Une espece ne pouvant se reproduire qu'en son lieu de naissance, peut-elle survivre en se deplacant aleatoirement ?

Présenté par : Antoine Legendre
Encadré par : Grégory Maillard

Aix Marseille Université

Année universitaire 2024-2025

Modele etudie lors du TER

- Naissance à 0
- Environnement homogène et infini
- Déplacement aléatoire (marche simple, probabilité p d'aller à droite et 1-p à gauche)
- Mort possible à chaque pas avec probabilité 1-α
- Un descendant est créé à chaque retour à 0 et recommence le cycle

Principaux Resultats du TER

Survie possible pour :

$$\frac{1}{4} < p < \frac{3}{4}$$

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{p(1-p)}}$$

PLAN

Améliorations de la marche 1D

1) Reproduction aléatoire
2) Probabilité de décès évoluant avec l'âge

Marches aléatoires 2D

1) Marches récurrentes
2) Critère de survie dans le cas général
3) Marches permettant la survie

1) Reproduction aléatoire

Choix de la loi

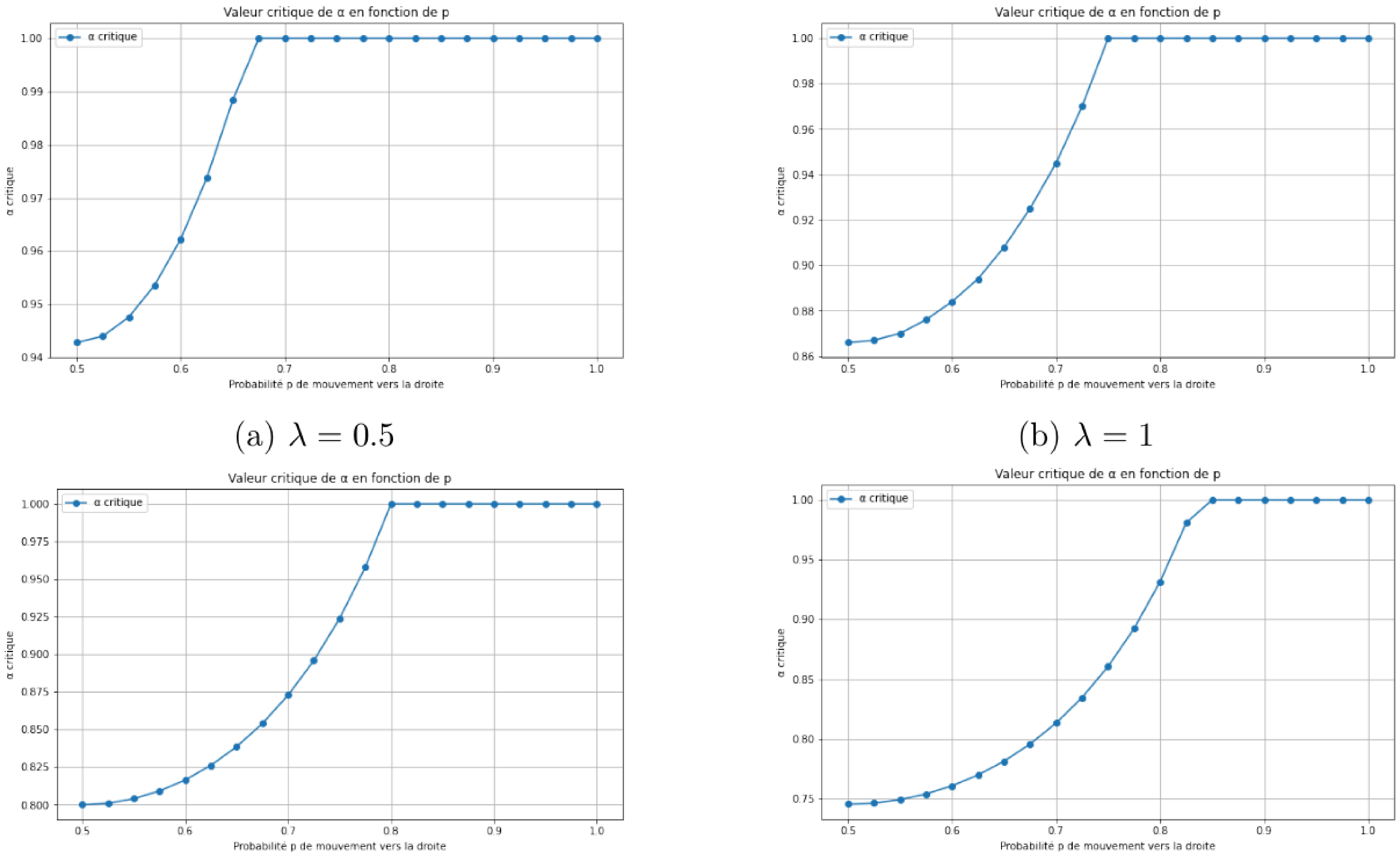
Grand nombre d'oeufs N ayant une probabilité p très faible de donner naissance à un individu vivant.

