



# Mathématiques pour la Science des données 2

## Notes de cours

*Master 2 – Mathématiques Appliquées, Statistiques*  
*Parcours Data Science – SMSC67AC*  
*Aix-Marseille Université*

ARTHUR MARMIN

# Table des matières

## CHAPTER 1

### RAPPEL D'OPTIMISATION \_\_\_\_\_ PAGE 4

1.1	Convexité .....	4
1.2	Optimisation et optimiseur .....	5
1.3	Existence et unicité des minimiseurs .....	6
1.4	Descente de gradient .....	6

## CHAPTER 2

### OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES \_\_\_\_\_ PAGE 9

2.1	Un premier exemple .....	9
2.1.1	Régression linéaire sans contrainte .....	9
2.1.2	Régression linéaire sous contraintes .....	10
2.2	Etude d'un problème simple .....	10
2.2.1	Approche naïve: Méthode de la substitution .....	10
2.2.2	Intuition géométrique .....	11
2.2.3	Cas d'une contrainte d'inégalité .....	11
2.3	Méthode des multiplicateurs de Lagrange .....	12
2.3.1	Cas général .....	12
2.3.2	Cas convexe .....	15
2.3.3	Cas convexe différentiable .....	16
2.3.4	Cas différentiable (pas d'hypothèse de convexité) .....	16
2.4	Exercice d'application .....	18
2.5	Application numérique à la NMF avec <code>scipy</code> .....	19

## CHAPTER 3

### OUTILS D'ANALYSE CONVEXE \_\_\_\_\_ PAGE 21

3.1	Préliminaires .....	21
3.2	Semi-continuité inférieure .....	21
3.3	Sous-différentiel .....	22
3.4	Fonction conjuguée / Transformation de Fenchel .....	24
3.5	Exercice d'application directe du cours .....	26

**CHAPTER 4****ALGORITHMES PROXIMAUX** **PAGE 27**

4.1	Algorithme du point proximal .....	27
4.1.1	Motivation .....	27
4.1.2	Enveloppe de Moreau et opérateur proximal .....	28
4.1.3	Méthode de point fixe .....	32
4.2	Algorithme du gradient proximal .....	35
4.2.1	Algorithme du gradient proximal (Forward-Backward) .....	35
4.3	Algorithmes praux-duaux .....	36
4.3.1	Dualité de Fenchel-Rockafellar .....	36
4.3.2	Lien avec la dualité Lagrangienne .....	37
4.3.3	Algorithme des directions alternées (ADMM) .....	38
4.3.4	Algorithme du gradient proximal primal-dual .....	40
4.4	Exercices d'application directe du cours .....	41

# Introduction

---

Le but de ce cours est d'approfondir le sujet de l'optimisation introduit dans l'UE *SMSAU20C — Applied mathematics* et éventuellement dans l'option *SMSB27AC — Optimization*. Son but est d'étendre les méthodes d'optimisation sans contrainte, notamment la descente de gradient, à des problèmes d'optimisation sous contraintes et non-lisse, dans le sens où les fonctions en jeu ne sont pas forcément dérivables et n'ont donc pas forcément de gradient en chaque point de l'espace.

Dans ce cours, nous nous plaçons dans le contexte de l'optimisation de fonctions définies sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  muni de son produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  et de sa norme induite  $\|\cdot\|$ . Un exemple courant d'espace de Hilbert en science des données est les espaces euclidiens  $\mathbb{R}^N$  munis de leur produit scalaire canonique et de la norme euclidienne. Toutefois, ce ne sont pas les seuls et les résultats sont présentés dans un contexte plus général.

## Notation

---

Nous utiliserons des lettres en caractère gras, majuscules et minuscules, pour écrire respectivement les matrices et les vecteurs. Les scalaires seront écrits en lettres minuscules, grecques ou latines.

Nous noterons  $\llbracket 1, N \rrbracket$  l'ensemble des entiers de 1 à  $N$ . Les ensembles  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_+$  et  $\mathbb{C}$  représentent respectivement les ensembles des entiers naturels, des entiers relatifs, des nombres réels, des nombres réels positifs et des nombres complexes.

## Rappel d'optimisation

Ce chapitre présente un rappel des bases de l'optimisation introduites dans l'UE *SMSAU20C — Applied mathematics*. Pour plus de détails, nous vous renvoyons donc vers le matériel des UE *SMSAU20C — Applied mathematics* et *SMSB27AC — Optimization*.

## 1.1 Convexité

Nous rappelons rapidement quelques définitions et propriété utiles liées à la convexité.

**Définition 1.1: Ensemble convexe**

Un ensemble  $\mathcal{C}$  est convexe si et seulement si tout segment reliant deux points de  $\mathcal{C}$  est compris dans  $\mathcal{C}$ :

$$(\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D})(\forall \alpha \in [0, 1]) \quad \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y} \in \mathcal{D}.$$

**Définition 1.2: Fonction convexe**

Une fonction  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si et seulement si

$$(\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H})(\forall \alpha \in [0, 1]) \quad f(\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y}) \leq \alpha f(\mathbf{x}) + (1 - \alpha) f(\mathbf{y}).$$

De plus, si cette inégalité est stricte,  $f$  est dite **strictement convexe**.

**Définition 1.3: Fonction fortement convexe**

Une fonction  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  est fortement convexe de module  $\mu$  ( $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ ) si et seulement si, il existe une fonction convexe  $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}) \quad f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{x}\|^2.$$

**Lemme 1.1**

Si une fonction  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  est fortement convexe de module  $\mu$ , alors elle vérifie

$$(\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}) \quad f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}) | \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

**Définition 1.4: Fonction coercive**

Une fonction  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  est coercive si et seulement si

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x}) = +\infty.$$

**Définition 1.5: Fonction à gradient Lipschitz**

Le fonction  $f$  est dite à gradient  $\beta$ -Lipschitz si et seulement si son gradient est  $\beta$ -Lipschitz continue:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \quad \|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y})\| \leq \beta \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

**Lemme 1.2**

Si  $f$  est à gradient  $\beta$ -Lipschitz, alors

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \quad f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}) | \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle + \frac{\beta}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

## 1.2 Optimisation et optimiseur

Soit  $\mathcal{C}$  un sous-ensemble de  $\mathcal{H}$  ( $\mathcal{C} = \mathcal{H}$  si le problème est sans contrainte).

Il existe deux types de problèmes d'optimisation:

1. **Les problèmes de minimisation** où nous cherchons à minimiser une fonction de coût  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , i.e. nous voulons trouver un point  $\hat{\mathbf{x}}$  tel que:

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}) \quad f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}) \quad f(\hat{\mathbf{x}}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} f(\mathbf{x}).$$

En d'autres termes, nous cherchons un point  $\hat{\mathbf{x}}$  dans l'ensemble  $\arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} f(\mathbf{x})$ .

⚠ Cet ensemble peut être vide et  $\hat{\mathbf{x}}$  peut ne pas exister!

2. **Les problèmes de maximisation** où nous cherchons à maximiser une fonction de récompense  $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , i.e. nous voulons trouver  $\hat{\mathbf{x}}$  tel que:

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}) \quad g(\hat{\mathbf{x}}) \geq g(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}) \quad -g(\hat{\mathbf{x}}) \leq -g(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\mathbf{x}} \in \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} -g(\mathbf{x}).$$

ainsi, maximiser  $g$  revient à minimiser  $-g$ .

Sans perte de généralité, nous nous concentrerons dans ce cours sur les problèmes de minimisation. Le point  $\hat{\mathbf{x}}$  sera appelé un minimiseur.

Il existe plusieurs types de minimiseurs:

- $\hat{\mathbf{x}}$  est appelé un **minimiseur global** de  $f$  sur  $\mathcal{C}$  si et seulement si

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}) \quad f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}).$$

- $\hat{\mathbf{x}}$  est appelé un **minimiseur local** de  $f$  sur  $\mathcal{C}$  si et seulement si

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}(\hat{\mathbf{x}}, \epsilon) \cap \mathcal{C}) \quad f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}).$$

- $\hat{\mathbf{x}}$  est un **minimiseur strict** s'il vérifie

$$(f(\hat{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{x})) \Rightarrow (\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}).$$

Le théorème suivant indique pourquoi la convexité est une propriété importante en optimisation et pourquoi les problèmes convexes sont les problèmes "simples".

**Théorème 1.3**

Lorsque le problème est convexe (i.e.  $f$  et  $\mathcal{C}$  sont convexes) alors tous les minimiseurs locaux sont des minimiseurs globaux et l'ensemble des minimiseurs de  $f$  sur  $\mathcal{C}$ ,  $\arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} f(\mathbf{x})$ , est convexe.

## 1.3 Existence et unicité des minimiseurs

Nous rappelons ici les deux résultats essentiels pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions à un problème d'optimisation.

### Théorème 1.4: Théorème de Weierstrass

Soit  $\mathcal{C}$  un sous-ensemble de  $\mathcal{H}$  et  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Si  $\mathcal{C}$  est un ensemble compact et non-vide, et si  $f$  est continue, alors il existe un point  $\hat{\mathbf{x}}$  de  $\mathcal{C}$  tel que

$$f(\hat{\mathbf{x}}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} f(\mathbf{x}).$$

De plus, si  $f$  est strictement convexe, le minimiseur  $\hat{\mathbf{x}}$  est unique, i.e.  $\arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} f(\mathbf{x}) = \{\hat{\mathbf{x}}\}$ .

⚠ Le théorème de Weierstrass n'est utile que pour prouver l'existence de minimiseurs sur un ensemble compact. En particulier, il ne peut pas être utilisé pour prouver l'existence de solution à un problème d'optimisation sans contrainte puisque  $\mathcal{H}$  n'est pas compact dans lui-même.

Le deuxième théorème relâche la contrainte de compacité sur  $\mathcal{C}$  au prix d'une hypothèse supplémentaire sur  $f$ .

### Théorème 1.5: Existence de solution

Si  $f$  est continue et coercive sur  $\mathcal{C}$ , et si  $\mathcal{C}$  est un ensemble fermé et non-vide, alors l'ensemble des minimiseurs de  $f$  est un ensemble compact non-vide. De plus, si  $f$  est strictement convexe, il existe un unique minimiseur.

⚠ La convexité n'est pas utile pour prouver l'existence de minimiseurs. Elle l'est en revanche, dans une version renforcée, pour prouver leur unicité.

#### Remarque:-

L'hypothèse de continuité peut-être affaiblie: la semi-continuité inférieure de  $f$  est suffisante dans ces deux théorèmes. Cette notion sera définie au chapitre 3.

## 1.4 Descente de gradient

Nous considérons le problème d'optimisation sans contrainte suivant:

$$\text{Trouver } \hat{\mathbf{x}} \text{ tel que } \hat{\mathbf{x}} \in \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{H}} f(\mathbf{x}). \quad (1.1)$$

Nous rappelons ici la méthode de descente de gradient et quelques théorèmes de convergence associés. Les preuves sont données dans les notes de cours de l'UE SMSB27AC — *Optimization*.

### Définition 1.6: Descente de gradient

La descente de gradient est un algorithme itératif défini pour une fonction différentiable  $f$ , un point initial  $\mathbf{x}^{(0)}$  de  $\mathcal{H}$  et une suite de pas  $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$  strictement positifs qui génère une suite d'itérés  $(\mathbf{x}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  de la façon suivante:

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*) \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \rho_k \nabla f(\mathbf{x}_k).$$

Lorsque la suite de pas  $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est constante et égale à  $\{\rho\}$ , cet algorithme est **descente de gradient à pas constant**. Dans le cas contraire, il est appelé **descente de gradient à pas variable**.

**Théorème 1.6: Convergence de la descente de gradient à pas fixe**





Soit  $f$  une fonction différentiable à gradient  $\beta$ -Lipschitz.

Si  $f$  est bornée inférieurement et si  $\rho$  appartient à  $]0, 2/\beta[$ , alors les suites  $(f(\mathbf{x}_k))_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|)_{k \in \mathbb{N}}$  générées par la descente de gradient convergent. De plus, la suite  $(f(\mathbf{x}_k))_{k \in \mathbb{N}}$  décroît de façon monotone et nous avons

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})\| = 0.$$

**Remarque:-**

Quelques remarques importantes concernant le théorème 1.6.

1.  Attention, la condition de continuité de Lipschitz sur le gradient de  $f$  est essentielle pour prouver la convergence!
  - Si  $f$  n'est pas assez lisse, le pas peut être trop grand et la valeur de  $f$  peut ne plus décroître de façon monotone. Par exemple, la fonction  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^\gamma$ , où  $\gamma$  est un paramètre dans  $]1, 2[$ , est différentiable mais son gradient n'est pas Lipschitz continu.
  - Si  $f$  croît plus rapidement qu'une fonction quadratique, alors pour n'importe quel choix du pas  $\rho$ , il existe un point initial  $\mathbf{x}^{(0)}$  tel que la descente de gradient diverge. C'est par exemple le cas pour la fonction  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^\gamma$  avec  $\gamma > 2$ .
2. Le choix du pas est critique. En particulier, si  $\rho > 2/\beta$ , la descente de gradient n'est plus assurée de converger! En pratique, on choisit un pas qui vérifie les conditions du théorème pour éviter que l'algorithme diverge.
3.    Le théorème 1.6 ne prouve pas la convergence de la suite des itérés, i.e. la suite  $(\mathbf{x}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ . Sans hypothèses supplémentaires, il n'est pas possible de la prouver. Par exemple, la fonction  $f(x) = 1/(1 + \|x\|^2)$  satisfait toutes les hypothèses du théorème 1.6. En revanche, pour n'importe quel point initial  $\mathbf{x}^{(0)}$  différent de  $\mathbf{0}$ , la suite des itérés diverge car  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}^{(k)}\| = +\infty$ .  
Pour prouver la convergence des itérés, nous avons besoin d'ajouter une hypothèse sur la forte convexité de  $f$ .

**Théorème 1.7: Vitesse de convergence de la descente de gradient à pas fixe**

Soit  $f$  une fonction différentiable à gradient  $\beta$ -Lipschitz qui est fortement convexe de module  $\mu$ .

Si  $f$  est bornée inférieurement et si  $\rho$  appartient à  $]0, 2/\beta[$ , alors la suite des itérés converge vers l'unique minimiseur global  $\hat{\mathbf{x}}$ . De plus, le pas optimal est  $1/\beta$  et résulte en une convergence linéaire de taux  $1 - \mu/\beta$ .

Nous rappelons qu'il existe trois vitesses de convergence importantes pour les suites d'itérés (listées de la plus lente à la plus rapide)

- **linéaire:**  $(\exists r \in [0, 1])(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0) \quad \|\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq r \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}\|,$
- **superlinéaire:**  $\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}} = o(\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}\|),$
- **quadratique:**  $\mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}} = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}\|^2).$

Notons que la définition de la convergence linéaire dépend du choix de la norme, ce qui n'est pas le cas des deux autres.



