments individualisable, de points matériels.

◇ Si un ensemble de points matériel est tel que les distances entre chaque point constituant l'ensemble sont constantes, alors cet ensemble de points sera appelé solide. Un solide est donc indéformable.

◇ La masse d'un élément (d'une partie ou de l'ensemble du système matériel) ne dépend que de la quantité de matière qui le compose).

◇ On ne retiendra, dans l'ensemble des relations entre le système et le monde extérieur que celles qui modifient l'état de repos ou de mouvement du système ou de certaines de ses parties.

3 Limites de la mécanique classique

◇ La mécanique telle que nous l'avons définie ne permet pas d'expliquer et de prévoir les mouvements des très petits systèmes matériels (typiquement les éléments constitutifs de la matière, voire de certaines particules fines (ordre de grandeur : le μm))

◇ De même, les mouvements des galaxies ne sont pas parfaitement pris en compte par la mécanique classique

◇ Si la vitesse d'un système est proche de celle de la lumière, de nouveau, la mécanique classique ne s'applique plus, il faut utiliser la relativité. (Typiquement si $V > 0,1C$, C étant la vitesse de la lumière dans le vide).

◇ Il faut se rappeler que dans les modélisations que nous allons effectuer, toutes les interactions entre les systèmes ne sont pas prises en compte, alors que certaines peuvent être importantes pour le système considéré, ou avoir une action à long terme (exemple : les variations de température, ou les problèmes chimiques pour la fatigue des matériaux, la prise en compte des phénomènes de dilatation souvent négligés,...)

4 Applications

Une application classique du cours de mécanique du solide est le gyroscope, mais, de plus en plus, la robotique et l'automatisation des processus vont nous intéresser. Les systèmes automatisés et les robots doivent être de plus en plus complexes, rapides, précis. La mécanique, couplée à l'informatique, permet de dimensionner et de prévoir des modèles de commande relativement sophistiqués pour optimiser la commande et l'asservissement de robots de plus en plus complexe et rapides, avec une répétabilité toujours améliorée.... Et ce, en temps réel.

5 Méthodologie

La méthode que nous allons utiliser consiste à s'intéresser successivement à chacun des solides ou ensemble de solides constituant un mécanisme. Il faut isoler le solide.

Nous analyserons alors :

◇ Ses mouvements : un solide possède six degrés de liberté, et à chaque degré de liberté correspond un paramètre géométrique, linéaire ou angulaire. Deux cas sont alors possible :

◇ Soit ce paramètre est connu (on dira asservi). Cela suppose qu'une action mécanique inconnue permet d'obtenir la loi de variation de ce paramètre en fonction du temps

◇ Soit ce paramètre est inconnu, on dira libre, car il est libre d'évoluer en fonction des lois de la mécanique. L'action mécanique qui s'exerce alors sur ce paramètre est alors connue, éventuellement nulle.

◇ Les actions mécaniques exercées par le reste du monde, par l'extérieur, sur le solide ou sur l'ensemble de solides. On distinguera entre :

◇ les actions mécaniques connues, volumiques (poids par exemple) ou surfaciques (pression de contact exercée par un ressort, un amortisseur, ...)

◇ les actions mécaniques inconnues données généralement par les liaisons

On applique ensuite les lois de la mécanique générale découvertes par Galilée, Newton, Lagrange, Coriolis.....

$$\left[\begin{array}{l} \text{La somme des éléments de réduction} \\ \text{en un point M des vecteurs représentant} \\ \text{toutes les actions mécaniques extérieures} \\ \text{agissant sur (S)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{les éléments de réduction en M} \\ \text{de l'ensemble des vecteurs représentant} \\ \text{les quantités d'accélération de (S) par rapport} \\ \text{à un repère galiléen} \end{array} \right] \quad (1.1)$$

Les deux ensembles de vecteurs sont donc équivalents, ils sont représentés par le même torseur Soit

$$\left[\begin{array}{l} \text{Torseur représentant} \\ \text{les actions mécaniques extérieures} \\ \text{agissant sur (S)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Torseur représentant} \\ \text{les quantités d'accélération de (S)} \\ \text{par rapport à un repère galiléen} \end{array} \right] \quad (1.2)$$

Remarque : Définition d'un référentiel galiléen :

◇ un référentiel galiléen ou d'inertie est un référentiel dans lequel un point matériel isolé a un mouvement rectiligne uniforme.

◇ Un point matériel isolé étant un point libre de toute interaction

◇ Les référentiels galiléens n'existent pas dans la nature, nous utiliserons le plus souvent des référentiels quasi-galiléens, qui ne créent que des quantités d'accélérations négligeables par rapport à celles mises en jeux dans nos problèmes.

Vectoriellement, ces lois se traduisent par les deux relations suivantes dans lesquelles p est un point de masse m_p appartenant à S, et C un point quelconque.

Théorème du mouvement du centre de masse :

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{EXT/S}}} = \int_{(S)} \overrightarrow{\gamma_{S/g}}(p \in S/t) \cdot m_p \cdot dp = M_S \cdot \overrightarrow{\gamma_{S/g}}(G_S/t) \quad (1.3)$$

Théorème du moment dynamique :

$$\sum \overrightarrow{M_{C/C}}(\overrightarrow{F_{\text{EXT/S}}}) + \sum \overrightarrow{C_{\text{EXT/S}}} = \int_{(S)} \overrightarrow{C_p} \wedge \overrightarrow{\gamma_{S/g}}(p \in S/t) \cdot m_p \cdot dp = \overrightarrow{\delta_{C/g}}(S/t) \quad (1.4)$$

En imposant une somme et un moment dynamique nul, on retrouve les lois de la statique :

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{EXT/S}}} = \vec{0} \quad (1.5)$$

$$\sum \overrightarrow{M_{/C}(\overrightarrow{F_{\text{EXT/S}}})} + \sum \overrightarrow{C_{\text{EXT/S}}} = \vec{0} \quad (1.6)$$

6 Savoir et savoir-faire nécessaires à la résolution d'un problème de mécanique

◇ Distinguer les grandeurs scalaires (masse, loi de mouvement, dimension,...), les grandeurs vectorielles (vecteur force, vecteur vitesse, vecteur accélération,), les grandeurs torsesielles représentant des ensembles de vecteurs (action mécanique, quantité de mouvement, quantité d'accélération)....

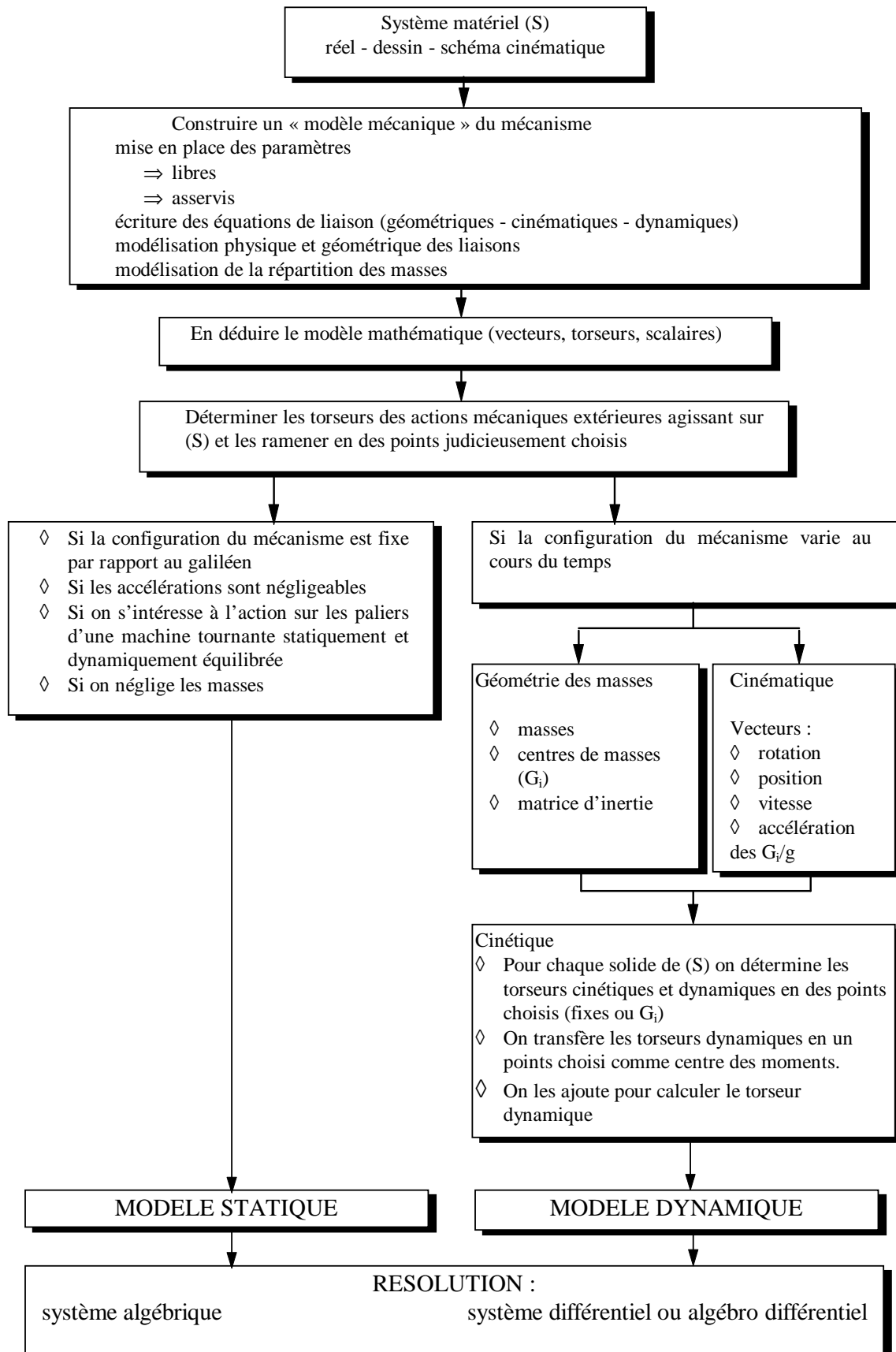
◇ Effectuer des calculs sur ces grandeurs

◇ Modéliser un mécanisme, distinguer repère et base, choisir un ou des systèmes de coordonnées, des paramètres

◇ Ecrire les équations, correspondant au modèle choisi, qu'elles soient algébriques, différentielles ou algébro-différentielles

◇ Analyser les résultats, avec un regard suffisamment critique....

7 Plan d'étude d'un système mécanique



Rappels de calcul vectoriel

1. produit scalaire de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B}

1.1. définition

soient \vec{A} et \vec{B} deux vecteurs, formant entre eux un angle θ orienté dans le sens trigonométrique du plan (\vec{A}, \vec{B}) . Le produit scalaire de \vec{A} et \vec{B} est le scalaire noté

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos(\theta) \quad \|\vec{A}\| : \text{norme de A} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad & (\lambda \cdot \vec{A}_1 + \mu \cdot \vec{A}_2) \cdot \vec{B} = \lambda \cdot \vec{A}_1 \cdot \vec{B} + \mu \cdot \vec{A}_2 \cdot \vec{B} \\ \text{et} \quad & \vec{A} \cdot (\lambda \cdot \vec{B}_1 + \mu \cdot \vec{B}_2) = \lambda \cdot \vec{A} \cdot \vec{B}_1 + \mu \cdot \vec{A} \cdot \vec{B}_2 \end{aligned} \quad \text{linéarité} \quad (2.2)$$

1.2. propriétés fondamentales

$$\bullet \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (2.3)$$

$$\bullet \quad \text{si } \vec{A} \text{ et } \vec{B} \text{ sont normaux entre eux, } \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

1.3. carré scalaire et norme

$$\bullet \quad \text{si } \vec{A} = \vec{B} \text{ le produit devient } \vec{A} \cdot \vec{A} = \vec{A}^2 = \|\vec{A}\|^2 \quad (2.5)$$

2. bases orthonormées

2.1. définition

dans le plan : base (\vec{I}, \vec{J}) constituée de deux vecteurs \vec{I} et \vec{J} tel que :

$$\begin{cases} \vec{I} \cdot \vec{J} = 0 & \vec{I} \text{ normal à } \vec{J} \\ \vec{I}^2 = \vec{J}^2 = 1 & \vec{I} \text{ et } \vec{J} \text{ normés} \end{cases}$$

deux possibilités :



dans l'espace (3D) : base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ telle que

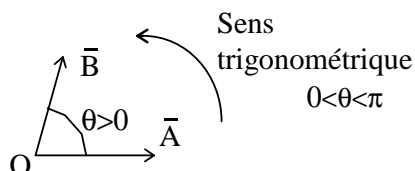
$$\vec{I} \cdot \vec{J} = \vec{I} \cdot \vec{K} = \vec{J} \cdot \vec{K} = 0$$

$$\text{et} \quad \vec{I}^2 = \vec{J}^2 = \vec{K}^2 = 1$$

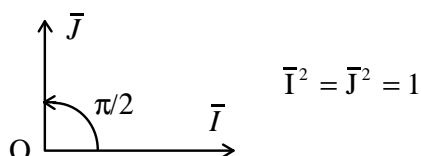
2.2. repères ou trièdres directs - bases orthonormées directes

2.2.1. dans le plan :

- repère direct : repère (O, \vec{A}, \vec{B}) tel que

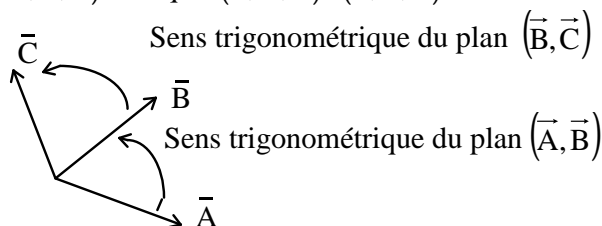


- repère orthonormé direct : repère (O, \vec{I}, \vec{J})

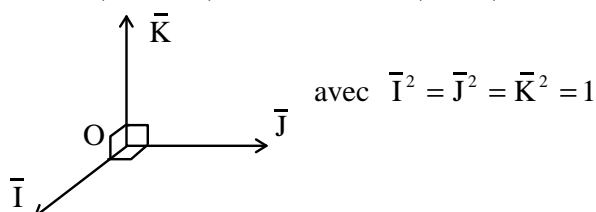


2.2.2. dans l'espace

- repère direct : $(O, \vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$: tel que (O, \vec{A}, \vec{B}) et (O, \vec{B}, \vec{C}) soient direct.



- repère orthonormé direct $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ tel que la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ soit orthonormée directe



2.3. Calcul du produit scalaire dans une base orthonormée

2.3.1. en 2D :

- soient $\vec{A} = a_1 \cdot \vec{I} + a_2 \cdot \vec{J}$
et $\vec{B} = b_1 \cdot \vec{I} + b_2 \cdot \vec{J}$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (a_1 \cdot \vec{I} + a_2 \cdot \vec{J}) \cdot (b_1 \cdot \vec{I} + b_2 \cdot \vec{J}) = a_1 \cdot b_1 \cdot \vec{I}^2 + a_1 \cdot b_2 \cdot \vec{I} \cdot \vec{J} + a_2 \cdot b_1 \cdot \vec{J} \cdot \vec{I} + a_2 \cdot b_2 \cdot \vec{J}^2 \\ &= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.3.2. en 3D :

- soient $\vec{A} = a_1 \cdot \vec{I} + a_2 \cdot \vec{J} + a_3 \cdot \vec{K}$
et $\vec{B} = b_1 \cdot \vec{I} + b_2 \cdot \vec{J} + b_3 \cdot \vec{K}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \quad (2.7)$$

3. produit vectoriel de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} **3.1. Définition**

soient deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} formant entre eux un angle θ orienté dans le sens trigonométrique du plan (\vec{A}, \vec{B}) . Le produit vectoriel de \vec{A} et \vec{B} , noté $\vec{A} \wedge \vec{B}$ est un vecteur $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ tel que :

- \vec{C} est perpendiculaire au plan (\vec{A}, \vec{B})
 - le trièdre $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ est direct
 - $\|\vec{C}\| = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin(\theta)$
- (2.8)

3.2. propriétés fondamentales

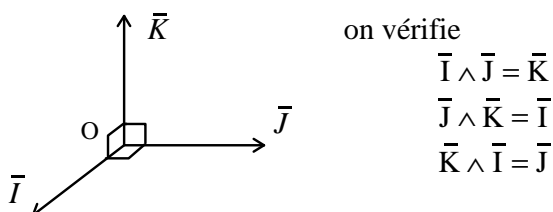
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} (\lambda \cdot \vec{A}_1 + \mu \cdot \vec{A}_2) \wedge \vec{B} = \lambda \cdot \vec{A}_1 \wedge \vec{B} + \mu \cdot \vec{A}_2 \wedge \vec{B} \quad (2.9)$$

$$\vec{A} \wedge (\lambda \cdot \vec{B}_1 + \mu \cdot \vec{B}_2) = \lambda \cdot \vec{A} \wedge \vec{B}_1 + \mu \cdot \vec{A} \wedge \vec{B}_2 \quad (2.10)$$

On vérifie à partir de la définition :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A} \quad (2.11)$$

$$\text{si } \vec{A} \text{ et } \vec{B} \text{ sont parallèles entre eux, } \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0} \quad (2.12)$$

3.3. cas particulier d'une base orthonormée directe

$$\begin{aligned} \vec{I} \wedge \vec{J} &= \vec{K} \\ \vec{J} \wedge \vec{K} &= \vec{I} \\ \vec{K} \wedge \vec{I} &= \vec{J} \end{aligned}$$

3.4. calcul du produit vectoriel dans une base orthonormée

soit $\vec{A} = a_1 \cdot \vec{I} + a_2 \cdot \vec{J} + a_3 \cdot \vec{K}$ et $\vec{B} = b_1 \cdot \vec{I} + b_2 \cdot \vec{J} + b_3 \cdot \vec{K}$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot \vec{I} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot \vec{J} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot \vec{K} \quad (2.13)$$

4. produit mixte de trois vecteurs \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} **4.1. définition**

$$\text{C'est la quantité notée } (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) \text{ telle que } (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) \quad (2.14)$$

Dans une base orthonormée directe :

$$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = \bar{A} \cdot (\bar{B} \wedge \bar{C}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \quad (2.15)$$

4.2. propriétés

$$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = \bar{A} \cdot (\bar{B} \wedge \bar{C}) = \det(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) \quad (2.16)$$

Le produit mixte est aussi le déterminant de :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Le produit mixte possède toutes les propriétés du déterminant dont :

- il change de signe si on permute deux vecteurs : $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = -(\bar{B}, \bar{A}, \bar{C}) = (\bar{C}, \bar{A}, \bar{B})$
- il s'annule si deux au moins des vecteurs sont identiques : ex : $(\bar{A}, \bar{A}, \bar{C}) = 0$
-

Eléments du cadre mathématique.

1. Espaces

1.1. Espaces

Le modèle mathématique utilisé pour modéliser l'espace qui nous entoure est le suivant :

Mathématiquement, l'espace qui nous entoure est un espace affine (formé de points) euclidien (on peut définir la distance entre deux points), de dimension 3 sur le corps des réels. Cet espace est noté E^3 .

Pour les opérations sur les vecteurs, on lui associera un espace vectoriel de dimension 3 (R^3), sur le corps des réels.

1.2. Bases et repères

- l'espace R^3 est rapporté à une base formée de 3 vecteurs appartenant à cet espace
- l'espace E^3 est rapporté à un repère formé d'un point d'origine du repère O_i par exemple et de trois axes ayant les directions d'une base choisie dans R^3 ($\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$) par exemple.

Remarque : pour simplifier les calculs nous utiliserons uniquement des bases orthonormées directes.

2. Repérages

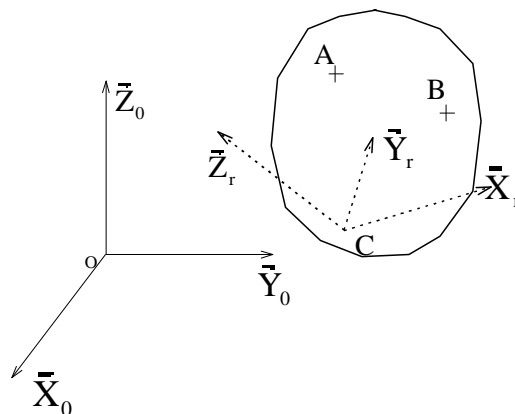
2.1. repérer un point

dans E^3 la position d'un point est définie par trois coordonnées appelées dimensions si elles sont invariables ou paramètres si elles sont fonction du temps.

2.2. repérer un solide

Soit A,B,C trois points non alignés appartenant à un solide (S).

Si nous connaissons les coordonnées de ces trois points dans un repère "r" donné, la position et l'orientation du solide par rapport au repère "r" sont parfaitement connues.



Remarquons cependant que les neuf paramètres définissant la position et l'orientation de ce solide sont liés entre eux par les trois relations suivantes :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \text{cte} \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \text{cte} \quad \|\overrightarrow{CA}\| = \text{cte} \quad (3.1)$$

Nous aurons donc besoin de $9-3=6$ paramètres indépendants pour définir la position et l'orientation du solide. Par exemple, trois paramètres indépendants nous permettent de définir la position du point C dans "0", il nous faut alors trois autres paramètres indépendants pour définir l'orientation de "r" dans "0".

Nous en déduisons donc que, dans E^3 la position et l'orientation d'un solide est définie par six coordonnées appelées dimensions si elles sont invariables ou paramètres si elles sont fonction du temps. Généralement nous utiliserons les trois coordonnées d'un point et les trois angles d'Euler : ψ, θ, ϕ .

2.3. Angles d'Euler :

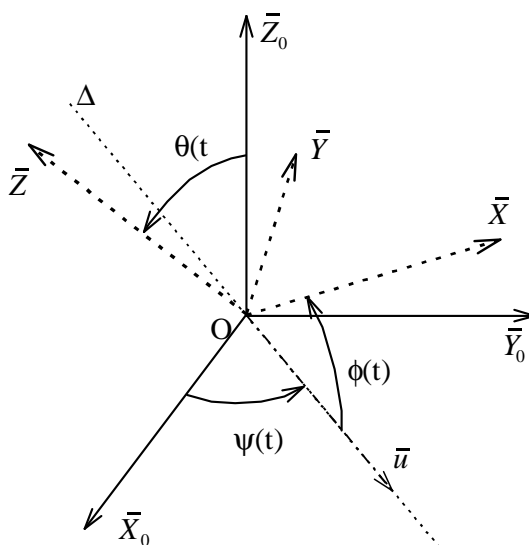
Le plan (O, \bar{X}, \bar{Y}) recoupe le plan $(O, \bar{X}_0, \bar{Y}_0)$ selon une droite Δ . Soit \bar{u} un vecteur unitaire de Δ .

