Aix Marseille Université

UNE ESPÈCE NE POUVANT SE REPRODUIRE QU'EN SON LIEU DE NAISSANCE PEUT-ELLE SURVIVRE EN SE DÉPLAÇANT ALÉATOIREMENT ?

présenté par :

- Racha Benkhaled
- Timo Bernier
- Antoine Legendre

Encadré par :

- Grégory Maillard

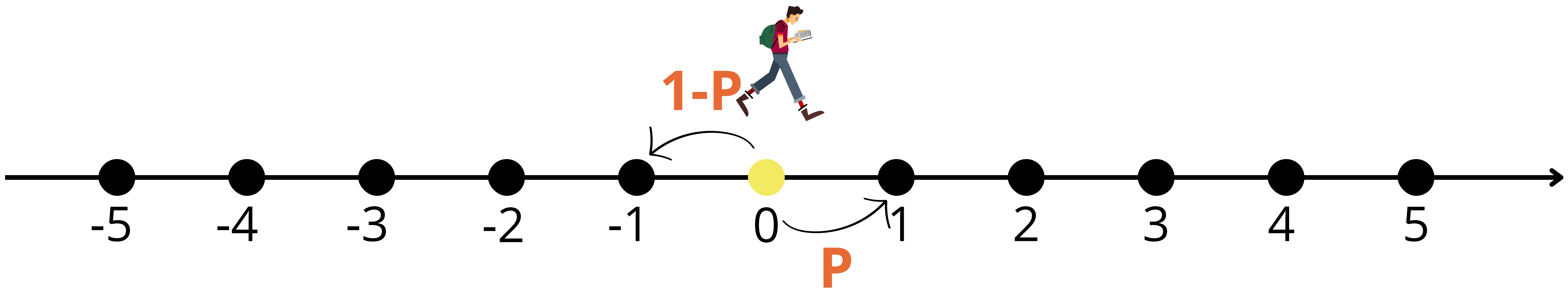
Année Universitaire 2024–2025

PLAN :

- Introduction.
- Approche expérimentale du modèle.
- Cas de la marche aléatoire symétrique.
- Cas général.
- Conclusion.

Choix du modèle d'étude

Un modèle simple mais puissant : la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ (Les entiers relatifs).



- Temps discret
- À chaque pas :

Aller à droite avec probabilité p

Aller à gauche avec probabilité 1 - p

Les deux mécanismes clés du modèle

Déplacement & reproduction

- 📍 Naissance à O (origine de l'espace).
- 🌐Environnement homogène & infini.
- 🎲Déplacement aléatoire (marche simple, P à droite et 1-p à gauche).
- 💀 Mort possible à chaque pas avec probabilité $1-\alpha$
- 👶 Reproduction conditionnelle.

→ Elle n'a lieu que si retour à O avant la mort.

→ Si oui : un descendant est créé, et recommence le cycle,

Paramètres du modèle

- $\alpha \in [0,1]$: probabilité de survie à chaque étape
- $p \in [0,1]$: biais de direction dans la marche

❓ Question centrale du modèle

Pour un environnement donné (déterminé par p), existe-t-il une valeur critique de α au-delà de laquelle l’espèce peut espérer survivre dans le temps ?

Approche expérimentale du modèle

Structure et fonctionnement du code

marche_aleatoire(p, alpha, steps, simulations)

trouver_alpha_critique(p, steps, simulations, precision)