**Théorème 1.8**

Soit  $f$  une fonction deux fois différentiable telle que

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}) \quad l \text{ id} \preceq \nabla^2 f(\mathbf{x}) \preceq L \text{ id},$$

avec  $l$  et  $L$  deux nombres réels positifs. Si  $\rho$  appartient à  $]0, 2/\beta[$ , alors la suite des itérés générée par la descente de gradient converge vers l'unique minimiseur global et nous avons:

$$\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \leq r^k \|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\|^2, \quad \text{with } r = \max\{|1 - \rho l|, |1 - \rho L|\} \in ]0, 1[.$$

De plus, le pas optimal est  $1/(L + l)$  et donne un taux de convergence de  $r = \frac{L-l}{L+l}$ .

**Remarque:-**

Remarquons que le taux optimal donné par le Théorème 1.8 est meilleur que celui donné par le Théorème 1.7. En effet, si  $f$  est deux fois différentiable, fortement convexe de module  $\mu$  et à gradient  $\beta$ -Lipschitz, alors le Lemme 1.2 (resp. 1.1) implique que nous pouvons choisir  $L = \beta$  (resp.  $l = \mu$ ). Donc, nous obtenons:

$$1 - \frac{\mu}{\beta} = 1 - \frac{l}{L} = \frac{L-l}{L} \geq \frac{L-l}{L+l}.$$

De plus, le taux obtenu dans le Théorème 1.8 est exact, i.e. il ne peut pas être amélioré, et il est atteint par les fonctions quadratiques convexes (cf. TD du cours SMSB27AC — *Optimization*). En particulier, une fonction quadratique convexe de la forme  $f : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^\top \mathbf{x} + \mathbf{c}$  est à gradient Lipschitz avec pour constante de Lipschitz la plus grande valeur propre de  $\mathbf{A}$ . Si  $\mathbf{A}$  est définie positive, alors  $f$  est également fortement convexe de module  $\mu$  égale à la plus petite valeur propre de  $\mathbf{A}$ . Ainsi, le quotient  $\mu/\beta$  est, dans ce cas, l'inverse du conditionnement de  $\mathbf{A}$  par rapport à la norme euclidienne. En d'autres termes, si le conditionnement est faible, alors le taux  $1 - \mu/\beta$  est proche de 0 et la convergence est rapide. Au contraire, si le conditionnement est fort, alors  $1 - \mu/\beta$  est proche de 1 et la convergence est très lente; le problème est alors dur à résoudre avec la descente de gradient.

La descente de gradient à pas fixe est plus simple à mettre en place que celle à pas variable. Toutefois, un pas variable offre plus de flexibilité et peut être essentiel pour résoudre certains problèmes d'optimisation, notamment lorsque la fonction à optimiser n'est pas à gradient Lipschitz et que les théorèmes ci-dessus ne s'appliquent plus. Plusieurs stratégies ont été conçues pour régler le pas au fil des itérations et sont nommées méthodes de linesearch. Les exemples les plus connus sont le critère d'Armijo et le critère de Wolfe qui ont été présentés dans l'UE SMSB27AC — *Optimization*.

## Optimisation sous contraintes

## 2.1 Un premier exemple

Supposons que nous ayons fait  $N$  observations  $(y_n)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  pour  $N$  jeux de données  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ . Chaque observation  $y_n$  est représentée par une valeur réelle alors que chaque jeu de données  $\mathbf{x}_n$  est représenté par un vecteur de  $\mathbb{R}^D$ . A partir de ces données et observations, nous souhaitons prédire de nouvelles observations pour n'importe quel jeu de données. Le problème de régression consiste alors en la construction d'une fonction  $\phi : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$  qui produit des prédictions pour de nouvelles entrées  $\mathbf{x}$ . Nous supposons alors que

$$y = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + b$$

où  $b$  représente un bruit.

Le modèle de régression le plus simple est le modèle de régression linéaire:

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = w_0 + \sum_{d=1}^D w_d x_d = \mathbf{w}^\top \mathbf{x},$$

où  $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_D)^\top$  est le vecteur de paramètres de la régression et  $\mathbf{x} = (1, x_1, \dots, x_D)^\top$  est le vecteur de données. La fonction  $\phi$  est à la fois linéaire en  $\mathbf{w}$  mais également en  $\mathbf{x}$ , ce qui limite le pouvoir de modélisation de ce type de régression.

## 2.1.1 Régression linéaire sans contrainte

Dans le cas d'une hypothèse de bruit gaussien, la détermination du vecteur de paramètres  $\mathbf{w}$  se fait par la minimisation de l'erreur quadratique  $E$  donnée par

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (y_n - \phi(\mathbf{x}_n, \mathbf{w}))^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (y_n - \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n)^2, \quad (2.1)$$

ou sous forme vectorielle

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{w})^\top (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{w}) = \frac{1}{2} (\mathbf{w}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \mathbf{w} - 2\mathbf{y}^\top \mathbf{X} \mathbf{w} + \mathbf{y}^\top \mathbf{y}).$$

La solution est  $\mathbf{w}_*$  alors obtenue par la résolution de l'équation normale

$$\mathbf{w}_* = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y},$$

où  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^\top$  et  $\mathbf{X}$  est une matrice de  $\mathbb{R}^{N \times (D+1)}$  dont la  $n$ -ième ligne est le vecteur  $(1, \mathbf{x}_n^\top)$ .

**Remarque:-**

La fonction d'erreur quadratique donnée par l'équation (2.1) est une fonction quadratique de  $\mathbf{w}$  qui peut s'écrire sous la forme standard

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \mathbf{Q} \mathbf{w} + \mathbf{c}^\top \mathbf{w},$$

où  $\mathbf{Q} = \mathbf{X}^\top \mathbf{X}$  est une matrice  $(D+1) \times (D+1)$  définie positive et  $\mathbf{c} = -\mathbf{y}^\top \mathbf{X}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^{D+1}$ .

### 2.1.2 Régression linéaire sous contraintes

Supposons maintenant que, pour des raisons applicatives, nous devons appliquer des contraintes sur le vecteur de paramètres  $\mathbf{w}$ .

- Nous pouvons contraindre les coefficients du vecteur  $\mathbf{w}$  à être positifs afin d'obtenir un modèle additif qui s'avère utile si les observations et les données sont elles-mêmes positives. Ce type de problèmes apparaît en également traitement d'images ou de signaux audio pour reconstruire un signal bruité ou bien en apprentissage automatique dans des problèmes d'apprentissage par dictionnaire. Nous cherchons alors à résoudre le problème suivant

$$\arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{D+1}} E(\mathbf{w}) \quad \text{s.t. } \mathbf{w} \geq 0$$

où l'inégalité  $\mathbf{w} \geq 0$  signifie que chaque coefficient de  $\mathbf{w}$  est positif.

En pratique, plusieurs algorithmes ont été implémentés dans les différentes bibliothèques d'optimisation sous le nom de NNLS (NonNegative Least Squares). On peut par exemple citer `nnls` du module `optimize` de la bibliothèque Python `scipy`. Cet algorithme repose sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange et des conditions de Karush-Kuhn-Tucker qui sont le sujet de ce cours.

- Plus généralement, nous pouvons penser à des contraintes de bornes sur les coefficients de  $\mathbf{w}$ :

$$\arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{D+1}} E(\mathbf{w}) \quad \text{s.t. } (\forall d \in \llbracket 0, D \rrbracket) l_d \leq \mathbf{w}_d \leq u_d.$$

Pour résoudre ce problème, plusieurs algorithmes sont disponibles, notamment l'implémentation `lsq_linear` dans le module `optimize` de `scipy`.

- Nous pouvons également appliquer des contraintes linéaires sur  $\mathbf{w}$ :

$$\arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{D+1}} E(\mathbf{w}) \quad \text{s.t. } \mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{b}$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice de  $\mathbb{R}^{m \times (D+1)}$  de rang  $m$  et  $\mathbf{b}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^m$ .

Nous allons voir dans ce cours une méthode générale pour résoudre les problèmes d'optimisation sous contraintes et nous reviendrons vers ces exemples à la fin du chapitre.

## 2.2 Etude d'un problème simple

Considérons le problème d'optimisation suivant

$$\arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) \quad \text{s.t. } g(\mathbf{x}) = 0. \tag{E}$$

### 2.2.1 Approche naïve: Méthode de la substitution

Examinons tout d'abord le cas où  $N = 2$ . Une première idée pour résoudre le problème consiste à exprimer  $x_2$  en fonction de  $x_1$  en utilisant la contrainte. Nous pouvons écrire  $x_2$  sous la forme  $x_2 = h(x_1)$  puis substituer cette expression dans l'objectif  $f$ . Il est alors possible d'utiliser la différentiabilité pour trouver un optimum  $\hat{x}_1$ . Enfin, il suffit de calculer  $h(\hat{x}_1)$  pour obtenir  $\hat{x}_2$ .

Toutefois cette méthode pose trois problèmes:

- Suivant la fonction  $g$ , il peut être difficile de trouver une expression analytique de  $h$ .

- La symétrie naturelle des rôles joués par  $x_1$  et  $x_2$  est brisée: nous favorisons ici la variable  $x_1$ .
- La méthode de la substitution peut être compliquée à étendre pour un nombre  $N$  plus important de variables.

Pour ces raisons, nous allons aborder une méthode plus simple, celle des multiplicateurs de Lagrange.

## 2.2.2 Intuition géométrique

Notons que la contrainte  $g(\mathbf{x}) = 0$  est une équation définissant une surface  $S$  de dimension  $N - 1$ . De plus, pour tout point  $\mathbf{x}$  sur la surface  $S$ , le vecteur  $\nabla g(\mathbf{x})$  est orthogonal à  $S$ . En effet, prenons  $\mathbf{x}$  un point de  $S$  et  $\mathbf{x} + \epsilon$  un autre point de  $S$  proche de  $\mathbf{x}$ . Alors en écrivant le développement de Taylor, nous obtenons

$$g(\mathbf{x} + \epsilon) = g(\mathbf{x}) + \epsilon^\top \nabla g(\mathbf{x}) + o(\|\epsilon\|).$$

Comme  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x} + \epsilon$  sont des points de  $S$ ,  $g(\mathbf{x} + \epsilon)$  et  $g(\mathbf{x})$  valent 0. En faisant tendre  $\|\epsilon\|$  vers 0, nous obtenons donc

$$\epsilon^\top \nabla g(\mathbf{x}) = 0.$$

Comme  $\epsilon$  est tangent à  $S$ , nous en concluons que  $\nabla g(\mathbf{x})$  est bien normal à  $S$ .

De même, nous pouvons noter qu'en un point  $\hat{\mathbf{x}}$  où  $f$  est minimale,  $\nabla f(\hat{\mathbf{x}})$  est aussi orthogonal à  $S$ . En effet, si ce n'était pas le cas, il serait possible de se déplacer le long de  $S$  afin de diminuer  $f$  car

$$f(\mathbf{x} + \epsilon) = f(\mathbf{x}) + \epsilon^\top \nabla f(\mathbf{x}) + o(\|\epsilon\|).$$

Nous avons donc que  $\nabla f(\hat{\mathbf{x}})$  et  $\nabla g(\hat{\mathbf{x}})$  sont colinéaires en n'importe quel point optimum  $\hat{\mathbf{x}}$ . Il existe donc un réel non nul  $\lambda$  tel que

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) + \lambda \nabla g(\hat{\mathbf{x}}) = 0. \quad (2.2)$$

Nous introduisons alors la fonction suivante

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x}),$$

appelée le Lagrangien associé au Problème (E). Nous remarquons alors que l'équation (2.2) se réécrit comme

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \lambda) = 0,$$

tandis que la contrainte du Problème (E) s'écrit

$$\nabla_{\lambda} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = 0.$$

Ainsi, pour résoudre le Problème (E), nous pouvons chercher un point stationnaire du Lagrangien  $\mathcal{L}$ , ce qui nous donne  $N + 1$  équations qui déterminent  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\lambda$ .

Une remarque importante: si nous ne sommes intéressés seulement par  $\hat{\mathbf{x}}$ , il est possible d'éliminer  $\lambda$  des équations de stationnarité du Lagrangien.

## 2.2.3 Cas d'une contrainte d'inégalité

Supposons maintenant que la contrainte du Problème (E) ne soit plus une contrainte d'égalité  $g(\mathbf{x}) = 0$  mais une contrainte d'inégalité  $g(\mathbf{x}) \leq 0$ . Il y a alors deux cas possibles:

- Soit  $g(\mathbf{x}) < 0$  et  $g(\mathbf{x})$  ne joue alors aucun rôle: la contrainte de stationnarité est alors simplement  $\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = 0$  (i.e.  $\lambda = 0$ ). La contrainte est dite inactive.
- Soit  $g(\mathbf{x}) = 0$  et nous sommes ramené au cas de la contrainte d'égalité (i.e.  $\lambda \neq 0$ ). La contrainte est dite active. Toutefois, le signe de  $\lambda$  est important:  $\hat{\mathbf{x}}$  est un minimum du Problème (E) seulement si le gradient de  $f$  s'éloigne de la région  $g(\mathbf{x}) < 0$ :

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = -\lambda \nabla g(\hat{\mathbf{x}}) \quad \text{avec } \lambda > 0.$$

Dans tous les cas, nous avons l'équation suivante, appelée équation de complémentarité, qui est vérifiée

$$\lambda g(\hat{\mathbf{x}}) = 0.$$

Les solutions du Problème (E) sont donc obtenues en optimisant le Lagrangien sous les contraintes

$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \lambda \geq 0 \\ \lambda g(\mathbf{x}) = 0. \end{cases}$$

**Remarque:-**

Pour un problème de maximisation, il suffit de changer le signe devant  $\lambda$  dans le Lagrangien, i.e. de poser  $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x})$ .

## 2.3 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

### 2.3.1 Cas général

Soient  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonction. Soient  $I$  et  $J$  deux entiers naturels, nous considérons l'ensemble  $\mathcal{C}$  suivant

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{H} \mid (\forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket) g_i(x) = 0, (\forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket) h_j(x) \leq 0\}$$

où

$$\begin{aligned} (\forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket) \quad g_i : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket) \quad h_j : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nous écrirons plus succinctement  $\mathbf{g}(x)$  et  $\mathbf{h}(x)$  les vecteurs  $(g_1(x), \dots, g_I(x))^T$  et  $(h_1(x), \dots, h_J(x))^T$ . Nous voulons résoudre le problème d'optimisation sous contraintes suivant

$$\text{Trouver } \hat{\mathbf{x}} \in \arg \min_{x \in \mathcal{C}} f(x) \quad (\text{P})$$

#### Définition 2.1: Domaine d'une fonction

Le **domaine** d'une fonction  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est défini par

$$\text{dom } f = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) < +\infty\}.$$

#### Définition 2.2: Point admissible

Un point  $x$  de  $\mathcal{H}$  est dit **admissible** si

$$x \in \text{dom } f \cap \mathcal{C}.$$

#### Définition 2.3: Lagrangien

Le **Lagrangien** associé au Problème (P) est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{H} \times \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}_+^J &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, \lambda, \mu) &\mapsto f(x) + \sum_{i=1}^I \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^J \mu_j h_j(x) = f(x) + \lambda^\top \mathbf{g}(x) + \mu^\top \mathbf{h}(x). \end{aligned}$$

Les vecteurs  $\lambda$  et  $\mu$  sont appelés **multiplicateurs de Lagrange**.