On introduit les angles :

- $\psi(t) = (\bar{X}_0, \bar{u})$ orienté dans le sens direct du plan $(O, \bar{X}_0, \bar{Y}_0)$ (3.2)

- $\theta(t) = (\bar{Z}_0, \bar{Z})$ (3.3)

- $\phi(t) = (\bar{u}, \bar{X})$ orienté dans le sens direct du plan (O, \bar{X}, \bar{Y}) (3.4)



3. Vecteur libre

3.1. définition

- c'est un élément de R^3 défini par trois composantes dans une base r choisie

- $\bar{V} = x_r \cdot \bar{X}_r + y_r \cdot \bar{Y}_r + z_r \cdot \bar{Z}_r$ écrit sous forme de vecteur : $\bar{V} = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix}_{"r"}$ (3.5)

3.2. Rappel de quelques opérations sur les vecteurs libres

3.2.1. somme géométrique

$$\vec{S} = \sum \vec{V}_i = \begin{pmatrix} \sum x_i \\ \sum y_i \\ \sum z_i \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

3.2.2. produit scalaire

$$P = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos(\theta) \quad \theta = \left(\vec{V}_1, \vec{V}_2 \right) \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (3.7)$$

en projection dans un repère $P = X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2$ (3.8)

3.2.3. produit vectoriel

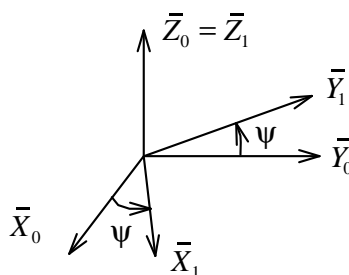
$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$. Le résultat est un vecteur \vec{W} tel que :

$$\left. \begin{aligned} \diamond \text{ si } \vec{V}_1 \text{ et } \vec{V}_2 \text{ sont non nuls et non colinéaires :} \\ \Rightarrow \vec{W} \text{ soit normal à } \vec{V}_1 \text{ et à } \vec{V}_2 \\ \Rightarrow \text{le trièdre } (\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{W}) \text{ soit direct (attention : anticommutativité)} \\ \Rightarrow \text{de norme } \vec{W} = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \sin(\theta) \quad \theta = (\vec{V}_1, \vec{V}_2) \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ \diamond \text{ si l'un des vecteurs } \vec{V}_1 \text{ ou } \vec{V}_2 \text{ est nul ou si } \vec{V}_1 \text{ et } \vec{V}_2 \text{ sont colinéaires :} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$$\diamond \text{ En projection dans un repère orthonormé direct : } \vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} Y_1 \cdot Z_2 - Z_1 \cdot Y_2 \\ Z_1 \cdot X_2 - X_1 \cdot Z_2 \\ X_1 \cdot Y_2 - Y_1 \cdot X_2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

3.2.4. Changement de base

soit le vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{"0"}$ projeté dans la base «0». Projétons le dans la base «1»



- Projeter les vecteurs $\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0$ dans la base «1»

$$\begin{aligned}\vec{X}_0 &= \cos(\psi) \cdot \vec{X}_1 - \sin(\psi) \cdot \vec{Y}_1 \\ \vec{Y}_0 &= \sin(\psi) \cdot \vec{X}_1 + \cos(\psi) \cdot \vec{Y}_1 \\ \vec{Z}_0 &= \vec{Z}_1\end{aligned}$$

- Remplacer, dans le vecteur \vec{V} , \vec{X}_0 , \vec{Y}_0 et \vec{Z}_0 par leur projection dans la base «1»

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{"0"} = x \cdot \vec{X}_0 + y \cdot \vec{Y}_0 + z \cdot \vec{Z}_0 = \begin{pmatrix} x \cdot \cos(\psi) + y \cdot \sin(\psi) \\ -x \cdot \sin(\psi) + y \cdot \cos(\psi) \\ z \end{pmatrix}_{"1"} \quad (3.11)$$

4. Vecteur lié :

4.1. Définition

C'est un élément de E^3 formé d'un vecteur libre de R^3 dont l'origine est un point de E^3

exemple :

$$\vec{V}_A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{"0"} \text{ d'origine } A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}_{"0"}$$

4.2. moment par rapport à un point

4.2.1. Définition

Soit un point P, centre des moments

$$M_{/P}(\vec{V}_A) = \vec{PA} \wedge \vec{V}_A \quad (3.12)$$

4.2.2. propriété fondamentale :

$$M_{/Q}(\vec{V}_A) = M_{/P}(\vec{V}_A) + \vec{V}_A \wedge \vec{PQ} \quad (3.13)$$

5. ensemble de vecteurs liés (ou glissants)

5.1. définition

On désigne par [A] un ensemble de vecteurs liés \vec{V}_{iA_i} , chacun des \vec{V}_i passant ou étant lié au point A_i

Les éléments de réduction de l'ensemble [A] au point P sont la somme géométrique et la somme des moments par rapport à P de tous les vecteurs de [A] :

$$[A]_P = \begin{cases} \vec{S}[A] = \sum \vec{V}_i & \text{somme géométrique} \\ \vec{M}_{/P}[A] = \sum \vec{PA}_i \wedge \vec{V}_i & \text{somme des moments} \end{cases} \quad (3.14)$$

5.2. propriétés fondamentales

- Si on choisit un nouveau point de réduction Q :

$$[A]_Q = \begin{cases} \vec{S}[A] = \sum \vec{V}_i & \text{la somme géométrique est un invariant} \\ \vec{M}_{/Q}[A] = \vec{M}_{/P}[A] + \vec{S}[A] \wedge \vec{PQ} & \text{la somme des moments varie} \end{cases} \quad (3.15)$$

- Le champ des moments est équiprojectif. C'est à dire que les projections des moments en P et en Q sur l'axe PQ sont égales.

5.3. Automoment

Le scalaire $A[A] = \vec{S}[A] \cdot \vec{M}_{/P}[A]$ est un invariant. On l'appelle automoment.

6. Torseurs

6.1. définition

un torseur [T] est un objet géométrique constitué par deux champs vectoriels :

- un champ uniforme $\vec{S}[T]$ (3.16)

- un champ équiprojectif $\vec{M}_{/Q}[T] = \vec{M}_{/P}[T] + \vec{S}[T] \wedge \vec{PQ}$ (3.17)

⇒ Un torseur [T] représente en tout point P de l'espace tous les ensemble de vecteurs équivalents ayant pour somme géométrique $\vec{S}[T]$ et pour moment $\vec{M}_{/P}[T]$.

⇒ [T] est la classe d'équivalence de tous les ensembles de vecteurs (liés ou glissants) équivalents.

6.2. Quelques torseurs particuliers (cas pour lequel l'automoment $A[T]=0$)

- le torseur nul : $\vec{S}[T]=0$ - $\vec{M}_{/P}[T]=0$
- le couple C : $\vec{S}[T]=0$ - $\vec{M}_{/P}[T]=\vec{C} \neq 0$ le champ des moments est un champ uniforme
- le glisseur G : $\vec{S}[T] \neq 0$ - $\vec{M}_{/P}[T]=0$ ou $\vec{M}_{/P}[T] \perp \vec{S}[T]$

Tout torseur ordinaire (pour lequel $A[T] \neq 0$) peut être considéré comme la somme d'un glisseur et d'un couple.

6.3. Axe central d'un torseur

c'est le lieu des points K de l'espace ou $\vec{S}[T] \parallel \vec{M}_{/K}[T]$

- on démontre que ce lieu est une droite
- on démontre que le champ des moments est « hélicoïdal » autour de l'axe central du torseur

Action mécanique - Statique

1 Action mécanique

1.1 Définition

Action mécanique : Toute cause ayant pour effet de maintenir au repos, ou de modifier l'état de repos ou de mouvement d'un mécanisme ou de certaines de ses parties.

1.2 Exemples d'actions mécaniques

- Le pied d'un footballeur frappe le ballon
- Les champs électriques et magnétiques dévient l'électron
- le rotor entraîne l'axe du moteur de la fraiseuse
- l'axe du rotor s'appuie sur le carter du moteur
- le carter du moteur s'appuie sur le bâti de la fraiseuse....

1.3 actions mécaniques

La définition, les exemples donnés ici et ceux que l'on peut voir tous les jours nous montre que le terme « actions mécaniques » décrit une grande diversité de phénomènes. Nous pouvons cependant faire les remarques suivantes :

- Une action mécanique peut être :
 - une action de contact (pression par exemple)
 - une action à distance (poids, forces électriques et magnétiques,....)
- Une action mécanique peut s'exercer
 - sur une surface (action d'un solide sur un autre au point de contact, pression d'un liquide, d'un gaz,....)
 - sur un volume (poids par exemple).
- Volume et surface du solide sont parfois négligés (mouvement des planètes par exemple). Le solide est alors considéré comme un point matériel.
- Une action mécanique fait intervenir deux corps : l'un exerçant l'action l'autre la subissant.
- Une action mécanique peut être intérieure au système considéré (action d'une partie du système sur une autre) ou extérieure au système considéré (action exercée par l'environnement sur le système).....

2 définitions utiles pour la modélisation

2.1 force élémentaire

Considérons le point matériel A. Toute action élémentaire (de contact ou à distance) d'un point B sur A est appelée force et représentée par un **vecteur lié à A** (obligatoirement en résistance des matériaux) ou glissant (ce n'est pas obligatoire, mais valable en mécanique des solides indéformables). L'intensité d'une force s'exprime en Newton (N). On l'écrira

$$\overrightarrow{F_{\frac{B}{A}}} \quad \text{au point A} \quad (4.1)$$

L'intensité d'une force se mesure en Newton (N).

2.2 action mécanique

Ce peut être une action de contact d'un corps sur un autre (contact d'un autre solide, pression d'un liquide ou d'un gaz....) ou une action à distance (gravité, électromagnétisme,...) sur le corps considéré.

Quelle qu'elle soit, une action mécanique fait intervenir un ensemble de force (élémentaires ou non). On la représente par un torseur

$$: \left[T \left(A_{\frac{1}{2}} \right) \right]_M = \begin{cases} \overrightarrow{A_{\frac{1}{2}}} \\ \overrightarrow{C_{A_{\frac{1}{2}}}} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{somme géométrique des forces} \\ \text{exercées par « 1 » sur « 2 ». Elle est} \\ \text{appelée force.} \\ \\ \text{Somme des moments des forces} \\ \text{exercées par « 1 » sur « 2 » (au point} \\ \text{M) appelée couple} \end{array} \quad (4.2)$$

2.3 Décomposition d'une action mécanique en deux torseurs spéciaux

On utilise deux torseurs spéciaux : un glisseur et un couple dont la somme est le torseur représentant l'action mécanique au point M :

$$\left[T \left(A_{\frac{1}{2}} \right) \right]_M = \left[G \left(A_{\frac{1}{2}} \right) \right]_M + \left[C \left(A_{\frac{1}{2}} \right) \right] \quad \begin{cases} \overrightarrow{A_{1/2}} \\ \overrightarrow{C_{A_{1/2}}} \end{cases} = \begin{cases} \overrightarrow{A_{1/2}} \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ \overrightarrow{C_{A_{1/2}}} \end{cases} \quad (4.3)$$

2.3.1 Du point de vue mathématique

- Le torseur-glisseur $\left[G(A_{1/2}) \right]_M : \begin{cases} \overrightarrow{A_{1/2}} \\ 0 \end{cases}$ est représenté par un vecteur glissant : $\overrightarrow{A_{1/2}}$ (passant par M)
- Le torseur couple $\left[C(A_{1/2}) \right]_M : \begin{cases} 0 \\ \overrightarrow{C_{A_{1/2}}} \end{cases}$ est représenté par un vecteur couple, vecteur libre $\overrightarrow{C_{A_{1/2}}}$

(Ce vecteur n'est pas lié à un point particulier)

2.3.2 Du point de vue physique

Les torseurs représentent l'action mécanique de « 1 » sur « 2 » en un point M, précis, de l'univers. Les composantes de ces vecteurs intéressent le mécanicien en ce point précis de l'univers.

Les vecteurs $\overrightarrow{A_{1/2}}$ et $\overrightarrow{C_{A_{1/2}}}$ ont plutôt un caractère de vecteur lié (au point M)

3 Action mécanique exercée sur le solide ou ensemble de solide (S)

3.1 4.3.1 Déplacement d'un torseur, d'un point à un autre

Pour résoudre les problèmes de mécanique, nous sommes amenés à transporter les torseurs d'action mécanique en un point autre que le point M auquel est liée l'action mécanique. Le choix d'un centre des moments particuliers peut nous amener à déplacer le torseur du point M au point P où il s'écrit :

$$[T(A_{1/2})]_P = \begin{cases} \overrightarrow{A_{1/2}} & \text{La somme géométrique reste la même} \\ \overrightarrow{C_{A_{1/2}}} + \overrightarrow{A_{1/2}} \wedge \overrightarrow{MP} & \text{le moment change (relation des torseurs)} \end{cases} \quad (4.4)$$

3.2 Torseur des efforts extérieurs sur le solide ou ensemble de solides (S)

Pour un solide ou ensemble de solide (S) nous déplaçons en un point P appelé « *centre des moments* » les torseurs des différentes actions mécaniques extérieures s'exerçant sur (S).

Lorsque tous les torseurs des différentes actions mécaniques (connues et inconnues) s'exerçant sur (S) sont ramenés en P, centre des moments, il est possible de calculer le torseur des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le solide S.

$$\left[T \left(\text{Actions Mécaniques}_{\frac{\text{Ext}}{S}} \right) \right]_P = \begin{cases} \sum \overrightarrow{F_{\text{EXT}/S}} \\ \sum \overrightarrow{C_{\text{EXT}/S}} + \sum \overrightarrow{M_{/P}}(\overrightarrow{F_{\text{EXT}/S}}) \end{cases} \quad (4.5)$$

4 Principe fondamental de la statique

4.1 Equilibre

un solide (S) (ou un ensemble de solides) est en équilibre par rapport à un repère (R) si chaque point de (S) reste fixe dans le temps par rapport à (R).

4.2 Repère galiléen

Repère tel que pour tout solide (S) (ensemble de solide) en équilibre par rapport à ce repère le torseur des actions mécaniques extérieures à (S) soit nul.

4.3 Principe fondamental de la statique

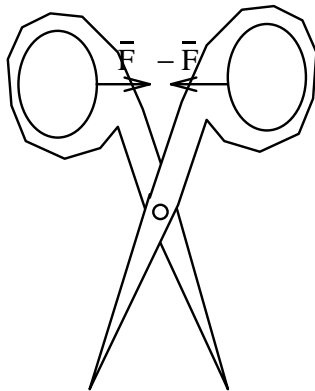
Pour un système matériel (S), au repos ou en mouvement de translation uniforme par rapport à un repère galiléen (g), le torseur représentant l'ensemble des actions mécaniques que le reste de l'univers applique à (S) est nul en tout point. (quel que soit le point de réduction du torseur).

$$\left[T(\text{ActionsMécaniques}_{\text{EXT/S}}) \right]_P = 0 : \begin{cases} \sum \overrightarrow{F}_{\text{EXT/S}} = 0 \\ \sum \overrightarrow{C}_{\text{EXT/S}} + \sum \overrightarrow{M}_{/P}(\overrightarrow{F}_{\text{EXT/S}}) = 0 \quad \forall P \end{cases} \quad (4.6)$$

4.4 remarques

- Le principe fondamental de la statique n'est en fait qu'un cas particulier du principe fondamental de la dynamique
- Pour un ensemble de solides si le torseur des actions mécaniques extérieures est nul par rapport au repère galiléen, les différents solides constituant l'ensemble ne sont pas forcément en équilibre, seul l'ensemble est en équilibre.

Exemple : isolons une paire de ciseaux que l'on manoeuvre « à vide »



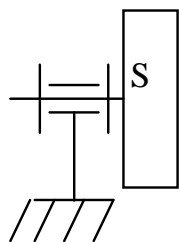
Les ciseaux sont soumis à deux forces F égales et opposées.

$$T(A.Mext/Ciseaux)_{/M} = 0 \quad \forall M$$

Or les différents solides constituant les ciseaux ne sont pas en équilibre.

- Un solide statiquement et dynamiquement équilibré autour d'un axe Δ , pour lequel le torseur des efforts extérieurs est nul, peut se trouver en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe D .

Exemple



Le solide S , statiquement et dynamiquement équilibré par rapport à son axe de rotation est en rotation uniforme par rapport au bâti.

On suppose la liaison parfaite. Aucune force ne s'applique à lui :

$$\left[T(\text{ActionsMécaniques}_{\text{EXT/S}}) \right]_P = 0$$

Mais sa vitesse de rotation est $\omega = \text{cte} \neq 0$

Les mécanismes

- \Rightarrow comportant une seule rotation à vitesse angulaire constante par rapport au repère galiléen,
- \Rightarrow statiquement et dynamiquement équilibrés par rapport à l'axe de rotation,

peuvent être étudiés à l'aide du principe fondamental de la statique.

5 Principe d'action et de réaction, Actions mécaniques réciproques

5.1 Principe d'action et de réaction

Si un système matériel E_1 exerce une action mécanique $A_{1/2}$ sur un système matériel E_2 alors le système matériel E_2 exerce sur le système matériel E_1 une action mécanique $A_{2/1}$ telle que :

$$A_{1/2} = -A_{2/1} \quad (4.7)$$

Les actions mécaniques $A_{1/2}$ et $A_{2/1}$ sont dites réciproques.

Les torseurs représentant deux actions mécaniques réciproques sont opposés.

$$\left[A_{E_1/E_2} \right]_M = - \left[A_{E_2/E_1} \right]_M \quad (4.8)$$

5.2 Remarque concernant le signe des inconnues

lorsqu'on considère un système matériel certaines actions mécaniques inconnues sont prises en compte pour la première fois. Ne cherchez pas à deviner leur sens (leur signe), nommez simplement ces inconnues.

5.3 Exemple

On isole le solide S_2 et on considère les actions mécaniques (inconnues) de S_1 sur S_2

La liaison entre S_1 et S_2 est représentée par le torseur $\left[A_{S_1/S_2} \right]_M = \begin{cases} A_{S_1/S_2} = \begin{pmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{pmatrix}_{"b"} \\ C_{A_{S_1/S_2}} = \begin{pmatrix} L_M \\ M_M \\ N_M \end{pmatrix}_{"b"} \end{cases}$

La suite de l'étude nous amène à isoler S_1 .

Les actions mécaniques (connues) de S_2 sur S_1 seront alors : $\left[A_{S_2/S_1} \right]_M = - \left[A_{S_1/S_2} \right]_M$

qui s'écrivent :

$$\left[A_{S_2/S_1} \right]_M = \begin{cases} A_{S_2/S_1} = \begin{pmatrix} -X_M \\ -Y_M \\ -Z_M \end{pmatrix}_{"b"} \\ C_{A_{S_2/S_1}} = \begin{pmatrix} -L_M \\ -M_M \\ -N_M \end{pmatrix}_{"b"} \end{cases}$$

6 Nombre d'équations

6.1 Equations données par le principe fondamental de la statique

Isoler une pièce et lui appliquer le principe fondamental de la statique nous permet d'obtenir :

◇ dans le cas général (espace à trois dimensions) : six équations

- trois équations liés à la résultante statique : $\sum \overrightarrow{F}_{EXT/S} = 0$
- trois équations liés au moment statique : $\sum \overrightarrow{C}_{EXT/S} + \sum \overrightarrow{M}_{/P}(\overrightarrow{F}_{EXT/S}) = 0 \quad \forall P$

◇ dans le cas d'un problème plan (par exemple X et Y) : trois équations

- deux équations liées à la résultante statique :

$$\sum \overrightarrow{F}_{EXT/S} = \vec{0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum X_{EXT/S} = 0 \\ \sum Y_{EXT/S} = 0 \end{array} \right.$$

- et une équation pour le moment statique

$$\sum \overrightarrow{C}_{EXT/S} + \sum \overrightarrow{M}_{/P}(\overrightarrow{F}_{EXT/S}) = \vec{0} \quad \text{portée par l'axe z}$$

6.2 Equations de liaison

Certains problèmes font apparaître des équations supplémentaires, dites de liaison

Une équation de liaison peut être

- géométrique si elle relie des paramètres non indépendants (par exemple la position d'un piston par rapport à l'angle de rotation du vilebrequin)
- physique si elle relie des composantes de forces ou de couples en faisant intervenir les lois de certaines résistances passives : adhérence ou frottement, résistance au roulement, résistance de l'air,.....
- cinématique si elle relie les vitesses des paramètres entre elles : pignons, roulements sans glissement,....)

7 Méthode d'étude d'un problème de statique

7.1 Analyse du problème

- Compter le nombre de solides constituant le système.
- Pour chaque solide :
 - ⇒ l'isoler
 - ⇒ Faire le bilan des efforts connus qui s'appliquent sur le solide
 - ⇒ Faire le bilan des efforts inconnus qui s'appliquent sur le solide, en tenant compte du principe des actions réciproque.
 - ⇒ Noter les éventuelles équations de liaison
- Compter le nombre total d'équations : Celles données par la statique, + les équations de liaison
- Compter le nombre d'inconnues

- Faire le bilan global du mécanisme :
 - si le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations, le système est isostatique (apparemment, si les équations sont indépendantes, et les comptes.... justes).
 - si le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations, le système est hyperstatique (apparemment) d'ordre $N_{INC}-N_{EQ}$
 - si le nombre d'inconnues est inférieur au nombre d'équations, le système est hypostatique (apparemment) d'ordre $N_{EQ}-N_{INC}$

Remarques :

- ◇ En mécanique il faut toujours rechercher une modélisation isostatique, quitte à modifier quelque peu le modèle de façon à réduire le nombre des inconnues.
- ◇ Si le système est apparemment hypostatique, c'est peut être qu'il possède un ou plusieurs paramètres libres (donc qu'il peut se déplacer librement sur un ou plusieurs axes). Il faut alors l'étudier à l'aide des lois de la dynamique.
- ◇ En résistance des matériaux, il est courant de modéliser avec un certain degré d'hyperstatisme. Il faut alors, pour résoudre, utiliser des équations supplémentaires, liées à l'élasticité du matériau, donc à la déformation des solides. Mais il s'agit là de mécanique des solides déformables.

7.2 Ecriture des équations

Dans cette étape, il faut ramener en un point judicieusement choisi (centre des moments) tous les torseurs des efforts extérieurs, connus et inconnus, puis appliquer le principe fondamental de la statique

7.3 Résolution

Résolution du système d'équations algébriques obtenues

7.4 Analyse et interprétation des résultats

Cette étape est très importante. Il s'agit de vérifier que

- les résultats sont cohérents
- que l'ordre de grandeur des valeurs obtenues est correct
- qu'ils ne remettent pas en cause certaines hypothèses
-

Il est souvent intéressant voir nécessaire d'effectuer des vérifications expérimentales (mesures sur prototype / modèle réduit).

Les liaisons parfaites

1. définitions

1.1. Liaison parfaite

Une liaison est dite parfaite si le torseur qui représente l'action mécanique d'un des solides sur l'autre a autant de composantes qu'il y a de degrés de liberté bloqués par la liaison.

1.2. Nombre de degrés de liberté d'une liaison

c'est le nombre de mouvements de translation et de rotation indépendants que la liaison autorise. Le nombre de composantes d'effort transmises par une liaison est égal à six moins le nombre de degrés de liberté de la liaison.

2. Les principales liaisons parfaites

Dans les pages qui suivent, chaque liaison est définie, représentée, et le torseur des actions mécaniques transmises par la liaison est donné.

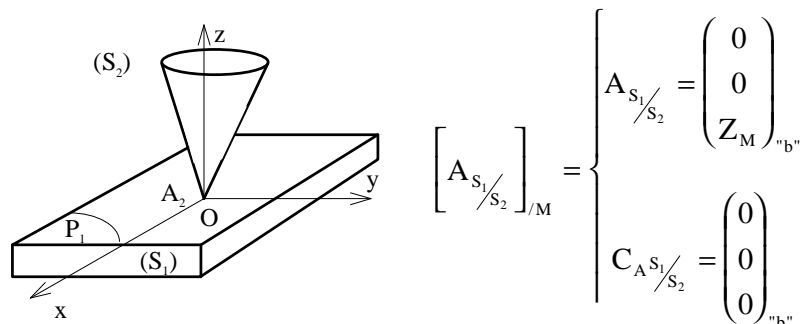
2.1. Liaison libre

- 6 degrés de liberté
- aucun effort transmis.
- « liaison » à 6 ddl

Cette « liaison » est en fait une absence de liaison, le solide est « livré à lui même » (cas d'un satellite dans l'espace, ou d'un projectile balistique).

