Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Année universitaire 2021-2022

Site : ☐ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet Session de ☒ 1er semestre - ☐ 2ème semestre - ☒ Session unique Durée de l'épreuve : 3h
Examen de ☐ L1/☐ L2/☐ L3 - ☒ M1/☐ M2 - ☐ LP - ☐ DU Nom Diplôme : MAS
Code Apogée du module : SMSAU02C Libellé du module : **Statistique.**
Document autorisé : ☒ OUI-☐ NON Calculette autorisée ☐ OUI-☒ NON

Examen à mi-parcours : Mercredi 2 Novembre 2021 (3 heures)

Les documents, notes de cours et calculatrices sont interdits, à l'exception d'une feuille A4 recto-verso. Le soin apporté à la rédaction sera un élément d'appréciation.

Exercice 1. Soit Γ la matrice $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que Γ est une matrice de covariance.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires centrées, de matrice de covariance Γ.

2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathrm{var}(X + 2Y)$. Qu'en déduisez-vous pour le couple (X, Y) ?
4. Le couple (X, Y) admet-il une densité ? On pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2}+xy-\frac{x^2}{2}-x)\ \mathbb{1}_{0\le x\le y}$.

1. Les variables X et Y sont -elles indépendantes ? Justifiez votre réponse.
2. Quelle est la loi de X ?
3. Quelle est la loi du couple $(X, Y - X)$? X et $Y - X$ sont-elles indépendantes ?

Problème.

1. **Lois Gamma.** Pour tout réel $x > 0$, on définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. On rappelle que pour tout $x > 1$, on a $\Gamma(x) = (x - 1)\Gamma(x - 1)$, et que pour tout entier $k \ge 1$, $\Gamma(k) = (k - 1)!$. Pour tout réel $k > 0$ et tout réel $\lambda > 0$, on pose

$$g_{k,\lambda}(t) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{-\lambda t}\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)\,.$$

   (a) Vérifiez que $g_{k,\lambda}$ est une densité de probabilité.

   Dans toute la suite, on note X une variable aléatoire de densité $g_{k,\lambda}$.

   (b) Montrez que pour tout $p > -k$, $\mathbb{E}(X^p) = \frac{1}{\lambda^p}\frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(k)}$. En déduire que si $k > 2$,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{k}{\lambda}\,, \mathrm{var}(X) = \frac{k}{\lambda^2}\,.$$
$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\lambda}{k-1}\,, \mathrm{var}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\lambda^2}{(k-1)^2(k-2)}\,.$$

   (c) Montrez que pour tout $\mu > 0$, μX est de densité $g_{k,\lambda/\mu}$.

(d) Montrez que si Y est indépendante de X et de densité $g_{k',\lambda}$, la variable $X+Y$ est de loi $g_{k+k',\lambda}$.

2. **Statistique classique.** On observe $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et on suppose que x est une réalisation de $X = (X_1, \cdots, X_n)$ où les variables X_i sont indépendantes de densité $g_{k,\lambda}$, avec k connu et λ inconnu. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, et on propose $\hat{\theta}_n = S_n/nk$ comme estimateur de $1/\lambda$.

(a) Montrez que $\hat{\theta}_n$ est un estimateur sans biais de $1/\lambda$ de risque quadratique $R(\hat{\theta}_n, \lambda) = \frac{1}{nk\lambda^2}$.

(b) En utilisant (1.c) et (1.d), montrez que $\lambda\hat{\theta}_n$ est de densité $g_{nk,nk}$. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}[\left|\lambda\hat{\theta}_n - 1\right| \geq \epsilon] \leq \frac{1}{\epsilon^2 nk}\,.$$

(c) Montrez que $\left[\frac{0.9}{\hat{\theta}_n}, \frac{1.1}{\hat{\theta}_n}\right]$ est un intervalle de confiance pour λ de coefficient de sécurité 95%, quand $n \geq \frac{2000}{k}$.

Pour $k > 2$, on considère les deux estimateurs suivants de λ :

$$\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\hat{\theta}_n} = \frac{nk}{S_n} \qquad \tilde{\lambda}_n = \frac{k-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}\,.$$

(d) En utilisant les questions (2.b) et (1.b), montrez que le risque quadratique de $\hat{\lambda}_n$ vaut $R(\hat{\lambda}_n, \lambda) = \frac{\lambda^2}{nk-1}\frac{nk+2}{nk-2}$.

(e) Montrez que le risque quadratique de $\tilde{\lambda}_n$ vaut $R(\tilde{\lambda}_n, \lambda) = \frac{\lambda^2}{n(k-2)}$.

(f) Existe-t-il un meilleur estimateur entre $\hat{\lambda}_n$ et $\tilde{\lambda}_n$? Si oui, lequel ?

3. **Statistique bayésienne.** On suppose que l'on sait que $\lambda \leq 10$. Pour prendre en compte cette information a priori, on suppose que λ est une réalisation d'une variable Λ de loi a priori $\mathcal{E}(\lambda_0 = 1/2)$.

(a) Calculez $\mathbb{P}(\Lambda \geq 10)$. Commentez.

(b) Montrez que la loi a posteriori de Λ a pour densité $g_{kn+1,s_n+\lambda_0}$. En déduire que

$$\mathbb{E}\left[\Lambda|X\right] = \frac{kn+1}{S_n+\lambda_0} := \check{\lambda}_n\,.$$

$\check{\lambda}_n$ est-il un estimateur admissible de λ ?