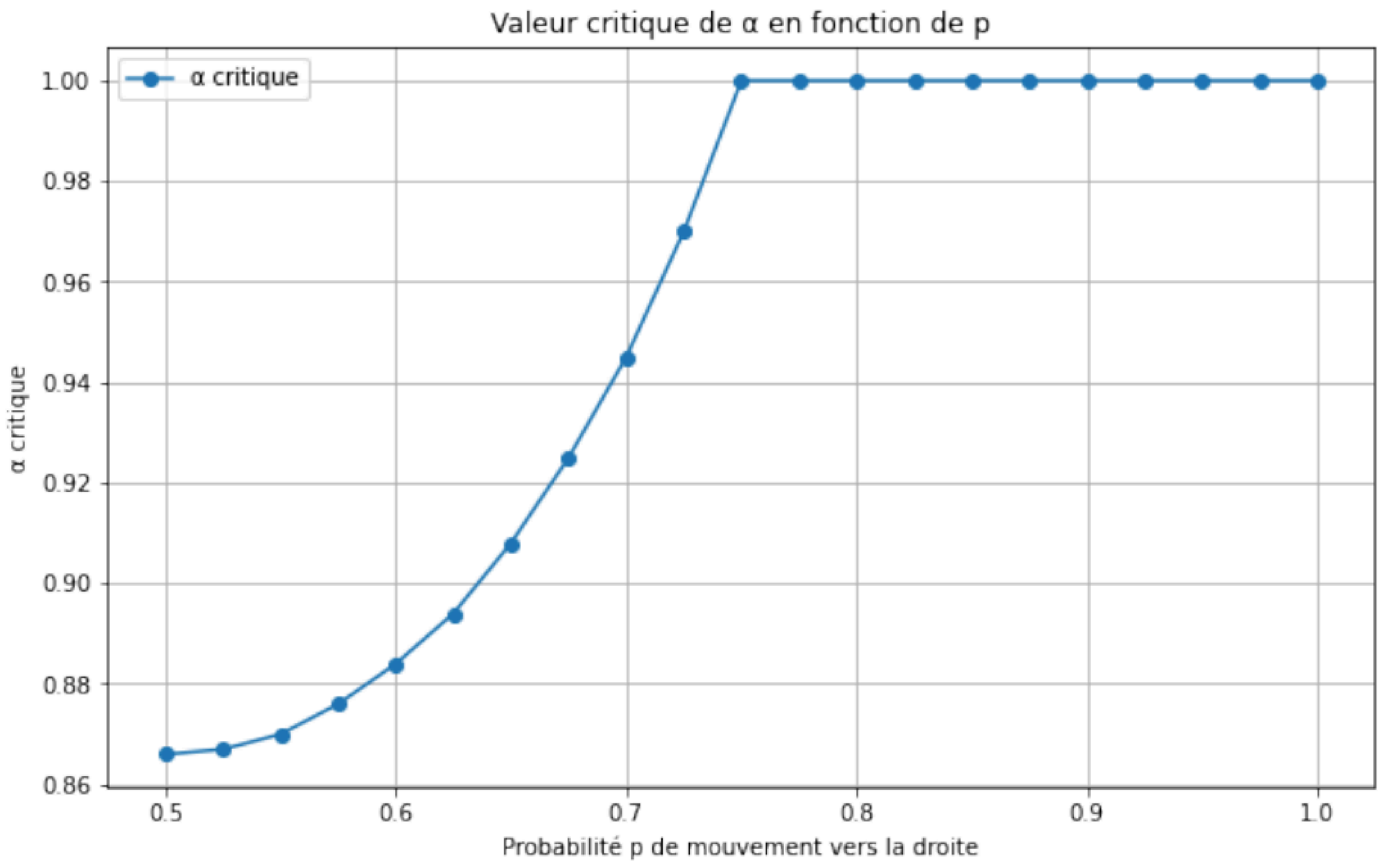
- La 1ere fonction Simule le comportement d'une population mobile et reproductrice autour du point 0.
- La 2eme estime la plus petite valeur de α garantissant une survie possible de la population.

python™

Résultats

Marche symétrique **(p = 0.5)**
La valeur critique estimée est ≈ 0.866

Marches non symétriques **(p ∈ [0.5 ; 1])**
La survie est pratiquement impossible si p ≥ 0.75, sauf avec α = 1
En pratique, la survie est envisageable uniquement pour p ∈]0.25 ; 0.75[.