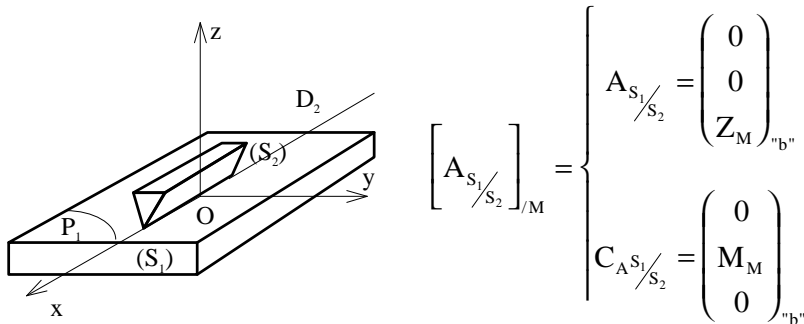
2.2. Liaison ponctuelle

- **définition :** Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison ponctuelle si au cours de leur mouvement relatif un point A_2 de (S_2) reste dans un plan P_1 de (S_1)
- liaison à 5 ddl



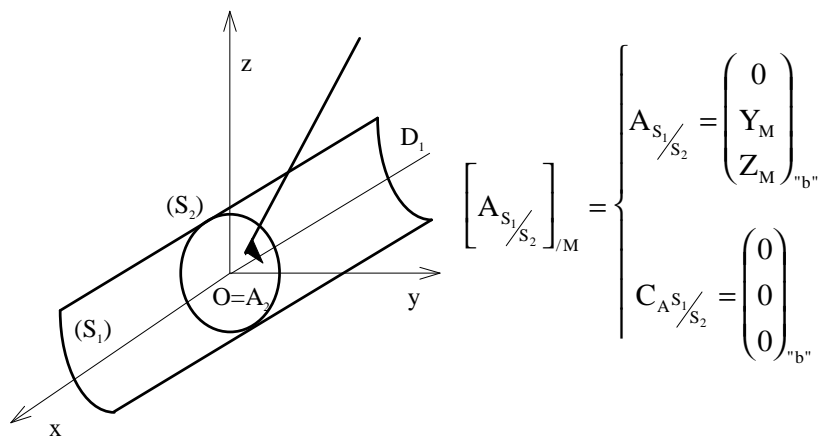
2.3. Liaison linéaire rectiligne

- **définition :** Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison linéaire rectiligne si au cours de leur mouvement relatif, une droite D_2 de (S_2) reste dans un plan P_1 de (S_1) .
- Liaison à 4 ddl



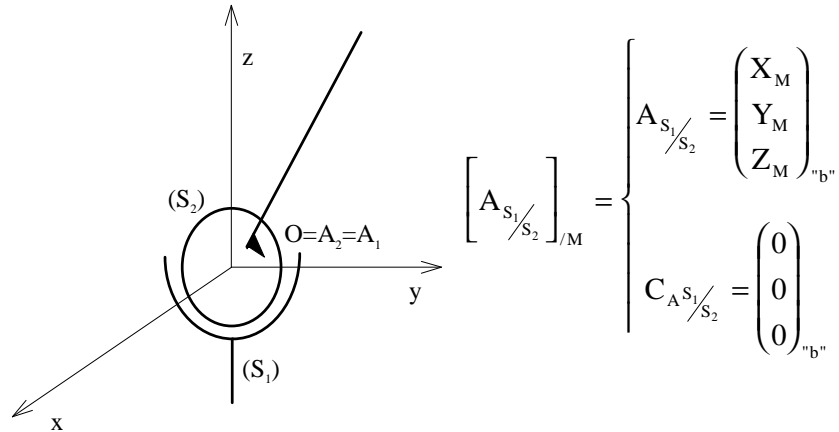
2.4. Liaison linéaire annulaire

- **définition :** Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison linéaire annulaire si, au cours de leur mouvement relatif, un point A_2 de (S_2) reste sur une droite D_1 de (S_1) .
- Liaison à 4 ddl



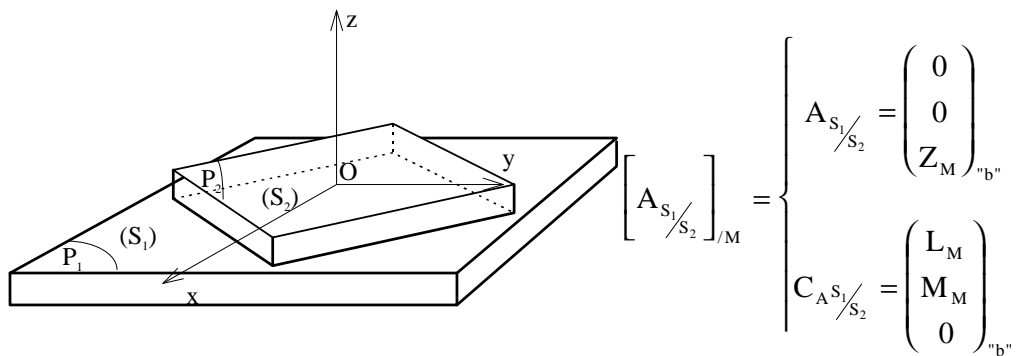
2.5. Liaison rotule

- **Définition :** Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison rotule si, au cours de leur mouvement relatif, un point A_2 de (S_2) reste confondu avec un point A_1 de (S_1) .
- Liaison à 3 ddl.



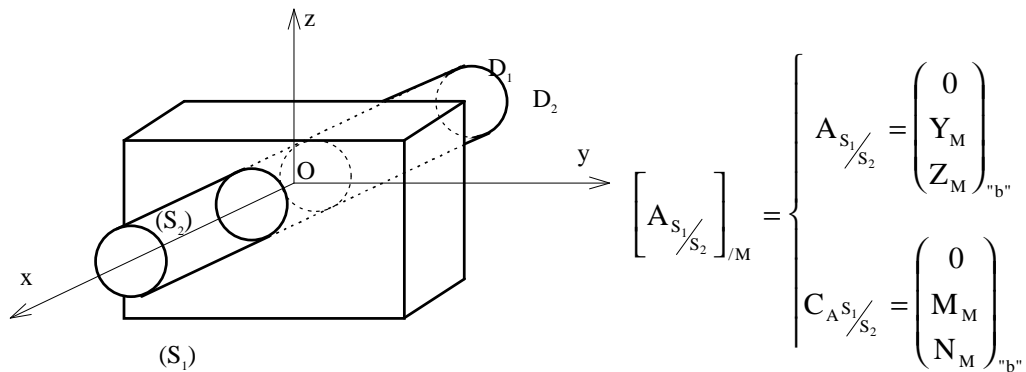
2.6. Liaison appui plan

- **Définition :** Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison appui plan si, au cours de leur mouvement relatif, un plan P_2 de (S_2) reste confondu avec un plan P_1 de (S_1) .
- Liaison à 3 ddl.



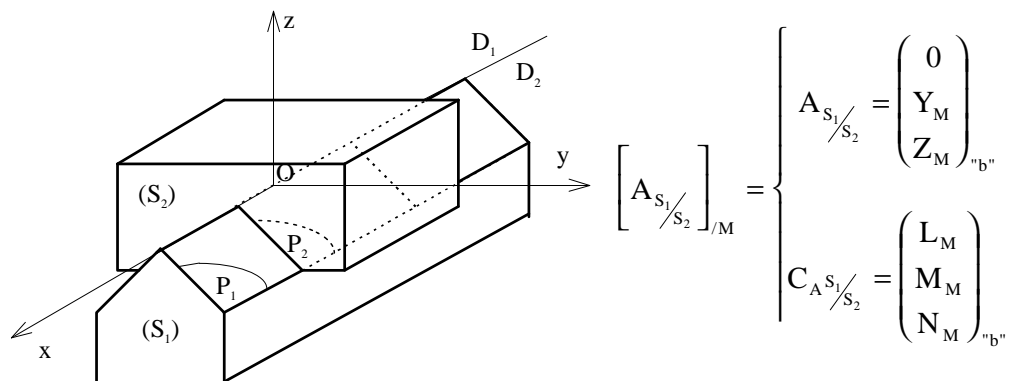
2.7. : Liaison pivot glissant

- **définition** Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison pivot glissant si, au cours de leur mouvement relatif, une droite D_2 liée à (S_2) reste confondue avec une droite D_1 liée à (S_1) .
- Liaison à 2 ddl



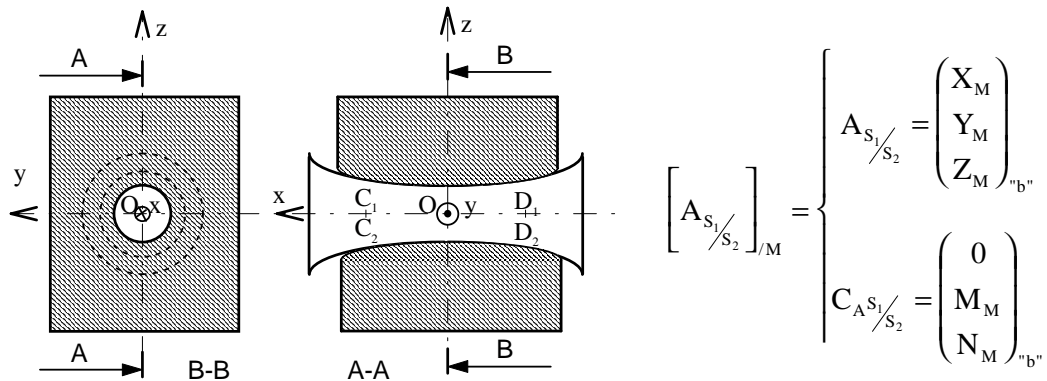
2.8. Liaison glissière

- **définition :** Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison glissière si, au cours de leur mouvement relatif, d'une part un plan P_2 de (S_2) reste confondue avec un plan P_1 de (S_1) , et d'autre part une droite D_2 liée à (S_2) et située dans le plan P_2 reste confondue avec une droite D_1 liée à (S_1) et située dans le plan P_1 .
- Liaison à 1 ddl.



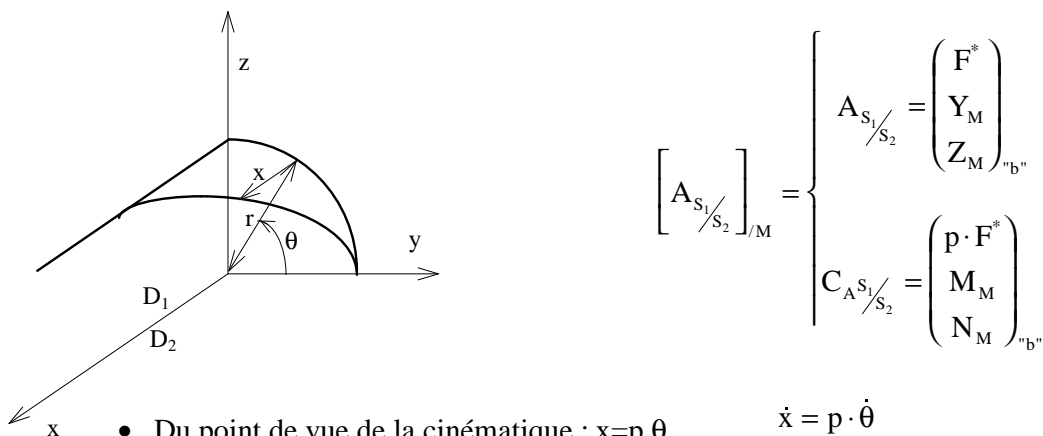
2.9. Liaison pivot

- **définition** Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison pivot si, au cours de leur mouvement relatif, deux points C_2 et D_2 de (S_2) distants d'une longueur l restent confondus avec deux points C_1 et D_1 de (S_1) distants d'une même longueur l non nulle.
- Liaison à 1 ddl



2.10. Liaison glissière hélicoïdale

- **Définition** Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison glissière hélicoïdale si, au cours de leur mouvement relatif, d'une part une droite D_2 de (S_2) reste confondue avec l'axe D_1 d'une hélice circulaire H_1 de rayon r liée à (S_1), et d'autre part, un point A_2 de (S_2) situé à une distance r de D_2 décrit l'hélice circulaire H_1 . Le mouvement relatif de S_1 par rapport à S_2 se décompose en une rotation autour de (O, \vec{x}) associé à une translation suivant (O, \vec{x}) . Ces deux mouvements ne sont pas indépendants, mais suivent la loi $x = p \cdot \theta$ où x est le déplacement suivant (O, \vec{x}) de S_1 par rapport à S_2 , p le pas de l'hélice, θ l'angle de rotation de S_1 par rapport à S_2 .
- Liaison à 1 ddl.

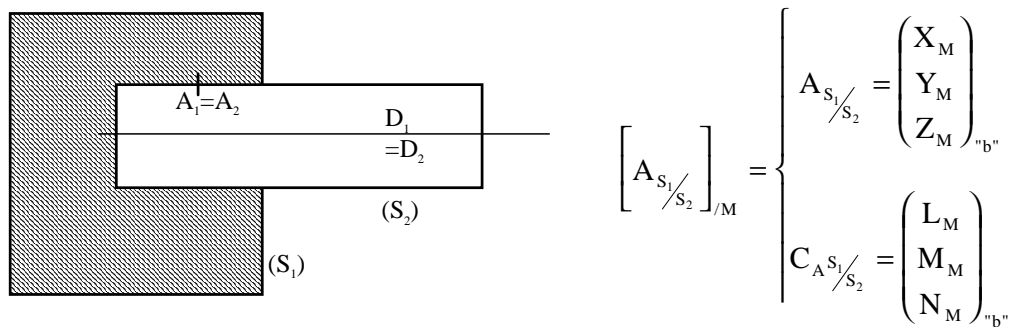


- Du point de vue de la cinématique : $x = p \cdot \theta$, $\dot{x} = p \cdot \dot{\theta}$.
- Du point de vue des efforts $X_M = p \cdot L_M$ le couple suivant x et l'effort suivant x sont liés.
- Nous avons donc bien 5 inconnues en statique, la liaison comporte un seul degré de liberté.

P est le pas de l'hélice

2.11. Liaison encastrement

- **Définition :** Deux solides (S_1) et (S_2) sont en liaison encastrement si, au cours de leur mouvement relatif, d'une part une droite D_2 de (S_2) reste confondue avec une droite D_1 de (S_1) , et d'autre part un point A_2 de (S_2) situé à une distance d non nulle de D_2 reste confondu avec un point A_1 de (S_1) situé à une distance d non nulle de D_1 .
- La liaison encastrement ne permet aucun mouvement relatif entre les deux solides.



3. Schématisation normalisée des liaisons

(O, \bar{z}) Liaison ponctuelle de normale (O, \bar{z})		
Liaison rectiligne d'axe (O, \bar{x}) de normale (O, \bar{z})		
Liaison linéique annulaire d'axe (O, \bar{x})		
Liaison rotule de centre O		
Appui plan de normale (O, \bar{z})		
Liaison pivot glissant d'axe (O, \bar{x})		

Schématisation normalisée des liaisons (suite)

glissière d'axe (O, \bar{x})		
Liaison pivot d'axe (O, \bar{x})		
Liaison glissière hélicoïdale d'axe (O, \bar{x})		
Liaison encastrement		

4. Créer et recréer des liaisons

4.1. Recréer une fonction

Il est souvent difficile de réaliser en une seule liaison la fonction ou la liaison idéale que l'on souhaite créer. Il est alors nécessaire de combiner plusieurs liaisons élémentaires de manière à créer la liaison souhaitée.

Exemple :

Une liaison pivot peut être remplacée par une liaison rotule + une liaison linéaire annulaire



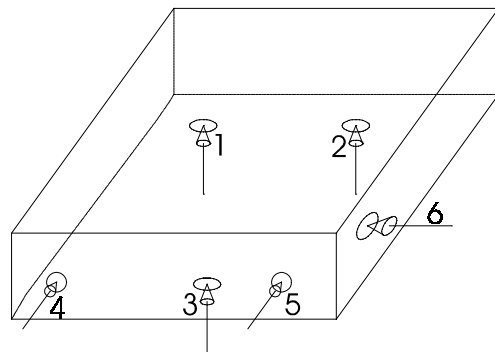
4.2. Méthodologie

- Lister tous les degrés de liberté que l'on veut supprimer
- En combinant les différentes liaisons, bloquer tous les degrés de liberté souhaités, sans jamais bloquer deux fois (avec deux liaisons) le même degré de liberté.

Exemple 1 : liaison encastrement à partir d'appuis ponctuels :

- 1-2-3 forment un appui plan
- 4-5 une liaison rectiligne
- 6 un appui ponctuel.

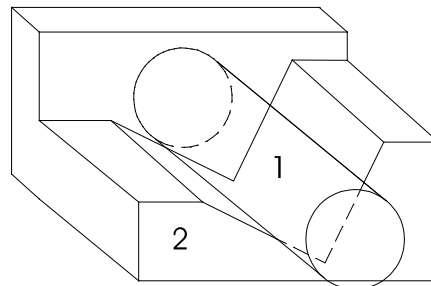
Le tout forme une liaison encastrement.



Exemple 2 : Cylindre et son support

Analysons les liaisons en présence.

- Le Vé forme deux liaisons rectilignes, soit une liaison pivot glissant.
- Le support arrière forme un appui plan.



L'ensemble bloque $3+4=7$ degrés de liberté. Le système est apparemment isostatique d'ordre 1. Si nous poussons un peu l'analyse, nous remarquons que l'appui plan bloque trois fois le même degré de liberté (translation suivant l'axe du vé ; et que la rotation suivant l'axe du vé n'est pas bloquée.....

Cinématique

1. définition

- La cinématique est l'étude des systèmes matériels à chaque instant (t) de leur existence du point de vue de leur position et de leur mouvement dans l'espace, indépendamment des causes qui provoquent ces mouvements.

2. Hypothèses

2.1. Espace

- l'espace physique est représenté par un espace affine réel euclidien de dimension 3 (E^3).
- l'unité de longueur est le mètre (m).
- Pour les opérations sur les vecteurs, on lui associe un espace vectoriel (R^3) de dimension 3.

2.2. le temps

- Le temps est représenté par un espace affine réel orienté (il ne peut être parcouru que du passé vers l'avenir) de dimension 1
- Unité : la seconde (s).
- Le temps est indépendant de l'observateur, deux événements qui paraissent simultanés à un observateur paraissent aussi simultanés à n'importe quel autre observateur. Cette hypothèse sur laquelle s'appuie la mécanique classique n'est pas vraie en mécanique relativiste, et n'est valable que si les différents solides ou repères se déplacent les uns par rapport aux autres à des vitesses inférieures au dixième de la célérité de la lumière dans le vide $C = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8$ m/s (valeur exacte)¹

2.3. solide :

- Un solide est un ensemble de points dont les distances mutuelles ne varient pas.
- Un solide est donc indéformable (ceci n'est plus vrai en mécanique des milieux continus ou en résistance des matériaux).

2.4. repère base et système d'axes

- Un repère est un ensemble de points dont les distances mutuelles ne varient pas au cours du temps. Notons que cette définition est identique à celle d'un solide, un repère sera donc un solide utilisé comme référentiel.
- une base est un système de trois vecteurs libres, unitaires et orthogonaux, liés à un solide ou repère.
- un système d'axes est défini par une origine et une base. Exemple : $G_S X_S Y_S Z_S$ a pour origine G_S et pour vecteurs de base $\vec{X}_S, \vec{Y}_S, \vec{Z}_S$.

2.5. Note concernant les vecteurs et leur projection dans un repère

- Quelle que soit la base utilisée pour leur projection, les vecteurs représentant les éléments physiques (forces, positions, vitesses,...) sont les mêmes. Ils peuvent être projetés dans n'importe quelle base.

¹ D'après J.P. Perez « mécanique » masson 1994

- Lorsqu'un vecteur est projeté dans une base, il est toujours possible de le projeter dans une autre base, en effectuant un changement de base. Cette opération complique souvent les calculs et est source d'erreurs, il faut donc chercher à l'éviter, autant que possible.

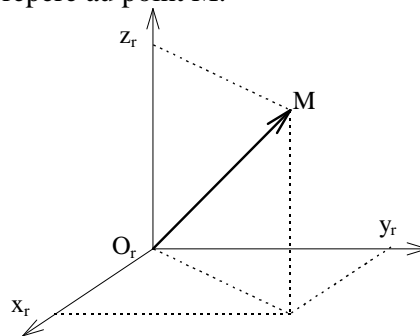
3. Position d'un point par rapport à un repère

3.1. Position d'un point

En mécanique on définit la position d'un point M par rapport à un repère de référence choisi (r) à l'aide du vecteur position de M par rapport à O_r :

$$\overrightarrow{O_r M}$$

Ce vecteur joint l'origine O_r du repère au point M.



Le repère par rapport auquel la position du point M est définie est important. Lorsque nous allons nous servir du vecteur $\overrightarrow{O_r M}$ pour calculer la vitesse, l'accélération, ... du point M par rapport au repère « r », nous allons considérer que ce repère est fixe (nous dirons bloqué).

Exemple : $\overrightarrow{O_r M} = 3 \cdot \vec{i}_r + 5 \cdot \vec{j}_r + 2 \cdot \vec{k}_r$

4. Point lié à un solide

4.1. Point appartenant à un solide

On dit qu'un point M appartient à un solide (ou repère) (S) si, quel que soit le point $Q_{\in(S)}$ de (S) considéré, la distance de M par rapport $Q_{\in(S)}$ est constante.

4.2. Appartenance réelle et imaginaire

Un point M peut appartenir à (S) de manière

- réelle : M fait réellement partie de (S)
- imaginaire : on décide qu'un point M qui appartient réellement à (S) aura, par exemple, les propriétés d'un point d'un autre solide ou repère, par exemple d'un point de « 2 ». Cette décision « bloque » les paramètres (ou coordonnées) positionnant P par rapport au repère d'appartenance imaginaire.

4.3. Conséquences

Pour un vecteur position, seuls les paramètres compris entre le repère de mouvement et le repère d'appartenance indiqué varient. Tous les autres paramètres intervenant dans le système matériel considéré sont considérés comme bloqués, leurs dérivées sont nulles.

