Modélisation des liaisons mécaniques simples dans le simulateur

Mac-Gyver

1 Qu'est-ce qu'une liaison simple ?

D'après wikipédia : "Une liaison mécanique simple, est une liaison obtenue par un contact entre une surface simple unique d'une pièce avec celle, simple et aussi unique d'une autre pièce".

Il y a essentiellement une chose à remarquer : une liaison contraint certains degrés de liberté. Conséquence : les efforts (forces et couples) se transmettent suivant ces degrés de liberté. Ainsi, pour une certaine liaison $\mathcal{L}$, on peut définir deux matrices diagonales $[T^{\mathcal{L}}]$ et $[R^{\mathcal{L}}]$ indiquant quelles translations et quelles rotations sont contraintes.

Exemple pour une liaison pivot :

$$[T^{\mathcal{L}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad [R^{\mathcal{L}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, supposons que l'on a un objet 1 et un objet 2 reliés par une liaison $\mathcal{L}$. Si l'on applique une force $\overrightarrow{F}$ et un couple $\overrightarrow{C}$ à l'objet 1, l'objet 2 reçoit une force $[T^{\mathcal{L}}]\overrightarrow{F}$ et un couple $[R^{\mathcal{L}}]\overrightarrow{C}$.

2 Cas simple

On considère le cas de deux objets 1 et 2 liés par une liaison $\mathcal{L}$. On note G_i le barycentre de l'objet $i \in \{1, 2\}$. Soit L le point de contact de la liaison. On cherche à déterminer $\overrightarrow{F_L}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_L}$, c'est-à-dire respectivement la force et le moment appliqués par l'objet 1 sur l'objet 2 au point L.

On note respectivement $\overrightarrow{F_i}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_i^A}$ la somme des forces et des moments des forces en A pour l'objet $i \in \{1, 2\}$ (on ne compte ni $\overrightarrow{F_P}$ ni $\overrightarrow{\mathcal{M}_P}$ dans ces sommes). On note respectivement m_i, $[J_i]$, $\overrightarrow{a_i}(P)$ et $\overrightarrow{\Omega_i}$ la masse, la matrice d'inertie, l'accélération du point P et le vecteur rotation instantanée pour l'objet $i \in \{1, 2\}$. Pour un solide fixe, on prendra $m = \infty$ et $[J] = \infty Id$.

On cherche à déterminer $\overrightarrow{F_L}$ en fonction $\overrightarrow{\mathcal{M}_L}$, $\overrightarrow{F_i}$, $\overrightarrow{\mathcal{M}_i^A}$, m_i, $[J_i]$, $\overrightarrow{a_i}(P)$ et $\overrightarrow{\Omega_i}$ pour $i \in \{1, 2\}$. Le PDF et le TMC permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
m_1\overrightarrow{a_1}(G_1) &= \overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_L} \\
m_2\overrightarrow{a_2}(G_2) &= \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_L} \\
[J_1]\dot{\overrightarrow{\Omega_1}} &= \overrightarrow{\mathcal{M}_1^{G_1}} - \overrightarrow{\mathcal{M}_L} \\
[J_2]\dot{\overrightarrow{\Omega_2}} &= \overrightarrow{\mathcal{M}_2^{G_2}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_L}
\end{aligned} \tag{1}$$

Suivant la nature de la liaison certain degré de liberté sont contraints, d'autres non.

$a\overrightarrow{X}$ pour une glissière. On a :

$$\overrightarrow{a_1}(L) - \overrightarrow{a_2}(L) = \overrightarrow{a_L} \tag{2}$$

Enfin, la loi des champs de vitesse des points d'un objet donne :

$$\overrightarrow{v_i}(L) = \overrightarrow{v_i}(G) + \overrightarrow{\Omega_i} \wedge \overrightarrow{GL} \tag{3}$$

D'où en dérivant :

$$\overrightarrow{a_i}(L) = \overrightarrow{a_i}(G_i) + \dot{\overrightarrow{\Omega_i}} \wedge \overrightarrow{G_iL} + \overrightarrow{\Omega_i} \wedge (\overrightarrow{\Omega_i} \wedge \overrightarrow{G_iL}) \tag{4}$$

En remplaçant (4) et (1) dans (5) on obtient :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{a_1}(G_1) + \dot{\overrightarrow{\Omega_1}} \wedge \overrightarrow{G_1L} + \overrightarrow{\Omega_1} \wedge (\overrightarrow{\Omega_1} \wedge \overrightarrow{G_1L}) - \\
&\overrightarrow{a_2}(G_2) + \dot{\overrightarrow{\Omega_2}} \wedge \overrightarrow{G_2L} + \overrightarrow{\Omega_2} \wedge (\overrightarrow{\Omega_2} \wedge \overrightarrow{G_2L}) = \overrightarrow{a_L}
\end{aligned} \tag{5}$$