Correction de l'examen à mi-parcours du 2 Novembre 2021.

Exercice 1. [3 points]

1. **[1]** Γ est symétrique. Si λ_1 et λ_2 sont ses valeurs propres, $\mathrm{Tr}(\Gamma) = 5 = \lambda_1 + \lambda_2$, et $\det(\Gamma) = 0 = \lambda_1\lambda_2$. Donc les valeurs propres de Γ sont 0 et 5, et Γ est symétrique positive.
2. **[1]** $\mathrm{cov}(X, Y) = -2 \neq 0$. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.
3. **[1]** $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X + 2Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + 4\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + 4\mathrm{cov}(X, Y) = 4 + 4 - 8 = 0$. Donc p.s., $X + 2Y = \mathbb{E}(X + 2Y) = 0$.
4. **[0]** Si le couple (X, Y) admet une densité $f_{(X,Y)}$, $\mathbb{P}(X+2Y = 0) = \iint_{(x,y);x+2y=0} f_{(X,Y)}(x, y)\,dx\,dy = 0$. Or $\mathbb{P}(X + 2Y = 0) = 1$. Donc (X, Y) n'est pas à densité.

Exercice 2. [5 points]

1. **[2]** Les variables X et Y ne sont pas indépendantes. Par exemple,

$$\mathbb{P}(Y \leq 1; X \geq 2) = \iint_{0\leq x\leq y;y\leq 1;x\geq 2} f_{(X,Y)}(x, y)\,dx\,dy = 0\,.$$

Mais,

$$\mathbb{P}(Y \leq 1) = \iint_{0\leq x\leq y\leq 1} f_{(X,Y)}(x, y)\,dx\,dy > 0\,,$$

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = \iint_{2\leq x\leq y} f_{(X,Y)}(x, y)\,dx\,dy > 0\,.$$

Donc $\mathbb{P}(Y \leq 1; X \geq 2) \neq \mathbb{P}(Y \leq 1)\mathbb{P}(X \geq 2)$.

2. **[1]** Comme (X, Y) est à densité, la variable X est de densité

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f_{(X,Y)}(x, y)dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x}\mathbb{1}_{x\geq 0} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}\,dy \\ &= 2e^{-x}\mathbb{1}_{x\geq 0} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = e^{-x}\mathbb{1}_{x\geq 0}\,. \end{aligned}$$

Mais $2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = 1$ (densité de la $N(0, 1)$). X est donc de loi $\mathscr{E}(1)$.

3. **[2]** Soit ϕ une fonction mesurable bornée.

$$\mathbb{E}(\phi(X, Y - X)) = \iint_{o\leq x\leq y} \phi(x, y - x)\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x-\frac{1}{2}(y-x)^2} dx\,dy\,.$$

On fait le changement de variables $\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = v + u \end{cases}$. Le déterminant de la matrice jacobienne de ce changement de variables vaut 1, et le domaine $\{(x, y); 0 \leq x \leq y\}$ se récrit $\{(u, v); u \geq 0, v \geq 0\}$. On a donc

$$\mathbb{E}(\phi(X, Y - X)) = \iint_{u\geq 0,v\geq 0} \phi(u, v)\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-u}e^{-\frac{1}{2}v^2} du\,dv\,.$$

La densité du couple $(X, Y-X)$ est donc $\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-u}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(u)e^{-\frac{1}{2}v^2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(v)$, qui est le produit d'une fonction de u et d'une fonction de v. Par conséquent, X et $Y - X$ sont indépendantes.

Problème. [16 points]

1. **[6 points]**

   (a) **[1]** $g_{k,\lambda}$ est à valeurs positives, et en faisant le changement de variable $u = \lambda t$,

   $$\int g_{k,\lambda}(t)dt = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} u^{k-1} e^{-u} du = 1,$$

   par définiton de $\Gamma(k)$. $g_{k,\lambda}$ est bien une densité de probabilité.