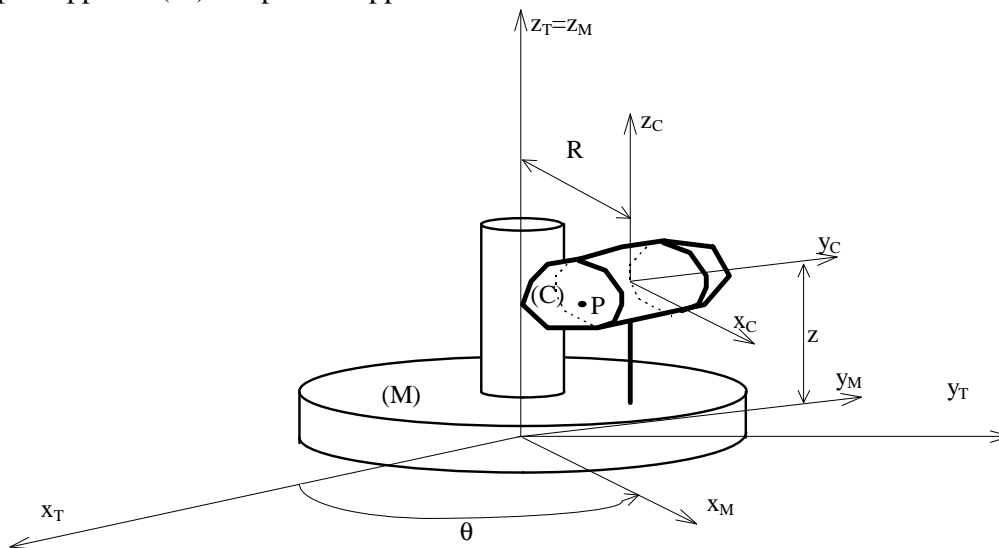
4.4. Notation

Si on considère le vecteur $\overrightarrow{O_t M_{\in r}}$:

- le repère d'appartenance de M est « r », M appartient, réellement ou imaginairement à r
- le repère de mouvement est « t » : On considère la position, la vitesse, l'accélération de M par rapport au repère « t »

4.5. Exemple

Un manège M tourne à la vitesse $\dot{\theta}$ par rapport à la terre (T). Un cheval (C) monte et descend à la vitesse \dot{z} par rapport à (M). Le point P appartient au cheval.

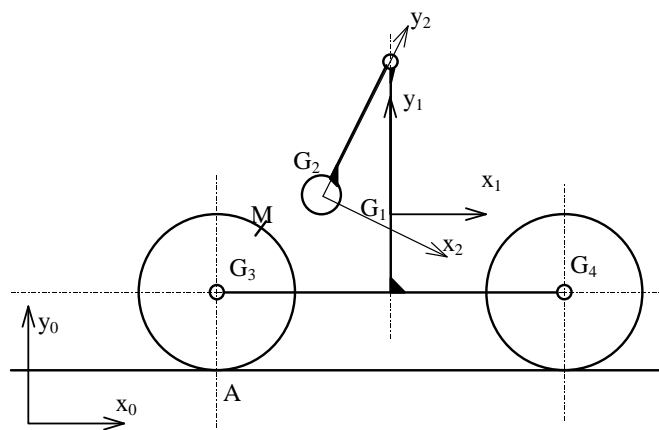


- P appartient au cheval (C) : appartenance réelle. Dans $\overrightarrow{O_T P_{\in C}}$, z et θ varient (leurs dérivées sont non nulles)
- (P) appartient au manège (M) : appartenance imaginaire. Dans $\overrightarrow{O_T P_{\in M}}$, θ varie, z est bloqué
- (P) appartient à la terre (T) : Appartenance imaginaire. Dans $\overrightarrow{O_T P_{\in T}}$, z et θ sont bloqués.

5. Trajectoire d'un point par rapport à un repère choisi :

* Définition : La trajectoire d'un point par rapport à un repère choisi est le lieu parcouru par l'extrémités du vecteur position du point au cours du temps, par rapport au repère choisi.

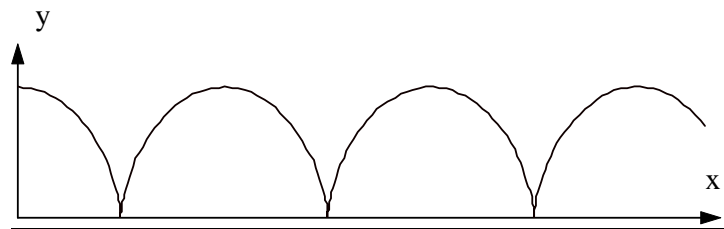
Exemple :



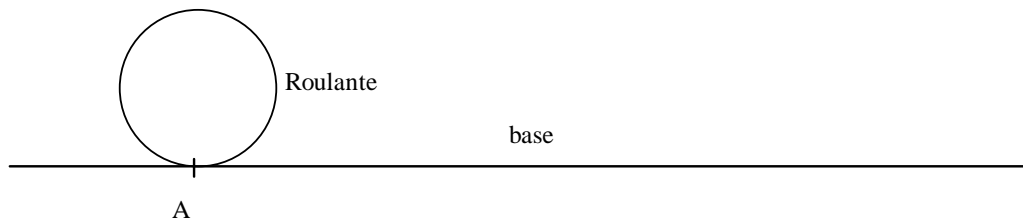
Trajectoire des points	M	G ₁	G ₂
par rapport au bâti (rep 1)	circulaire	un point	circulaire
par rapport à la terre (rep 0)	Cycloïde	linéaire	compliquée !

Soit la roue (3), centre d'inertie G₃ roulant sans glisser sur le sol (0). On peut considérer en A, point de contact du sol et de la roue :

- A ∈ à la roue. Sa trajectoire par rapport à un repère lié au sol est une cycloïde.

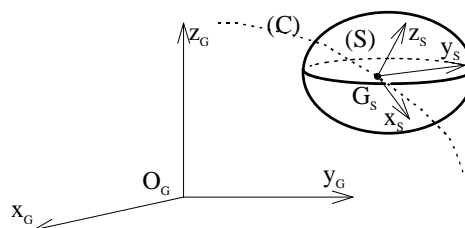


- A ∈ au sol dont la trajectoire par rapport à un repère lié au sol est un point
- A : « point libre ». A chaque instant A est le point de contact entre la roue et le sol. A est le centre instantané de rotation du mouvement du plan lié à la roue par rapport au plan lié au sol. Dans un repère lié au sol, A a une trajectoire rectiligne appelée « base » du mouvement. Dans un repère lié à la roue A décrit un cercle appelé roulante du mouvement considéré.



6. Vecteur rotation d'un solide ou d'un repère

6.1. Définition



Le point G_s décrit une trajectoire (C) par rapport au repère galiléen (O, $\bar{x}_G, \bar{y}_G, \bar{z}_G$). La rotation de (S) autour de G_s est caractérisée par un vecteur rotation : $\vec{\Omega}_{S/G}$ tel que :

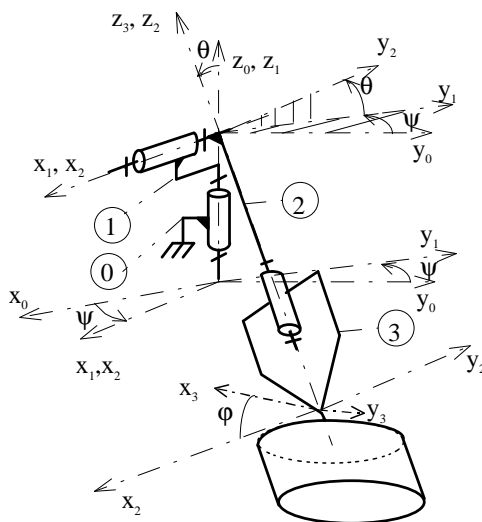
- $\vec{\Omega}_{S/G}$ est porté par l'axe de rotation de (S) par rapport à (G)
 - $\|\vec{\Omega}_{S/G}\|$ est proportionnel à la vitesse angulaire de (S) par rapport à (G)
- $\vec{\Omega}_{S/G}$ peut être projeté dans n'importe quelle base choisie.

6.2. Calcul de $\overrightarrow{\Omega}_{S/R}$ dans le cas où la rotation de (S) par rapport à (r) est une somme de rotations élémentaires :

6.2.1. exemple 1

- ◇ Le vecteur rotation du solide (S) par rapport à la base « 3 » est $\overrightarrow{\Omega}_{S/3}$
 - ◇ Le vecteur rotation de la base « 3 » par rapport à la base « 2 » est $\overrightarrow{\Omega}_{3/2}$
 - ◇ Le vecteur rotation de la base « 2 » par rapport à la base « 1 » est $\overrightarrow{\Omega}_{2/1}$
 - ◇ Le vecteur rotation de la base « 1 » par rapport à une base galiléenne « g » est $\overrightarrow{\Omega}_{1/g}$
- La rotation de (S) dans le galiléen s'écrit alors : $\overrightarrow{\Omega}_{S/g} = \overrightarrow{\Omega}_{S/3} + \overrightarrow{\Omega}_{3/2} + \overrightarrow{\Omega}_{2/1} + \overrightarrow{\Omega}_{1/g}$.

6.2.2. Exemple 2 : trois rotations élémentaires :



rotation entre « 3 » et « 2 » : $\overrightarrow{\Omega}_{3/2} = \dot{\phi} \cdot \bar{z}_3 = \dot{\phi} \cdot \bar{z}_2$

rotation entre « 2 » et « 1 » : $\overrightarrow{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta} \cdot \bar{x}_2 = \dot{\theta} \cdot \bar{x}_1$

rotation entre « 1 » et « 0 » : $\overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\psi} \cdot \bar{z}_1 = \dot{\psi} \cdot \bar{z}_0$

On peut en déduire la rotation entre « 3 » et « 0 »

$$\overrightarrow{\Omega}_{3/0} = \dot{\phi} \cdot \bar{z}_2 + \dot{\theta} \cdot \bar{x}_1 + \dot{\psi} \cdot \bar{z}_1$$

que l'on projette alors dans la base « 2 »

$$\bar{z}_1 = \bar{z}_2 \cdot \cos(\theta) + y_2 \cdot \sin(\theta)$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{3/0} = \dot{\phi} \cdot \bar{z}_2 + \dot{\theta} \cdot \bar{x}_1 + \dot{\psi} \cdot (\cos(\theta) \cdot \bar{z}_2 + \sin(\theta) \cdot \bar{y}_2)$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{3/0} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cdot \sin(\theta) \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}_{\text{"2"}}$$

Le résultat peut aussi être projeté dans la base « 1 »

$$\begin{aligned}\bar{z}_2 &= \bar{z}_1 \cdot \cos(\theta) - \bar{y}_1 \cdot \sin(\theta) \\ \overrightarrow{\Omega_{3/0}} &= \dot{\phi} \cdot (\cos(\theta) \cdot \bar{z}_1 - \sin(\theta) \cdot \bar{y}_1) + \dot{\theta} \cdot \bar{x}_1 + \dot{\psi} \cdot \bar{z}_1 \\ \overrightarrow{\Omega_{3/0}} &= \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\phi} \cdot \sin(\theta) \\ \dot{\psi} + \dot{\phi} \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}_{1''}\end{aligned}$$

7. Dérivée cinématique d'un vecteur $\vec{v}(t)$

On s'intéresse à la vitesse (et à l'accélération) d'un point M par rapport à un repère « r ». Cela suppose que « r » est fixe (même s'il ne l'est pas) on dit que « r » est bloqué.

On va alors utiliser les dérivées « à base bloquée ».

Exemple : soit $\vec{v}(t) = 15 \cdot t^3 \cdot \bar{x}_p + 17 \cdot t^2 \cdot \bar{y}_p + 3 \cdot t \cdot \bar{z}_p$

La dérivée $\frac{d_r(\vec{v}(t))}{dt}$ par rapport à la base « r » n'est pas directement accessible si « r » ≠ « P »,

seule la dérivée $\frac{d_p(\vec{v}(t))}{dt}$ est directement calculable.

- Si le vecteur est projeté dans la base dans laquelle on veut dériver, il suffit de dériver ses composantes
- sinon, deux solutions sont possible :
 - effectuer un changement de repère pour écrire le vecteur dans la base dans laquelle on veut dériver, mais cette opération est lourde et à éviter autant que possible.
 - utiliser la relation suivante :

$$\frac{d_r(\vec{v}(t))}{dt} = \frac{d_p(\vec{v}(t))}{dt} + \overrightarrow{\Omega_{p/r}} \wedge \vec{v}(t) \quad \text{avec } \overrightarrow{\Omega_{p/r}} \text{ vecteur rotation de « p » par rapport à « r ».}$$

8. Vitesse d'un point M par rapport à un repère r :

Remarque : le choix d'un repère r de référence pour le calcul de la vitesse n'implique pas que « r » est fixe. (notons qu'il n'existe pas de repère fixe dans l'univers, et qu'on désigne par « g » les repères galiléens qui sont « considérés comme fixe ». (le plus souvent liés à la terre).

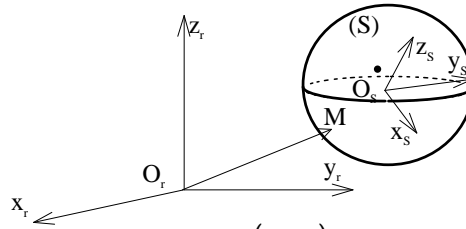
8.1. Vecteur vitesse instantanée :

$$\overrightarrow{V_{/r}}(M/t) = \frac{ds}{dt} \quad (\text{unité : m} \cdot \text{s}^{-1})$$

Cette vitesse est indépendante de l'origine des abscisses curvilignes (s) et de l'origine des temps .

La vitesse instantanée de M par rapport à « r » (dans le repère « r ») est tangente à la trajectoire de M dans le repère « r ».

$$\overrightarrow{V_{/r}}(M/t) = \frac{d_r(\overrightarrow{O_r M})}{dt} = \vec{T} \cdot \frac{ds}{dt}$$

8.2. cas où $M \in (S)$:

- le vecteur $\overrightarrow{O_r M}$ n'est pas modifié ; $\overrightarrow{V_{r/r}}(M/t) = \frac{d_r(\overrightarrow{O_r M})}{dt}$ et ses propriétés (tangence à la trajectoire de M par rapport à « r ») sont conservées.
- Il est cependant important de noter l'appartenance de M au solide (S) car si on pose, par exemple : $\overrightarrow{O_r M_{\in(S)}} = \overrightarrow{O_r O_s} + \overrightarrow{O_s M_{\in(S)}}$ il faut bloquer, dans le calcul de $\overrightarrow{V_{s/r}}(M/t)$, les coordonnées de M/r, pour tenir compte de l'appartenance de M à (S)

notation : on écrit alors $\overrightarrow{V_{s/r}}(M/t) = \frac{d_r(\overrightarrow{O_r M_{\in(S)}})}{dt}$

8.3. Méthode de calcul

- Déterminer le vecteur position de M par rapport à « r » : $\overrightarrow{O_r M}$ ou $\overrightarrow{O_r M_{\in(S)}}$ si M appartient au solide ou au repère (S).
- Choisir une base dans laquelle projeter $\overrightarrow{O_r M_{\in(S)}}$ (ce n'est pas forcément la base « r »). Soit « p » cette base de travail.
- Appliquer $\overrightarrow{V_{s/r}}(M/t) = \frac{d_r(\overrightarrow{O_r M_{\in(S)}})}{dt}$ en utilisant la relation de dérivation vectorielle :

$$\frac{d_r(\overrightarrow{O_r M_{\in(S)}})}{dt} = \frac{d_p(\overrightarrow{O_r M_{\in(S)}})}{dt} + \overrightarrow{\Omega_{p/r}} \wedge \overrightarrow{O_r M_{\in(S)}}$$

(suppose que $\overrightarrow{O_r M_{\in(S)}}$ soit projeté dans la base « p »)

8.4. Composition des vitesses :

$$\overrightarrow{V_{j/0}}(M/t) = \overrightarrow{V_{j/1}}(M/t) + \overrightarrow{V_{e1/0}}(M/t)$$

9. Accélération d'un point M par rapport à un repère r

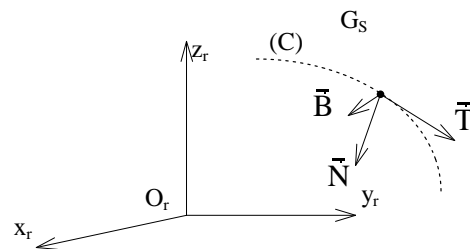
9.1. définition

Par analogie avec ce qui a été fait pour les vitesses, on peut écrire :

$$\overline{\gamma_{s/r}(M/t)} = \frac{d_r(\overline{V_{s/r}(M/t)})}{dt}$$

9.2. Trièdre de Frenet

- $\vec{T} = \frac{d_r \vec{OM}}{ds}$ vecteur tangent
- $\vec{N} = R \frac{d_r \vec{T}}{ds}$ vecteur normal
- $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ vecteur binormal
- (\vec{T}, \vec{N}) : plan osculateur
- (\vec{N}, \vec{B}) : plan normal
- (\vec{B}, \vec{T}) : plan rectifiant



9.3. rappel des formules de frenet :

$$\frac{d_r \vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R} \quad R : \text{rayon de courbure de la courbe (C) toujours } > 0$$

$$\frac{d_r \vec{N}}{ds} = -\frac{\vec{T}}{R} + \frac{\vec{B}}{J} \quad \text{avec } \frac{1}{J} \text{ torsion algébrique de la courbe (C) } J : \text{rayon de torsion.}$$

9.4. Projection de $\overline{\gamma_{s/r}(M/t)}$:

$$\overline{\gamma_{s/r}(M/t)} = \frac{d_r(\overline{V_{s/r}(M/t)})}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{T} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d_r \vec{T}}{dt}$$

$$\overline{\gamma_{s/r}(M/t)} = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{T} + \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{N}$$

géométrie des masses

1. Eléments de définition d'un solide en dynamique

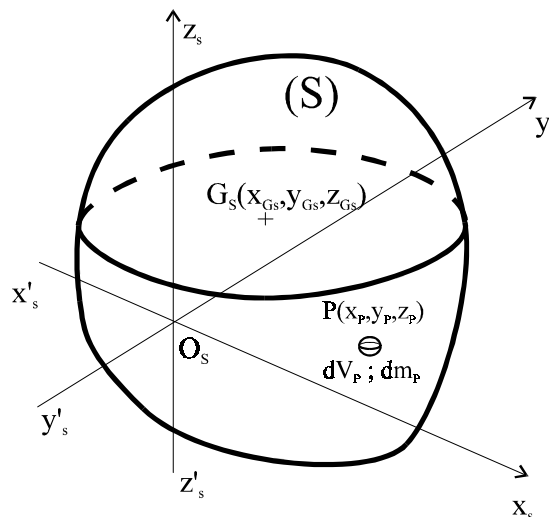
Un solide indéformable (S) est caractérisé par

- ses dimensions (en m)
- sa masse volumique ρ (en kg.m^{-3}).

Un solide dont la masse volumique est constante, quel que soit le point du solide considéré est un solide homogène. Un solide dont la masse volumique varie suivant le point du solide considéré est un solide hétérogène.

Pour utiliser les équations de la dynamique, il nous faut déterminer certaines quantités en fonction de ces éléments. Ce sont :

- la masse M_S .
- les coordonnées du centre de masse G_S
- les éléments d'inertie du solide, ou, au moins certains d'entre eux.



2. Masse M_S du solide (S)

2.1. Définition

$$M_S = \iiint_{p \in (S)} \rho_p \cdot dV_p$$

dV_P est le volume élémentaire.

2.2. Méthode pratique permettant de déterminer la masse d'un solide

il est généralement possible de décomposer (S) en une somme de solides homogènes dont la géométrie est simple (cylindres, parallélépipèdes, pyramides,...). Soit V_i le volume du solide S_i et ρ_i la masse volumique du solide S_i . La masse du solide (S) est alors :

$$M_S = \sum_i \rho_i \cdot V_i$$

2.3. Unités

l'unité de masse est le kilogramme (kg).

Remarque : Attention aux unités de mesure, si ρ est en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, V doit être en m^3 pour que la masse soit en kg.

3. Centre de masse G_S du solide (S)

3.1. coordonnées du centre de masse

La position du centre de masse G_S de (S) peut être définie par les trois coordonnées X_{GS}, Y_{GS}, Z_{GS} du point G_S dans un repère $(O_S, \bar{x}_S, \bar{y}_S, \bar{z}_S)$ lié à (S). Ces trois coordonnées sont les composantes dans la base « s » du vecteur $\overrightarrow{O_S G_S}$

3.2. calcul des coordonnées du centre de masse :

G_S est le barycentre des points P de masse $\rho_P \cdot dV_P$.

$$\overrightarrow{O_S G_S} = \frac{\iiint_{P \in S} \overrightarrow{O_S P} \cdot \rho_P \cdot dV_P}{\iiint_{P \in S} \rho_P \cdot dV_P} = \frac{\iiint_{P \in S} \overrightarrow{O_S P} \cdot dm_P}{\iiint_{P \in S} dm_P}$$

Remarquons que le terme au dénominateur n'est autre que la masse de (S). Le terme au numérateur, s'appelle le moment statique du solide (S) par rapport au point O_S :

$$\iiint_{P \in S} \overrightarrow{O_S P} \cdot \rho_P \cdot dV_P = \text{moment statique de (S) par rapport à } O_S$$

Nous pouvons alors écrire que $\overrightarrow{O_S G_S} = \frac{\text{moment statique de (S) par rapport à } O_S}{\text{masse de (S)}}$

3.3. méthode pratique permettant de calculer la position du point G_S :

De nouveau, le principe de cette méthode est de décomposer le solide en solides homogènes élémentaires, de masse m_i et de centre de masse G_i . Nous pouvons alors calculer la position de G_S :

$$\overrightarrow{O_S G_S} = \frac{\sum_i m_i \cdot \overrightarrow{O_S G_i}}{M_S}$$

En projection dans le repère $(O_S, \bar{x}_S, \bar{y}_S, \bar{z}_S)$ nous obtenons :

$$X_{GS} = \frac{\sum_i m_i \cdot X_{Gi}}{M_S} ; Y_{GS} = \frac{\sum_i m_i \cdot Y_{Gi}}{M_S} ; Z_{GS} = \frac{\sum_i m_i \cdot Z_{Gi}}{M_S}$$

3.4. unité :

$\overrightarrow{O_S G_S}$ définit la position de G_S par rapport au point O_S . Ce vecteur est donc exprimé en unité de longueur, et en particulier en mètres (m).

3.5. remarque importante.

Si l'origine du repère $(O_S, \bar{x}_S, \bar{y}_S, \bar{z}_S)$ est le centre de masse G_S (donc si $O_S = G_S$), le moment statique de (S) par rapport au repère $(G_S, \bar{x}_S, \bar{y}_S, \bar{z}_S)$ devient : $\iiint_{p \in S} \overrightarrow{G_S P} \cdot d\mathbf{m}_p = \vec{0}$. Cette relation nous permettra de simplifier de nombreuses relations dans le chapitre 8.

4. Moments d'inertie du solide (S)

4.1. introduction

La masse et le centre de gravité ne nous permettent pas de définir complètement le comportement d'un solide (S) en dynamique. Pour pouvoir modéliser de manière correcte le comportement des solides, nous avons besoin d'autres éléments dont les moments d'inertie. Les moments d'inertie sont définis par rapport aux axes du repère $(O_S, \bar{x}_S, \bar{y}_S, \bar{z}_S)$.

4.2. définition :

Moment d'inertie de (S) par rapport à la droite $x'_S O_S x_S$: $A = I_{/O_S x_S}(S) = \iiint_{p \in S} (y_p^2 + z_p^2) \cdot d\mathbf{m}_p$

Moment d'inertie de (S) par rapport à la droite $y'_S O_S y_S$: $B = I_{/O_S y_S}(S) = \iiint_{p \in S} (z_p^2 + x_p^2) \cdot d\mathbf{m}_p$

Moment d'inertie de (S) par rapport à la droite $z'_S O_S z_S$: $C = I_{/O_S z_S}(S) = \iiint_{p \in S} (x_p^2 + y_p^2) \cdot d\mathbf{m}_p$

4.3. unité

Les moments d'inertie s'expriment en $m^2 \cdot kg$. Leur définition est très proche de celle utilisée pour les moments quadratiques en résistances des matériaux (exprimés en m^4), mais il ne faut pas les confondre !