Observons que s'il existe un point admissible alors le domaine du Lagrangien n'est pas vide.

#### Définition 2.4: Point sell

Un point  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  est appelé **un point selle** de du Lagrangien  $\mathcal{L}$  si

$$(\forall (x, \lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}_+^J) \quad \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \lambda, \mu) \leq \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}).$$

**Définition 2.5: Fonctions primale et duale**

La fonction  $\tilde{\mathcal{L}}$  définie par

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}) \quad \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}_+^J} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda, \mu),$$

est appelée la **fonction primale** du Problème (P). Le **problème primal** associé consiste à résoudre

$$\inf_{x \in \mathcal{H}} \tilde{\mathcal{L}}(x).$$

La fonction  $\underline{\mathcal{L}}$  définie par

$$(\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}_+^J) \quad \underline{\mathcal{L}}(\lambda, \mu) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda, \mu),$$

est quant à elle appelée la **fonction duale** associée au Problème (P). Le **problème dual** associé est donné par

$$\sup_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}_+^J} \underline{\mathcal{L}}(\lambda, \mu).$$

**Théoreme 2.1**

Le point  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  est un point selle de  $\mathcal{L}$  si et seulement si

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}) \quad \tilde{\mathcal{L}}(\hat{\mathbf{x}}) \leq \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) \tag{2.3}$$

$$(\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}_+^J) \quad \underline{\mathcal{L}}(\lambda, \mu) \leq \underline{\mathcal{L}}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) \tag{2.4}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}(\hat{\mathbf{x}}) = \underline{\mathcal{L}}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}). \tag{2.5}$$

**Preuve:**  $(\Rightarrow)$  Pour tout triplet  $(\mathbf{x}, \lambda, \mu)$  de  $\mathcal{H} \times \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}_+^J$ , nous avons

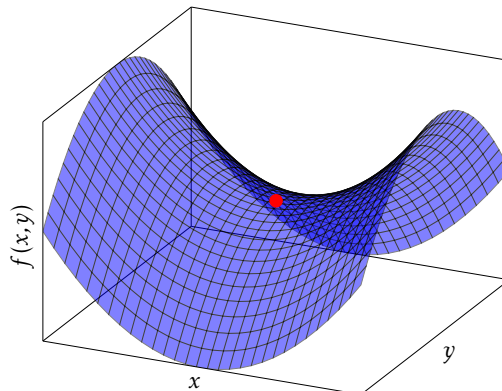
$$\inf_{\mathbf{x}'} \mathcal{L}(\mathbf{x}', \lambda, \mu) \leq \sup_{\mu', \lambda'} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda', \mu') \Leftrightarrow \underline{\mathcal{L}}(\lambda, \mu) \leq \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}).$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\sup_{\lambda, \mu} \underline{\mathcal{L}}(\lambda, \mu) \leq \inf_{\mathbf{x}} \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}),$$

qui est l'équation de la dualité faible (voir remarque ci-dessous). Si  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  est un point selle de  $\mathcal{L}$ , alors, pour tout triplet  $(\mathbf{x}, \lambda, \mu)$  de  $\mathcal{H} \times \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}_+^J$ , nous avons:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \lambda, \mu) &\leq \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) \\ \Rightarrow \sup_{\lambda, \mu} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \lambda, \mu) &\leq \inf_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{L}}(\hat{\mathbf{x}}) &\leq \underline{\mathcal{L}}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) \\ \Rightarrow \inf_{\mathbf{x}} \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) &\leq \tilde{\mathcal{L}}(\hat{\mathbf{x}}) \leq \underline{\mathcal{L}}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) \leq \sup_{\lambda, \mu} \underline{\mathcal{L}}(\lambda, \mu). \end{aligned}$$



**Figure 2.1.** Point selle du paraboloïde hyperbolique  $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ .

D'où,

$$\inf_{\mathbf{x}} \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = \sup_{\lambda, \mu} \underline{\mathcal{L}}(\lambda, \mu).$$

Finalement, d'après le résultat ci-dessus, nous en déduisons que

$$\inf_{\mathbf{x}} \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathcal{L}}(\hat{\mathbf{x}}) \quad , \quad \sup_{\lambda, \mu} \underline{\mathcal{L}}(\lambda, \mu) = \underline{\mathcal{L}}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) \quad , \quad \tilde{\mathcal{L}}(\hat{\mathbf{x}}) = \underline{\mathcal{L}}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}).$$

( $\Leftarrow$ ) Réciproquement, we supposons maintenant que les trois équations du Théorème 2.1 sont vérifiées. Nous obtenons alors que

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) \leq \sup_{\lambda, \mu} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \lambda, \mu) = \tilde{\mathcal{L}}(\hat{\mathbf{x}}) = \underline{\mathcal{L}}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}).$$

De la même manière, nous obtenons que

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) \geq \inf_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = \underline{\mathcal{L}}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = \tilde{\mathcal{L}}(\hat{\mathbf{x}}) = \sup_{\lambda, \mu} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \lambda, \mu).$$

Et donc, nous en concluons que

$$(\forall (\mathbf{x}, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}_+^J) \quad \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \lambda, \mu) \leq \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}).$$

□

#### Remarque:-

L'inégalité suivante est toujours vérifiée

$$\inf_{x \in \mathcal{H}} \tilde{\mathcal{L}}(x) \geq \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}_+^J} \underline{\mathcal{L}}(\lambda, \mu), \quad (2.6)$$

c'est la **dualité faible**. En effet, nous avons toujours.

$$\inf_{x \in \mathcal{H}} \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}_+^J} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \geq \sup_{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}_+^J} \inf_{x \in \mathcal{H}} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu).$$

En revanche, l'équation (2.5) du Théorème 2.1, nous dit que pour un point selle l'inégalité (2.6) est une égalité: c'est la **dualité forte**.

La dualité est un concept important en optimisation qui relie le problème primal et le problème dual. En effet, la dualité faible nous dit que résoudre le problème dual offre une borne inférieure à la solution du problème primal alors que la dualité forte nous indique que les deux problèmes ont la même valeur optimale. Pour un certain nombre de problèmes, il est plus simple et/ou moins coûteux de résoudre le problème dual que le problème primal. Enfin, les méthodes primales-duales, qui résolvent simultanément le problème primal et le problème dual, sont en général très efficaces. Certaines de ces méthodes seront vues dans le Chapitre 4.

#### Théorème 2.2: Condition suffisante d'optimalité

Si  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  est un point selle de  $\mathcal{L}$ , alors  $\hat{\mathbf{x}}$  est un minimiseur de  $f$  sur  $\mathcal{C}$ . De plus, la condition de complémentarité suivante est vérifiée

$$(\forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket) \quad \hat{\mu}_j h_j(\hat{\mathbf{x}}) = 0.$$

**Preuve:** Par définition,  $\hat{\mathbf{x}}$  appartient à  $\text{dom } f$  (en supposant qu'il existe un point admissible, sinon le problème n'a pas de solution). De plus, pour tout  $(\lambda, \mu)$  de  $\mathbb{R}^I \times \mathbb{R}_+^J$ , nous avons que  $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \lambda, \mu) \leq \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ . Pour tout vecteur  $\lambda'$  de  $\mathbb{R}^I$ , nous pouvons appliquer cette inégalité à  $\lambda = \hat{\lambda} + \lambda'$  et  $\mu = \hat{\mu}$ :

$$\sum_{i=1}^I \lambda'_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0.$$

De manière similaire, pour tout vecteur  $\mu'$  de  $\mathbb{R}_+^J$ , nous pouvons l'appliquer à  $\mu = \hat{\mu} + \mu'$  et  $\lambda = \hat{\lambda}$  pour obtenir

$$\sum_{j=1}^J \mu'_j h_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0.$$

Par conséquent, nous obtenons:

$$\begin{aligned} (\forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket) \quad g_i(\hat{\mathbf{x}}) &= 0 \\ (\forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket) \quad h_j(\hat{\mathbf{x}}) &\leq 0, \end{aligned}$$

i.e.  $\hat{\mathbf{x}}$  appartient à  $\mathcal{D}$ . Comme  $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \mathbf{0}) \leq \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$ , nous en déduisons que:

$$\sum_{i=1}^I \hat{\lambda}_i g_i(\hat{\mathbf{x}}) \geq 0.$$

Donc, la condition de complémentarité est vérifiée.

Enfin, comme  $\hat{\mathbf{x}}$  est un point admissible, nous avons:

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}) \quad \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) \Leftrightarrow f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^I \hat{\lambda}_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^J \hat{\mu}_j h_j(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$$

□

#### Remarque:-

⚠ La condition de complémentarité s'applique seulement aux contraintes d'inégalités et à leurs multiplicateurs de Lagrange. Ecrire des conditions de complémentarité pour des contraintes d'égalité n'a aucun sens.

### 2.3.2 Cas convexe

Afin d'obtenir des conditions d'optimalité plus forte, nous devons ajouter des hypothèses supplémentaires à nos théorèmes. Dans cette section, nous ajoutons des hypothèses supplémentaires de convexité:

#### Hypothèse 2.1

Les fonctions  $f$  et  $(h_j)_{j \in \llbracket 1, J \rrbracket}$  sont convexes et les fonctions  $(g_i)_{i \in \llbracket 1, I \rrbracket}$  sont affines.

Grâce à ces hypothèses supplémentaires, nous allons pouvoir obtenir une version plus forte du Théorème 2.2 qui offre des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.

#### Définition 2.6: Condition de Slater

Le Problème (P) satisfait la **condition de Slater** s'il existe un point  $\mathbf{x}$  strictement admissible, c'est-à-dire un point  $\mathbf{x}$  de  $\mathcal{H}$  qui vérifie

$$\begin{aligned} (\forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket) \quad g_i(\mathbf{x}) &= 0 \\ (\forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket) \quad h_j(\mathbf{x}) &< 0. \end{aligned}$$

#### Théorème 2.3: Théorème de Slater

Si la condition de Slater est vérifiée, alors il y a dualité forte.

#### Théorème 2.4: Condition d'optimalité nécessaire

Supposons que la condition de Slater soit vérifiée. Si  $\hat{\mathbf{x}}$  est un minimiseur de  $f$  sur  $\mathcal{C}$ , alors il existe  $\hat{\lambda}$  dans  $\mathbb{R}^I$  et  $\hat{\mu}$  dans  $\mathbb{R}_+^J$  tels que  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  soit un point selle du Lagrangien.

En rassemblant les Théorèmes 2.2 et 2.4, nous obtenons le corollaire suivant

#### Corollaire 2.5

Supposons que la condition de Slater soit vérifiée. Le point  $\hat{\mathbf{x}}$  est un minimiseur de  $f$  sur  $\mathcal{C}$  si et seulement s'il existe  $\hat{\lambda}$  dans  $\mathbb{R}^I$  et  $\hat{\mu}$  dans  $\mathbb{R}_+^J$  tels que  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu})$  soit un point selle du Lagrangien.



**Remarque:-**

Ce corollaire associé à la condition de complémentarité est très utile en pratique pour chercher les minimiseurs de  $f$  sur  $\mathcal{C}$ . Toutefois, il ne faut pas oublier que l'Hypothèse 2.1 doit être vérifiée pour que cette condition nécessaire soit vraie.

### 2.3.3 Cas convexe différentiable

Les résultats des Théorèmes 2.2 et 2.4 peuvent être encore renforcés en ajoutant en plus de l'Hypothèse 2.1 de convexité, une hypothèse sur la différentiabilité du Problème (P):

#### Hypothèse 2.2

Les fonctions  $f, (h_j)_{j \in \llbracket 1, J \rrbracket}$  et  $(g_i)_{i \in \llbracket 1, I \rrbracket}$  sont continûment différentiables, c'est-à-dire de classe  $\mathcal{C}^1$ , sur leur domaine respectif.

#### Théoreme 2.6: Karush-Kuhn-Tucker theorem (KKT)

Supposons que la condition de Slater est vérifiée. Les conditions suivantes sont alors des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$  soit un point selle du Lagrangien, et donc que  $\hat{\mathbf{x}}$  soit une solution de (P)

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

$$(\forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket) \quad g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0 \quad (2.8)$$

$$(\forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket) \quad h_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0 \quad (2.9)$$

$$(\forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket) \quad \hat{\mu}_j \geq 0 \quad (2.10)$$

$$(\forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket) \quad \hat{\mu}_j h_j(\hat{\mathbf{x}}) = 0 \quad (2.11)$$

L'équation (2.7) est l'équation de stationnarité, les équations (2.8) et (2.9) représentent l'admissibilité du problème primal alors que l'équation (2.10) représente l'admissibilité du problème dual. Enfin, l'équation (2.11) est l'équation de complémentarité.

### 2.3.4 Cas différentiable (pas d'hypothèse de convexité)

Dans cette section, nous supposons que l'Hypothèse 2.2 est vérifiée.

Les problèmes d'optimisation convexes correspondent aux problèmes *simples* car les points critiques sont tous des minima globaux. Cependant, de nombreux problèmes d'intérêt ne sont pas nécessairement convexes. Dans ce cas, peut-on trouver des conditions nécessaires et suffisantes telles que celles du Théorème 2.6 pour caractériser les solutions de notre problème d'optimisation? Les deux théorèmes suivants répondent à cette question.

#### Théoreme 2.7: Conditions suffisantes de Lagrange

Supposons que  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$  soit un point de  $\mathcal{H} \times \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}_+^J$  vérifiant

$$(\forall \mathbf{x} \in \text{dom } f) \quad \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) \quad (2.12)$$

$$(\forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket) \quad g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0 \quad (2.13)$$

$$(\forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket) \quad h_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0 \quad (2.14)$$

$$(\forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket) \quad \hat{\mu}_j \geq 0 \quad (2.15)$$

$$(\forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket) \quad \hat{\mu}_j h_j(\hat{\mathbf{x}}) = 0, \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

alors  $\hat{\mathbf{x}}$  est un minimum global de (P).

**Remarque:-**

Les théorèmes 2.7 et 2.6 diffèrent sur les points suivants:

- Le Théorème 2.7 ne fait pas d'hypothèse sur la convexité du problème et ne requiert pas la condition de Slater.
- En revanche, le Théorème 2.7 demande comme hypothèse que  $\hat{\mathbf{x}}$  minimise le Lagrangien avec les variables duales fixées.
- Le Théorème 2.7 n'offre que des conditions suffisantes alors que le Théorème 2.6 offrent des conditions nécessaires et suffisantes.