$$X \sim \mathrm{Bin}(N, p)$$

Loi de Poisson de paramètre λ = Np

1) Reproduction aléatoire

Simulations



(a) $\lambda = 0.5$

(b) $\lambda = 1$

(c) $\lambda = 1.5$

(d) $\lambda = 2$

Figure 2 – Valeur critique de α en fonction de p, pour différentes valeurs de λ

1) Reproduction aléatoire

Partie theorique

$$\mu(\lambda, p, \alpha) = \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right)$$

$$p \in \left] \frac{1}{2(1+\lambda)}, \frac{1+2\lambda}{2(1+\lambda)} \right[$$

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{2\lambda+1}}{2(1+\lambda)\sqrt{p(1-p)}}$$

2) Probabilité de décès

Choix de la loi

Loi de Makeham discrète :

$$\alpha(t) = \exp(-A - BC^t) \quad \text{où } A > 0,\ B > 0,\ C > 1$$

A : Constant avec l'âge, modélise la mortalité accidentelle

B : Contrôle l'impact de la croissance exponentielle du terme C^t

C : Augmentation exponentielle de la mortalité avec l'âge

2) Probabilité de décès

Condition pour la survie

$$\mu(A, B, C) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\tau \geq i) \cdot \mathbb{P}(S_i = 0)$$

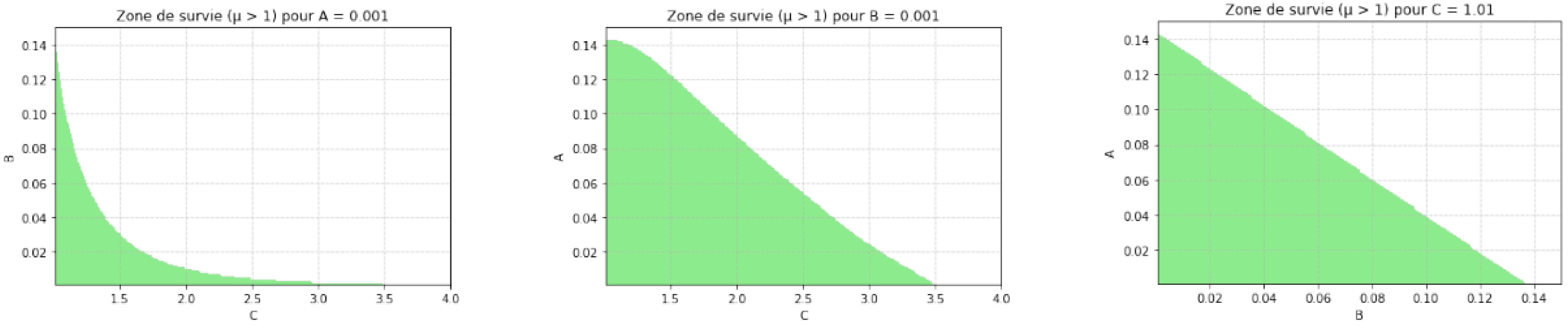
$$\mathbb{P}(\tau \geq i) = \prod_{t=0}^{i-1} \alpha(t) = \prod_{t=0}^{i-1} \exp(-A - BC^t) = \exp\left(-\sum_{t=0}^{i-1} A + BC^t\right) = \exp\left(-Ai - B\frac{C^i - 1}{C - 1}\right)$$

$$\mathbb{P}(S_{2j} = 0) = \binom{2j}{j} p^j (1-p)^j = \binom{2j}{j} (p(1-p))^j$$

$$\mu(A, B, C) = \sum_{j=1}^{+\infty} \exp\left(-2Aj - B\frac{C^{2j} - 1}{C - 1}\right) \binom{2j}{j} (p(1-p))^j$$

2) Probabilité de décès

RESULTATS



(a) A fixé à 0.001 (b) B fixé à 0.001 (c) C fixé à 1.01

FIGURE 4 – Zone (en vert) où la survie est possible selon le paramètre fixé

1) Marches 2D récurrentes

On considère deux marches aléatoires simples symétriques sur $\mathbb{Z}$:

- Une marche horizontale $(\widetilde{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, avec des sauts de $+1$ ou -1 chacun de probabilité $1/2$,
- Une marche verticale $(\widetilde{Y}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$, de même loi que $\widetilde{X}$.