4.4. remarque

Un moyen mnémotechnique pour retenir la forme des moments d'inertie est le suivant : A est relatif à l'axe x, et dans l'intégrale permettant de calculer A, remarquons que x n'intervient pas, de même pour B, relatif à l'axe y, et pour C relatif à l'axe Z.

5. Produits d'inertie du solide (S)

5.1. introduction

Pour utiliser les relations de la dynamique, il nous faut aussi calculer trois produits d'inertie du solide (S), définis dans le repère $(O_S, \bar{x}_S, \bar{y}_S, \bar{z}_S)$

5.2. définition

$$\begin{aligned}
 D &= P_{/y_s O_s z_s}(S) = \iiint_{P \in S} y_P \cdot z_P \cdot dm_P \\
 E &= P_{/z_s O_s x_s}(S) = \iiint_{P \in S} z_P \cdot x_P \cdot dm_P \\
 F &= P_{/x_s O_s y_s}(S) = \iiint_{P \in S} x_P \cdot y_P \cdot dm_P
 \end{aligned}$$

produits d'inertie du solide (S) par rapport au repère
 $(O_s, \bar{x}_s, \bar{y}_s, \bar{z}_s)$

5.3. unité :

Les moments d'inertie s'expriment en $m^2 \cdot kg$. Leur définition est très proche de celle utilisée pour les moments quadratiques en résistances des matériaux (exprimés en m^4), mais il ne faut pas les confondre !

5.4. moyen mnémotechnique.

- ◇ On peut remarquer que x n'intervient pas dans le calcul de $D = P_{/y_s O_s z_s}$ (la définition du produit ne contient pas x)
- ◇ D'une manière générale pour les moments et produits d'inertie, remarquons que x n'intervient pas dans A et D, y n'intervient pas dans B et E, z n'intervient pas dans C et F.

6. Matrice d'inertie de (S) par rapport à $(O_s, \bar{x}_s, \bar{y}_s, \bar{z}_s)$

Pour pouvoir utiliser les éléments d'inertie relatif au repère $(O_s, \bar{x}_s, \bar{y}_s, \bar{z}_s)$ dans les calculs de dynamique, il nous faut les placer dans une matrice (3,3) appelée matrice d'inertie.

- les moments d'inertie sont placés sur la diagonale principale
- les produits d'inertie, précédés du signe moins, sont placés symétriquement par rapport à cette diagonale.

- La matrice d'inertie s'écrit donc : $I_{O_s \bar{x}_s \bar{y}_s \bar{z}_s}(S) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{"S"} \quad (m^2 \cdot kg)$ avec

$$\begin{aligned}
 A &= I_{/O_s x_s}(S) = \iiint_{P \in S} (y_P^2 + z_P^2) \cdot dm_P & D &= P_{/y_s O_s z_s}(S) = \iiint_{P \in S} y_P \cdot z_P \cdot dm_P \\
 B &= I_{/O_s y_s}(S) = \iiint_{P \in S} (z_P^2 + x_P^2) \cdot dm_P & E &= P_{/z_s O_s x_s}(S) = \iiint_{P \in S} z_P \cdot x_P \cdot dm_P \\
 C &= I_{/O_s z_s}(S) = \iiint_{P \in S} (x_P^2 + y_P^2) \cdot dm_P & F &= P_{/x_s O_s y_s}(S) = \iiint_{P \in S} x_P \cdot y_P \cdot dm_P
 \end{aligned}$$

7. Remarques

7.1. propriétés mathématiques

Une matrice d'inertie est toujours carrée, symétrique et réelle. Généralement elle est constante, dans la mesure où le repère choisi pour la calculer est lié au solide (S). Toutes les propriétés et méthodes de calcul qui s'appliquent aux matrices carrées, symétriques et réelles s'appliquent aux matrices d'inertie et seront utiles dans les calculs.

7.2. Représentation physique

La matrice précédente représente en fait, en projection dans la base $(\bar{x}_S, \bar{y}_S, \bar{z}_S)$, les composantes du tenseur d'inertie du solide (S) relatives au point O_S .

7.3. Tenseurs

7.3.1. définition d'un tenseur

Dans la théorie des tenseurs, un vecteur est un tenseur d'ordre 1. Il a trois composantes (dans un espace à trois dimensions) qui constituent une matrice colonne, en projection dans une base donnée. Lors d'un changement de base, les composantes du tenseur d'ordre 1, exprimées dans la nouvelle base, sont des combinaisons linéaires des composantes du tenseur dans l'ancienne base.

7.3.2. Tenseur d'inertie

Le tenseur d'inertie est lui un tenseur d'ordre 2. Il a neuf composantes qui constituent une matrice (3×3) dans une base donnée. Lors d'un changement de base, les nouvelles composantes sont des combinaisons linéaires des anciennes. Le tenseur d'inertie est indépendant de toute base, on le notera $\overline{I}_{O_S}(S/t)$; mais, pour l'exprimer sous forme de matrice (3×3) il nous faut le projeter dans une base.

7.4. Remarque sur le calcul des matrices d'inertie

Si les intégrales triples étaient toujours facile à calculer, nous pourrions arrêter ici la portion de cours de géométrie des masses. En effet, tous les éléments qui nous intéressent (masse, centre de masse, matrice d'inertie) ont été défini et peuvent être calculés. Les éléments de cours qui suivent n'ont d'autre but que de nous simplifier les calculs, et de nous éviter, dans la majorité des cas, de calculer la moindre intégrale.

8. Théorèmes relatifs aux symétries

8.1. Simplification liée à la présence d'un plan de symétrie

Si un plan de coordonnées est plan de symétrie des masses de (S), les deux produits d'inertie, contenant, dans leur formule de calcul, la lettre de l'axe perpendiculaire à ce plan de coordonnées sont nuls dans toutes les matrices relatives à un point de ce plan.

8.2. Exemple

$y_S O_S z_S$ est plan de symétrie des masses de (S).

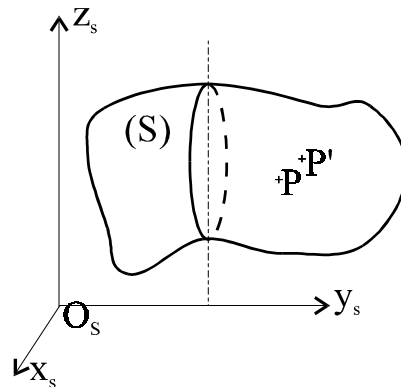
En écrivant	D	E	F
	x_S	y_S	z_S

Et en utilisant le second moyen mnémotechnique proposé à la fin du paragraphe 7.5 (rappel : x n'intervient pas dans A et D, y n'intervient pas dans B et E, z n'intervient pas dans C et F.), nous en déduisons que $E=F=0$, car les relations de calcul contiennent z_S .

8.3. Démonstration :

Soit le solide (S), symétrique par rapport au plan $y_S O_S z_S$. A tout point $P(x_P, y_P, z_P) \in (S)$ correspond un point $P'(-x_P, y_P, z_P) \in (S)$.

Soit (S_+) la partie de (S) telle que $x \cdot x_S > 0$.



$$E = P_{/Z_S O_S X_S}(S) = \iiint_{P \in S} z_P \cdot x_P \cdot dm_P$$

$$E(P + P') = P_{/O_S O_S X_S}(P + P') = (x_P \cdot z_P - x_P \cdot z_P) \cdot dm_P = 0$$

$$E = P_{/Z_S O_S X_S}(S) = \iiint_{P \in S+} (x_P \cdot z_P - x_P \cdot z_P) \cdot dm_P = 0$$

$$\text{De même } F = P_{/Y_S O_S X_S}(S) = \iiint_{P \in S+} (x_P \cdot y_P - x_P \cdot y_P) \cdot dm_P = 0$$

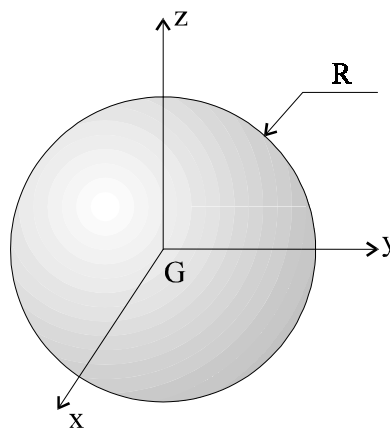
8.4. Généralisation : cas d'un axe de symétrie

Si un axe de coordonnées est axe de symétrie des masses de (S), toutes les matrices d'inertie relatives à un point de cet axe sont diagonales (les trois produits d'inertie sont nuls).

9. Matrices centrales d'inertie de quelques solides élémentaires

9.1. Sphère

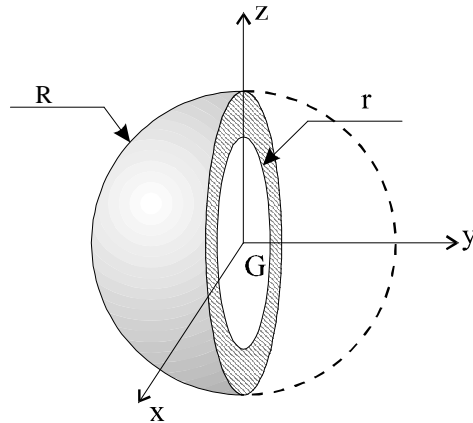
rayon R,
centre d'inertie G,
masse M :



$$I_{/Gxyz}(\text{Sphère}) = \frac{2}{5} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

9.2. Sphère creuse

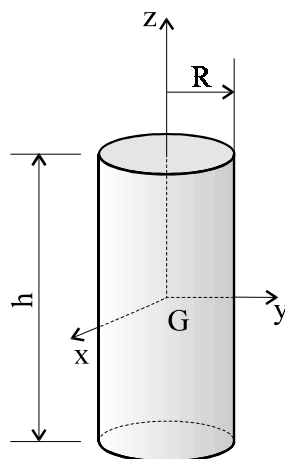
rayon extérieur R , rayon intérieur r , masse M , centre d'inertie G



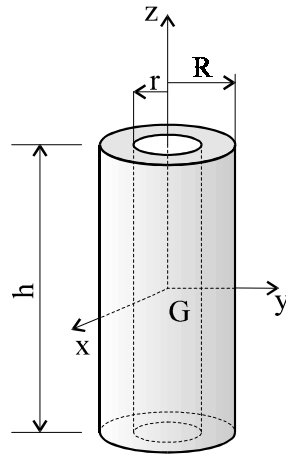
$$I_{/Gxyz}(\text{Sphère}) = \frac{2}{5} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} \end{pmatrix}$$

9.3. cylindre plein d'axe Gz

rayon R , hauteur h , masse M , centre d'inertie en G

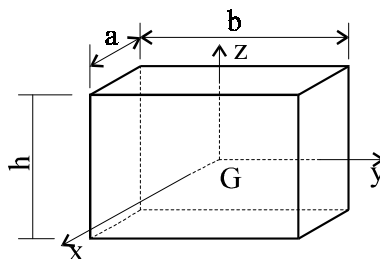


$$I_{/Gxyz}(\text{Cyl}) = M \cdot \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}$$

9.4. cylindre creux d'axe Gz ,rayon extérieur R , rayon intérieur r , hauteur h , masse M , centre d'inertie en G 

$$I_{/Gxyz}(\text{Cyl. Cr}) = M \cdot \begin{pmatrix} \frac{R^2 + r^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2 + r^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2 + r^2}{2} \end{pmatrix}$$

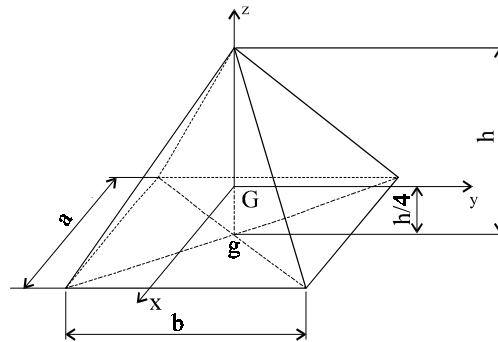
9.5. Parallélépipède

Longueur a , largeur b , hauteur h , masse M , centre d'inertie en G .

$$I_{/Gxyz}(\text{Par.}) = \frac{M}{12} \cdot \begin{pmatrix} h^2 + b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

9.6. Pyramide

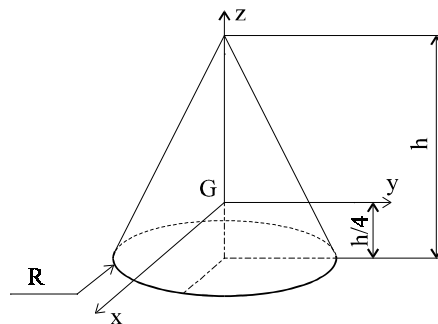
droite, de base rectangulaire longueur a , largeur b , hauteur h .



$$I_{/Gxyz}(\text{Pyr.}) = \frac{M}{20} \cdot \begin{pmatrix} b^2 + \frac{3 \cdot h^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + \frac{3 \cdot h^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

9.7. Cône droit

base circulaire, rayon R , hauteur h

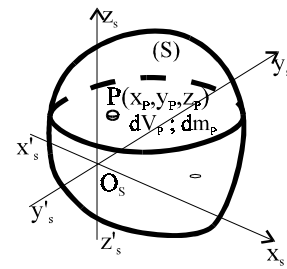
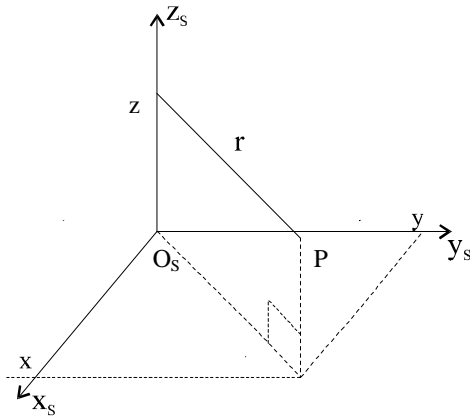


$$I_{/Gxyz}(\text{Cone}) = \frac{3 \cdot M}{10} \cdot \begin{pmatrix} \frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{8} & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

10. Autre définition du moment d'inertie

10.1. Remarque

Soit le point P, de masse dm , tel que $\overrightarrow{O_S P} = (x \ y \ z)_{S_s}^T$, son moment d'inertie par rapport à l'axe $O_S Z_S$ est : $I_{/O_S Z_S}(P) = (x^2 + y^2) \cdot dm = r^2 \cdot dm$, r étant la distance du point P à l'axe $O_S Z_S$.



10.2. autre définition du moment d'inertie

Cette remarque nous permet de définir d'une façon différente (mais équivalente) le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à une droite

10.2.1. Moment d'inertie d'un solide par rapport à une droite

Le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à une droite quelconque Δ s'écrit :

$$I_{/\Delta}(S) = \iiint_{P \in S} r_{P\Delta}^2 \cdot dm_P$$

avec R_{PD}^2 = distance du point P à la droite D.

10.2.2. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un plan

Par analogie, nous définissons le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un plan Pl ,

$$I_{/Pl}(S) = \iiint_{P \in S} d_{PPl}^2 \cdot dm_P$$

avec d_{PPl}^2 = distance du point P au plan Pl ,

les moments d'inertie d'un solide (S) par rapport aux trois plans de coordonnées sont donc :

$$I_{/X_S O_S Y_S}(S) = \iiint_{P \in S} z_P^2 \cdot dm_P \quad I_{/Z_S O_S X_S}(S) = \iiint_{P \in S} y_P^2 \cdot dm_P \quad I_{/Y_S O_S Z_S}(S) = \iiint_{P \in S} x_P^2 \cdot dm_P$$

10.2.3. Moment d'inertie par rapport à un point

Nous pouvons aussi définir par analogie le moment d'inertie de (S) par rapport au point O_S :

$$I_{/O_S}(S) = \iiint_{P \in S} (x_P^2 + y_P^2 + z_P^2) \cdot dm_P$$

11. Théorèmes relatifs aux moments d'inertie

11.1. Théorème 1

Le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à une droite est la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires se coupant sur cette droite.

11.2. Théorème 2

Le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un point est la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans perpendiculaires entre eux se coupant en ce point.

12. Translation des axes : théorèmes d'Huygens (1629 - 1695)

12.1. théorème d'Huygens concernant les moments d'inertie :

Le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un point H, (respectivement une droite Δ_H ou un plan Π_H) quelconque est égal au moment d'inertie de ce même solide (S) par rapport à son centre d'inertie G (respectivement Δ_G , droite // à Δ_H passant par G ou Π_G plan // à Π_H passant par G) auquel s'ajoute la masse de (S) multiplié par le carré de la distance du point H au point G (respectivement de la droite Δ_H à la droite Δ_G ou du plan Π_H au plan Π_G).

- $I_{\text{Point H}}(S) = I_{G_S}(S) + M_S \cdot d^2$ avec G_S = centre d'inertie de (S) et $d = \|\overrightarrow{HG_S}\|$
- $I_{\Delta_H}(S) = I_{\Delta_{G_S}}(S) + M_S \cdot d^2$ avec G_S = centre d'inertie de (S) et d = distance entre les deux droites parallèles Δ_H et Δ_{G_S}
- $I_{\Pi_H}(S) = I_{\Pi_{G_S}}(S) + M_S \cdot d^2$ avec G_S = centre d'inertie de (S) et d = distance entre les deux plans parallèles Π_H et Π_{G_S}

Remarque importante : un des deux éléments doit être G_S ou passer par G_S

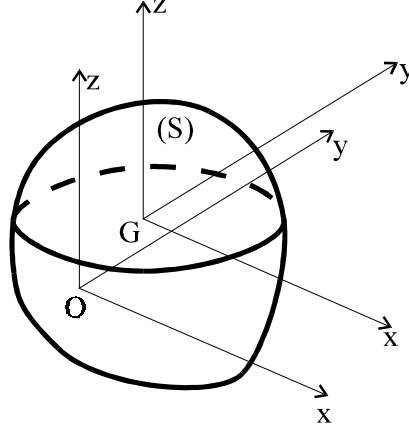
12.2. théorème d'Huygens concernant les produits d'inertie :

Soit un solide (S) et un repère $(O_S, \bar{x}_S, \bar{y}_S, \bar{z}_S)$ O_S point quelconque. Soit G_S le centre d'inertie de (S). Les produits d'inertie de (S) par rapport au repère $(O_S, \bar{x}_S, \bar{y}_S, \bar{z}_S)$ sont liés aux produits d'inertie par rapport au repère $(G_S, \bar{x}_S, \bar{y}_S, \bar{z}_S)$ (bien noter que les repères sont parallèles entre eux) par les équations suivantes :

- $D_{O_S} = D_{G_S} + M_S \cdot y_{G_S} \cdot z_{G_S}$
 - $E_{O_S} = E_{G_S} + M_S \cdot z_{G_S} \cdot x_{G_S}$
 - $F_{O_S} = F_{G_S} + M_S \cdot x_{G_S} \cdot y_{G_S}$
- noter que $x_{G_S}, y_{G_S}, z_{G_S}$ sont les coordonnées de G_S dans le repère $(O_S, \bar{x}_S, \bar{y}_S, \bar{z}_S)$.

12.3. démonstration

Tous les vecteurs sont dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, liée à (S) O est un point lié à (S).



Soit P un point quelconque de (S). $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

G est le centre d'inertie de (S). $\vec{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}$. Posons $\vec{GP} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$

Sachant que $\vec{OP} = \vec{OG} + \vec{GP}$, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} x = x_G + x_P \\ y = y_G + y_P \\ z = z_G + z_P \end{cases} \quad (1)$$

12.3.1. Démonstration pour les moments.

$$A_O = I_{Ox}(S) = \iiint_{P \in S} (y^2 + z^2) \cdot dm_p \quad (2) \qquad A_G = I_{Gx}(S) = \iiint_{P \in S} (y_P^2 + z_P^2) \cdot dm_p \quad (3)$$

en combinant (1) et (2) : $A_O = I_{Ox}(S) = \iiint_{P \in S} \left((y_G + y_P)^2 + (z_G + z_P)^2 \right) \cdot dm_p$

Développons : $A_O = I_{Ox}(S) = \iiint_{P \in S} (y_G^2 + y_P^2 + 2 \cdot y_G \cdot y_P + z_G^2 + z_P^2 + 2 \cdot z_G \cdot z_P) \cdot dm_p$

Organisons l'équation : $A_O = I_{Ox}(S) = \iiint_{P \in S} \left((y_P^2 + z_P^2) + 2 \cdot y_G \cdot y_P + 2 \cdot z_G \cdot z_P + (y_G^2 + z_G^2) \right) \cdot dm_p$

En séparant en quatre intégrales :

$$\begin{aligned} A_O = I_{Ox}(S) &= \iiint_{P \in S} (y_P^2 + z_P^2) \cdot dm_p \cdots \\ &+ \iiint_{P \in S} 2 \cdot y_G \cdot y_P \cdot dm_p \cdots \\ &+ \iiint_{P \in S} 2 \cdot z_G \cdot z_P \cdot dm_p \\ &+ \iiint_{P \in S} (y_G^2 + z_G^2) \cdot dm_p \end{aligned}$$

et en sortant des intégrales les termes constants :

$$\begin{aligned} A_O = I_{Ox}(S) &= \iiint_{P \in S} (y_P^2 + z_P^2) \cdot dm_p \cdots \\ &+ 2 \cdot y_G \cdot \iiint_{P \in S} y_P \cdot dm_p \cdots \\ &+ 2 \cdot z_G \cdot \iiint_{P \in S} z_P \cdot dm_p \\ &+ (y_G^2 + z_G^2) \cdot \iiint_{P \in S} dm_p \end{aligned}$$

remarquons que la première intégrale est égale à $A_G = I_{GX}(S)$, que la seconde et la troisième intégrale sont nulles par définition du centre de gravité (voir la remarque terminant le chapitre 7.3), et que la quatrième intégrale est égale à $M_S \cdot (y_G^2 + z_G^2)$ si M_S est la masse de (S). Nous montrons donc que :

$$A_O = I_{Ox}(S) = I_{Gx}(S) + M_S \cdot (y_G^2 + z_G^2) = A_G + M_S \cdot (y_G^2 + z_G^2).$$

La même méthode nous permet de démontrer que :

$$B_O = I_{Oy}(S) = I_{Gy}(S) + M_S \cdot (z_G^2 + x_G^2) = B_G + M_S \cdot (z_G^2 + x_G^2)$$

et

$$C_O = I_{Oz}(S) = I_{Gz}(S) + M_S \cdot (x_G^2 + y_G^2) = C_G + M_S \cdot (x_G^2 + y_G^2)$$

12.3.2. Démonstration pour les produits :

La méthode est la même que précédemment :

Utiliser la relation (1), développer l'équation, et regrouper les termes en P, en G, et croisés.

$$D_{/O} = P_{/yOz}(S) = \iiint_{P \in S} y \cdot z \cdot dm_p = \iiint_{P \in S} (y_G + y_P) \cdot (z_G + z_P) \cdot dm_p = \iiint_{P \in S} (y_G \cdot z_G + y_P \cdot z_G + y_G \cdot z_P + y_P \cdot z_P) \cdot dm_p$$

