Correction (partielle) du Partiel

Exercice 1.

1) Graphe...
2) Décomposition en classes d'équivalence (classes communicantes) : $\{1,2\}$, $\{3\}$, $\{4,5\}$ et $\{6,7\}$. En effet, d'après la matrice de transition, les états 1 et 2 communiquent entre eux, mais pas avec les autres. Cet argument peut être utilisé de façon analogue pour les autres états de la chaîne.
3) On a $2 \to 3$, donc $\{1,2\}$ est ouverte et donc transiente. $3 \to 4$, donc $\{3\}$ est ouverte et donc transiente et $5 \to 6$, donc $\{4,5\}$ est ouverte et donc transiente. Par contre, aucun état de $\{6,7\}$ ne communique avec un état de $\{1,2,3,4,5\}$, donc $\{6,7\}$ est fermée et donc récurrente.

Exercice 2.

1) Graphe...
2) Il suffit alors de résoudre $\pi P = \pi$, où $\pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3]$ est vecteur colonne tel que $0 \leqslant \pi_i \leqslant 1$ et $\sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1$. La mesure de probabilité invariante sera unique si et seulement le système ci dessus admet une unique solution. On résoud

$$\pi \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\pi_2 + \pi_3 = \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_1 = \pi_2 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \pi_1 = 2\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{2}{3}\pi_3 \end{cases},$$

ce qui donne $\pi = k[4\ 2\ 3]$ ($k \in \mathbb{R}$) et $\pi = [4/9\ 2/9\ 1/3]$ est l'unique mesure de probabilité invariante.
3) Puisque l'on a une unique mesure de probabilité invariangte et que la chaîne est irréductible, on a $E_x[T_x] = 1/\pi_x$. Ainsi, $E_1[T_1] = 9/4$, $E_2[T_2] = 9/2$ et $E_3[T_3] = 3$.
4) La chaîne est irréductible (tous les états mènent aux autres) et apériodique puisque $p_{0,0} = 0$, $p_{0,0}^2 > 0$ et $p_{0,0}^3 > 0$. D'après le théorème ergodique, on a $\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = \pi_y$, dont les valeurs sont données à la question 2).

Exercice 3. Modèle de Moran

1) On a $X_{n+1} = X_n + \epsilon_{n+1}$ où $\epsilon_{n+1} \in \{-1, 0, 1\}$ est définie par

— $\epsilon_{n+1} = 1$ si on a choisi un individu de type a pour se dédoubler et un individu de type A pour mourir,
— $\epsilon_{n+1} = -1$ si on a choisi un individu de type A pour se dédoubler et un individu de type a pour mourir,
— $\epsilon_{n+1} = 0$ dans tous les autres cas.

On considère maintenant $(U_n)_{n\geqslant 0}$ et $(U'_n)_{n\geqslant 0}$ deux copies indépendantes d'une suite de v.a.i.i.d. uniformes sur $\{0,\ldots,m\}$.

Ainsi,

$$\epsilon_{n+1} = \mathbf{1}_{\{U_{n+1}\leqslant X_n\}}\mathbf{1}_{\{U'_{n+1}\geqslant X_n+1\}} - \mathbf{1}_{\{U_{n+1}\geqslant X_n+1\}}\mathbf{1}_{\{U'_{n+1}\leqslant X_n\}}$$

et par conséquent,

$$X_{n+1} = G(X_n, U_{n+1}, U'_{n+1})$$

où $(U_{n+1}, U'_{n+1})_{n\geqslant 0}$ sont i.i.d. indépendantes de X_{n+1}. Donc $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov.

2) De plus ses transitions sont données par

$$p_{i,i-1} = p_{i,i+1} = \frac{i}{m}\Big(1-\frac{i}{m}\Big), \quad p_{i,i} = 1-2\frac{i}{m}\Big(1-\frac{i}{m}\Big), \qquad \forall i\in[1,m-1],$$

$$p_{0,0} = p_{m,m} = 1.$$

3) 0 et m sont récurrents car absorbants. Les états $1,\ldots,m-1$ car ils communiquent avec tous les autres et en particuliers avec les 2 états absorbants 0 et m. Par conséquent les états $1,\ldots,m-1$ sont transcients.

4) On a 3 classes :

— $\{0\}$ classe récurrente positive,

— $\{m\}$ classe récurrente positive,

— $\{1,\ldots,m-1\}$ transiente.

5) L'ensemble des états transients $\{1,\ldots,m-1\}$ est de cardinal fini, donc toute mesure invariante est nulle sur $\{1,\ldots,m-1\}$. Ainsi l'ensemble des mesures invariantes est

$$\{(\alpha,0,\ldots,0,\beta)\colon \alpha\geqslant 0, \beta\geqslant 0\}.$$