   (b) **[3]** En faisant le changement de variable $u = \lambda t$,

   $$\mathbb{E}(X^p) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} t^{p+k-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^p \Gamma(k)} \int_0^{+\infty} u^{p+k-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(p+k)}{\lambda^p \Gamma(k)},$$

   dès que $p + k > 0$.
   Pour $p = 1 > -k$, on a alors $\mathbb{E}(X) = \frac{\Gamma(1+k)}{\lambda\Gamma(k)} = \frac{k}{\lambda}$.
   Pour $p = 2 > -k$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{\Gamma(2+k)}{\lambda^2\Gamma(k)} = \frac{(k+1)k}{\lambda^2}$. D'où $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{k}{\lambda^2}$.
   Pour $p = -1 > -k$, $\mathbb{E}(1/X) = \frac{\lambda\Gamma(k-1)}{\Gamma(k)} = \frac{\lambda}{k-1}$.
   Pour $p = -2 > -k$, $\mathbb{E}(1/X^2) = \frac{\lambda^2\Gamma(k-2)}{\Gamma(k)} = \frac{\lambda^2}{(k-1)(k-2)}$. D'où $\mathbb{V}\mathrm{ar}(1/X) = \mathbb{E}(1/X^2) - \mathbb{E}(1/X)^2 = \frac{\lambda^2}{k-1}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1}\right) = \frac{\lambda^2}{(k-1)^2(k-2)}$.

   (c) **[1]** Soit ϕ une fonction mesurable bornée. En faisant le changement de variable $v = \mu t$,

   $$\mathbb{E}(\phi(\mu X)) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \int_0^{+\infty} \phi(\mu t) t^{k-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda^k}{\mu^k \Gamma(k)} \int_0^{+\infty} \phi(v) v^{k-1} e^{-\frac{\lambda}{\mu} v} dv\,.$$

   μX est donc de densité $g_{k,\lambda/\mu}$.

   (d) **[1]** Soit ϕ une fonction mesurable bornée.

   $$\mathbb{E}(\phi(X+Y)) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \frac{\lambda^{k'}}{\Gamma(k')} \iint_{x\geq 0, y\geq 0} \phi(x+y) x^{k-1} y^{k'-1} e^{-\lambda(x+y)} dxdy\,.$$

   On fait le changement de variables $\begin{cases} u = x \\ v = y + x \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = v - u \end{cases}$. Le déterminant de la matrice jacobienne de ce changement de variables vaut 1, et le domaine $\{(x, y); x \geq 0, y \geq 0\}$ se récrit $\{(u, v); 0 \leq u \leq v\}$. On a donc

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{E}(\phi(X+Y)) &= \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \frac{\lambda^{k'}}{\Gamma(k')} \iint_{0\leq u\leq v} \phi(v) u^{k-1} (v-u)^{k'-1} e^{-\lambda v} dudv \\
   &= \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \frac{\lambda^{k'}}{\Gamma(k')} \int_0^{+\infty} \phi(v) e^{-\lambda v} \left(\int_0^v u^{k-1} (v-u)^{k'-1} du \right) dv \\
   &= \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \frac{\lambda^{k'}}{\Gamma(k')} \int_0^{+\infty} \phi(v) e^{-\lambda v} v^{k+k'-1} \left(\int_0^1 w^{k-1} (1-w)^{k'-1} dw \right) dv,
   \end{aligned}$$

   où la dernière égalité s'obtient en faisant le changement de variables $w = u/v$ dans l'intégrale sur u. Notez que l'intégrale sur w ne dépend pas de v. Par conséquent, la densité de $X + Y$ est proportionnelle à $e^{-\lambda v} v^{k+k'-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(v)$. Il s'agit donc nécessairement de la densité $g_{k+k',\lambda}$.

2. **[7 points]**

   (a) **[2]** Par (1.d), S_n est de densité $g_{nk,\lambda}$, et d'après (1.b), $\mathbb{E}_\lambda(\hat{\theta}_n) = \frac{\mathbb{E}_\lambda(S_n)}{nk} = \frac{nk}{\lambda} \frac{1}{nk} = \frac{1}{\lambda}$. $\hat{\theta}_n$ est donc un estimateur sans biais de $1/\lambda$. On a alors toujours par (1.b),

   $$R(\hat{\theta}_n, \lambda) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{\theta}_n) = \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)}{(nk)^2} = \frac{nk}{\lambda^2} \frac{1}{(nk)^2} = \frac{1}{nk\lambda^2}\,.$$