Séparer l'intégrale en quatre intégrales

$$D_{/O} = \iiint_{P \in S} y_G \cdot z_G \cdot dm_p + \iiint_{P \in S} y_P \cdot z_G \cdot dm_p + \iiint_{P \in S} y_G \cdot z_P \cdot dm_p + \iiint_{P \in S} y_P \cdot z_P \cdot dm_p$$

Sortir des intégrales les termes constants

$$D_{/O} = y_G \cdot z_G \cdot \iiint_{P \in S} dm_p + z_G \cdot \iiint_{P \in S} y_P \cdot dm_p + y_G \cdot \iiint_{P \in S} z_P \cdot dm_p + \iiint_{P \in S} y_P \cdot z_P \cdot dm_p$$

La première intégrale est égale à $M_S \cdot y_G \cdot z_G$ avec M_S = masse de (S), les deux suivantes sont nulles (voir la remarque terminant le chapitre 7.3), la dernière est égale à $D_{/G}$.

$$D_{/O} = M_S \cdot y_G \cdot z_G + 0 + 0 + \iiint_{P \in S} y_P \cdot z_P \cdot dm_p = D_{/G} + M_S \cdot y_G \cdot z_G.$$

La même méthode nous permet de trouver :

$$E_{O_S} = E_{G_S} + M_S \cdot z_{G_S} \cdot x_{G_S}$$

$$F_{O_S} = F_{G_S} + M_S \cdot x_{G_S} \cdot y_{G_S}$$

12.4. En résumé

$$A_O = A_G + M_S \cdot (y_G^2 + z_G^2)$$

$$B_O = B_G + M_S \cdot (z_G^2 + x_G^2)$$

$$C_O = C_G + M_S \cdot (x_G^2 + y_G^2)$$

$$D_{/O} = D_{/G} + M_S \cdot y_G \cdot z_G$$

$$E_{/O} = E_{/G} + M_S \cdot z_G \cdot x_G$$

$$F_{/O} = F_{/G} + M_S \cdot x_G \cdot y_G$$

13. Changement de repère

13.1. Problème

Soit une matrice d'inertie du solide (S), relative au point O_S et à une base « d » (base de départ) :

$$I_{/O_S x_d y_d z_d} (S) = \begin{pmatrix} A_d & -F_d & -E_d \\ -F_d & B_d & -D_d \\ -E_d & -D_d & C_d \end{pmatrix}_{"d"}$$

Nous souhaitons calculer la matrice semblable¹ à cette matrice d'inertie dans une base « a »

Nous disposons de la relation suivante entre la base « a » et la base « d » :

$$\begin{cases} \bar{x}_a = a_1 \cdot \bar{x}_d + b_1 \cdot \bar{y}_d + c_1 \cdot \bar{z}_d \\ \bar{y}_a = a_2 \cdot \bar{x}_d + b_2 \cdot \bar{y}_d + c_2 \cdot \bar{z}_d \\ \bar{z}_a = a_3 \cdot \bar{x}_d + b_3 \cdot \bar{y}_d + c_3 \cdot \bar{z}_d \end{cases}, \text{ soit, sous forme matricielle, } \begin{pmatrix} \bar{x}_a \\ \bar{y}_a \\ \bar{z}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_d \\ \bar{y}_d \\ \bar{z}_d \end{pmatrix}$$

13.2. Solution :

On appelle $P_{d \rightarrow a}$ la matrice de passage de la base d vers la base a, qui s'écrit : $P_{d \rightarrow a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

Les matrices d'inertie sont carrées, symétriques et réelles, on démontre en mathématique² que :

$$I_{/O_S x_a y_a z_a} (S) = (P_{d \rightarrow a})^{-1} \cdot I_{/O_S x_d y_d z_d} (S) \cdot P_{d \rightarrow a}$$

Sachant que « d » et « a » sont des bases orthonormées directes, la matrice $P_{d \rightarrow a}$ est orthogonale, donc son déterminant est égal à ± 1 . Nous aurons donc $(P_{d \rightarrow a})^{-1} = (P_{d \rightarrow a})^T$

En développant l'expression :

$$I_{/O_S x_a y_a z_a} (S) = \begin{pmatrix} A_a & -F_a & -E_a \\ -F_a & B_a & -D_a \\ -E_a & -D_a & C_a \end{pmatrix}_{"a"} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_d & -F_d & -E_d \\ -F_d & B_d & -D_d \\ -E_d & -D_d & C_d \end{pmatrix}_{"d"} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A_a = a_1^2 \cdot A_d + b_1^2 \cdot B_d + c_1^2 \cdot C_d - 2 \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot D_d - 2 \cdot c_1 \cdot a_1 \cdot E_d - 2 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot F_d \\ B_a = a_2^2 \cdot A_d + b_2^2 \cdot B_d + c_2^2 \cdot C_d - 2 \cdot b_2 \cdot c_2 \cdot D_d - 2 \cdot c_2 \cdot a_2 \cdot E_d - 2 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot F_d \\ C_a = a_3^2 \cdot A_d + b_3^2 \cdot B_d + c_3^2 \cdot C_d - 2 \cdot b_3 \cdot c_3 \cdot D_d - 2 \cdot c_3 \cdot a_3 \cdot E_d - 2 \cdot a_3 \cdot b_3 \cdot F_d \\ D_a = -a_2 \cdot a_3 \cdot A_d - b_2 \cdot b_3 \cdot B_d - c_2 \cdot c_3 \cdot C_d + (b_2 \cdot c_3 + c_2 \cdot b_3) \cdot D_d + (a_2 \cdot c_3 + c_2 \cdot a_3) \cdot E_d + (a_2 \cdot b_3 + b_2 \cdot a_3) \cdot F_d \\ E_a = -a_1 \cdot a_3 \cdot A_d - b_1 \cdot b_3 \cdot B_d - c_1 \cdot c_3 \cdot C_d + (b_1 \cdot c_3 + c_1 \cdot b_3) \cdot D_d + (a_1 \cdot c_3 + c_1 \cdot a_3) \cdot E_d + (a_1 \cdot b_3 + b_1 \cdot a_3) \cdot F_d \\ F_a = -a_1 \cdot a_2 \cdot A_d - b_1 \cdot b_2 \cdot B_d - c_1 \cdot c_2 \cdot C_d + (b_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot b_2) \cdot D_d + (a_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot a_2) \cdot E_d + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) \cdot F_d \end{cases}$$

¹ Deux matrices sont semblables si elles réalisent la même application linéaire.

² Les deux matrices (de départ et d'arrivée) sont des matrices carrées représentant la même application linéaire d'un espace E dans lui même (endomorphisme), relativement à deux bases différentes. Se référer au cours de mathématiques.

14. Diagonalisation des matrices d'inertie

14.1. Problème :

Soit une matrice d'inertie du solide (S), relative au point O_S et à une base « d » (base de départ) :

$$I_{/O_S x_d y_d z_d} (S) = \begin{pmatrix} A_d & -F_d & -E_d \\ -F_d & B_d & -D_d \\ -E_d & -D_d & C_d \end{pmatrix}_{"d"}$$

Nous souhaitons trouver une matrice semblable à $I_{/O_S x_d y_d z_d} (S)$ qui soit diagonale, ainsi que la base dans laquelle cette matrice existe.

14.2. Solution :

Les mathématiciens démontrent que :

- Toute matrice carrée, symétrique et réelle (toutes les matrices d'inertie ont ces propriétés là) est diagonalisable par une matrice de passage orthogonale P
- La matrice diagonale semblable est formée des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de la matrice de départ.
- La base d'arrivée est un système (orthonormé) de vecteurs propres de la matrice de départ. Chacun des vecteurs propres correspond à une valeur propre.

14.3. Méthode pratique :

$$\overrightarrow{V_i} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}_{"d"}$$

est vecteur propre et λ_i est valeur propre de $I_{/O_S x_d y_d z_d} (S)$ si $I_{/O_S x_d y_d z_d} (S) \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{V_i} \end{pmatrix} = \lambda_i \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{V_i} \end{pmatrix}$ soit

$$\begin{pmatrix} A_d & -F_d & -E_d \\ -F_d & B_d & -D_d \\ -E_d & -D_d & C_d \end{pmatrix}_{"d"} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}_{"d"} = \begin{pmatrix} \lambda_i \cdot x_i \\ \lambda_i \cdot y_i \\ \lambda_i \cdot z_i \end{pmatrix}_{"d"}$$

on en déduit le système d'équation suivant : $\left(I_{/O_S x_d y_d z_d} (S) - \lambda_i \cdot I \right) \cdot \overrightarrow{V_i} = 0$

Une solution en x_i, y_i, z_i différente de (0,0,0) existe si (et seulement si) le déterminant principal est nul (d'où... seulement deux équations indépendantes dans la suite des calculs, et la définition des vecteurs propres « à un coefficient près »).

14.4. Calcul des valeurs propres

Le déterminant principal, $\begin{vmatrix} A_d - \lambda_i & -D_d & -E_d \\ -D_d & B_d - \lambda_i & -F_d \\ -E_d & -F_d & C_d - \lambda_i \end{vmatrix} = 0$ égalé à 0 donne :

$$\lambda_i^3 - (A_d + B_d + C_d) \cdot \lambda_i^2 + (B_d \cdot C_d + C_d \cdot A_d + A_d \cdot B_d - D_d^2 - E_d^2 - F_d^2) \cdot \lambda_i \cdots \\ \cdots + A_d \cdot D_d^2 + B_d \cdot E_d^2 + C_d \cdot F_d^2 + 2 \cdot D_d \cdot E_d \cdot F_d - A_d \cdot B_d \cdot C_d = 0$$

Attention : Ce sont bien D_d, E_d, F_d qu'il faut utiliser et non $-D_d, -E_d, -F_d$ qui sont les valeurs numériques trouvées dans la matrice !

La matrice de départ étant carrée, symétrique et réelle, l'équation ci dessus a trois racines réelles, éventuellement multiples.

Nous avons trouvé $I(S) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0_a & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}_{/O_S x_a y_a z_a}^{a''}$, mais il nous reste à déterminer la base « a »

14.5. Recherche de la base d'arrivée, calcul des vecteurs propres

Pour chaque λ_i Il faut résoudre le système suivant,

$$\begin{pmatrix} A_d - \lambda_i & -F_d & -E_d \\ -F_d & B_d - \lambda_i & -D_d \\ -E_d & -D_d & C_d - \lambda_i \end{pmatrix}_{d''} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = 0. \text{ Le déterminant de ce système est nul, seul deux équations sont}$$

indépendantes. En choisir 2 sur les 3 trouvées, choisir une valeur pour x_i (par exemple), en déduire y_i et z_i . Nous obtenons le vecteur propre à un coefficient près, il nous reste à le normer. Répéter l'opération pour les autres vecteurs propres.

14.5.1. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

nous pouvons construire une base $(x_a(\lambda_1), y_a(\lambda_2), z_a(\lambda_3))$.

Remarquons que $z_a(\lambda_3) = x_a(\lambda_1) \wedge y_a(\lambda_2)$

14.5.2. Si $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

le solide est de type « cylindrique », il possède un axe de répétition matérielle d'ordre supérieur à 2 (parallélépipède à base carrée, hélice à au moins trois pales, cylindres,...). Les équations permettent de trouver \bar{z}_a , il faut alors choisir arbitrairement les vecteurs \bar{y}_a et \bar{x}_a , normaux entre eux, dans un plan perpendiculaire à \bar{z}_a

14.5.3. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

le solide est « sphérique » (sphère ou cube), mais votre matrice d'inertie de départ devait déjà être diagonale.... le choix des trois vecteurs $\bar{x}_a, \bar{y}_a, \bar{z}_a$ est... quelconque.

15. Eléments principaux d'inertie- Eléments centraux d'inertie.

Il est toujours possible de diagonaliser une matrice d'inertie (de part ses propriétés : carrée, symétrique, réelle). Il est donc toujours possible de trouver un repère $(O_S, \bar{x}_p, \bar{y}_p, \bar{z}_p)$ tel que

$$I(S) = \begin{pmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & B_p & 0 \\ 0 & 0 & C_p \end{pmatrix}_{/O_S x_p y_p z_p}^{p''}$$

♦ Les axes $O_S x_p, O_S y_p, O_S z_p$, sont appelés axes principaux de (S).

♦ Les moments d'inertie A_p, B_p, C_p , sont appelés moments d'inertie principaux de (S) relatifs au point O_S .

- ◇ Les plans de coordonnées sont appelés plans principaux
- ◇ La matrice d'inertie est appelée matrice principale d'inertie relative à O_S

Si $O_S=G_S$, alors $I_{/G_S x_C y_C z_C}(S) = \begin{pmatrix} A_C & 0 & 0 \\ 0 & B_C & 0 \\ 0 & 0 & C_C \end{pmatrix}_{"P"}$ est la matrice centrale d'inertie du solide (S)

(note $x_C=x_P$, $y_C=y_P$, $z_C=z_P$).

16. Méthode pratique pour calculer les éléments d'inertie d'un solide

16.1. Considérer globalement (S),

Considérer globalement (S), et le repère par rapport auquel on veut déterminer la matrice d'inertie.

- Si le point O_S n'est pas évident, calculer d'abord G_S , cela simplifiera les changements de points par application du théorème d'Huygens.
- Rechercher les plans ou axes de coordonnées qui sont axes de symétrie des masses de (S) Simplifier le plus possible la matrice d'inertie en faisant apparaître tous les zéros possibles.

16.2. décomposer (S) en solides élémentaires

Essayer de décomposer (S) en solides élémentaires, et, si c'est possible appliquer pour chaque solide élémentaire la méthode suivante :

- rechercher la matrice centrale (diagonale, relative au centre de gravité du solide élémentaire) de (S).

- appliquer (éventuellement) la rotation des axes pour trouver $I_{/G_i x_S y_S z_S}(S_i) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{"S"}$

- utiliser le théorème d'huygens pour trouver la matrice $I_{/O_S x_S y_S z_S}(S_i) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{"S"}$

En sommant toutes les matrices d'inertie ainsi trouvées, obtenir $I_{/O_S x_S y_S z_S}(S) = \sum_i \begin{pmatrix} I_{/O_S x_S y_S z_S}(S_i) \end{pmatrix}$

16.3. intégrer

Si l'utilisation des intégrales est indispensable, se souvenir qu'il est plus facile d'intégrer par rapport à un plan que par rapport à un axe.

Dynamique

1. Principe fondamental de la dynamique

Il existe au moins un repère (a) dit repère absolu, et une chronologie (manière de mesurer le temps), dite chronologie absolue, tels que, pour tout système matériel (D/t), à chaque instant de son existence, le torseur représentant l'ensemble des actions mécaniques extérieures agissant sur (D/t) est égal au torseur dynamique de (D/t) par rapport au repère (a).

$$\left[\begin{array}{l} \text{La somme des éléments de réduction} \\ \text{en un point M des vecteurs représentant} \\ \text{toutes les actions mécaniques extérieures} \\ \text{agissant sur (D / t)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{les éléments de réduction en M} \\ \text{de l'ensemble des vecteurs représentant} \\ \text{les quantités d'accélération de (D / t) par} \\ \text{rapport au repère absolu} \end{array} \right]$$

2. repère galiléen

2.1. définition

On appelle repère galiléen (g) tout repère par rapport auquel le vecteur accélération d'un point est le même que celui qu'il aurait par rapport au repère absolu.

2.2. Théorème

un repère est galiléen si et seulement si il a un mouvement de translation uniforme par rapport au repère absolu.

2.3. Démonstration

Elle découle de la composition des accélérations :

$$\overline{\gamma_a(P/t)} = \overline{\gamma_g(P/t)} + \overline{\gamma_{g/a}(P/t)} + 2 \cdot \overline{\Omega_{g/a}} \wedge \overline{V_g(P/t)}$$

Si on veut, quel que soit (t) et quel que soit P $\overline{\gamma_a(P/t)} = \overline{\gamma_g(P/t)}$ il faut, dans l'équation précédente, que $\overline{\gamma_{g/a}(P/t)} \equiv 0$, et $\overline{\Omega_{g/a}} \equiv 0$ donc que le repère (g) soit en mouvement de translation uniforme par rapport à (a).

2.4. Remarque

Un repère véritablement galiléen n'existe pas dans l'univers, (même les fameux repères centrés sur trois étoiles « fixes » ne sont que des approximations de repères galiléens). Cependant, différents repères approximativement galiléens peuvent être utilisés, suivant la précision souhaitée dans les calculs, et les quantités d'accélération mises en jeu. Dans le cas général des systèmes utilisés industriellement (sauf pour les applications liées à l'espace) un repère lié à la terre sera une très bonne approximation d'un repère galiléen.

2.5. Retour sur le principe fondamental de la dynamique

Puisque les quantités d'accélération sont les mêmes dans le repère absolu et dans un repère galiléen, nous pouvons écrire :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Torseur représentant} \\ \text{les actions mécaniques extérieures} \\ \text{agissant sur (D / t)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Torseur représentant les} \\ \text{quantités d'accélération de (D / t)} \\ \text{par rapport à un repère galiléen} \end{array} \right]$$

3. torseur dynamique d'un système mécanique D par rapport à g

3.1. définition

les éléments du torseur dynamique instantané d'un ensemble D par rapport à g (galiléen) en un point quelconque (Q) sont :

$$[T_D(D/g)]_Q = \begin{cases} \overline{S_{/Q/g}}(D/t) = \iiint_{P \in D} \overline{\gamma_{D/g}}(P/t) \cdot dm_P & \text{(Somme dynamique de D/g)} \\ \overline{\delta_{/Q/g}}(D/t) = \iiint_{P \in D} \overline{QP} \wedge \overline{\gamma_{D/g}}(P/t) \cdot dm_P & \text{(Moment dynamique D/point Q/g)} \end{cases}$$

3.2. Remarques :

- Le vecteur $\overline{\gamma_{D/g}}(P/t) \cdot dm_P$ est appelé vecteur des quantités d'accélération instantané du point P, affecté de la masse dm_P Unité : le Newton (N)
- Le moment dynamiques par rapport au point Q est la somme des moments, par rapport au point Q des quantités d'accélération de tous les points de D. Unité : le mètre newton (m.N)
- Le torseur dynamique s'appelle aussi torseur des quantités d'accélération

3.3. remarque sur le calcul du torseur dynamique

Pour calculer les vecteurs sommes et moments du torseurs défini au 8.2 il est plus efficace de séparer le système matériel D en une somme de solides S_i , et d'utiliser la relation suivante :

$$[T_D(D/g)]_Q = \begin{cases} \overline{S_{/Q/g}}(D/t) = \iiint_{P \in D} \overline{\gamma_{D/g}}(P/t) \cdot dm_P = \sum_i \iiint_{P \in S_i} \overline{\gamma_{S_i/g}}(P/t) \cdot dm_P \\ \overline{\delta_{/Q/g}}(D/t) = \iiint_{P \in D} \overline{QP} \wedge \overline{\gamma_{D/g}}(P/t) \cdot dm_P = \sum_i \iiint_{P \in S_i} \overline{QP} \wedge \overline{\gamma_{S_i/g}}(P/t) \cdot dm_P \end{cases}$$

4. torseur dynamique d'un solide (S) par rapport à g

4.1. Calcul de la somme dynamique instantanée de (S) par rapport à g

$$\text{Calculons } \overline{S_{/g}}(S/t) = \iiint_{P \in S} \overline{\gamma_{S/g}}(P/t) \cdot dm_P$$

Soit O_g l'origine du repère galiléen. Nous avons défini, en géométrie des masses, le moment statique de S par rapport à un point, et démontré la relation suivante :

$$M_S \cdot \overrightarrow{O_g G_S} = \iiint_{P \in S} \overrightarrow{O_g P} \cdot dm_P$$

En dérivant à gauche et à droite dans l'équation

$$\frac{d_g(\overline{M_S \cdot \vec{O_g G_S}})}{dt} = \overline{M_S \cdot \vec{V_{S/g}}(G_S/t)} = \frac{d_g(\iiint_{P \in S} \overline{\vec{O_g P} \cdot dm_P})}{dt}$$

En admettant que la dérivée d'une intégrale est égale à l'intégrale de la dérivée¹ :

$$M_S \cdot \frac{d_g \vec{O_g G_S}}{dt} = \overline{M_S \cdot \vec{V_{S/g}}(G_S/t)} = \iiint_{P \in S} \frac{d_g \vec{O_g P}}{dt} \cdot dm_P = \iiint_{P \in S} \overline{\vec{V_{S/g}}(P/t)} \cdot dm_P$$

$$\text{donc } \overline{M_S \cdot \vec{V_{S/g}}(G_S/t)} = \iiint_{P \in S} \overline{\vec{V_{S/g}}(P/t)} \cdot dm_P.$$

Dérivons à nouveau à droite et à gauche :

$$\overline{M_S \cdot \vec{\gamma_{S/g}}(G_S/t)} = \iiint_{P \in S} \overline{(\vec{\gamma_{S/g}}(P/t))} \cdot dm_P \quad \text{or} \quad \overline{S_{/g}(S/t)} = \iiint_{P \in S} \overline{\vec{\gamma_{S/g}}(P/t)} \cdot dm_P$$

nous venons donc de démontrer que $\overline{S_{/g}(S/t)} = \overline{M_S \cdot \vec{\gamma_{S/g}}(G_S/t)}$.

4.2. Calcul du moment dynamique instantané de (S) par rapport à Q et par rapport à g

Pour déterminer le torseur dynamique, il nous reste à calculer le moment dynamique

$$\overline{\delta_{/Q/g}(S/t)} = \iiint_{P \in S} \overline{\vec{QP} \wedge \vec{\gamma_{S/g}}(P/t)} \cdot dm_P.$$

Pour effectuer ce calcul, il nous faut faire intervenir le moment cinétique et le torseur cinétique. Nous reviendrons donc sur le calcul du moment dynamique après avoir défini le torseur cinétique.

5. torseur cinétique d'un solide (S) par rapport à g

5.1. Définition :

5.1.1. Quantité de mouvement

Le vecteur $\overline{\vec{V_{S/g}}(P/t)} \cdot dm_P$ est appelé « vecteur quantité de mouvement instantané du point P affecté de la masse dm_P par rapport au repère galiléen g ».

5.1.2. Torseur cinétique

Le torseur représentant l'ensemble des quantités de mouvement de tous les points d'un solide (S) est appelé « torseur cinétique du solide (S) par rapport au repère galiléen g ». Réduit en un point Q il est composé de :

- La somme cinétique, est la somme des quantités de mouvement de tous les points de (S). Elle est égale à $\iiint_{P \in S} \overline{\vec{V_{S/g}}(P/t)} \cdot dm_P$
- Le moment cinétique $\overline{\vec{\mu}_{/Q/g}(S/t)} = \iiint_{P \in S} \overline{\vec{QP} \wedge \vec{V_{S/g}}(P/t)} \cdot dm_P$. Ce vecteur est appelé « moment cinétique par rapport au point Q instantané du point P affecté de la masse dm_P par rapport au repère galiléen g ».

¹ Voir cours de mathématiques

6. Calcul du moment dynamique en fonction du moment cinétique

Dérivons la relation définissant le moment cinétique :

$$\frac{d_g(\overline{\mu_{Q/g}}(S/t))}{dt} = \iiint_{P \in S} \frac{d_g(\overline{QP})}{dt} \wedge \overline{V_{S/g}}(P/t) \cdot dm_P + \iiint_{P \in S} \overline{QP} \wedge \frac{d_g(\overline{V_{S/g}}(P/t))}{dt} \cdot dm_P$$

Dans le second terme, nous reconnaissons $\overline{\delta_{Q/g}}(S/t) = \iiint_{P \in S} \overline{QP} \wedge \overline{V_{S/g}}(P/t) \cdot dm_P$

Il nous reste à calculer la première intégrale.