Cas de la marche aléatoire symétrique

Notations :

- $\psi(\alpha)$: Probabilité d'extinction.
- $\theta(\alpha)=1-\psi(\alpha)$: Probabilité de survie.
- $\mu(\alpha)$: Nombre moyen de descendants directs par individu.

P=0.5

Objectifs :

- Montrer l'existence d'une valeur critique pour α.
- Déterminer le lien entre la probabilité de survie et le nombre moyen de descendants par individu.
- Déterminer la valeur critique de α pour $p=0.5$.

Preuve de l'existence d'une valeur critique pour α:

La valeur critique α correspond à la valeur minimale de α pour laquelle $\theta(\alpha)\neq 0$.

- Cas extrêmes : $\theta(0)= 0$ et $\theta(1)= 1$.
- Couplage des modèles : Construction de deux modèles dépendants pour démontrer que si un individu survit dans le Modèle 1, il survivra au moins aussi longtemps dans le Modèle 2.
- Monotonie de θ : $\theta(\alpha)$ est croissante sur [0,1].

CONCLUSION :

En utilisant le théorème des valeur intermédiaires :

- Il existe donc un α critique tel que :

$$\forall \alpha < \alpha_c, \quad \theta(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \forall \alpha > \alpha_c, \quad \theta(\alpha) > 0.$$

Lien entre survie de l'espèce et nombre moyen de descendants par individu

↪ Processus de Bienaymé–Galton–Watson

Un processus stochastique dans lequel chaque individu, indépendamment des autres, donne naissance à un nombre aléatoire de descendants selon une même loi de probabilité.
On note Z_n le nombre d'individus à la génération n, et pj la probabilité qu'un individu ait exactement j enfants.

Résultat clé :

- Si $\mu \leq 1$ ➜ extinction certaine : $\psi = 1$, donc survie $\theta = 0$.
- Si $\mu > 1$ ➜ extinction pas certaine : $\psi \in (0,1)$, donc $\theta = 1 - \psi > 0$.
- La plus petite valeur de α pour laquelle $\theta(\alpha) > 0$ correspond à la première valeur telle que : $\mu(\alpha) > 1$.

Détermination de la valeur critique de α

- On associe à chaque individu une marche aléatoire symétrique{S_n} sur Z, partant de l'origine.
- Durée de vie : τ   géométrique(1- α), indépendante de la marche.
- À chaque retour à l'origine , l'individu donne un descendant.

Espérance du nombre de descendants :

- Soit $Y_i = \mathbf{1}_{\{\tau \geq i\}} \cdot \mathbf{1}_{\{S_i=0\}}$, indicateur d'un **retour à l'origine** à l'instant i si l'individu est encore vivant.
- $\mu(\alpha) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau \geq i) \cdot \mathbb{P}(S_i = 0)$

Détermination de la valeur critique de α

🔍 **Calcul simplifié :**

- $\mathbb{P}(\tau \geq i) = \alpha^i$
- $\mathbb{P}(S_i = 0) = 0$ si i impair, sinon :

$$\mathbb{P}(S_{2j} = 0) = \binom{2j}{j} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j}$$

- Donc :

$$\mu(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} \binom{2j}{j} \cdot \left(\frac{\alpha^2}{4}\right)^{j}$$

Détermination de la valeur critique de α

📐 **Série connue :**

- On reconnaît une série génératrice :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j}{j} x^j = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}, \quad \text{pour } |x| < \frac{1}{4}$$

- Posons $x = \frac{\alpha^2}{4}$, alors :

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - 1$$

🎯 **Valeur critique :**

On cherche la valeur de α telle que :

$$\mu(\alpha) > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - 1 > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$$

Conclusion :

- Pour α ≤ 0.866 extinction certaine
- Pour α >0.866 survie possible (θ(α) >0)

Probabilité de survie en fonction de α :

On note :

- η : nombre total de retours à l'origine effectués par l'individu.
- ρ(α) : probabilité que l'individu meure avant son prochain retour à l'origine.