**Définition 2.7: Condition de Mangasarian-Fromovitz**

Le Problème (P) satisfait la **condition de Mangasarian-Fromovitz** au point  $\mathbf{x}$  si  $\nabla g_i(\mathbf{x})_{i \in \llbracket 1, I \rrbracket}$  forme une famille linéairement indépendante et s'il existe une direction  $\mathbf{d}$  dans  $\mathcal{H}$  telle que:

$$\begin{aligned} (\forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket) \quad \langle \nabla g_i(\mathbf{x}) \mid \mathbf{d} \rangle &= 0 \\ (\forall j \in \mathcal{J}_0(\mathbf{x})) \quad \langle \nabla h_j(\mathbf{x}) \mid \mathbf{d} \rangle &< 0, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{J}_0(\mathbf{x})$  est l'ensemble des indices des contraintes d'inégalités actives en  $\mathbf{x}$ , i.e.

$$\mathcal{J}_0(\mathbf{x}) = \{j \in \llbracket 1, J \rrbracket \mid h_j(\mathbf{x}) = 0\}.$$

**Théorème 2.8: Conditions nécessaires KKT**

Supposons que la condition de Mangasarian-Fromovitz est vérifiée au point  $\hat{\mathbf{x}}$ . Si  $\hat{\mathbf{x}}$  est un minimum local de (P), alors il existe des multiplicateurs de Lagrange  $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$  pour  $\hat{\mathbf{x}}$  vérifiant

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\lambda}, \hat{\mu}) = 0 \quad (2.18)$$

$$(\forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket) \quad g_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0 \quad (2.19)$$

$$(\forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket) \quad h_j(\hat{\mathbf{x}}) \leq 0 \quad (2.20)$$

$$(\forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket) \quad \hat{\mu}_j \geq 0 \quad (2.21)$$

$$(\forall j \in \llbracket 1, J \rrbracket) \quad \hat{\mu}_j h_j(\hat{\mathbf{x}}) = 0 \quad (2.22)$$

Le Théorème 2.8 ressemble au Théorème 2.6 mais il n'offre cependant que des conditions nécessaires pour caractériser un minimum local. En l'absence de convexité, un point vérifiant les équations du Théorème 2.8 peut-être un minimum local, un minimum global, un point selle, un maximum local, ou un maximum global. Toutefois, ce théorème reste utile pour trouver de bons candidats à la résolution de (P) dont il faudra ensuite vérifier la nature.

**Remarque:-**

La condition de Mangasarian-Fromovitz joue ainsi le rôle de la condition de Slater dans le cas de problèmes d'optimisation non-convexes. Dans le cas convexe, nous pouvons montrer que la condition de Slater et la condition de Mangasarian-Fromovitz sont équivalentes.

**Exercice: Equivalence des conditions de Slater et de Mangasarian-Fromovitz**

Prouver l'équivalence des conditions de Slater et de Mangasarian-Fromovitz dans le cas de problèmes convexes.

## 2.4 Exercice d'application

### Exercice: Retour au problème de régression sous contraintes

Revenons à notre problème initial d'optimisation quadratique sous contraintes linéaires

$$\arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{D+1}} \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \mathbf{Q} \mathbf{w} + \mathbf{c}^\top \mathbf{w} \quad \text{s.t. } \mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{b}.$$

Questions:

1. Montrer qu'il existe une unique solution.
2. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, trouver une expression des solutions du problème d'optimisation quadratique.

### Exercice: Distance à l'origine et intersection de deux plans

Trouver les points de  $\mathbb{R}^3$  appartenant aux plans  $H_1$  et  $H_2$  se situant au plus près de l'origine.

$$(H_1) : 3x + y + z = 5$$

$$(H_2) : x + y + z = 1$$

Étapes:

- Formulation du problème en problème d'optimisation
- Existence des solutions
- Application du théorème de Karush-Kuhn-Tucker
- Résolution du système d'équations

### Exercice: Résolution d'un problème d'optimisation sous contrainte

Résoudre le problème suivant sur le domaine  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ :

$$\begin{cases} \text{minimiser} & x + 2/y \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 & \\ \text{sous contraintes} & \frac{1}{2} \leq y \\ & y^2 \leq x \end{cases}$$

### Exercice: Importance de la condition de Slater dans le théorème KKT

Soit le problème d'optimisation suivant

$$\begin{cases} \text{minimiser} & x_1^2 + x_2^2 \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 & \\ \text{sous contraintes} & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1 \\ & (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 1 \end{cases}$$

Questions:

1. Dessiner l'ensemble admissible et les lignes de niveau de la fonction objectif. Quelles sont les solutions du problème? Que dire sur la condition de Slater?
2. Ecrire le Lagrangien du problème et les conditions d'optimalité de KKT. Que peut-on en dire? Existe-t-il une paire de multiplicateurs  $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$  qui prouve l'existence un point primal  $\hat{\mathbf{x}}$  optimal?
3. Ecrire et résoudre le problème dual. Y'a-t-il dualité forte? Que dire de l'optimum dual?

## 2.5 Application numérique à la NMF avec scipy

La factorisation de matrices non-négatives (NMF) vise à factoriser une matrice  $\mathbf{V}$  de taille  $F \times N$  à coefficients dans  $\mathbb{R}_*$  en un produit matriciel  $\mathbf{WH}$  où  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{H}$  sont des matrices à coefficients dans  $\mathbb{R}_*$  de taille respective  $F \times K$  et  $K \times N$ . Ainsi, nous cherchons une approximation de  $\mathbf{V}$  comme suit:

$$\mathbf{V} \approx \mathbf{WH}.$$

La NMF a trouvé de nombreuses applications dans les dernières années comme par exemple l'extraction d'information et la séparation de sources pour des signaux audio ou des images, la fouille de texte, ou encore les systèmes de recommandation.

Dans cette application, nous allons utiliser la NMF pour extraire des informations d'un jeu d'images. Nous allons utiliser le jeu de données Olivetti qui est un ensemble de 400 images de visage en niveau de gris de résolution  $64 \times 64$ . Notre but sera de construire une base de visages types et d'exprimer les visages du jeu de données dans cette base. Dans ce contexte, la matrice de données  $\mathbf{V}$  contiendra le jeu d'images: chaque ligne de  $\mathbf{V}$  sera la vectorisation d'une image du jeu de données. La matrice  $\mathbf{V}$  sera donc de taille  $400 \times 4096$ . La matrice  $\mathbf{H}$  représentera notre base de visages types: chaque ligne de  $\mathbf{H}$  correspondra à la vectorisation d'une image de notre base. Enfin, la matrice  $\mathbf{W}$  contiendra les coefficients dans la décomposition linéaire des images du jeu de données dans la base. La dimension  $K$  représente la dimension de notre base et nous pourrions la faire varier à notre convenance.

Afin de factoriser  $\mathbf{V}$ , nous allons chercher à résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\arg \min_{(\mathbf{W}, \mathbf{H}) \in \mathbb{R}^{F \times K} \times \mathbb{R}^{K \times N}} \|\mathbf{V} - \mathbf{WH}\|_2 \quad \text{s.t. } \mathbf{W} \geq 0, \mathbf{H} \geq 0.$$

Ce problème étant difficile à résoudre directement, nous allons procéder à une minimisation alternée, c'est-à-dire que nous allons d'abord minimiser en  $\mathbf{H}$  pour  $\mathbf{W}$  fixé puis en  $\mathbf{W}$  pour  $\mathbf{H}$  fixé et enfin répéter l'opération jusqu'à la convergence de l'algorithme. Nous allons donc résoudre alternativement les deux sous-problèmes

$$\arg \min_{\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{K \times N}} \|\mathbf{V} - \mathbf{WH}\|_2 \quad \text{s.t. } \mathbf{H} \geq 0 \quad (2.23)$$

$$\arg \min_{\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{F \times K}} \|\mathbf{V} - \mathbf{WH}\|_2 \quad \text{s.t. } \mathbf{W} \geq 0. \quad (2.24)$$

Nous remarquons alors que le Problème (2.23) s'écrit comme  $N$  problèmes de régression linéaires indépendants avec contraintes de non-négativité

$$\arg \min_{\mathbf{h}_n \in \mathbb{R}^K} \|\mathbf{v}_n - \mathbf{Wh}_n\|_2 \quad \text{s.t. } \mathbf{h}_n \geq 0, \quad (2.25)$$

où  $\mathbf{v}_n$  et  $\mathbf{h}_n$  sont respectivement la  $n$ -ième colonne de  $\mathbf{V}$  et de  $\mathbf{H}$ . Nous pouvons alors appliquer l'algorithme NNLS pour résoudre le Problème (2.23). Nous pouvons ensuite faire de même pour les  $F$  sous-problèmes de (2.24) en remarquant que  $\mathbf{V}^T \approx \mathbf{H}^T \mathbf{W}^T$ :

$$\arg \min_{\mathbf{w}_f \in \mathbb{R}^K} \|\mathbf{v}_f - \mathbf{H}^T \mathbf{w}_f\|_2 \quad \text{s.t. } \mathbf{w}_f \geq 0, \quad (2.26)$$

où  $\mathbf{v}_f$  et  $\mathbf{w}_f$  sont les  $f$ -ième ligne de  $\mathbf{V}$  et de  $\mathbf{W}$ .

Nous avons donc le squelette de notre algorithme donné dans l'Algorithme 1. Pour une implémentation de l'algorithme et une application à l'apprentissage par dictionnaire de visage, voir le notebook Jupyter *Optimisation sous contraintes - Application NNLS-NMF*.

---

**Algorithm 1** Squelette de l'algorithme pour la NMF basé sur NNLS

---

**Input:** Une matrice non-négative de données  $\mathbf{V}$

**Input:** Une initialisation  $(\mathbf{W}_{\text{init}}, \mathbf{H}_{\text{init}})$

**Output:** Une factorisation  $(\mathbf{W}, \mathbf{H})$  de  $\mathbf{V}$ .

```
1: Initialisation de  $(\mathbf{W}, \mathbf{H})$  à  $(\mathbf{W}_{\text{init}}, \mathbf{H}_{\text{init}})$ 
2: repeat
3:   for  $n = 1, \dots, N$  do
4:     Mettre à jour la  $n$ -ième colonne de  $\mathbf{H}$  en résolvant (2.25) avec NNLS.
5:   end for
6:   for  $f = 1, \dots, F$  do
7:     Mettre à jour la  $f$ -ième ligne de  $\mathbf{W}$  en résolvant (2.26) avec NNLS.
8:   end for
9: until Convergence
10: return  $(\mathbf{W}, \mathbf{H})$ 
```

---

### 3.1 Préliminaires

Nous commençons par introduire quelques définitions.

#### Définition 3.1: Graphe d'une fonction

Le **graphe** d'une fonction  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est défini par

$$\text{gra } f = \{(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R} \mid f(x) = y\}.$$

Nous rappelons ici la notion d'épigraphe qui permet de transférer des propriétés d'une fonction à des propriétés d'un ensemble. En particulier, nous rappelons qu'une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.

#### Définition 3.2: Epigraphe d'une fonction

L'**épigraphe** d'une fonction  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est défini par

$$\text{Epi } f = \{(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y\}.$$

#### Définition 3.3: Fonction propre

Une fonction  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est dite **propre** si son domaine n'est pas réduit à l'ensemble vide.

### 3.2 Semi-continuité inférieure

#### Définition 3.4: Semi-continuité inférieure

Une fonction  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est **semi-continue inférieurement** (s.c.i) en un point  $x$  de  $\mathcal{H}$  si pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{H}$  convergeant vers  $x$ , nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf\{f(x_k) \mid k \geq n\} \geq f(x).$$

La propriété de semi-continuité inférieure est illustrée sur la Figure 3.1. Notons que toute fonction continue est semi-continue inférieurement.

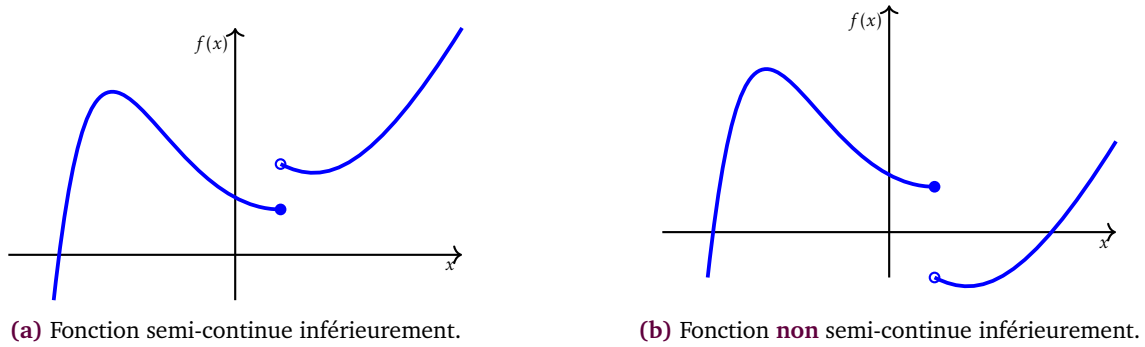


Figure 3.1. Illustration de la semi-continuité inférieure.

La propriété suivante est utile pour visualiser la notion de semi-continuité inférieure.

### Proposition 3.1

Une fonction  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est semi-continue inférieurement si et seulement si son épigraphe est un fermé de  $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$ .

**Preuve:** 1. Supposons que  $f$  soit s.c.i. Soit  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points incluse dans  $\text{Epi } f$  et convergent vers  $(x, y)$ . Nous avons donc:

$$\begin{aligned} f(x_n) \leq y_n &\Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y \\ &\Rightarrow (x, y) \in \text{Epi } f. \end{aligned}$$

2. Supposons que  $\text{Epi } f$  soit fermé dans  $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$ . Raisonnons par l'absurde: supposons qu'il existe un point  $x$  de  $\mathcal{H}$ , une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points de  $\mathcal{H}$  convergent vers  $x$  et une valeur réelle  $\alpha$  tels que  $f(x) > \alpha > \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf\{f(x_k) \mid k \geq n\}$ . Nous pouvons donc extraire une sous-suite  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  telle que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(x_{k_n}) < \alpha.$$

Comme  $\text{Epi } f$  est fermé, cela implique que  $x$  appartient à  $\text{Epi } f$  et donc que  $f(x) \leq \alpha$ . □

### Remarque:-

Nous noterons  $\Gamma_0(\mathcal{H})$  l'ensemble des fonctions  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  qui sont convexes, propres et semi-continues inférieurement.

## 3.3 Sous-différentiel

### Définition 3.5: Sous-différentiel

Soit  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonction propre.

Le **sous-différentiel** de  $f$  au point  $x$  de  $\mathcal{H}$  est l'ensemble  $\partial f(x)$  de vecteurs de  $\mathcal{H}$  défini comme

$$\partial f(x) = \{u \in \mathcal{H} \mid (\forall y \in \mathcal{H}) \quad \langle y - x \mid u \rangle + f(x) \leq f(y)\}.$$

On dira que  $f$  est sous-différentiable en  $x$  si  $\partial f(x)$  n'est pas l'ensemble vide  $\emptyset$  et nous appellerons sous-gradients de  $f$  en  $x$  les éléments de  $\partial f(x)$ .

Nous observons donc que les sous gradients de  $f$  au point  $x$  sont les pentes des minorantes affines de  $f$  qui coïncident avec  $f$  au point  $x$ .

△ Le sous-différentiel est une multifonction, c'est-à-dire qu'elle associe à un vecteur  $\mathbf{x}$  de  $\mathcal{H}$  un sous ensemble de  $\mathcal{H}$  (i.e. un élément de  $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ , l'ensemble des parties de  $\mathcal{H}$ ).