Remarquons que : $\overline{O_g P} = \overline{O_g Q} + \overline{QP} \Rightarrow \overline{QP} = \overline{O_g P} - \overline{O_g Q}$. En dérivant cette expression :

$$\frac{d_g \overline{QP}}{dt} = \frac{d_g \overline{O_g P}}{dt} - \frac{d_g \overline{O_g Q}}{dt} = \overline{V_{S/g}}(P/t) - \overline{V_{S/g}}(Q/t) \quad Q \text{ point quelconque } \in \text{ ou } \notin \text{ au solide } (S)$$

Remplaçons dans la première intégrale :

$$\begin{aligned} & \iiint_{P \in S} \frac{d_g(\overline{QP})}{dt} \wedge \overline{V_{S/g}}(P/t) \cdot dm_P \\ &= \iiint_{P \in S} \overline{V_{S/g}}(P/t) \wedge \overline{V_{S/g}}(P/t) \cdot dm_P - \iiint_{P \in S} \overline{V_{S/g}}(Q/t) \wedge \overline{V_{S/g}}(P/t) \cdot dm_P \\ &= \vec{0} - \overline{V_{S/g}}(Q/t) \wedge \iiint_{P \in S} \overline{V_{S/g}}(P/t) \cdot dm_P \\ &= -M_S \cdot \overline{V_{S/g}}(Q/t) \wedge \overline{V_{S/g}}(G_S/t) \end{aligned}$$

Finalement, nous trouvons :

$$\frac{d_g(\overline{\mu_{Q/g}}(S/t))}{dt} = -M_S \cdot \overline{V_{S/g}}(Q/t) \wedge \overline{V_{S/g}}(G_S/t) + \overline{\delta_{Q/g}}(S/t)$$

donc

$$\overline{\delta_{Q/g}}(S/t) = \frac{d_g(\overline{\mu_{Q/g}}(S/t))}{dt} + M_S \cdot \overline{V_{S/g}}(Q/t) \wedge \overline{V_{S/g}}(G_S/t)$$

7. Points privilégiés pour le calcul du moment dynamique

Si, au lieu de choisir le point Q vraiment quelconque, il est choisi de manière réfléchie en un point C particulier, les calculs se simplifient.

Le point C peut être :

- Un point de (S), fixe dans le repère galiléen (g). :

$$\text{Dans le cas général, } \overline{\delta_{Q/g}}(S/t) = \frac{d_g(\overline{\mu_{Q/g}}(S/t))}{dt} + M_S \cdot \overline{V_{S/g}}(Q/t) \wedge \overline{V_{S/g}}(G_S/t)$$

Si Q=C point fixe de (S) par rapport à g : $\overline{V_{S/g}}(C/t) = \vec{0}$

$$\text{et } \overrightarrow{\delta_{/Q/g}}(S/t) = \frac{d_g(\overrightarrow{\mu_{/Q/g}}(S/t))}{dt}$$

- Le centre d'inertie G_S du solide (S), si le solide n'a pas de point fixe par rapport à g :

$$\text{Dans le cas général, } \overrightarrow{\delta_{/Q/g}}(S/t) = \frac{d_g(\overrightarrow{\mu_{/Q/g}}(S/t))}{dt} + M_S \cdot \overrightarrow{V_{/g}}(Q/t) \wedge \overrightarrow{V_{S/g}}(G_S/t)$$

$$\text{Si } Q=G_S \text{ centre d'inertie de (S) : } \overrightarrow{V_{S/g}}(G_S/t) \wedge \overrightarrow{V_{S/g}}(G_S/t) = \vec{0}$$

$$\text{et } \overrightarrow{\delta_{/Q/g}}(S/t) = \frac{d_g(\overrightarrow{\mu_{/Q/g}}(S/t))}{dt}$$

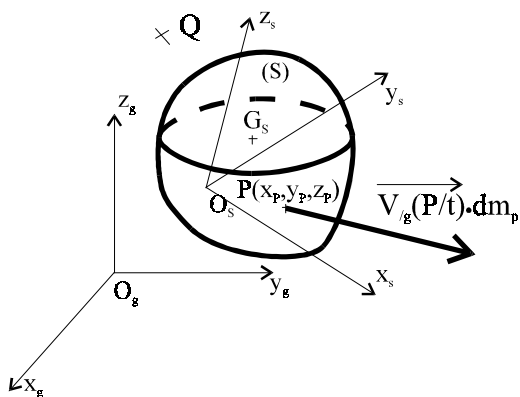
Nous verrons dans les pages qui suivent que ces deux points particulier simplifient aussi le calcul du moment cinétique $\overrightarrow{\mu_{/Q/g}}(S/t)$

8. Calcul des moments cinétiques

8.1. Théorème

Le moment cinétique du solide (S) par rapport à un point Q quelconque et par rapport à un repère galiléen g dont la définition est : $\overrightarrow{\mu_{/Q/g}}(S/t) = \iiint_{P \in S} \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{V_{S/g}}(P/t) \cdot dm_P$ peut être calculé à partir de la relation générale :

$$\overrightarrow{\mu_{/Q/g}}(S/t) = M_S \cdot \overrightarrow{QG_S} \wedge \overrightarrow{V_{S/g}}(O_S/t) + M_S \cdot \overrightarrow{QO_S} \wedge [\overrightarrow{\Omega_{S/g}} \wedge \overrightarrow{O_S G_S}] + I_{/O_S x_S y_S z_S}(S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/g}}$$



8.2. Démonstration

$$\text{Par définition } \overrightarrow{\mu_{/Q/g}}(S/t) = \iiint_{P \in S} \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{V_{S/g}}(P/t) \cdot dm_P$$

- Appliquons la relation de cinématique : $\overrightarrow{V_{S/g}}(B/t) = \overrightarrow{V_{S/g}}(A/t) + \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \wedge \overrightarrow{AB}$ entre les points P et O_S :

$$\overrightarrow{\mu_{/Q/g}}(S/t) = \iiint_{P \in S} \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{V_{S/g}}(O_S/t) \cdot dm_P + \iiint_{P \in S} \overrightarrow{QP} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{S/g}} \wedge \overrightarrow{O_S P}) \cdot dm_P$$

$$\text{Posons } \vec{G} = \iiint_{P \in S} \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{V_{S/g}}(O_S/t) \cdot dm_P \text{ et } \vec{H} = \iiint_{P \in S} \overrightarrow{QP} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{S/g}} \wedge \overrightarrow{O_S P}) \cdot dm_P$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{\mu_{/Q/g}}(S/t) = \vec{G} + \vec{H}$$

- Calcul de \vec{G}

◇ La vitesse du point O_S est indépendante de P .

◇ Le centre de masse G_S est tel que $M_S \cdot \vec{QG}_S = \iiint_{P \in S} \vec{QP} \cdot dm_P$

L'intégrale devient : $\vec{G} = \iiint_{P \in S} \vec{QP} \wedge \vec{V}_{S/g}(O_S/t) \cdot dm_P = M_S \cdot \vec{QG}_S \wedge \vec{V}_{S/g}(O_S/t)$

- Calcul de \vec{H}

Si on écrit : $\vec{QP} = \vec{QO}_S + \vec{O}_S\vec{P}$, l'intégrale \vec{H} peut être divisée en deux intégrales :

$$\vec{H} = \iiint_{P \in S} \vec{QP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/g} \wedge \vec{O}_S\vec{P}) \cdot dm_P = \iiint_{P \in S} \vec{QO}_S \wedge (\vec{\Omega}_{S/g} \wedge \vec{O}_S\vec{P}) \cdot dm_P + \iiint_{P \in S} \vec{O}_S\vec{P} \wedge (\vec{\Omega}_{S/g} \wedge \vec{O}_S\vec{P}) \cdot dm_P$$

Posons $\vec{J} = \iiint_{P \in S} \vec{QO}_S \wedge (\vec{\Omega}_{S/g} \wedge \vec{O}_S\vec{P}) \cdot dm_P$ et $\vec{K} = \iiint_{P \in S} \vec{O}_S\vec{P} \wedge (\vec{\Omega}_{S/g} \wedge \vec{O}_S\vec{P}) \cdot dm_P$

Soit $\vec{H} = \vec{J} + \vec{K}$

- Calcul de \vec{J}

◇ \vec{QO}_S ne dépend pas de P (il peut donc être sorti de l'intégrale),

◇ $\vec{\Omega}_{S/g}$ ne dépend pas de P

◇ $\iiint_{P \in S} \vec{O}_S\vec{P} \cdot dm_P = M_S \cdot \vec{O}_S\vec{G}_S$

$$\iiint_{P \in S} \vec{QO}_S \wedge (\vec{\Omega}_{S/g} \wedge \vec{O}_S\vec{P}) \cdot dm_P = M_S \cdot \vec{QO}_S \wedge (\vec{\Omega}_{S/g} \wedge \vec{O}_S\vec{G}_S)$$

- Calcul de \vec{K}

Utilisons la relation du double produit vectoriel : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Appliquons la au double produit vectoriel contenu dans le signe d'intégration :

$$\vec{K} = \iiint_{P \in S} \vec{O}_S\vec{P} \wedge (\vec{\Omega}_{S/g} \wedge \vec{O}_S\vec{P}) \cdot dm_P$$

Posons $\vec{O}_S\vec{P} = x_P \cdot \vec{x}_S + y_P \cdot \vec{y}_S + z_P \cdot \vec{z}_S$ et $\vec{\Omega}_{S/g} = p \cdot \vec{x}_S + q \cdot \vec{y}_S + r \cdot \vec{z}_S$

$$\vec{K} = \iiint_{P \in S} \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}_{S''} \cdot \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}_{S''} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}_{S''} \cdot dm_P - \iiint_{P \in S} \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}_{S''} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}_{S''} \cdot \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}_{S''} \cdot dm_P$$

$$\vec{K} = \iiint_{P \in S} (x_P^2 + y_P^2 + z_P^2) \cdot (p \cdot \vec{x}_S + q \cdot \vec{y}_S + r \cdot \vec{z}_S)_{S''} \cdot dm_P \dots$$

$$\dots - \iiint_{P \in S} (p \cdot x_P + q \cdot y_P + r \cdot z_P) \cdot (x_P \cdot \vec{x}_S + y_P \cdot \vec{y}_S + z_P \cdot \vec{z}_S) \cdot dm_P$$

Séparons en de multiples intégrales, que nous ordonnons par rapport aux vecteurs de base $(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$

puis par rapport aux composantes (p, q, r) du vecteur rotation (notons que p, q, r les composantes du vecteur rotation ne dépendent pas du point P donc peuvent être sortis des intégrales).

$$\vec{K} = (p \cdot \iiint_{P \in S} (x_P^2 + z_P^2) \cdot dm_P - q \cdot \iiint_{P \in S} (y_P \cdot x_P) \cdot dm_P - r \cdot \iiint_{P \in S} (z_P \cdot x_P) \cdot dm_P) \cdot \vec{x}_S \dots$$

$$\dots + (-p \cdot \iiint_{P \in S} (x_P \cdot y_P) \cdot dm_P + q \cdot \iiint_{P \in S} (z_P^2 + x_P^2) \cdot dm_P - r \cdot \iiint_{P \in S} (y_P \cdot z_P) \cdot dm_P) \cdot \vec{y}_S \dots$$

$$\dots + (-p \cdot \iiint_{P \in S} (z_P \cdot x_P) \cdot dm_P - q \cdot \iiint_{P \in S} (y_P \cdot z_P) \cdot dm_P + r \cdot \iiint_{P \in S} (x_P^2 + y_P^2) \cdot dm_P) \cdot \vec{z}_S$$

Remarquons que les intégrales à effectuer sont justement celles que nous avons définies en géométrie des masses, ce sont les moments et produits d'inertie de (S) par rapport à un point O_S

$$\begin{aligned} A = I_{/O_S x_S}(S) &= \iiint_{P \in S} (y_P^2 + z_P^2) \cdot dm_P & D = P_{/y_S O_S z_S}(S) &= \iiint_{P \in S} y_P \cdot z_P \cdot dm_P \\ B = I_{/O_S y_S}(S) &= \iiint_{P \in S} (z_P^2 + x_P^2) \cdot dm_P & E = P_{/z_S O_S x_S}(S) &= \iiint_{P \in S} z_P \cdot x_P \cdot dm_P \\ C = I_{/O_S z_S}(S) &= \iiint_{P \in S} (x_P^2 + y_P^2) \cdot dm_P & F = P_{/x_S O_S z_S}(S) &= \iiint_{P \in S} x_P \cdot y_P \cdot dm_P \end{aligned}$$

$$\vec{K} = \iiint_{P \in S} \vec{O_S P} \wedge (\vec{\Omega}_{S/g} \wedge \vec{O_S P}) \cdot dm_P = \begin{pmatrix} p \cdot A - q \cdot F - r \cdot E \\ -p \cdot F + q \cdot B - r \cdot D \\ -p \cdot E - q \cdot D + r \cdot C \end{pmatrix}_{s''} = \begin{pmatrix} I_{/O_S x_S y_S z_S}(S) \end{pmatrix} \cdot \vec{\Omega}_{S/g}$$

$$\vec{\mu}_{/Q/g}(S/t) = \iiint_{P \in S} \vec{QP} \wedge \vec{V}_{S/g}(P/t) \cdot dm_P = \vec{G} + \vec{H} = \vec{G} + \vec{J} + \vec{K}$$

Nous avons donc bien démontré, dans le cas le plus général (Q quelconque, O_S point quelconque de (S)), que :

$$\vec{\mu}_{/Q/g}(S/t) = +M_S \cdot \vec{QG_S} \wedge \vec{V}_{S/g}(O_S/t) + M_S \cdot \vec{QO_S} \wedge (\vec{\Omega}_{S/g} \wedge \vec{O_S G_S}) + \begin{pmatrix} I_{/O_S x_S y_S z_S}(S) \end{pmatrix} \cdot \vec{\Omega}_{S/g}$$

9. Calcul Pratique des moments cinétiques

Le choix judicieux des points Q et O_S nous permettent de simplifier grandement les calculs.

9.1. Choisissons $Q=O_S$

Choisissons $Q=O_S$. Le terme $M_S \cdot \vec{QO_S} \wedge (\vec{\Omega}_{S/g} \wedge \vec{O_S G_S})$ devient nul, et le moment cinétique devient :

$$\vec{\mu}_{/O_S/g}(S/t) = +M_S \cdot \vec{O_S G_S} \wedge \vec{V}_{S/g}(O_S/t) + \begin{pmatrix} I_{/O_S x_S y_S z_S}(S) \end{pmatrix} \cdot \vec{\Omega}_{S/g}$$

Nous avons vu, au paragraphe 7 que le calcul du moment dynamique à partir du moment cinétique est plus simple en C, C étant un point fixe par rapport au repère galiléen, ou le centre de gravité du solide (S). Intéressons nous au calcul de $\vec{\mu}_{/C/g}(S/t)$ en ces points.

9.2. Cas de C = point fixe par rapport au référentiel galiléen

Si il existe un point C de S, point fixe par rapport au repère galiléen, choisissons $Q=O_S=C$. Alors $\vec{V}_{S/g}(C/t) = \vec{0}$ et $M_S \cdot \vec{CG_S} \wedge \vec{V}_{S/g}(C/t) = \vec{0}$. Nous aurons donc

$$\vec{\mu}_{/C/g}(S/t) = \begin{pmatrix} I_{/C x_S y_S z_S}(S) \end{pmatrix} \cdot \vec{\Omega}_{S/g}$$

9.3. Cas de $C=G_S$

Si il n'existe pas de point C de S, point fixe par rapport au repère galiléen, nous choisirons de calculer les moments cinétique au point $C=Q=O_S=G_S$.

$C=G_S$ entraîne

$$M_S \cdot \overrightarrow{G_S G_S} \wedge \overrightarrow{V_{S/g}}(\overrightarrow{G_S/t}) = \vec{0}$$

et

$$\overrightarrow{\mu_{C/g}}(S/t) = \begin{pmatrix} I_{C x_S y_S z_S}(S) \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/g}}$$

10. Rappel sur les moments dynamique et cinétique

Dans le cas le plus général, Q étant un point quelconque, O_S étant un point quelconque du solide (S), les moments dynamique et cinétique valent :

$$\overrightarrow{\delta_{Q/g}}(S/t) = \frac{d_g(\overrightarrow{\mu_{Q/g}}(S/t))}{dt} + M_S \cdot \overrightarrow{V_{Q/g}} \wedge \overrightarrow{V_{S/g}}(\overrightarrow{G_S/t})$$

et

$$\overrightarrow{\mu_{Q/g}}(S/t) = +M_S \cdot \overrightarrow{Q G_S} \wedge \overrightarrow{V_{S/g}}(\overrightarrow{O_S/t}) + M_S \cdot \overrightarrow{Q O_S} \wedge (\overrightarrow{\Omega_{S/g}} \wedge \overrightarrow{O_S G_S}) + \begin{pmatrix} I_{O_S x_S y_S z_S}(S) \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/g}}$$

11. Méthode pratique de calcul

Les deux relations précédentes étant compliquées, pour déterminer le moment dynamique d'un solide par rapport à un point quelconque Q, nous utiliseront la méthode ci dessous :

11.1. Choisir un point C confondu avec le point O_S situé :

- ◇ Soit en un point permanent de (S) fixe par rapport au repère galiléen (g), s'il existe (centre d'un palier fixe par rapport au galiléen, point de rencontre des axes de rotation de S, s'il est toujours au même point par rapport au galiléen). Notons qu'un tel point n'existe pas toujours
- ◇ Soit au point G_S . Le choix du point G_S est toujours possible, mais n'est pas toujours le plus « efficace ».

11.2. Appliquer successivement les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \diamond \overrightarrow{\mu_{C/g}}(S/t) &= \begin{pmatrix} I_{C x_S y_S z_S}(S) \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/g}} \\ \diamond \overrightarrow{\delta_{C/g}}(S/t) &= \frac{d_g(\overrightarrow{\mu_{C/g}}(S/t))}{dt} \end{aligned}$$

Remarquer que ce calcul s'effectue généralement dans « s » et que la matrice d'inertie est calculée au point C

11.3. Transférer le moment dynamique au point Q

déterminer $\overrightarrow{\delta_{Q/g}}(S/t)$ en appliquant la relation fondamentale des torseurs : $\overrightarrow{M_Q}[T] = \overrightarrow{M_C}[T] + \overrightarrow{S}[T] \wedge \overrightarrow{CQ}$ qui s'écrit ici :

$$\overrightarrow{\delta_{Q/g}}(S/t) = \overrightarrow{\delta_{C/g}}(S/t) + M_S \cdot \overrightarrow{\gamma_{S/g}}(G_S/t) \wedge \overrightarrow{CQ}$$

11.4. remarque sur le calcul du moment cinétique :

Le moment cinétique est calculé dans la base la plus proche de « g » où la matrice d'inertie est constante. Cette base est, dans le cas général la base « s », sauf pour certain solides de révolution où elle peut parfois être « s-1 ».

12. Retour sur la méthode générale de résolution d'un problème de dynamique

Pour chaque système matériel (D) constitué d'un ensemble de solides (S_i), on effectue successivement :

12.1. L'analyse du modèle adopté

- ⇒ Schéma, étude des paramètres, des équations de liaison et des moteurs
- ⇒ Autres actions mécaniques extérieures connues
- ⇒ Autres actions mécaniques extérieures réciproques (principe d'action et de réaction)
- ⇒ autres actions mécaniques extérieures inconnues
- ⇒ bilan :
 - ⇒ compter les inconnues : paramètres « libres » (système libre d'évoluer) ou « asservis » (auquel cas une action mécanique inconnue apparaît, celle du moteur d'asservissement)
 - ⇒ compter les équations provenant de la dynamique, et des liaisons géométriques, cinématiques ou physiques)
- ⇒ conclusion sur le modèle..... remise en cause éventuelle du modèle, ou prise en compte d'autres parties du mécanisme..... (retour au début du 8.12.1 ou passage, si le système peut être résolu au 8.12.2)

12.2. Ecriture des équations

- ⇒ de liaison (Etudiées au chapitre 9)
- ⇒ de la dynamique, vectoriellement, le principe fondamental de la dynamique peut s'écrire sous forme de deux équations vectorielles (somme dynamique et moment dynamique) :

Théorème du mouvement du centre de masse (somme dynamique)

$$\sum_D \overrightarrow{F_{EXT}} = \sum_D \overrightarrow{\gamma_{D/g}}(P/t) \cdot m_P = M_S \cdot \overrightarrow{\gamma_{D/g}}(G_S/t)$$

Théorème du moment dynamique

$$\sum M_C \left(\overrightarrow{F_{EXT}} \right) + \sum C_{EXT} = \overrightarrow{\delta_{C/g}}(S/t)$$

12.3. Résolution

- Si tous les paramètres sont libres, il faut résoudre un système d'équations différentielles
- Si certains paramètres sont libre, il faut résoudre un système d'équations algébro-différentiel
- Si tous les paramètres sont asservis, il faut résoudre un système d'équations algébriques, c'est plus simple

En considérant tous les paramètres comme libre, et toutes les forces et couples d'asservissement comme connus, le système d'équation nous donne les équations d'état ou la fonction de transfert du système mécanique, que l'on peut alors asservir..... en automatique.

12.4. Interprétation et vérification des résultats

Vérifier les résultats évidents, éventuellement sur des cas particuliers simples, éventuellement à l'aide d'un prototype.....

Equations de liaisons

notation : dans les définitions qui vont suivre, nous allons désigner par $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$ ($i = 1 \dots n$) les n paramètres d'un système matériel (D) et leur dérivées premières et secondes par rapport au temps.

1 Liaison géométriques

1.1 Définition

Une liaison géométrique s'exprime par des équations contenant les paramètres liés entre eux, et parfois le temps.

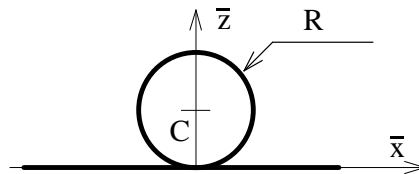
Forme générale : $f(q_i, t) = 0$

Note : les dérivées des paramètres n'interviennent pas.

1.2 Exemples

1.2.1 Contact entre deux solides :

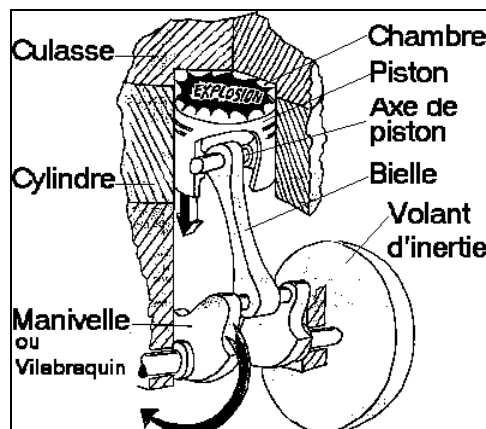
Une sphère de centre C et de rayon R est en contact avec un plan horizontal. Soit \bar{z} la verticale ascendante.