(b) **[1]** S_n étant de densité $g_{nk,\lambda}$, $\hat\theta_n$ est de densité $g_{nk,\lambda nk}$, et $\lambda\hat\theta_n$ est de densité $g_{nk,nk}$. On a donc $\mathbb{E}(\lambda\hat\theta_n)=\frac{nk}{nk}=1$. On déduit alors de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que pour tout $\epsilon>0$,

$$\mathbb{P}_\lambda\left[\left|\lambda\hat\theta_n-1\right|\geq\epsilon\right]=\mathbb{P}_\lambda\left[\left|\lambda\hat\theta_n-\mathbb{E}(\lambda\hat\theta_n)\right|\geq\epsilon\right]\leq\frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}_\lambda(\lambda\hat\theta_n)}{\epsilon^2}=\frac{1}{\epsilon^2}\frac{nk}{(nk)^2}=\frac{1}{nk\epsilon^2}\,.$$

(c) **[1]** L'inégalité précédente se récrit

$$\mathbb{P}_\lambda\left[-\epsilon\leq\lambda\hat\theta_n-1\leq\epsilon\right]\geq1-\frac{1}{nk\epsilon^2}\Longleftrightarrow\mathbb{P}_\lambda\left[\frac{1-\epsilon}{\hat\theta_n}\leq\lambda\leq\frac{1+\epsilon}{\hat\theta_n}\right]\geq1-\frac{1}{nk\epsilon^2}\,.$$

Pour $\epsilon=0.1$, et $\frac{1}{\epsilon^2nk}\leq0.05\Longleftrightarrow n\geq\frac{2000}{k}$, on obtient

$$\mathbb{P}_\lambda\left[\frac{0.9}{\hat\theta_n}\leq\lambda\leq\frac{1.1}{\hat\theta_n}\right]\geq0.95\,.$$

(d) **[1]** Comme $\hat\theta_n$ est de densité $g_{nk,\lambda nk}$, on déduit de (1.b) que

$$\mathbb{E}_\lambda(\hat\lambda_n)=\mathbb{E}_\lambda\left[\frac{1}{\hat\theta_n}\right]=\frac{\lambda nk}{nk-1}\,.\quad\mathbb{V}\mathrm{ar}_\lambda(\hat\lambda_n)=\mathbb{V}\mathrm{ar}_\lambda\left(\frac{1}{\hat\theta_n}\right)=\frac{(nk)^2\lambda^2}{(nk-1)^2(nk-2)}\,.$$

Donc, $\mathrm{biais}(\hat\lambda_n,\lambda)=\lambda\left(\frac{nk}{nk-1}-1\right)=\frac{\lambda}{nk-1}$, et

$$\begin{aligned}R(\hat\lambda_n,\lambda)&=\mathbb{V}\mathrm{ar}_\lambda(\hat\lambda_n)+\mathrm{biais}^2(\hat\lambda_n,\lambda)=\frac{\lambda^2}{(nk-1)^2}\left(\frac{(nk)^2}{nk-2}+1\right)\\&=\frac{\lambda^2}{(nk-1)^2}\frac{(nk)^2+nk-2}{nk-2}=\frac{\lambda^2}{(nk-1)^2}\frac{(nk-1)(nk+2)}{nk-2}=\frac{\lambda^2}{nk-1}\frac{nk+2}{nk-2}\,.\end{aligned}$$

(e) **[1]** $\mathbb{E}_\lambda(\tilde\lambda_n)=\frac{k-1}{n}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}_\lambda\left(\frac{1}{X_i}\right)=\frac{k-1}{n}\frac{n\lambda}{k-1}=\lambda$. $\tilde\lambda_n$ est donc un estimateur sans biais de λ. On a donc

$$\begin{aligned}R(\tilde\lambda_n,\lambda)=\mathbb{V}\mathrm{ar}_\lambda(\tilde\lambda_n)&=\frac{(k-1)^2}{n^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}_\lambda\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{X_i}\right)\\&=\frac{(k-1)^2}{n^2}\sum_{i=1}^n\mathbb{V}\mathrm{ar}_\lambda\left(\frac{1}{X_i}\right)\ \text{(par indépendance des } X_i\text{)}\\&=\frac{(k-1)^2}{n^2}n\frac{\lambda^2}{(k-1)^2(k-2)}=\frac{\lambda^2}{n(k-2)}\,.\end{aligned}$$

(f) **[1]** Pour tout $\lambda>0$,

$$R(\tilde\lambda_n,\lambda)>R(\hat\lambda_n,\lambda)\Longleftrightarrow n(k-2)(nk+2)<(nk-1)(nk-2)\Longleftrightarrow nk(2n-5)+4n+2>0\,.(\star)$$