On construit une marche aléatoire $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ définie comme suit :

- À chaque instant n, on choisit de se déplacer sur l'axe horizontal avec probabilité $p \in [0,1]$, et sur l'axe vertical avec probabilité $1-p$,
- On effectue ensuite un déplacement de ± 1 dans la direction choisie, avec probabilité $1/2$ pour chaque sens.

2) Critère de survie

Soit $\alpha \in]0,1[$, et soit β la probabilité pour qu'un individu situé à l'origine y revienne.

— si $\beta \leq \frac{1}{2}$, alors la survie est impossible, c'est-à-dire que $\theta(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in]0,1[$;
— si $\beta > \frac{1}{2}$, alors il existe une valeur critique $\alpha_c \in]0,1[$ telle que :

$$\forall \alpha \leq \alpha_c, \quad \theta(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \forall \alpha > \alpha_c, \quad \theta(\alpha) > 0.$$

3) Marches pour la survie

$$G(0,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_0(X_n = 0),$$

c'est-à-dire l'espérance du nombre total de visites à l'origine, en partant de l'origine

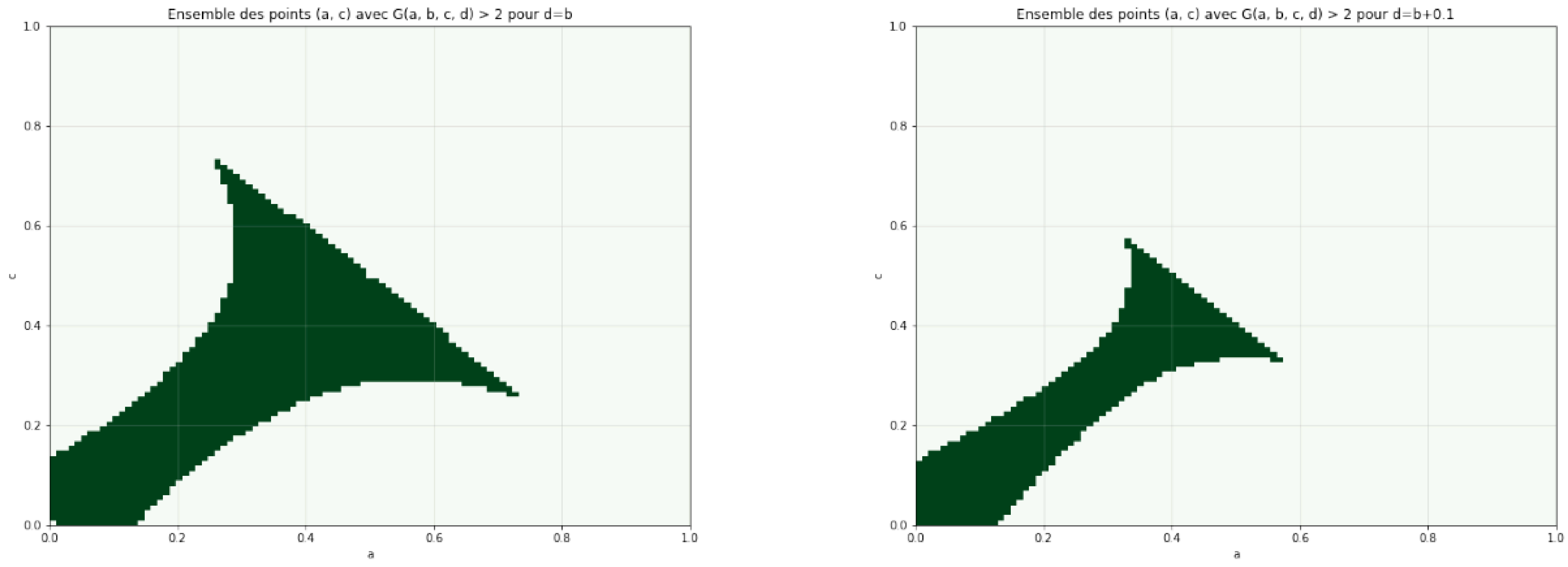
$$\mathbb{E}[\eta] = \frac{\beta}{1-\beta},$$

où η est le nombre total de retours à l'origine (sans compter l'instant initial)

$$G(0,0) = \mathbb{E}[\eta] + 1 = \frac{\beta}{1-\beta} + 1 = \frac{1}{1-\beta}$$

$$G(0,0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - ae^{i\theta_2} - be^{i\theta_1} - ce^{-i\theta_2} - de^{-i\theta_1}} \, d\theta_1 \, d\theta_2$$

