M2 DS,
Aix-Marseille Université, 2024–2025.
A. Marmin,

TD 2: Sous-différentiel, transformée de Fenchel

1 Exercice 1: Calcul sous-différentiel

Considérons $(\mathbb{R}^N, \langle . \mid . \rangle)$ un espace euclidien. Soit $f : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^N$, où $\|.\|$ est une norme.

1. Exprimer le sous-différentiel de f en $\mathbf{0}$.
2. En déduire le sous-différentiel de $f_1 : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_1$ en tout point $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^N$.
3. De même, calculer le sous-différentiel de $f_2 : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_2$ en tout point $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^N$.

2 Exercice 2: Calcul de fonctions conjuguées

Calculer les conjugués des fonctions suivantes et donner leur domaine

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \exp(x)$,
2. $f : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ telle que $f(x) = x^{-1}$ si $x > 0$ et $f(x) = +\infty$ sinon,
3. $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \|x\|_2$.

3 Exercice 3: Fonction égale à sa transformée de Fenchel

Dans le cours nous avons montré que la fonction $f : \mathbf{x} \mapsto \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2$ définie sur $\mathbb{R}^N$ était égale à sa transformée de Fenchel, i.e. $f = f^*$. Le but de cette exercice est de montre que f est l'unique fonction vérifiant $f = f^*$.

Ainsi, supposons que g est une fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ telle que $g = g^*$.

1. En utilisant l'inégalité de Fenchel-Young, montrer que
$$(\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N) \quad g(\mathbf{y}) \geq \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2 .$$
2. En déduire que pour tout $\mathbf{y}$, $g^*(\mathbf{y}) \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|_2^2$.
3. Conclure sur la nature de g.

4 Exercice 4: Propriétés de la transformée de Fenchel

Prouver les résultats de la Proposition 3 du cours.