- On a alors :

$$\mathbb{P}(\eta = j) = \rho(\alpha)(1-\rho(\alpha))^j \quad \text{(loi géométrique)}$$

Lien avec la fonction génératrice:

- Fonction génératrice :

$$G(s) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j p_j = \rho(\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} [s(1-\rho(\alpha))]^j$$

- C'est une série géométrique :

$$G(s) = \frac{\rho(\alpha)}{1 - s(1-\rho(\alpha))} \quad \text{pour } s < \frac{1}{1-\rho(\alpha)}$$

Probabilité de survie en fonction de α (suite)

Calcul de l'espérance du nombre de descendants

$$\mu(\alpha) = G'(1) = \frac{1-\rho(\alpha)}{\rho(\alpha)}$$

- On avait aussi :

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - 1$$

- Donc :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - 1 = \frac{1-\rho(\alpha)}{\rho(\alpha)} \Rightarrow \rho(\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2}$$

Probabilité de survie en fonction de α (suite)

Équation d'extinction

- Trouver $s \in]0,1[$ tel que $G(s) = s$
- On résout :

$$\frac{\rho(\alpha)}{1 - s(1-\rho(\alpha))} = s \Rightarrow (\rho - 1)s^2 + s - \rho = 0$$

- Deux solutions :

$$s_1 = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{\mu}, \quad s_2 = 1$$

Probabilité de survie en fonction de α (suite)

Formule de la probabilité de survie

Une fois la probabilité d'extinction ψ(α) déterminée, on en déduit naturellement la probabilité de survie en utilisant la relation $\theta(\alpha) = 1 - \psi(\alpha)$.

- Probabilité d'extinction :

$$\psi(\alpha) = \frac{\rho(\alpha)}{1 - \rho(\alpha)} = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}$$

- Donc :

$$\theta(\alpha) = 1 - \psi(\alpha) = \frac{1 - 2\sqrt{1 - \alpha^2}}{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}$$

Cas Général :

-L'objectif est de déterminer l'expression de la probabilité de survie θ en fonction de (p, α)

- Un lien entre la probabilité de survie θ et le nombre moyen de descendants par individu:

$\mu(p, \alpha) > 1$

On a :

$$\mu(p, \alpha) = \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha^{2j} \cdot \mathbb{P}(S_{2j} = 0).$$

Avec {S_n} une marche aléatoire

Cas Général : *suite*

Cas symétrique:

$$\mathbb{P}(S_{2j} = 0) = \binom{2j}{j} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j}$$

Cas général:

$$\mathbb{P}(S_{2j} = 0) = \binom{2j}{j} p^j (1-p)^j = \binom{2j}{j} (p(1-p))^j.$$

Résultat:

En résumé, pour tout $(p, \alpha) \in [0, 1]^2$, la probabilité de survie $\theta(p, \alpha)$ est donnée par :

$$\theta(p, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{1 - 2\sqrt{1 - 4\alpha^2 p(1-p)}}{1 - \sqrt{1 - 4\alpha^2 p(1-p)}} & \text{si } \frac{1}{4} < p < \frac{3}{4} \text{ et } \alpha > \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{p(1-p)}}, \\ 1 & \text{si } \alpha = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Conclusion

🔍 Modèle simple, enjeux biologiques majeurs.

📉 Survie liée à la direction des déplacements (p) et à la longévité (α).

💡Un seuil critique détermine l’extinction ou la survie.

🚀 Perspectives : navigation partielle, espace multidimensionnel

MERCI POUR VOTRE ATTENTION

Références
[1] SCHINAZI R., Can a rudderless species survive ?, 22 Mars 2024, https://doi.org/10.48550/arXiv.2403.13874
[2] LEBENSZTAYN E. et PEREIRA V., On Random Walks with Geometric Lifetimes, 01 Juillet 2022, https://doi.org/10.1080/00029890.2023.2274783