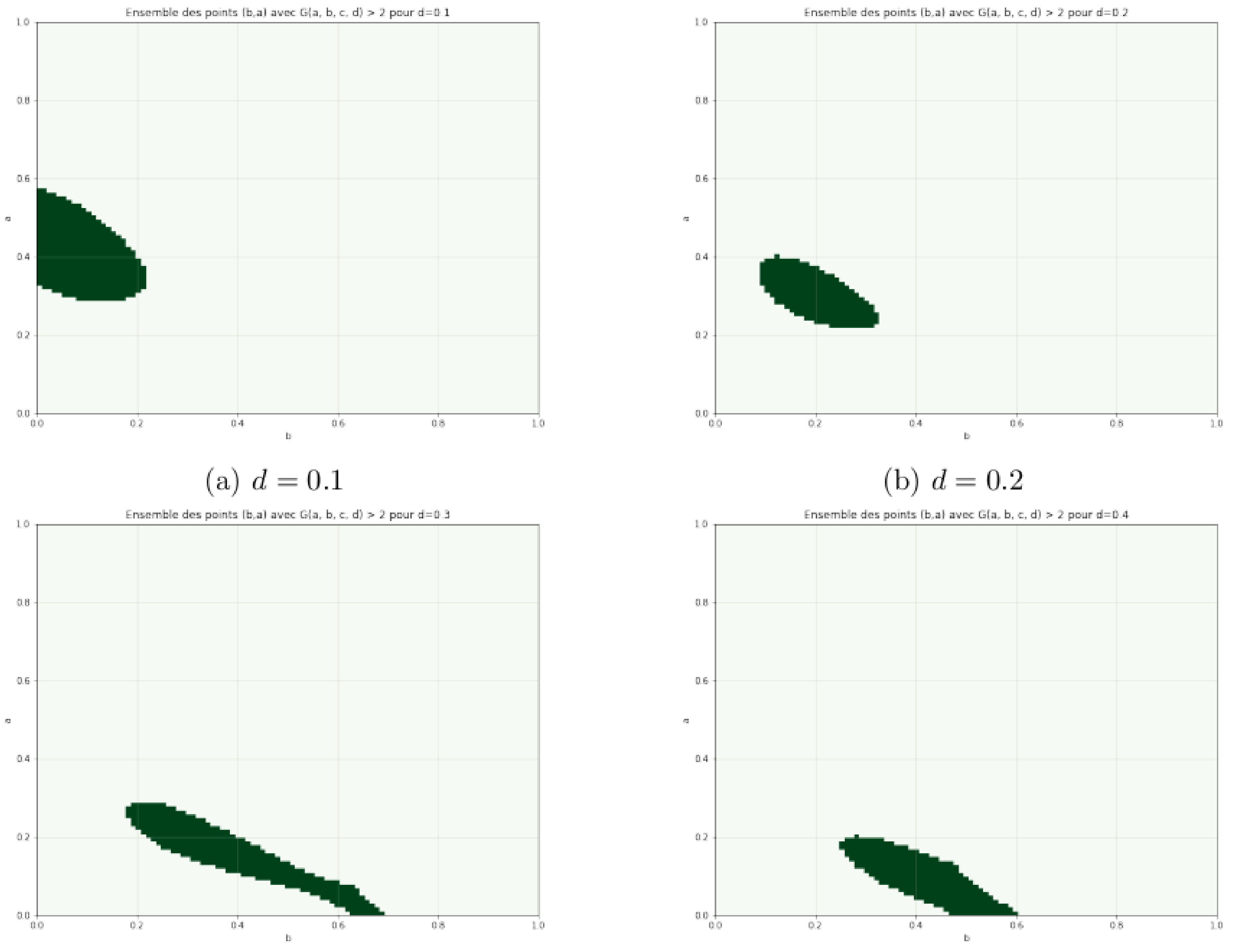
3) Marches pour la survie



(a) $d = b$ (b) $d = b + 0.1$

FIGURE 8 – Configurations (a, c) avec $G(0,0) > 2$

3) Marches pour la survie



(a) $d = 0.1$ (b) $d = 0.2$ (c) $d = 0.3$ (d) $d = 0.4$

FIGURE 9 – Configurations (a, b) avec $G(0, 0) > 2$ pour différentes valeurs de d

CONCLUSION

Modélisation mathématique permettant de se rapprocher de la réalité biologique.

Perspectives :

- étude des marches en dimension supérieure
- combiner les différentes améliorations
- introduction de zones plus ou moins favorables
- interactions entre les individus.

Merci pour votre ecoute !