**Remarque:-**

Si  $f$  est convexe, alors elle est différentiable au point  $x$  si et seulement si  $\partial f(x) = \{f'(x)\}$ .

**Théoreme 3.2: Règle de Fermat**

Soit  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonction propre.

Alors les minimiseurs de  $f$  sur  $\mathcal{H}$  sont exactement les zéros de  $\partial f$ :

$$\arg \min f = \text{zer } \partial f \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{H} \mid 0 \in \partial f(x)\}.$$

**Preuve:** Soit  $x$  un point de  $\mathcal{H}$  qui minimise  $f$ :

$$\begin{aligned} x \in \arg \min f &\Leftrightarrow (\forall y \in \mathcal{H}) \quad f(x) \leq f(y) \\ &\Leftrightarrow (\forall y \in \mathcal{H}) \quad f(x) + \langle y - x \mid 0 \rangle \leq f(y) \\ &\Leftrightarrow 0 \in \partial f(x). \end{aligned}$$

□

△ La règle de Fermat ne nécessite pas d'hypothèse de convexité sur  $f$ . Toutefois, le calcul du sous-différentiel pour une fonction non-convexe est en général très difficile voire impossible. Dans le cas où  $f$  est convexe, nous retrouvons l'égalité d'Euler, i.e. la condition d'optimalité  $\nabla f(x) = 0$ .

**Proposition 3.3**

Soient  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{G}$  deux espaces de Hilbert,  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  et  $g : \mathcal{G} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ , deux fonctions propres,  $L$  une application linéaire continue de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{G}$  et  $\lambda$  un réel strictement positif.

Supposons que  $\text{dom } g \cap L(\text{dom } f)$  ne soit pas vide, alors nous avons les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \partial(\lambda f) &= \lambda \partial f \\ \partial f + L^* \circ (\partial g) \circ L &\subset \partial(f + g \circ L), \end{aligned}$$

où  $L^*$  est l'adjoint de l'opérateur  $L$ .

**Preuve:** Soient  $\mathbf{x}$  un vecteur de  $\mathcal{H}$ ,  $\mathbf{u}$  un sous-gradient de  $f$  en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{v}$  un sous-gradient de  $g$  en  $L\mathbf{x}$ . Alors,  $\mathbf{u} + L^*\mathbf{v}$  est un point de l'ensemble  $\partial f(\mathbf{x}) + (L^* \circ \partial g \circ L)(\mathbf{x})$ . Il nous faut donc montrer que ce point est également un sous-gradient de  $f + g \circ L$  en  $\mathbf{x}$ .

Comme  $\mathbf{u}$  est un sous-gradient de  $f$  en  $\mathbf{x}$ , nous avons par définition:

$$(\forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}) \quad \langle \mathbf{y} - \mathbf{x} \mid \mathbf{u} \rangle + f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}).$$

De même, comme  $\mathbf{v}$  est un sous-gradient de  $g$  en  $L\mathbf{x}$ , nous obtenons:

$$(\forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}) \quad \langle L\mathbf{y} - L\mathbf{x} \mid \mathbf{v} \rangle + g(L\mathbf{x}) \leq g(L\mathbf{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{y} - \mathbf{x} \mid L^*\mathbf{v} \rangle + g(L\mathbf{x}) \leq g(L\mathbf{y}).$$

En additionnant, les deux inégalités, nous obtenons:

$$(\forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}) \quad \langle \mathbf{y} - \mathbf{x} \mid \mathbf{u} + L^*\mathbf{v} \rangle + (f + g \circ L)(\mathbf{x}) \leq (f + g \circ L)(\mathbf{y}).$$

Par définition du sous-gradient, nous avons donc que  $\mathbf{u} + L^*\mathbf{v}$  est un élément de  $\partial(f + g \circ L)(\mathbf{x})$ . □

△ Attention, l'opérateur de sous-différentiel n'est notamment pas un opérateur linéaire dans le cas général. Toutefois, pour les fonctions de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$  vérifiant  $\text{int}(\text{dom } g) \cap L(\text{dom } f)$ , l'inclusion ci-dessus devient une égalité.

**Remarque:-**

Dans l'inclusion  $\partial f + \partial g = \partial(f + g)$ , il est important de noter que l'addition de gauche est une somme de Minkowski entre deux parties de  $\mathcal{H}$  alors que la somme de droite est une somme de deux fonctions.



### 3.4 Fonction conjuguée / Transformation de Fenchel

#### Définition 3.6: Fonction conjuguée ou transformée de Fenchel

Soit  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ .

La **fonction conjuguée** de  $f$  est la fonction  $f^* : \mathcal{H} \rightarrow [-\infty, +\infty]$  définie comme suit

$$(\forall u \in \mathcal{H}) \quad f^*(u) = \sup_{x \in \mathcal{H}} (\langle x | u \rangle - f(x)).$$

Une intuition géométrique de la fonction conjuguée est donnée sur la Figure 3.2. A partir de la définition, nous avons que  $f(x) \geq \langle x | u \rangle + (-f^*(u))$ . Nous voyons alors que  $-f^*(u)$  correspond à l'ordonnée à l'origine de la meilleure approximation de  $f$  sous forme d'une fonction affine minorante de direction  $u$ .

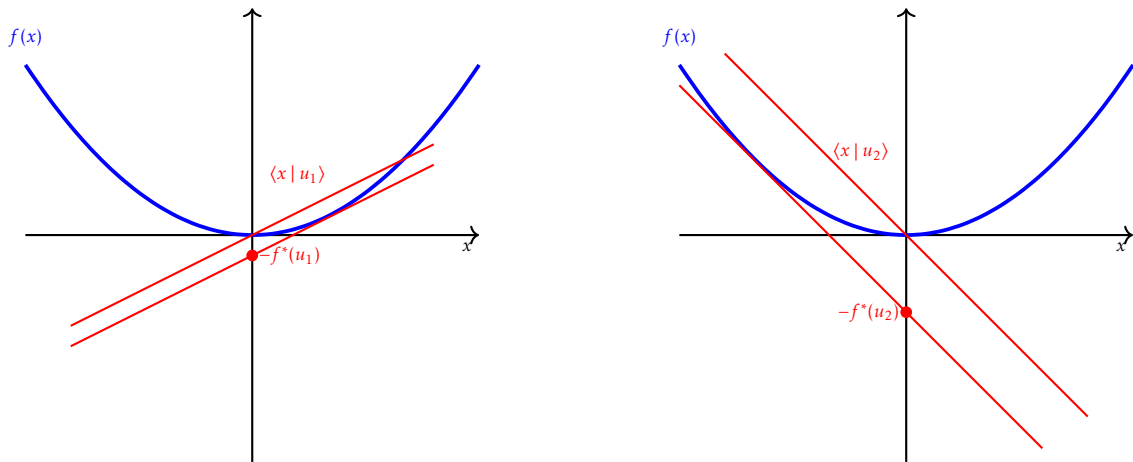


Figure 3.2. Illustration de la fonction conjuguée pour la fonction  $f : x \mapsto 0.15x^2$ .

#### Exemple 3.1: Transformée de Fenchel du potentiel énergie

Calculons la conjuguée de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{2} \|x\|_2^2$ . Pour tout  $x$  de  $\mathcal{H}$  et pour tout  $u$  de  $\mathcal{H}$ , nous avons

$$\frac{1}{2} \|u - x\|_2^2 = \frac{1}{2} \|u\|_2^2 - \langle x | u \rangle + \frac{1}{2} \|x\|_2^2,$$

d'où

$$\langle x | u \rangle - \frac{1}{2} \|x\|_2^2 = \frac{1}{2} \|u\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u - x\|_2^2.$$

Le membre de droite est maximum lorsque  $\frac{1}{2} \|u - x\|_2^2$  est nul, c'est-à-dire lorsque  $x = u$ . Nous obtenons donc

$$f^*(u) = \langle u | u \rangle - \frac{1}{2} \|u\|_2^2 = \frac{1}{2} \|u\|_2^2 = f(u).$$

Nous en concluons que  $f$  est sa propre conjuguée.

**Proposition 3.4**

La fonction conjuguée  $f^*$  est s.c.i. et convexe (même si  $f$  ne l'est pas).  
Elle possède également les propriétés suivantes qui sont utiles pour son calcul:

- Si  $f$  est une fonction paire, alors  $f^*$  est paire.
- $(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+) \quad (\alpha f)^* = \alpha f^*(./\alpha)$ .
- Soit  $\mathcal{G}$  un espace de Hilbert et  $L$  une application linéaire bijective de  $\mathcal{G}$  and  $\mathcal{H}$ .  
Alors, nous avons  $(f \circ L)^* = f^* \circ (L^{-1})^*$ .  
(Attention:  $(L^{-1})^*$  désigne ici l'opérateur adjoint de  $L^{-1}$ !)
- Pour tout  $u$  de  $\mathcal{H}$ ,

$$(\forall (y, v) \in \mathcal{H}^2)(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \quad (f(u - y) + \langle u | v \rangle + c)^* = f^*(u - v) + \langle y | u - v \rangle - c.$$

**Théoreme 3.5: Moreau-Fenchel**

Soit  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonction propre.

La fonction  $f$  est sa propre biconjuguée (i.e.  $f^{**} = f$ ) si et seulement si  $f$  est s.c.i. et convexe.

**Proposition 3.6: Inégalité de Fenchel-Young**

Si  $f$  est une fonction propre, alors l'inégalité de Fenchel-Young est vérifiée et les cas d'égalité correspondent aux vecteurs de le sous-différentiel:

1.  $(\forall (x, u) \in \mathcal{H}^2) \quad f(x) + f^*(u) \geq \langle x | u \rangle$
2.  $(\forall (x, u) \in \mathcal{H}^2) \quad u \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(x) + f^*(u) = \langle x | u \rangle.$

**Preuve:** Par définition de la transformée de Fenchel, nous avons

$$f(x) + f^*(u) = f(x) + \sup_{x \in \mathcal{H}} (\langle x | u \rangle - f(x)) \geq f(x) + \langle x | u \rangle - f(x) = \langle x | u \rangle.$$

L'inégalité de Fenchel-Young est donc bien vérifiée.

De plus, supposons maintenant que  $u$  soit un sous-gradient de  $f$  en  $x$ :

$$\begin{aligned} u \in \partial f(x) &\Leftrightarrow (\forall y \in \mathcal{H}) \langle y - x | u \rangle + f(x) \leq f(y) \\ &\Leftrightarrow (\forall y \in \mathcal{H}) \langle y | u \rangle - f(y) \leq \langle x | u \rangle - f(x) \\ &\Leftrightarrow \sup_{y \in \mathcal{H}} (\langle y | u \rangle - f(y)) \leq \langle x | u \rangle - f(x) \\ &\Leftrightarrow f^*(u) \leq \langle x | u \rangle - f(x) \\ &\Leftrightarrow f^*(u) + f(x) \leq \langle x | u \rangle. \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.7**

Si  $f$  est une fonction propre convexe et s.c.i., alors

$$(\forall (x, u) \in \mathcal{H}^2) \quad u \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \partial f^*(u).$$

En particulier, la proposition précédente nous donne que  $(\partial f)^{-1} = \partial f^*$ .

**Preuve:** La preuve repose sur l'application de l'égalité de Fenchel-Young à  $f$  puis à  $f^*$ :

$$\begin{aligned} u \in \partial f(x) &\Leftrightarrow f^*(u) + f(x) \leq \langle x | u \rangle && \text{(Égalité de Fenchel-Young appliquée à } f) \\ &\Leftrightarrow f^*(u) + f^{**}(x) \leq \langle x | u \rangle && \text{(Théorème de Moreau-Fenchel)} \\ &\Leftrightarrow x \in \partial f^*(u) && \text{(Égalité de Fenchel-Young appliquée à } f^*). \end{aligned}$$

□

**Remarque:-**

Nous remarquons que la fonction conjuguée et le sous-différentiel sont étroitement liées. Ainsi, pour le calcul de le sous-différentiel d'une fonction  $f$ , nous fixons un point puis nous cherchons les pentes de toutes les minorantes affines et exactes en ce point, alors que pour le calcul de la fonction conjuguée, nous fixons la pente et cherchons à quels points celle-ci correspond à une minorante affine exacte.

### 3.5 Exercice d'application directe du cours

#### Exercice: Calcul de transformées de Fenchel

Calculer la conjuguée des fonctions suivantes

- $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \langle c \mid x \rangle$ , où  $c$  est un vecteur  $\mathbb{R}^N$ .
- $f : \mathbb{R}^N \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  telle que  $f(x) = \iota_{\mathbb{R}_+^N}(x - c)$ , où  $c$  est un vecteur  $\mathbb{R}^N$  et  $\iota$  la fonction indicatrice de  $\mathbb{R}_+^N$  définie par

$$\iota_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^N \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

- $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$  telle que  $f(x) = |x|$ .

Dans ce chapitre nous considérons le problème de la minimisation d'une fonction  $f$  de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$  sur  $\mathcal{H}$ .

## 4.1 Algorithme du point proximal

### 4.1.1 Motivation

Soit  $f$  une fonction de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$  à gradient Lipschitz de constante  $\beta$  défini sur tout  $\mathcal{H}$ . Un algorithme efficace pour la minimisation de  $f$  est l'algorithme de descente de gradient qui consiste à calculer un nouvel itéré  $x_{n+1}$  à partir de l'itéré actuel  $x_n$  en utilisant l'équation suivante:

$$x_{n+1} = x_n - \gamma \nabla f(x_n), \quad (4.1)$$

où  $\gamma$  est le pas. La convergence vers un minimiseur de  $f$  (si un tel point existe) est garantie pour un choix du pas  $\gamma$  dans l'ensemble  $]0, 2/\beta[$ . L'équation (4.1) correspond à un schéma dit explicite: en effet, connaissant  $x_n$  nous pouvons calculer directement  $x_{n+1}$ .

Lorsque  $f$  n'est plus différentiable en tout point de  $\mathcal{H}$ , le schéma d'itérations de la descente de gradient ne peut plus être utilisée. Une première idée serait donc de remplacer le gradient au point  $x_n$  par un sous-gradient. Cependant selon la fonction  $f$  et le choix du sous-gradient, l'algorithme de descente de sous-gradient peut osciller et donc ne pas converger. Inspiré par les schémas numériques de résolution d'équations différentielles ordinaires, nous pouvons essayer d'effectuer une descente de sous-gradient implicite pour réduire ces oscillations, c'est-à-dire de chercher un sous-gradient au point  $x_{n+1}$  plutôt qu'au point  $x_n$ . Le schéma implicite s'exprime alors comme

$$x_{n+1} = x_n - \gamma g_{n+1} \quad \text{avec } g_{n+1} \in \partial f(x_{n+1}). \quad (4.2)$$

Plusieurs questions se posent alors:

1. A la différence de la descente de sous-gradient explicite, le schéma implicite (4.2) utilise la valeur du gradient à la nouvelle itération  $x_{n+1}$ . Il n'est donc plus possible de calculer directement  $x_{n+1}$  à partir de (4.2). En revanche, nous pouvons réécrire (4.2) en isolant  $x_{n+1}$ :

$$(\mathbf{I} + \gamma \partial f)x_{n+1} = x_n.$$

Pour calculer notre nouvel itéré, nous souhaiterions donc calculer  $(\mathbf{I} + \gamma \partial f)^{-1}x_n$ . En réécrivant (4.2) sous la forme

$$0 \in (x_{n+1} - x_n) + \gamma \partial f(x_{n+1}),$$

nous voyons par la règle de Fermat que  $x_{n+1}$  est un minimiseur de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{2\gamma} \|x - x_n\|^2 + f(x)$ .