Cette dernière inégalité ne dépend plus de λ. Par conséquent, si n et k sont tels que $(\star)$ est vérifiée (ce qui est en particulier le cas pour $n\gg1$), $\hat\lambda_n$ est strictement meilleur que $\tilde\lambda_n$. Dans le cas contraire, $\tilde\lambda_n$ est meilleur que $\hat\lambda_n$.
Si $n\geq3$, comme $k>2$, $nk(2n-5)+4n+2\geq6(2n-5)+4n+2=16n-28\geq20>0$ et $\hat\lambda_n$ est strictement meilleur que $\tilde\lambda_n$ dès que $n\geq3$.
Pour $n=2$, $nk(2n-5)+4n+2=-2k+10>0$ pour $k<5$. D'où $\hat\lambda_2$ est strictement meilleur que $\tilde\lambda_2$ pour $k\in]2,5[$; $\tilde\lambda_2$ est strictement meilleur que $\hat\lambda_2$ pour $k>5$; et $\hat\lambda_2$ a même risque que $\tilde\lambda_2$ si $k=5$.
Pour $n=1$, $nk(2n-5)+4n+2=-3k+6<0$ pour $k>2$, et $\tilde\lambda_1$ est strictement meilleur que $\hat\lambda_1$.

3. **[3 points]**
   (a) **[1]** $\mathbb{P}(\Lambda \geq 10) = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} dt = e^{-5}$. Cette probabilité n'est pas nulle, mais est faible ($\simeq 0.006$). La loi a priori choisie rend donc assez bien compte de l'information a priori que $\lambda \leq 10$.
   (b) **[2]** La loi du $(n+1)$-uplé (Λ, X) a pour densité

$$
\begin{aligned}
f_{(\Lambda,X)}(\lambda, x_1, \cdots, x_n) &= \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\lambda) \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x_i^{k-1} e^{-\lambda x_i} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_i) \\
&= \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}} \lambda^{nk} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\lambda) \frac{(x_1 \cdots x_n)^{k-1}}{\Gamma(k)^n} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\min(x_i)) \,.
\end{aligned}
$$

Donc la densité conditionnelle de Λ sachant $X = x$ est proportionnelle à $\lambda \mapsto \lambda^{nk} e^{-\lambda(\frac{1}{2}+s_n)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\lambda)$. Il s'agit donc de la densité $g_{nk+1, \frac{1}{2}+s_n}$, dont la moyenne est $\frac{nk+1}{\frac{1}{2}+s_n}$. D'où $\mathbb{E}(\Lambda|X) = \frac{nk+1}{\frac{1}{2}+S_n} = \check{\lambda}_n$. Puisque $\check{\lambda}_n$ est un estimateur bayésien, il est admissible. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe un estimateur $\hat{\phi}_n(X)$ strictement meilleur que $\check{\lambda}_n$. Pour tout $\lambda > 0$, on a donc

$$
R(\hat{\phi}_n, \lambda) \leq R(\check{\lambda}_n, \lambda) \,, (\star\star)
$$

avec une inégalité stricte en au moins une valeur λ_*. Comme les deux fonctions $\lambda \mapsto R(\hat{\phi}_n, \lambda)$ et $\lambda \mapsto R(\check{\lambda}_n, , \lambda)$ sont continues, l'inégalité stricte est encore vraie sur un intervalle ouvert I autour de λ_*. En intégrant $(\star\star)$ par rapport à la loi a priori, on a donc

$$
\mathbb{E}\left[(\Lambda - \hat{\phi}_n(X))^2\right] \leq \mathbb{E}\left[(\Lambda - \check{\lambda}_n(X))^2\right] \,.
$$

Mais par définition de l'espérance conditionnelle, on a aussi

$$
\mathbb{E}\left[(\Lambda - \check{\lambda}_n(X))^2\right] \leq \mathbb{E}\left[(\Lambda - \hat{\phi}_n(X))^2\right] \,.
$$

D'où, $\mathbb{E}\left[(\Lambda - \hat{\phi}_n(X))^2\right] = \mathbb{E}\left[(\Lambda - \check{\lambda}_n(X))^2\right]$. Et on déduit alors de $(\star\star)$ que $R(\hat{\phi}_n, \lambda) = R(\check{\lambda}_n, \lambda)$ pour presque tout $\lambda > 0$. Cela contredit l'inégalité stricte pour $\lambda \in I$. Donc $\check{\lambda}_n$ est un estimateur admissible.