Méthode des variables de contrôle

Antoine Legendre

March 2025

1 Introduction

Dans les simulations de Monte-Carlo, la réduction de la variance est essentielle pour améliorer la précision des estimations sans augmenter excessivement le nombre de simulations. Les techniques de réduction de variance permettent d'améliorer la précision des estimations obtenues par simulation de Monte-Carlo sans avoir à augmenter le nombre de simulations, ce qui peut être coûteux en termes de temps de calcul. Une variance plus faible signifie que l'estimateur converge plus rapidement vers la valeur vraie, rendant ainsi la méthode plus efficace. Parmi les différentes techniques disponibles, on retrouve les variables de contrôle, les variables antithétiques et l'importance sampling. Chacune de ces méthodes repose sur une stratégie particulière pour exploiter au mieux les informations disponibles et améliorer la qualité des estimations.

La méthode des variables de contrôle repose sur l'utilisation d'une variable auxiliaire Y bien corrélée à la variable d'intérêt X, dont l'espérance $\mathbb{E}[Y]$ est connue. L'idée principale est de construire un nouvel estimateur ajusté qui tire parti de cette connaissance pour réduire la variance.
Si l'on veut estimer un paramètre θ en utilisant une variable aléatoire X, on peut améliorer l'estimation en introduisant une variable auxiliaire Y telle que :

$$\hat{\theta}_c = \bar{X} - c(\bar{Y} - \mathbb{E}[Y])$$

Le coefficient optimal c^* est déterminé en minimisant la variance de $\hat{\theta}_c$, ce qui donne :

$$c^* = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(Y)}$$

L'utilisation de ce coefficient optimal garantit une réduction maximale de la variance de l'estimateur. En choisissant judicieusement la variable auxiliaire Y, on peut ainsi considérablement améliorer la précision des estimations de Monte-Carlo.

2 Application

Dans notre cas, nous avons choisi comme variable cible une loi de Weibull $X \sim \mathrm{Weibull}(\lambda, k)$, et nous avons utilisé une variable de contrôle Y issue de la loi exponentielle. En effet, la fonction de répartition de la loi de Weibull est :

$$F_X(x) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k}, \quad x \geq 0$$

Et, si on prend $k = 1$, on retrouve la loi exponentielle :

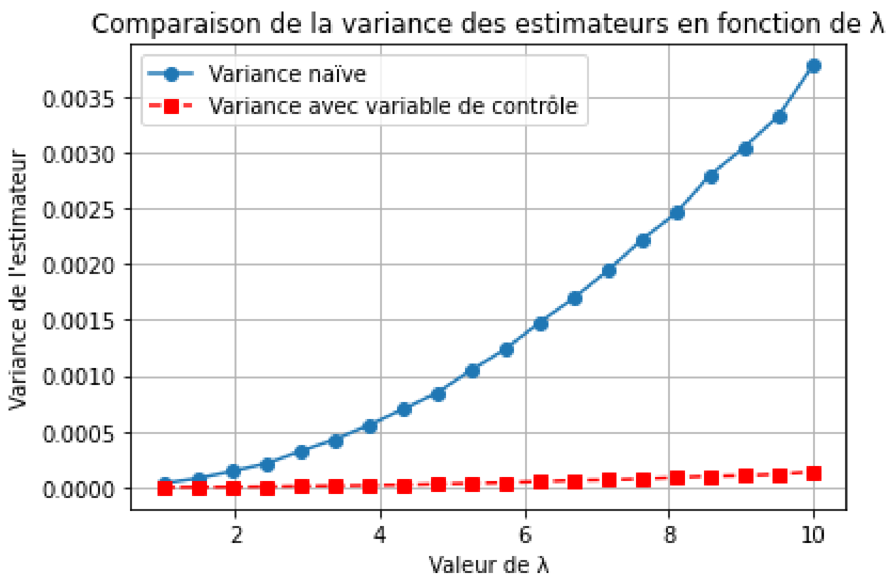
$$F_Y(y) = 1 - e^{-\frac{y}{\lambda}}, \quad y \geq 0$$

L'espérance de Y est connue, $\mathbb{E}[Y] = \lambda$, et X et Y sont fortement corrélés, ce qui garantit une bonne efficacité de la méthode.

Pour l'estimateur naïf, on calcule alors simplement $\bar{X}$, la moyenne empirique des X_i et, pour l'estimateur corrigé, on utilise la relation vue dans la partie 1 pour corriger l'estimation et réduire la variance en estimant $c^* = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)}$ par :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y}_n)^2}$$

.



Comme on peut le voir sur la figure 1, on observe une réduction significative de la variance pour toutes les valeurs de λ. On remarque que plus λ est grand, plus la variance de l'estimateur naïf augmente, et plus la méthode des variables de contrôle devient efficace.

La méthode des variables de contrôle permet ici d'améliorer la précision de l'estimation de $\mathbb{E}[X]$ en exploitant la relation avec une variable auxiliaire dont l'espérance est connue. Cette approche est particulièrement utile lorsque la variable cible suit une distribution dont l'espérance est difficile à estimer directement, mais qui peut être approximée par une autre variable plus simple.
En simulant la variance de l'estimateur naïf et celle de l'estimateur corrigé pour différentes valeurs de λ, nous avons mis en évidence que la méthode réduit systématiquement la variance, ce qui confirme son efficacité.

3 Conclusion

En conclusion, la méthode des variables de contrôle s'est révélée particulièrement efficace pour réduire la variance de l'estimation dans le cadre de nos simulations de Monte-Carlo. En utilisant une variable auxiliaire Y issue de la loi exponentielle, qui est fortement corrélée à la variable cible X issue d'une loi de Weibull, nous avons pu ajuster l'estimateur pour réduire la variance de manière significative. Les résultats montrent que, pour toutes les valeurs de λ étudiées, la variance a été réduite d'environ 96% à chaque fois grâce à cette méthode.

Cette réduction importante de la variance permet d'améliorer la précision des estimations sans nécessiter un nombre accru de simulations, ce qui est essentiel pour rendre les simulations de Monte-Carlo plus efficaces et moins coûteuses en termes de temps de calcul. La méthode des variables de contrôle s'avère donc un outil puissant pour optimiser les estimations dans des situations où la variable cible est difficile à manipuler directement, tout en exploitant les informations disponibles par l'intermédiaire de variables auxiliaires bien choisies.

Ainsi, la méthode appliquée ici permet non seulement de confirmer l'efficacité de la réduction de variance, mais aussi de souligner son importance dans les simulations statistiques pour améliorer la convergence des estimateurs et garantir des résultats plus fiables et plus rapides.