2. La convergence des itérés de la descente de sous-gradient implicite est-elle toujours garantie et si oui pour quelles valeurs du pas?

### 4.1.2 Enveloppe de Moreau et opérateur proximal

Dans toute cette section  $f$  est une fonction de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$ . Nous introduisons maintenant l'enveloppe de Moreau qui sera un des outils centraux de ce cours.

#### Définition 4.1: Enveloppe de Moreau

L'**enveloppe de Moreau** de  $f$  de paramètre  $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$  est la fonction  $M^\gamma f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$M^\gamma f(x) = \inf_{y \in \mathcal{H}} f(y) + \frac{1}{2\gamma} \|y - x\|^2.$$

Nous allons voir que l'enveloppe de Moreau est un outil servant à lisser une fonction convexe non-lisse sans modifier ses minimiseurs. Ainsi, la minimisation d'une fonction  $f$  non lisse est équivalente à la minimisation de son enveloppe de Moreau.

Nous introduisons un opérateur lié à l'enveloppe de Moreau et qui retourne les points auxquels l'infimum de la définition de l'enveloppe de Moreau est atteint.

#### Définition 4.2: Opérateur proximal

L'**opérateur proximal** associé à  $f$  est l'opérateur  $\text{prox} f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  tel que

$$\text{prox}_f(x) = \arg \min_{y \in \mathcal{H}} f(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2.$$

La proposition suivante nous assure que l'opérateur proximal est bien défini pour les fonctions de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$ .

#### Proposition 4.1: Existence et unicité de l'opérateur proximal

Pour tout  $x$  de  $\mathcal{H}$ , il existe un unique vecteur  $p$  de  $\mathcal{H}$  tel que

$$f(p) + \frac{1}{2\gamma} \|p - x\|^2 = \inf_{y \in \mathcal{H}} f(y) + \frac{1}{2\gamma} \|y - x\|^2.$$

**Preuve:** Par l'inégalité de Fenchel-Young, nous avons pour tout  $y$  de  $\mathcal{H}$  que  $f(y) \geq \langle y | u \rangle - f^*(u)$ . Donc,

$$f(y) + \frac{1}{2\gamma} \|y - x\|^2 \geq \langle y | u \rangle - f^*(u) + \frac{1}{2\gamma} \|y - x\|^2.$$

Le terme  $f(y) + \frac{1}{2\gamma} \|y - x\|^2$  tend donc vers l'infini lorsque  $\|y\|$  tend vers l'infini, i.e.  $f(\cdot) + \frac{1}{2\gamma} \|\cdot - x\|^2$  est coercive. De plus,  $f$  est convexe et  $\frac{1}{2\gamma} \|\cdot - x\|^2$  est strictement convexe. Donc,  $f(\cdot) + \frac{1}{2\gamma} \|\cdot - x\|^2$  est strictement convexe. Comme  $f(\cdot) + \frac{1}{2\gamma} \|\cdot - x\|^2$  est également propre et s.c.i., le théorème d'existence des minimiseurs nous donne le résultat voulu.  $\square$

#### Exemple 4.1: Fonction valeur absolue

Pour illustrer les outils introduits, nous calculons l'enveloppe de Moreau et l'opérateur proximal de la fonction valeur absolue,  $f : x \mapsto |x|$ . Pour cela, nous cherchons l'optimum de la fonction  $y \mapsto f(y) + \frac{1}{2\gamma} \|y - x\|^2$  en cherchant les zéros de sa dérivée. Trois cas apparaissent alors

- $y > 0$ :  $1 + \gamma^{-1}(y - x) = 0 \Rightarrow y = x - \gamma$ ,
- $y < 0$ :  $-1 + \gamma^{-1}(y - x) = 0 \Rightarrow y = x + \gamma$ ,
- $y = 0$ :  $\gamma^{-1}(y - x) \in [-1, 1] \Rightarrow y \in [x - \gamma, x + \gamma]$ .

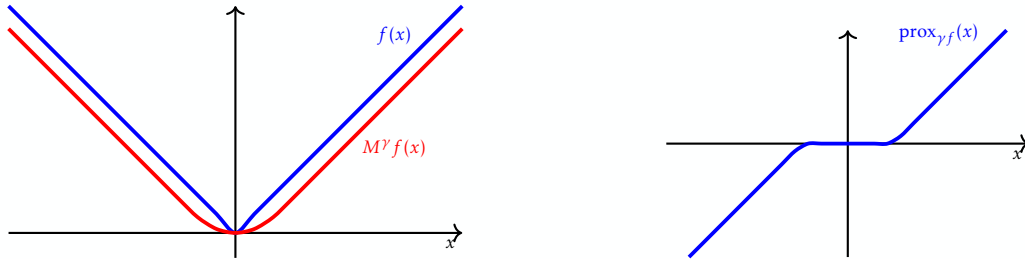
Nous obtenons donc l'opérateur proximal de  $\gamma f$ :

$$\text{prox}_{\gamma f}(x) = \begin{cases} x - \gamma & \text{si } x > \gamma \\ x + \gamma & \text{si } x < -\gamma \\ 0 & \text{si } |x| \leq \gamma. \end{cases}$$

Pour obtenir l'enveloppe de Moreau, nous remplaçons  $y$  par les valeurs optimales trouvées dans l'expression  $f(y) + \frac{1}{2\gamma} \|y - x\|^2$  et nous obtenons

$$M^\gamma f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } |x| \leq \gamma \\ |x| - \frac{\gamma}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions  $f$ ,  $M^\gamma f$  et  $\text{prox}_f$  sont tracées sur la Figure 4.1 pour  $\gamma = 1$ .



**Figure 4.1.** Enveloppe de Moreau et opérateur proximal pour la fonction valeur absolue.

**Remarque:-**

L'enveloppe de Moreau de la fonction valeur absolue est appelée la fonction de Huber. Elle est souvent utilisée comme approximation lisse de la fonction valeur absolue, notamment dans les statistiques robustes.

L'opérateur proximal de la valeur absolue est dénommé l'opérateur de seuillage doux et possède de nombreuses applications comme par exemple dans le problème lasso en statistiques que nous verrons plus loin. Pour cette raison, nous le noterons  $S_\gamma = \text{prox}_{\gamma|\cdot|}$ .

La caractérisation suivante de l'opérateur proximal est très utile car elle nous permet de nous ramener à un outil plus simple à manipuler: le sous-différentiel.

**Proposition 4.2: Caractérisation de l'opérateur proximal**

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad p = \text{prox}_f(x) \Leftrightarrow x - p \in \partial f(p).$$

**Preuve:** Par la règle de Fermat, nous avons

$$\begin{aligned} p = \text{prox}_f(x) &= \arg \min_{y \in \mathcal{H}} f(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \Leftrightarrow 0 \in \partial \left( f + \frac{1}{2} \|\cdot - x\|^2 \right)(p) \\ &\Leftrightarrow 0 \in \partial f(p) + p - x \\ &\Leftrightarrow x - p \in \partial f(p). \end{aligned}$$

□

**Remarque:-**

La caractérisation précédente nous donne que  $\text{prox}_f = (\mathbf{I} + \partial f)^{-1}$ .

**Proposition 4.3**

Soit  $f$  une fonction dont on connaît l'opérateur proximal. Les propriétés suivantes sont utiles pour calculer les opérateurs proximaux de fonctions  $g$  faisant intervenir  $f$ :

- Translation:  $g(x) = f(x - z) \Rightarrow \text{prox}_g(x) = z + \text{prox}_f(x - z)$ .
- Perturbation quadratique: ( $\alpha > 0$ )  
 $g(x) = f(x) + \alpha \|x\|^2 / 2 + \langle z | x \rangle + \beta \Rightarrow \text{prox}_g(x) = \text{prox}_{\frac{f}{\alpha+1}}\left(\frac{x-z}{\alpha+1}\right)$ .
- Mise à l'échelle:  $g(x) = f(\rho x) \Rightarrow \text{prox}_g(x) = \rho^{-1} \text{prox}_{\rho^2 f}(\rho x)$ . ( $\rho \in \mathbb{R}^*$ )
- Réflexion:  $g(x) = f(-x) \Rightarrow \text{prox}_g(x) = -\text{prox}_f(-x)$ .
- Composition: Soit  $L$  un opérateur linéaire de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathcal{H}$  tel que  $LL^* = \mu \mathbf{I}$  et  $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ .  
 Alors  $\text{prox}_{f \circ L} = \mathbf{I} - \mu^{-1} L^* \circ (\mathbf{I} - \text{prox}_{\mu f}) \circ L$ .

**Proposition 4.4**

Soit  $(\mathcal{H}_i)_{i \in \llbracket 1, I \rrbracket}$  une collection d'espaces de Hilbert et soit  $(f_i)_{i \in \llbracket 1, I \rrbracket}$  une collection de fonctions propres, convexes et s.c.i. de  $\mathcal{H}_i$ .

Si,

$$(\forall x = (x_1, \dots, x_I) \in \mathcal{H}_1 \times \dots \times \mathcal{H}_I) \quad f(x) = \sum_{i=1}^I f_i(x_i),$$

alors

$$(\forall x = (x_1, \dots, x_I) \in \mathcal{H}_1 \times \dots \times \mathcal{H}_I) \quad \text{prox}_f(x) = (\text{prox}_{f_i}(x_i))_{i \in \llbracket 1, I \rrbracket}.$$

**Preuve:** Preuve immédiate par séparabilité de la fonction objectif dans le calcul de l'opérateur proximal de  $f$ . □

**Proposition 4.5: Formule de décomposition de Moreau**

Pour tout  $x$  de  $\mathcal{H}$  et tout  $\gamma$  de  $\mathbb{R}_+^*$ , nous avons la formule de décomposition suivante:

$$x = \text{prox}_{\gamma f^*}(x) + \gamma \text{prox}_{\gamma^{-1} f}(\gamma^{-1} x).$$

**Preuve:** Soit  $u = \text{prox}_{\gamma f^*}(x)$ . Par la Proposition 4.2, nous avons

$$\begin{aligned} x - u &\in \partial \gamma f^*(u) \Leftrightarrow \gamma^{-1}(x - u) \in \partial f^*(u) \\ &\Leftrightarrow u \in \partial f(\gamma^{-1}(x - u)) \\ &\Leftrightarrow \gamma^{-1}u \in \gamma^{-1} \partial f(\gamma^{-1}(x - u)) \\ &\Leftrightarrow \gamma^{-1}x - p \in \partial \gamma^{-1} f(p) \quad \text{en posant } p = \gamma^{-1}x - \gamma^{-1}u \\ &\Leftrightarrow p = \text{prox}_{\gamma^{-1} f}(\gamma^{-1}x) \\ &\Leftrightarrow x - u = \gamma \text{prox}_{\gamma^{-1} f}(\gamma^{-1}x). \end{aligned}$$

□

Notons que la décomposition de Moreau est très utile pour calculer l'opérateur proximal de la conjuguée d'une fonction dont nous connaissons déjà l'opérateur proximal.

**Exemple 4.2: Opérateur proximal de la fonction indicatrice**

Définissons la fonction indicatrice  $\iota_C$  d'un sous-ensemble  $C$  de  $\mathcal{H}$  non-vide, fermé et convexe

$$\iota_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exprimons l'opérateur proximal de  $\iota_C$ :

$$(\forall x \in \mathcal{H}) \quad \text{prox}_{\iota_C}(x) = \arg \min_{y \in \mathcal{H}} \iota_C(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 = \arg \min_{y \in \mathcal{C}} \frac{1}{2} \|y - x\|^2 = \Pi_{\mathcal{C}}(x)$$

où  $\Pi_{\mathcal{C}}$  dénote la projection sur  $\mathcal{C}$ . L'opérateur proximal d'une fonction indicatrice sur  $\mathcal{C}$  est donc l'opérateur de projection sur  $\mathcal{C}$ . Pour cette raison, l'opérateur proximal est parfois vu comme une généralisation de la projection et la décomposition de Moreau comme une généralisation de la décomposition orthogonale.

#### Proposition 4.6

L'enveloppe de Moreau de  $f$  est convexe, différentiable et son gradient est donné par

$$\nabla M^\gamma f(x) = \gamma^{-1}(x - \text{prox}_{\gamma f}(x)).$$

**Preuve:** Nous devons prouver que:

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \quad \lim_{y \rightarrow x} \frac{M^\gamma f(y) - M^\gamma f(x) - \langle y - x \mid \gamma^{-1}(x - \text{prox}_{\gamma f}(x)) \rangle}{\|y - x\|} = 0.$$

Nous avons par définition de l'enveloppe de Moreau (en notant  $p_x = \text{prox}_{\gamma f}(x)$ ):

$$M^\gamma f(y) - M^\gamma f(x) = f(p_y) + \frac{1}{2\gamma} \|p_y - y\|^2 - f(p_x) + \frac{1}{2\gamma} \|p_x - x\|^2$$

De plus, la Proposition 4.2 nous donne que

$$\gamma^{-1}(x - p_x) \in \partial f(p_x) \Rightarrow f(p_x) + \langle p_y - p_x \mid \gamma^{-1}(x - p_x) \rangle \leq f(p_y).$$

D'où,

$$M^\gamma f(y) - M^\gamma f(x) \geq \gamma^{-1} \langle y - x \mid x - p_x \rangle.$$

De façon similaire, nous obtenons:

$$M^\gamma f(y) - M^\gamma f(x) \leq \gamma^{-1} \langle y - x \mid y - p_y \rangle.$$

En rassemblant les deux inégalités et en mettant les termes du même côté, nous obtenons:

$$0 \leq M^\gamma f(y) - M^\gamma f(x) - \gamma^{-1} \langle y - x \mid x - p_x \rangle \leq \gamma^{-1} \langle y - x \mid y - p_y \rangle - \gamma^{-1} \langle y - x \mid x - p_x \rangle.$$

Nous remarquons que:

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} \langle y - x \mid y - p_y \rangle - \gamma^{-1} \langle y - x \mid x - p_x \rangle &= \gamma^{-1} \langle y - x \mid y - x - (p_y - p_x) \rangle \\ &= \gamma^{-1} \left( \|y - x\|^2 + \|(y - p_y) - (x - p_x)\|^2 - \|p_x - p_y\|^2 \right) \\ &\leq \gamma^{-1} \|y - x\|^2 \\ &\text{car l'opérateur proximal est fermement non-expansif} \\ &\text{(cf. Proposition 4.10).} \end{aligned}$$

En faisant tendre  $y$  vers  $x$ , le théorème des gendarmes nous permet de conclure. □