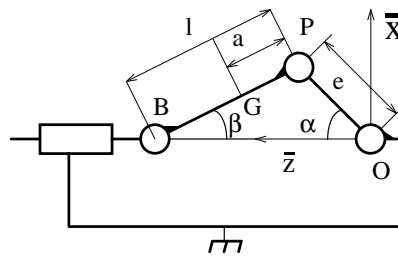
Une équation de liaison géométrique concerne la cote de C :

$$Z_C = R$$

1.2.2 Paramètres principaux et paramètres intermédiaires, exemple du système bielle - manivelle



Un système bielle manivelle est un système à un degré de liberté. Pour définir la position des trois solides (piston, bielle, vilebrequin) un paramètre suffit ; généralement, on utilise α , l'angle de rotation de la manivelle.



α est alors le paramètre principal.

Pour simplifier l'écriture des équations de la dynamique, plusieurs paramètres intermédiaires peuvent être utilisés : Z_b qui donne la position du piston au cours du temps, X_G et Z_G qui définissent la position du centre de gravité de la bielle au cours du temps, β qui permet d'obtenir la rotation instantanée de la bielle.

Cependant, l'utilisation de ces quatre paramètres intermédiaires, si elle simplifie l'écriture des équations de la dynamique, ajoute au système d'équation à résoudre quatre équations de liaison :

- ◇ $e \cdot \sin(\alpha) = l \cdot \sin(\beta)$
- ◇ $Z_b = e \cdot \cos(\alpha) + l \cdot \cos(\beta)$
- ◇ $Z_G = e \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \cos(\beta)$
- ◇ $X_G = e \cdot \sin(\alpha) - a \cdot \sin(\beta)$

2 Equations de liaison cinématique

2.1 Définition

Une liaison cinématique s'exprime par des équations contenant les paramètres et leur dérivées premières, liés entre eux. Ces équations font parfois intervenir le temps

Forme générale : $f(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$

Note : les dérivées seconde des paramètres n'interviennent pas.

L'application la plus courante de ce type d'équations est la prise en compte du phénomène de roulement sans glissement au point de contact entre deux solides.

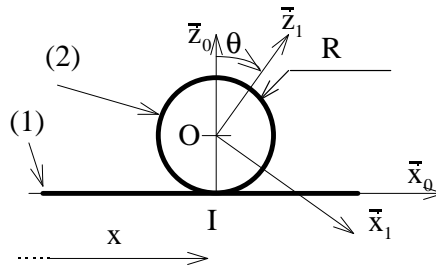
2.2 Exemple classique d'équation de liaison cinématique

Les équations de liaison cinématique proviennent généralement du contact entre deux solides et de l'hypothèse de roulement sans glissement.

Lorsque l'hypothèse de roulement sans glissement est utilisée, l'adhérence est supposée suffisamment grande pour avoir roulement sans glissement. Dans ce cas précis, l'adhérence n'est jamais nulle (contrairement aux hypothèses utilisées dans le cas des liaison « parfaites »).

Exemple d'équation de liaison de type « roulement sans glissement » :

La roue de centre O et de diamètre R roule sans glisser sur le sol. Soit I le point de contact entre la roue (2) et le plan (1)



l'équation de roulement sans glissement se traduit par :

$$\overline{V_{\in 2/1}(I/t)} = \vec{0}$$

Cette équation de liaison est utilisée dans les calculs. Il faut cependant vérifier, à l'issue des calculs, que l'hypothèse choisie était valable, donc que le frottement était « suffisant » :

Soit \vec{R} l'effort exercé par (1) sur (2) : $\vec{R} = \begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{z}_0)}$

il faut vérifier que $T \leq a \cdot N$ $a = \tan(\phi)$ est le coefficient d'adhérence

Si cette condition est vérifiée, les calculs sont correct, sinon il faut recommencer le calcul en faisant l'hypothèse du glissement au point de contact : la vitesse entre le solide (1) et le solide (2) au point de contact est quelconque (inconnue), l'équation de liaison n'existe plus, par contre $T=a.N$

2.3 Systèmes holonomes et non holonomes

2.3.1 Equations holonomes

Certaines équations de liaison cinématiques sont intégrables..... et peuvent ainsi devenir des équations de liaison géométriques. Il est alors possible d'utiliser l'équation de liaison ainsi trouvée pour éliminer un paramètre. Notons que ce paramètre joue alors dans le système d'équation le rôle d'un paramètre intermédiaire.

Les liaisons traduites par des équations de liaison de ce type (cinématiques et intégrables) et par des équations géométriques sont dites **holonomes**

2.3.2 Equations non holonomes

Certaines équations de liaisons cinématiques ne sont pas intégrables. Un théorème, démontré par Carathéodory dit que :

« Il est impossible de diminuer le nombre des paramètres d'un système matériel en utilisant une équation de liaison cinématique non intégrable »

Les liaisons traduites par des équations de ce type sont dites « **non holonomes** ».

2.3.3 Systèmes holonomes et non holonomes

Un système matériel contenant au moins une liaison non holonome est dit non holonome... Le système d'équation différentielles de mouvement de ce système n'est pas intégrable.

3 Equations de liaisons expérimentales

3.1 Définition

Les liaisons à caractère expérimental sont celles qui lient, par des paramètres déterminés expérimentalement, des composantes d'actions mécaniques entre elles ou des composantes d'actions mécaniques à des paramètres ou à leur dérivée.

3.2 Equations reliant des paramètres d'actions mécaniques et des lois de mouvement

3.2.1 Forme générale

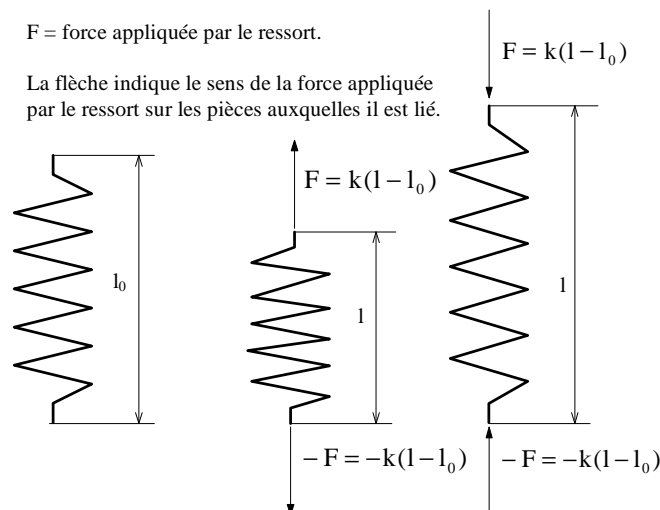
$\vec{A} = \vec{A}(q_i, \dot{q}_i, t)$ avec \vec{A} : action mécanique et q : paramètre d'une loi de mouvement.

3.2.2 Premier exemple, la pesanteur :

au centre de gravité de (S), (S) = solide ou ensemble de solides étudiés, de masse m_S , l'action de la pesanteur sur (S) est appelée « **poids de S** », et l'équation de liaison qui régit le poids est : $\vec{P} = m_S \cdot \vec{g}$. Expérimentalement, nous pouvons mesurer la norme et la direction de l'accélération de la pesanteur \vec{g} . Au niveau de la mer $g=9,81 \text{ m.s}^{-2}$. Notons que, dans cet exemple, nous avons fait des hypothèses simplificatrices, d'autres considérations expérimentales nous permettent de dire que le phénomène de pesanteur est lié à la force gravitationnelle qu'exerce la terre sur (S) (et réciproquement).

3.2.3 Deuxième exemple : Ressort de traction compression

hypothèses : le plus souvent, la masse du ressort (corps déformable, qui ne peut être étudié par la mécanique du solide, mais éventuellement à l'aide de la mécanique des milieux continus) est négligée. Le ressort devient alors un « **transmetteur d'effort** » entre deux solides (S_1) et (S_2) auxquels il est attaché.

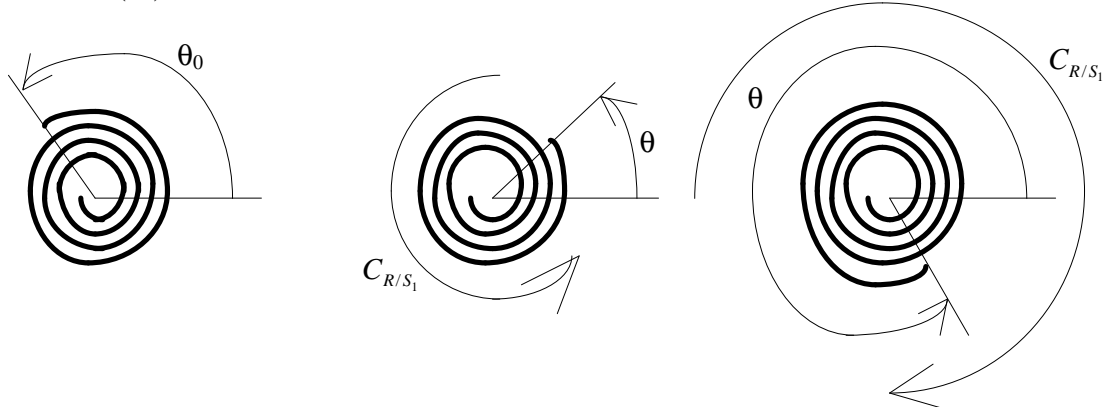


- ◇ On désigne par l la longueur du ressort ($l=l(t)$)
- ◇ On désigne par l_0 la longueur libre du ressort : sa longueur lorsqu'il n'est soumis à aucun effort.
- ◇ On désigne par k la rigidité du ressort (mesurée expérimentalement) (en N.m^{-1})

L'action du ressort sur chacun des solides auxquels il est lié est une force portée par l'axe du ressort, d'intensité $\|\vec{F}_{R/S_i}\| = k \cdot |l - l_0|$

3.2.4 Troisième exemple, ressort spirale, ou barre de torsion

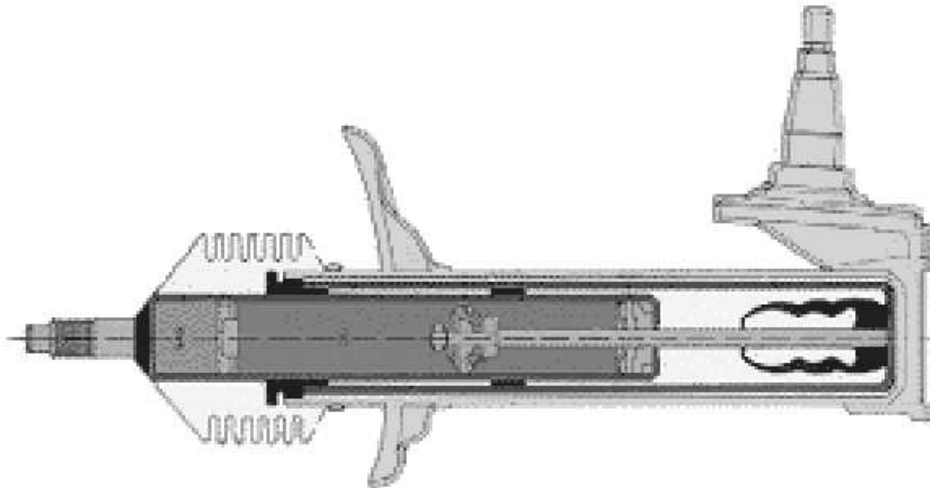
Hypothèses : La masse du ressort est négligée, le ressort est considéré comme un transmetteur d'effort entre les solides (S_1)



- ◇ On désigne par θ l'angle du ressort ($\theta = \theta(t)$)
- ◇ On désigne par θ_0 l'angle libre du ressort.
- ◇ On désigne par k la rigidité du ressort (mesurée expérimentalement) (en m·N)

L'action du ressort sur chacun des solides auxquels il est lié est un couple porté par l'axe de rotation du ressort, d'intensité $\|\vec{C}_{R/S_1}\| = k \cdot |\theta - \theta_0|$

3.2.5 Quatrième exemple, amortisseurs fluides :



hypothèses : l'amortisseur fluide est un transmetteur d'effort de masse négligeable (les différentes pièces de l'amortisseur (fluide excepté) peuvent être compté avec les solides auxquels elles sont liées.

Les amortisseurs de ce type sont construits de manière à transmettre aux solides auxquels ils sont liés une force (dans le cas d'un amortisseur linéaire) ou un couple (dans le cas d'un amortisseur angulaire) proportionnels à la vitesse de glissement du piston dans le corps de l'amortisseur :

(amortisseur linéaire : $v = \frac{dl}{dt}$ ou angulaire : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$).

Pour que l'effort soit proportionnel à la vitesse, il faut que la vitesse du piston soit « assez faible » pour que les « résistances de viscosité » soient prépondérantes. La constante de proportionnalité entre effort et vitesse est appelé coefficient d'amortissement ou « viscance » de l'amortisseur.

L'équation de liaison obtenue est :

♦ en translation : $\|\vec{F}_{A/S_1}\| = c \cdot |v|$

♦ c est le coefficient d'amortissement en $\text{Kg}\cdot\text{s}$

♦ v est la vitesse relative des deux parties de l'amortisseur ($V_{\text{tige/corps}}$)

♦ en rotation : $\|\vec{C}_{A/S_1}\| = \lambda \cdot |\dot{\theta}|$

♦ λ est le coefficient d'amortissement en $\text{m}\cdot\text{N}\cdot\text{s}$

♦ $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire relative des deux parties de l'amortisseur.

3.2.6 Cinquième exemple, résistance de l'air

Nous nous intéressons ici à la résistance de l'air sur une surface (S) se déplaçant en translation linéaire avec une vitesse relative v par rapport à l'air.

Pour les objets courants, tel que vélo, automobiles, trains,..... avions à hélices, la vitesse v est « grande » mais inférieure à la vitesse du son ($\sim 300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$). Dans ce cas, l'expérience nous montre que les effets aérodynamiques sont prépondérants par rapport aux phénomènes de viscosité de la couche limite. L'intensité de la force, au centre de poussée, et dans la direction d'un axe x est alors donnée par :

$$\|\vec{F}_{\text{Air}/S}\| = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \cdot S \cdot C_x$$

♦ ρ est la masse volumique de l'air. Au niveau de la mer et pour une température de 20°C , $\rho = 1.293 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

♦ v est la vitesse relative entre le solide et l'air

♦ S est la surface du maître couple, projection sur un plan perpendiculaire à v de la surface (S).

♦ C_x est le coefficient de traînée de la surface (S) suivant l'axe x (mesuré expérimentalement).

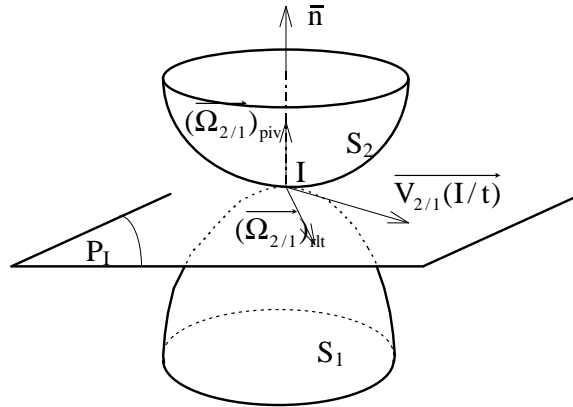
♦ $\frac{1}{2} \rho \cdot v^2$ représente la pression dynamique mesurée par un tube de pitot d'axe parallèle à v , placé en chaque point du maître couple.

3.3 composantes d'actions mécaniques

Dans le cadre de ce paragraphe, nous allons nous intéresser au cas le plus fréquent d'équation reliant des composantes d'actions mécaniques, celui du contact entre solides.

3.3.1 Retour sur les problèmes de cinématique liés au contact de deux solides

deux solides (S_1) et (S_2) sont en contact en un point I.



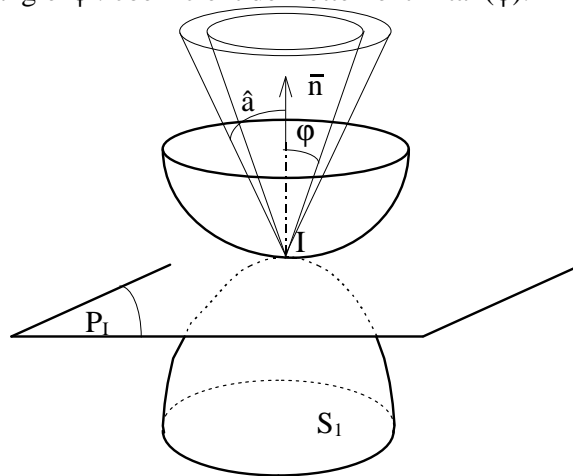
Nous pouvons décomposer le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{2/1}$ en deux vecteurs :

- ◇ un vecteur « roulement » $(\vec{\Omega}_{2/1})_{RLT}$ situé dans le plan tangent au contact P_I
- ◇ un vecteur « pivotement » $(\vec{\Omega}_{2/1})_{PIV}$ porté par la normale en I au plan P_I

Si elle existe, la vitesse de glissement $\vec{V}_{2/1}(I/t)$ est également dans le plan P_I .

Sur le schéma, ci dessous nous pouvons remarquer

- ◇ le « cône d'adhérence », d'angle \hat{a} : coefficient d'adhérence $a = \tan(\hat{a})$
- ◇ le « cône de frottement d'angle φ : coefficient de frottement $f = \tan(\varphi)$.



Il est aussi possible de modéliser une résistance au roulement et un « coefficient de résistance au roulement δ (exprimé en m) caractérisant le couple nécessaire pour faire rouler (S_2) sur (S_1)

3.3.2 Utilisation des équations de liaisons expérimentales

Dans le cas général du contact entre deux solides, il y a roulement, pivotement et glissement sur une (ou plusieurs) petite surface de contact (contact pseudoponctuel) autour du point I. Le torseur $[T_{1/2}]$ représentant l'action mécanique du solide (S_1) sur le solide (S_2) peut être projeté sur la normale au contact (n) et sur le plan P_I tangent au contact :

$$[T_{1/2}]_I : \begin{cases} \vec{I}_{1/2} = N_{1/2} \cdot \vec{n} + \vec{T}_{1/2} \\ \vec{C}_{1/2} = (\vec{C}_{1/2})_{PIV} \cdot \vec{n} + (\vec{C}_{1/2})_{RLT} \end{cases} \quad \begin{matrix} (\vec{T}_{1/2} \text{ est situé dans } P_I) \\ (\vec{C}_{1/2} \text{ est situé dans } P_I) \end{matrix}$$

Les équations de liaisons relient alors $\vec{T}_{1/2}$, $(\vec{C}_{1/2})_{PIV}$, $\vec{C}_{1/2}$ à $N_{1/2}$ en utilisant les coefficients expérimentaux a , f et δ définis précédemment.

3.3.2.1 Equations d'origine expérimentales à utiliser lorsqu'il y a glissement

(Coulomb 1736 - 1806 ; Hertz : 1857-1894).

$$\diamond \text{ glissement en I : } \|\vec{T}_{1/2}\| = f \cdot \|\vec{N}_{1/2}\| \text{ avec } \vec{T}_{1/2} = -\lambda_f \cdot \vec{V}_{1/2}(\vec{I}/t) \quad (\lambda_f > 0)$$

$$\diamond \text{ roulement en I : } (\vec{\Omega}_{2/1})_{RLT} \neq 0 \quad \left\| (\vec{C}_{1/2})_{RLT} \right\| = \delta \cdot \|\vec{N}_{1/2}\|$$

$$\text{avec } (\vec{C}_{1/2})_{RLT} = -\lambda_R \cdot (\vec{\Omega}_{1/2})_{RLT} \quad (\lambda_R > 0)$$

$$\diamond \text{ pivotement en I : } (\vec{\Omega}_{2/1})_{PIV} \neq 0 \quad \left\| (\vec{C}_{1/2})_{PIV} \right\| = \frac{3}{32} \cdot f \cdot E \cdot \|\vec{N}_{1/2}\|$$

$$\text{avec } (\vec{C}_{1/2})_{PIV} = -\lambda_P \cdot (\vec{\Omega}_{1/2})_{PIV} \quad (\lambda_P > 0)$$

f est le coefficient de frottement, E le grand axe de « l'ellipse » limitant la surface de contact. En fait on peut dire que E est la plus grande dimension de cette surface.

3.3.2.2 Equations d'origine expérimentales à utiliser lorsqu'il y a « équilibre strict » (ou limite de glissement)

On utilise les mêmes relations que précédemment, mais les forces et couples sont opposés aux vitesses de glissement et de roulement « possible » (puisque elle sont nulle pour un équilibre strict). Il faut cependant remplacer le coefficient de frottement f par le coefficient d'adhérence a .

Equations d'origine expérimentales à utiliser lorsqu'il y a « équilibre » :

Il faut vérifier, si on a fait l'hypothèse de l'équilibre, que

$$\Rightarrow \|\vec{T}_{1/2}\| \leq f \cdot \|\vec{N}_{1/2}\|$$

$$\Rightarrow \left\| (\vec{C}_{1/2})_{RLT} \right\| \leq \delta \cdot \|\vec{N}_{1/2}\|$$

$$\Rightarrow \left\| (\vec{C}_{1/2})_{PIV} \right\| \leq \frac{3}{32} \cdot f \cdot E \cdot \|\vec{N}_{1/2}\|$$

3.3.3 Remarque

- ◇ dans les lois de coulomb, les coefficients d'adhérence et de frottement (a et f) sont supposés ne dépendre que de la nature des matériaux en contact. En fait les choses sont beaucoup plus compliquées, et ces coefficients dépendent de la pression de contact, de la vitesse de glissement,....)
- ◇ souvent les valeurs de a et de f sont confondues. La différence entre ces deux valeurs explique cependant de nombreux phénomènes (« broutement » lors de mouvements lents, vibrations importantes lors de l'arrêt de véhicules, passage brutal de f à a et l'intérêt de systèmes de freinage de type ABS (ne pas glisser pour garder a et non $f < a$).
- ◇ l'introduction des équations de liaison n'a aucun effet sur une modélisation isostatique..... bien faite, mais l'écriture des équations et surtout leur résolution en sont notablement compliquées

3.3.4 Conclusion :

Si les résistances et autres frottements ne jouent qu'un rôle passif, (dans les liaisons par exemple), il est possible de les négliger et de considérer les liaisons comme parfaites (pas de dépense d'énergie dans les liaisons). Les résultats seront généralement suffisamment correct pour les applications classiques. Si ils ne sont pas suffisant il faudra alors ajouter uniquement les frottements nécessaires à l'étude du modèle.

si ces éléments (notamment la résistance au glissement) expliquent les phénomènes étudiés (freins, embrayages, irréversibilité du système vis-écrou, arc-boutement,...) il faut évidemment les prendre en compte.

- quelques valeurs courantes de f (et de a à quelques pourcent près)

Palier à film d'huile	0.002	à	0.005
Métal sur métal bien graissé	0.05	à	0.1
Métal sur métal légèrement graissé	0.08	à	0.15
Métal sur métal à sec	0.12	à	0.25
Cuir sur fonte ou acier à sec	0.2	à	0.3
Bois ou « ferrodo » sur acier ou fonte à sec	0.3	à	0.5
Pneu sur verglas	0.08	à	0.1
Pneu neuf sur asphalte mouillé	0.25	à	0.35
Pneu neuf sur asphalte lisse et sec	0.6	à	0.7
Pneu neuf sur béton rugueux	0.8	à	1

- quelques valeurs courantes de δ

matériau	diamètre (mm)	d (mm)
Rouleau (bois sur bois)	200	0.5 à 1.5
Roue de wagon sur rail sec	800	0.5 à 1
Galet de pont roulant sur rail	250 à 400	0.2 à 0.7
Pneu sur route « normale »	roue « normale »	2 à 5