M2 MAS DS,
Aix-Marseille Université, 2025–2026.
A. Marmin,

TD 1: Optimisation sous contrainte

Exercice 1: Water filling

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $K \in \mathbb{N}^*$ et, pour $n = 1, \cdots, N$, $a_n > 0$. Nous considérons le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\text{minimiser}} & -\sum_{n=1}^{N} \log(1 + a_n x_n) \\ \text{sous contraintes} & (\forall n \in [\![1, N]\!]) \quad x_n \geq 0 \\ & \sum_{n=1}^{N} x_n \leq K\,. \end{cases} \tag{P}$$

Questions

1. Vérifier que le Problème (P) est un problème convexe, i.e. que la fonction objectif et que les contraintes sont des fonctions convexes.
2. Montrer que le Problème (P) admet une solution.
3. Vérifier la condition de Slater pour le Problème (P).
4. Ecrire le Lagrangien du Problème (P).
5. Appliquer le théorème de Karush-Kuhn-Tucker (en vérifiant bien toutes les hypothèses) et l'utiliser pour résoudre le Problème (P).

1 Exercice 2: Théorème KKT et ses hypothèses

Soit le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \underset{x \in \mathbb{R}^2}{\text{minimiser}} & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sous contraintes} & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1 \\ & (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 1 \end{cases}$$

1. Dessiner l'ensemble admissible et les lignes de niveau de la fonction objectif. Quelles sont les solutions du problème? Que dire sur la condition de Slater?
2. Ecrire le Lagrangien du problèmes et les conditions d'optimalité de KKT. Que peut-on en dire? Existe-t-il un point dual $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ qui prouve qu'il existe un point primal x^* optimal?
3. Ecrire et résoudre le problème dual. Y-a-t-il dualité forte? Que dire de l'optimum dual?