#### Proposition 4.7

La fonction  $f$  et son enveloppe de Moreau ont les mêmes optima. De plus, ces derniers sont les points fixes de l'opérateur proximal:

$$\begin{cases} \inf_{x \in \mathcal{H}} f(x) = \inf_{x \in \mathcal{H}} M^\gamma f(x) \\ \arg \min_{x \in \mathcal{H}} f(x) = \arg \min_{x \in \mathcal{H}} M^\gamma f(x) = \{x \in \mathcal{H} \mid x = \text{prox}_{\gamma f}(x)\}. \end{cases}$$



**Preuve:** Nous prouvons tout d'abord que  $f$  et son enveloppe de Moreau ont la même valeur optimale:

$$\begin{aligned}\inf_{x \in \mathcal{H}} M^\gamma f(x) &= \inf_{x \in \mathcal{H}} \inf_{y \in \mathcal{H}} f(y) + \frac{1}{2\gamma} \|y - x\|^2 \\ &= \inf_{y \in \mathcal{H}} \inf_{x \in \mathcal{H}} f(y) + \frac{1}{2\gamma} \|y - x\|^2 \\ &= \inf_{y \in \mathcal{H}} f(y).\end{aligned}$$

De plus, la condition d'optimalité de première ordre nous donne que les minimiseurs de  $M^\gamma f$  sont les points où son gradient est nul, c'est-à-dire les points fixes de l'opérateur proximal d'après la Proposition 4.6. Enfin, d'après la caractérisation de la Proposition 4.2, nous avons:

$$p = \text{prox}_{\gamma f}(p) \Leftrightarrow 0 = p - p \in \partial f(p)$$

Nous en concluons par la règle de Fermat que les points fixes de  $\text{prox}_{\gamma f}$  sont également les minimiseurs de  $f$ .  $\square$

#### Remarque:-

D'un côté, la Proposition 4.6 nous dit que l'enveloppe de Moreau de la fonction  $f$  est toujours différentiable et nous donne l'expression de son gradient. De l'autre côté, la Proposition 4.7 nous dit que minimiser  $f$  ou  $M^\gamma f$  sont deux problèmes équivalents. Nous pouvons donc minimiser  $M^\gamma f$  avec une descente de gradient classique afin de minimiser  $f$ . Nous obtenons alors:

$$x_{n+1} = x_n - \gamma \nabla M^\gamma f(x_n) = x_n - \gamma \gamma^{-1}(x_n - \text{prox}_{\gamma f}(x_n)) = \text{prox}_{\gamma f}(x_n).$$

De plus, la Proposition 4.7 suggère qu'un minimiseur de  $f$  serait un point fixe de l'opérateur  $\text{prox}_{\gamma f}$ . C'est ce que nous allons étudier dans la prochaine section.

### 4.1.3 Méthode de point fixe

Nous avons vu que les minimiseurs de notre fonction  $f$  correspondent aux points fixes de son opérateur proximal. Nous aimerions donc appliquer le théorème de point fixe suivant pour les calculer.

#### Théorème 4.8: Point fixe de Picard

Soit  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur tel que

1.  $x^*$  est un point fixe de  $T$ , i.e.  $Tx^* = x^*$ ,
2.  $T$  est une contraction, i.e.

$$(\exists \rho \in ]0, 1[)(\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \quad \|Tx - Ty\| \leq \rho \|x - y\|,$$

alors la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_0 \in \mathcal{H}$  et la relation de récurrence  $x_{n+1} = T(x_n)$  converge vers  $x^*$ .

Afin d'appliquer ce théorème, il nous faudrait vérifier sa deuxième hypothèse, c'est-à-dire que  $\text{prox}_{\gamma f}$  est une contraction. Malheureusement, l'opérateur proximal d'une fonction  $f$  de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$  n'est contractant que si  $f$  est fortement convexe. En général, il est simplement fermement non-expansif (voir Proposition 4.10). Cependant, il est possible d'obtenir une version affaiblie du théorème du point fixe de Picard pour les applications fermement non-expansives.

Avant de montrer que l'opérateur proximal de  $f$  est fermement non expansif, nous allons démontrer la monotonie du sous-différentiel.

#### Proposition 4.9: Monotonie du sous-différentiel

Le sous-différentiel d'une fonction  $f$  est un opérateur **monotone**, c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2)(\forall (u, v) \in \partial f(x) \times \partial f(y)) \quad \langle x - y \mid u - v \rangle \geq 0.$$

**Preuve:** Par définition de le sous-différentiel, si  $u$  appartient à  $\partial f(x)$  et  $v$  à  $\partial f(y)$ , nous avons

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + \langle u \mid y - x \rangle \\ f(x) &\geq f(y) + \langle v \mid x - y \rangle. \end{aligned}$$

En additionnant les deux inégalités nous obtenons

$$0 \geq \langle u \mid y - x \rangle + \langle v \mid x - y \rangle = \langle v - u \mid x - y \rangle.$$

□

#### Proposition 4.10

L'opérateur proximal de  $f$  est un opérateur **fermement non-expansif** (firmly non-expansive en anglais), c'est-à-dire qu'il satisfait l'inégalité suivante:

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \quad \|\text{prox}_f(x) - \text{prox}_f(y)\|^2 + \|(x - \text{prox}_f(x)) - (y - \text{prox}_f(y))\|^2 \leq \|x - y\|^2.$$

**Preuve:** Soient  $x \in \mathcal{H}$ ,  $y \in \mathcal{H}$ ,  $u \in \partial f(x)$  et  $v \in \partial f(y)$ . Comme le sous-différentiel de  $f$  est un opérateur monotone, nous avons

$$\langle x - y \mid u - v \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle x - y \mid u - v + x - y \rangle \geq \|x - y\|^2.$$

Posons  $\bar{u} = u + x$  et  $\bar{v} = v + y$ . Nous avons donc  $\bar{u} - x = u \in \partial f(x)$  et  $\bar{v} - y = v \in \partial f(y)$ . Par la caractérisation de la Proposition 4.2, nous obtenons que  $x = \text{prox}_f(\bar{u})$  et  $y = \text{prox}_f(\bar{v})$ , d'où

$$\langle x - y \mid (u + x) - (v + y) \rangle \geq \|x - y\|^2 \Leftrightarrow \langle \text{prox}_f \bar{u} - \text{prox}_f \bar{v} \mid \bar{u} - \bar{v} \rangle \geq \|\text{prox}_f \bar{u} - \text{prox}_f \bar{v}\|^2.$$

L'inégalité triangulaire nous donne

$$\begin{aligned} &\|(\mathbf{I} - \text{prox}_f)(\bar{u}) - (\mathbf{I} - \text{prox}_f)(\bar{v})\|^2 - \|\text{prox}_f \bar{u} - \text{prox}_f \bar{v}\|^2 + 2 \langle \text{prox}_f \bar{u} - \text{prox}_f \bar{v} \mid \bar{u} - \bar{v} \rangle \\ &\leq \|\bar{u} - \bar{v}\|^2. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure en combinant les deux inégalités:

$$\|\text{prox}_f(\bar{u}) - \text{prox}_f(\bar{v})\|^2 + \|(\mathbf{I} - \text{prox}_f)(\bar{u}) - (\mathbf{I} - \text{prox}_f)(\bar{v})\|^2 \leq \|\bar{u} - \bar{v}\|^2.$$

□

#### Théoreme 4.11

Soit  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur fermement non-expansif possédant au moins un point fixe. Alors la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_0 \in \mathcal{H}$  et la relation de récurrence  $x_{n+1} = T(x_n)$  converge faiblement vers un point fixe de  $T$ .

**Preuve:** Nous appelons  $\text{Fix } T$  l'ensemble des points fixes de  $T$ :

$$\text{Fix } T = \{x \in \mathcal{H} \mid T(x) = x\}.$$

Nous découpons la preuve en trois étapes.

1. Convergence de la suite  $(\|x_n - x^*\|)_{n \in \mathbb{N}}$  pour  $x^*$  dans  $\text{Fix } T$ :

Soit  $x^*$  un point fixe de  $T$ .

Comme  $T$  est fermement non-expansif, nous avons:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq \|x_n - x^*\|^2,$$

c'est-à-dire que la suite  $(\|x_n - x^*\|)_{n \in \mathbb{N}}$  décroît de façon monotone. Comme elle est également bornée inférieurement par 0, elle converge vers un nombre réel positif (dépendant du point fixe  $x^*$ ).

2. L'adhérence de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est contenu dans  $\text{Fix } T$ :

En utilisant une nouvelle fois que  $T$  est fermement non-expansif, nous avons:

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|T(x_n) - x^*\|^2 &\leq \|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - T(x_n)\|^2 \\ \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|x_{n+1} - x_n\|^2 &\leq \|x_n - x^*\|^2 - \|T(x_n) - x^*\|^2. \end{aligned}$$

En prenant la limite de chaque côté, nous obtenons:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_{n+1} - x_n\|^2 = 0.$$

Nous en concluons donc que les points d'adhérence de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont contenus dans l'ensemble des points fixes de  $T$ .

3. La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'a, au plus, qu'un unique point d'adhérence:

Notons que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée: en effet, pour un point  $x^*$  de  $\text{Fix } T$ , elle est contenue dans la boule  $\mathcal{B}(x^*, \|x_0 - x^*\|)$ . Il suffit alors de prouver que cette suite a, au plus, un point d'adhérence pour prouver sa convergence faible. (Rappel: une suite converge faiblement si et seulement si elle possède au plus un point d'accumulation.)

Soient  $x^*$  et  $\hat{x}$  deux points d'adhérence de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Il existe donc des sous-suites  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(x_{l_n})_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant respectivement vers  $x^*$  et  $\hat{x}$ . Nous avons également,

$$\begin{aligned} \|x_n - x^*\|^2 &= \|x_n\|^2 + \|x^*\|^2 - 2\langle x_n | x^* \rangle \\ \|x_n - \hat{x}\|^2 &= \|x_n\|^2 + \|\hat{x}\|^2 - 2\langle x_n | \hat{x} \rangle, \end{aligned}$$

ce qui, en soustrayant les deux inégalités, donne:

$$2\langle x_n | \hat{x} - x^* \rangle = \|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - \hat{x}\|^2 + \|x^*\|^2 - \|\hat{x}\|^2.$$

Comme nous avons montré  $x^*$  et  $\hat{x}$  sont des points de  $\text{Fix } T$ , les suites  $(\|x_n - x^*\|)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\|x_n - \hat{x}\|)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent et par conséquent  $(\langle x_n | \hat{x} - x^* \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  converge par l'égalité ci-dessus. Les limites de  $(\langle x_{k_n} | \hat{x} - x^* \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\langle x_{l_n} | \hat{x} - x^* \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  sont donc identiques et nous obtenons par passage à la limite:

$$\langle x^* | \hat{x} - x^* \rangle = \langle \hat{x} | \hat{x} - x^* \rangle \Leftrightarrow \|\hat{x} - x^*\|^2 = 0;$$

Nous en concluons donc que  $\hat{x} = x^*$ .

□

**Remarque:-**

Dans le Théorème 4.11 la condition de contraction sur l'opérateur  $T$  est assouplie mais la convergence obtenue est également moins forte comparée au Théorème 4.8. Toutefois, en **dimension finie**, les **convergences faibles et fortes sont équivalentes**.

**Remarque:-**

Soit  $\mathcal{C}$  un sous-ensemble non-vide de  $\mathcal{H}$ . Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points dans  $\mathcal{H}$  vérifiant

$$(\forall x \in \mathcal{C})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|x_{n+1} - x\|^2 \leq \|x_n - x\|^2,$$

est dite **Féjer monotone** par rapport à  $\mathcal{C}$ . Cette propriété est centrale dans l'étude des algorithmes itératifs, en particulier dans la construction des méthodes de points fixes pour les opérateurs fermement non-expansifs. Ainsi, l'étape 1 de la preuve ci-dessus consiste donc à montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est Féjer monotone par rapport à  $\text{Fix } T$ .

Armé des Propositions 4.7 et 4.10 ainsi que du Théorème 4.11, nous pouvons maintenant écrire l'algorithme du point proximal qui prend en entrée un point  $x_0$  de  $\mathcal{H}$  et un paramètre  $\gamma$  de  $\mathbb{R}_+^*$  et qui applique l'itération

$$x_{n+1} = \text{prox}_{\gamma f}(x_n).$$

Nous avons montré que si  $f$  est une fonction de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$  alors l'algorithme du point proximal converge vers un minimiseur de  $f$  (à condition que ce dernier existe, il ne faut donc pas oublier de prouver l'existence d'un minimiseur avant de chercher à résoudre le problème).

## 4.2 Algorithme du gradient proximal

Dans la section précédente, nous avons cherché une version implicite de la méthode de descente de gradient qui s'applique à la minimisation de fonctions convexes, aussi bien lisses que non-lisses, et qui offre des garanties de convergence. Toutefois, en pratique, nous souhaitons souvent minimiser une fonction qui est composée. En effet, nous cherchons souvent à minimiser un objectif (par exemple une erreur) additionné d'une régularisation qui favorise certaines solutions. Nous pouvons par exemple penser à la régularisation de Tikhonov ou à la régularisation  $\ell_1$  utiliser en apprentissage pour éviter les phénomènes de surapprentissage (overfitting). Si l'objectif et la régularisation sont toutes deux lisses, nous pouvons utiliser la descente de gradient classique. Cependant, bien que l'objectif soit souvent lisse, les régularisations intéressantes ne le sont pas forcément. Dans ce contexte, nous allons utiliser les outils vus précédemment pour mettre en œuvre une méthode de scindage (splitting method) qui utilise la différentiabilité d'une partie de l'objectif. Nous construirons l'algorithme du gradient-proximal, aussi appelé l'algorithme Forward-Backward.

### 4.2.1 Algorithme du gradient proximal (Forward-Backward)

Supposons que nous voulions minimiser une fonction composite comme suit

$$\text{Trouver } x^* \text{ tel que } x^* = \arg \min_{x \in \mathcal{H}} f(x) + g(x), \quad (4.3)$$

où  $f$  est une fonction propre, convexe, différentiable, à gradient Lipschitz de constante  $\beta$  et  $g$  est propre, s.c.i. et convexe.

