Faculté des Sciences
Aix*Marseille Université

Année universitaire 2023-2024

Site : ☐ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet Session de ☒ 1er semestre - ☐ 2ème semestre - ☒ Session unique Durée de l'épreuve : 3h
Examen de ☐ L1/☐ L2/☐ L3 - ☒ M1/☐ M2 - ☐ LP - ☐ DU Nom Diplôme : MAS
Code Apogée du module : SMSAU02C Libellé du module : **Statistique.**
Document autorisé : ☒ OUI-☐ NON Calculette autorisée ☐ OUI-☒ NON

Examen à mi-parcours du Lundi 06 Novembre 2023.

Les documents, notes de cours et calculatrices sont interdits, à l'exception d'une feuille A4 recto-verso. Le soin apporté à la rédaction sera un élément d'appréciation. Le barême est donné à titre purement indicatif.

Exercice 1 (7 points). Soient U et V des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{U}([0,1])$. On pose $X = UV$ et $Y = U(1-V)$.

1. (0,5 points) Justifiez sans calculs que X et Y sont de même loi.
2. (1 point) Calculez $\mathbb{E}(U)$, $\mathbb{E}(U^2)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$.
3. (1 point) Calculez $\mathbb{E}(XY)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. (2 points) Montrez que le couple (X,Y) a pour densité
$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{x+y}\ \mathbb{1}_{x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1}\,.$$
5. (2 points) Montrez que la densité conditionnelle de X sachant $Y=y$ (où $y \in]0,1]$) est
$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{-\log(y)}{x+y}\ \mathbb{1}_{[0;1-y]}(x)\,.$$
En déduire que $\mathbb{E}(X|Y) = -\log(Y)(1 - Y + Y\log(Y))$.
6. (0,5 points) Sans calcul supplémentaire, quelle est la valeur de $\mathbb{E}(Y|X)$? Justifiez votre réponse.

Exercice 2 (4 points). Soit (X,Y) un couple gaussien centré de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (0,5 points) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. (0,5 points) Que vaut $\mathbb{P}(X \geq 0)$?
3. (1 point) Quelle est la loi de la variable $X+Y$?
4. (2 points) Calculez $\mathrm{Var}(X+3Y)$. Qu'en concluez-vous ? Quelle est la valeur de $\mathbb{E}(X|Y)$? Le couple (X,Y) admet-il une densité ?

α	2,5 %	5 %	95 %	97,5 %
Quantile de $\mathcal{N}(0,1)$	-1.96	-1.64	1.64	1.96
Quantile de $\hat{\theta}_n/\theta$	0.65	0.70	1.35	1.43

Table 1 – Quantiles de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et de la loi de $\hat{\theta}_n/\theta$ pour $n = 25$.

Exercice 3 (9 points). Soit $\theta > 0$ un paramètre inconnu. On considère X_1, ..., X_n un échantillon i.i.d. de loi de densité

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} x^{-\left(1+\frac{1}{\theta}\right)} \mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)\,.$$

1. (0,5 points) Vérifiez que f_θ est bien une densité de probabilité.
2. (1 point) Montrez que
$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^2}(\log(x) - \theta).$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log f_\theta(x) = -\frac{2}{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} \log f_\theta(x) - \frac{1}{\theta^2}.$$
3. (2 points)Pour cette question, on rappelle les résultats de cours suivants : Si X est de densité f_θ satisfaisant certaines conditions de régularité, on a
$$\mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \log f_\theta(X)\right] = 0\,;\ \mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log f_\theta(X)\right)^2\right] = -\mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log f_\theta(X)\right].$$
Déduisez de ce qui précède que $\mathbb{E}_\theta[\log(X)] = \theta$; $\mathrm{Var}_\theta[\log(X)] = \theta^2$.
4. (1 point) Montrez que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n$ de θ est donné par
$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(X_i)\,.$$
Est-il sans biais ?
5. (1 point) Calculez l'information de Fisher $I_n(\theta)$. En déduire que $\hat{\theta}_n$ est un estimateur efficace de θ.
6. (1,5 points) Montrez que $\sqrt{n}\left(\frac{\hat{\theta}_n}{\theta} - 1\right)$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$ quand n tend vers $+\infty$. En déduire un intervalle de confiance pour θ de niveau asymptotique 95%. On pourra utiliser les quantiles de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ donnés dans la Table 1.
7. (1,5 points) Montrez que si X est de densité f_θ, $\log(X)/\theta$ est de loi exponentielle de paramètre 1. En déduire que $\hat{\theta}_n/\theta$ est un pivot pour l'estimation de θ.
8. (0,5 points) Pour $n = 25$, la Table 1 donne quelques quantiles de la loi de $\hat{\theta}_n/\theta$. En déduire un intervalle de confiance pour θ de niveau 95%.