La règle de Fermat, nous donne que les minimiseurs de  $f + g$  sont les points auxquels le sous-différentiel  $\partial(f + g)$  contient 0. Comme  $f$  et  $g$  sont propres, s.c.i. et convexes, nous avons que  $\partial(f + g) = \partial f + \partial g$ , d'où

$$\begin{aligned} 0 \in \partial(f + g)(x^*) &\Leftrightarrow 0 \in \partial f(x^*) + \partial g(x^*) \\ &\Leftrightarrow 0 \in \gamma \partial f(x^*) + \gamma \partial g(x^*) \\ &\Leftrightarrow 0 \in \gamma \nabla f(x^*) + x^* - x^* + \gamma \partial g(x^*) \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{I} - \gamma \nabla f)(x^*) \in (\mathbf{I} + \gamma \partial g)(x^*) \\ &\Leftrightarrow x^* = (\mathbf{I} + \gamma \partial g)^{-1}(\mathbf{I} - \gamma \nabla f)(x^*) \\ &\Leftrightarrow x^* = \text{prox}_{\gamma g}(\mathbf{I} - \gamma \nabla f)(x^*). \end{aligned}$$

Cela nous suggère que pour résoudre le problème (4.3), nous pouvons alternativement effectuer un pas de gradient sur  $f$  (dit pas explicite ou forward) puis un pas de gradient implicite sur  $g$  (dit pas implicite ou backward). Nous obtenons alors pour chaque itération

$$\begin{cases} t_n = x_n - \gamma \nabla f(x_n) & (\text{pas explicite}) \\ x_{n+1} = \text{prox}_{\gamma g}(t_n) & (\text{pas implicite}). \end{cases} \quad (4.4)$$

Une étape de relaxation peut-être ajouter à la fin de chaque itération afin d'améliorer la convergence. Les paramètres  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  peuvent alors être ajustés en fonction de l'application afin d'obtenir une convergence plus rapide.

Nous obtenons finalement l'Algorithme 2.

---

#### Algorithm 2 Algorithme du gradient proximal

---

- 1: Choisir  $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et  $x_0 \in \mathcal{H}$ .
  - 2: **for**  $n = 1, 2, \dots$ , **do**
  - 3:    $y_n = \text{prox}_{\gamma g}(x_n - \gamma \nabla f(x_n))$
  - 4:    $x_{n+1} = x_n + \lambda_n(y_n - x_n)$
  - 5: **end for**
- 

Le théorème suivant nous donne des garanties sur la convergence de l'algorithme du gradient proximal pour certains choix des paramètres  $\gamma$  et  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

#### Théorème 4.12

Soient  $\gamma \in ]0, 2/\beta[$ ,  $\delta = 2 - \gamma\beta/2 \in ]1, 2[$  et  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $[0, \delta]$  telle que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n(1 - \lambda_n) = +\infty$ . Si l'ensemble des minimiseurs de  $f + g$  n'est pas vide, alors pour tout  $x_0$  dans  $\mathcal{H}$ , la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  produite par (4.4) converge faiblement vers un minimiseur de  $f + g$ .

En pratique, nous choisissons souvent  $\lambda_n = \lambda \in [0, \delta]$ .

**Remarque:-**

Remarquons que l'algorithme du gradient proximal est une généralisation de l'algorithme proximal et de la descente de gradient classique. En effet, pour  $f = 0$ , nous retrouvons l'algorithme du gradient proximal alors que pour  $g = 0$  nous obtenons la descente de gradient.

**Exemple 4.3: Least Absolute Shrinkage and Selection Operator (Lasso)**

Prenons le problème de régression linéaire où nous cherchons à estimer le vecteur de paramètres  $\mathbf{w}$  du modèle linéaire  $y(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{w} | \mathbf{x} \rangle$  à partir du jeu de données  $(\mathbf{x}_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Nous cherchons donc à minimiser l'erreur quadratique suivante:

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{w}\|^2$$

où  $\mathbf{X}$  est la matrice dont les lignes sont les vecteurs  $\mathbf{x}_n$ . En présence de bruit sur les données, la solution que nous obtenons en minimisant  $E$  n'aura probablement aucune coordonnée nulle. En statistiques, nous pouvons vouloir appliquer une régression avec un grand nombre de paramètres mais ne choisir que les modèles avec un faible nombre de variables explicatives car il y a de grandes chances que de nombreuses variables est un impact négligeable. Nous souhaiterions donc favoriser les solutions parcimonieuses, i.e. les vecteurs  $\mathbf{w}$  avec un grand nombre de coordonnées nulles.

Afin d'obtenir de telles solutions, nous allons ajouter une régularisation à notre terme d'erreur  $E$ . Nous choisissons la régularisation  $R : \mathbf{w} \mapsto \|\mathbf{w}\|_1 = \sum_{d=0}^D |w_d|$  qui favorise la parcimonie tout en restant une fonction propre, convexe et continue.

Nous cherchons donc les modèles de paramètres  $\mathbf{w}^*$  tel que

$$\mathbf{w}^* \in \arg \min_{\mathbf{w}} E(\mathbf{w}) + \lambda R(\mathbf{w}),$$

où le paramètre  $\lambda$  équilibre le poids de  $E$  et de  $R$  dans la fonction objectif. Nous pouvons alors appliquer l'algorithme du gradient proximal: le gradient de  $E$  s'exprime comme  $\nabla E(\mathbf{w}) = \mathbf{X}^\top (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{w})$  et l'opérateur proximal associé à  $R$  peut être facilement calculer grâce à la Proposition 4.4 et au calcul de l'opérateur proximal de la fonction valeur absolue que nous avons déjà effectué dans l'Exemple 4.1.

**Exemple 4.4: Gradient projeté**

Soit  $\mathcal{C}$  un sous-ensemble de  $\mathcal{H}$  non-vide, fermé et convexe et soit  $f$  une fonction convexe, différentiable et à gradient Lipschitz.

Le problème de la minimisation de  $f$  sur  $\mathcal{C}$  peut alors se réécrire comme

$$\min_{x \in \mathcal{H}} f(x) + \iota_{\mathcal{C}}(x).$$

L'algorithme du gradient proximal est alors équivalent ici à l'algorithme du gradient projeté puisque l'opérateur proximal de la fonction  $\iota_{\mathcal{C}}$  est l'opérateur de projection sur  $\mathcal{C}$ .

## 4.3 Algorithmes praux-duaux

Dans cette section, nous allons d'étudier la dualité de Fenchel-Rockafellar qui est un outil très générale et très puissant pour l'optimisation convexe. Elle généralise la dualité de Lagrange que nous avons vu dans le cours précédent. Nous l'utiliserons ensuite pour développer des algorithmes praux-duaux, c'est-à-dire qui résolvent conjointement le problème primal et le dual. L'un des intérêts de ces méthodes est d'utiliser les informations sur le primal pour résoudre le dual et inversement, ce qui résulte en des algorithmes rapides.

### 4.3.1 Dualité de Fenchel-Rockafellar

Soient  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{G}$  deux espaces de Hilbert et  $L$  une application linéaire de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{G}$ . Nous considérons le problème d'optimisation suivant

$$\arg \min_{x \in \mathcal{H}} f(x) + g(Lx), \tag{4.5}$$

où  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  et  $g : \mathcal{G} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ . Nous appellerons (4.5) le problème primal et notons  $p = \inf_{x \in \mathcal{H}} f(x) + g(Lx)$ . Le problème dual associé est alors donné par

$$\operatorname{argmin}_{v \in \mathcal{G}} f^*(-L^*v) + g^*(v), \quad (4.6)$$

et nous notons  $d = \inf_{v \in \mathcal{G}} f^*(-L^*v) + g^*(v)$ .

La propriété de dualité faible est toujours vraie, i.e.  $p \geq -d$ . Cette dernière découle directement de l'inégalité de Fenchel-Young. En effet,

$$f(x) + g(Lx) + f^*(-L^*v) + g^*(v) \geq \langle x | -L^*v \rangle + \langle Lx | v \rangle = 0.$$

La valeur  $p + d$  est appelé le saut de dualité.

#### Proposition 4.13: Dualité forte

Supposons que  $f$  et  $g$  sont deux fonction de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$ . Si  $\operatorname{int}(\operatorname{dom} g) \cap L(\operatorname{dom} f) \neq \emptyset$  ou  $\operatorname{dom} g \cap \operatorname{int}(L(\operatorname{dom} f)) \neq \emptyset$ , alors nous avons dualité forte, i.e.  $p = d$ .

#### Remarque:-

La condition  $\operatorname{int}(\operatorname{dom} g) \cap L(\operatorname{dom} f) \neq \emptyset$  ou  $\operatorname{dom} g \cap \operatorname{int}(L(\operatorname{dom} f)) \neq \emptyset$  est l'analogie de la condition de Slater dans la dualité Lagrangienne.

#### Théoreme 4.14

Soient  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  et  $g : \mathcal{G} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ , deux fonctions de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$ .

- S'il existe  $\hat{x}$  dans  $\mathcal{H}$  tel que

$$0 \in \partial f(\hat{x}) + L^* \partial g(L\hat{x})$$

alors  $\hat{x}$  est une solution du problème primal (4.5) et il existe une solution  $\hat{v}$  au problème dual (4.6) telle que

$$-L^* \hat{v} \in \partial f(\hat{x}) \quad (4.7)$$

$$L\hat{x} \in \partial g^*(\hat{v}). \quad (4.8)$$

- S'il existe  $(\hat{x}, \hat{v})$  dans  $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$  tel que (4.7) et (4.8) soient vérifiées, alors  $\hat{x}$  est solution du problème primal (4.5) et  $\hat{v}$  est solution du problème dual (4.6).

**Preuve:** Nous prouvons ici le premier point, le deuxième se démontre de manière similaire. Nous avons

$$0 \in \partial f(\hat{x}) + L^* \partial g(L\hat{x}) \subset \partial(f + \partial g \circ L)(\hat{x})$$

donc  $\hat{x}$  est une solution de (4.7) par la règle de Fermat. De plus, il existe  $\hat{v}$  tel que

$$\begin{cases} 0 \in \partial f(\hat{x}) + L^* \hat{v} \\ \hat{v} \in \partial g(L\hat{x}). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -L^* \hat{v} \in \partial f(\hat{x}) \\ L\hat{x} \in \partial g^*(\hat{v}). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x} \in \partial f^*(-L^* \hat{v}) \\ L\hat{x} \in \partial g^*(\hat{v}). \end{cases}$$

En rassemblant les deux équations nous obtenons

$$0 \in -L \partial f^*(-L^* \hat{v}) + \partial g^*(\hat{v}) \subset \partial(f^* \circ (-L^*) + g^*)(\hat{v}).$$

Le point  $\hat{v}$  est donc une solution du problème dual en vertu de la règle de Fermat. □

Un point  $(\hat{x}, \hat{v})$  vérifiant (4.7) et (4.8) est appelé un **point de Kuhn-Tucker**.

### 4.3.2 Lien avec la dualité Lagrangienne

La dualité Lagrangienne est un cas spécifique de la dualité de Fenchel-Rockafellar. En effet, si nous définissons le Lagrangien  $\mathcal{L}$  tel que

$$(\forall (x, y, v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}) \quad \mathcal{L}(x, y, v) = f(x) + g(y) + \langle v | Lx - y \rangle,$$

alors le problème primal (4.5) s'exprime comme  $p = \inf_{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}} \sup_{v \in \mathcal{G}} \mathcal{L}(x, y, v)$  et le dual (4.6) comme  $-d = \sup_{v \in \mathcal{G}} \inf_{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}} \mathcal{L}(x, y, v)$ . En effet,

$$\begin{aligned} p &= \inf_{x \in \mathcal{H}} f(x) + g(Lx) = \inf_{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}} f(x) + g(y) + \iota_0(Lx - y) \\ &= \inf_{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}} f(x) + g(y) + \sup_{v \in \mathcal{G}} \langle v \mid Lx - y \rangle \\ &= \inf_{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}} \sup_{v \in \mathcal{G}} \mathcal{L}(x, y, v), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d &= \inf_{v \in \mathcal{G}} f^*(-Lv) + g^*(v) = \inf_{v \in \mathcal{G}} \left( \sup_{x \in \mathcal{H}} \langle x \mid -L^*v \rangle \right) + \left( \sup_{y \in \mathcal{G}} \langle y \mid v \rangle - g(y) \right) \\ &= \inf_{v \in \mathcal{G}} - \left( \inf_{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}} f(x) + g(y) + \langle v \mid Lx - y \rangle \right) \\ &= - \sup_{v \in \mathcal{G}} \inf_{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}} f(x) + g(y) + \langle v \mid Lx - y \rangle \\ &= - \sup_{v \in \mathcal{G}} \inf_{(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G}} \mathcal{L}(x, y, v), \end{aligned}$$

Notons que la variable dual  $v$  est ici le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $Lx = y$ .

Nous avons alors le théorème suivant que nous avons vu sous une autre forme lors du cours sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

#### Théorème 4.15

Soient  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  et  $g : \mathcal{G} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ , deux fonctions de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$ .

Supposons que  $\text{int}(\text{dom } g) \cap L(\text{dom } f) \neq \emptyset$  ou  $\text{dom } g \cap \text{int}(L(\text{dom } f)) \neq \emptyset$ , alors  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{v})$  est un point selle du Lagrangien si et seulement si  $(\hat{x}, \hat{v})$  est un point de Kuhn-Tucker et que  $\hat{y} = L\hat{x}$ .

### 4.3.3 Algorithme des directions alternées (ADMM)

Le Théorème 4.15 nous indique que la recherche des points selle du Lagrangien nous donne exactement les points de Kuhn-Tucker, i.e. les solutions du problème primal et du problème dual. Pour trouver les points selles du Lagrangien, nous devons le minimiser par rapport à  $(x, y)$  et le maximiser par rapport à  $v$ . Une première idée serait alors de procéder à une minimisation alternée sur  $x$  et  $y$  puis à trouver une direction ascendante sur  $v$ . Nous obtiendrions donc le schéma d'itération suivant:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} x_{n+1} \in \arg \min_{x \in \mathcal{H}} \mathcal{L}(x, y_n, v_n) \\ y_{n+1} \in \arg \min_{y \in \mathcal{G}} \mathcal{L}(x_{n+1}, y, v_n) \\ v_{n+1} \text{ tel que } \mathcal{L}(x_{n+1}, y_{n+1}, v_{n+1}) \geq \mathcal{L}(x_{n+1}, y_{n+1}, v_n). \end{cases} \quad (4.9)$$

Toutefois un algorithme basé sur ce schéma d'itération ne converge pas toujours.

Pour remédier à ce problème, nous introduisons le Lagrangien augmenté de paramètre  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ :

$$(\forall (x, y, z) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}) \quad \tilde{\mathcal{L}}(x, y, z) = f(x) + g(y) + \gamma \langle z \mid Lx - y \rangle + \frac{\gamma}{2} \|Lx - y\|^2,$$

où le multiplicateur de Lagrange devient ici  $\gamma z$ . Nous avons alors le pendant du Théorème 4.15.

#### Théorème 4.16

Soient  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  et  $g : \mathcal{G} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ , deux fonctions de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$ .

Supposons que  $\text{int}(\text{dom } g) \cap L(\text{dom } f) \neq \emptyset$  ou  $\text{dom } g \cap \text{int}(L(\text{dom } f)) \neq \emptyset$ , alors  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  est un point selle du Lagrangien augmenté si et seulement si  $(\hat{x}, \gamma \hat{z})$  est un point de Kuhn-Tucker et que  $\hat{y} = L\hat{x}$ .

**Preuve:** Nous démontrons les deux implications séparément.

- Soit  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{v})$  un point selle de  $\tilde{\mathcal{L}}$ . Nous avons donc

$$\begin{cases} 0 \in \partial_x \tilde{\mathcal{L}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{v}) = \partial f(\hat{x}) + \gamma L^* \hat{z} + \gamma L^*(L\hat{x} - \hat{y}) \\ 0 \in \partial_y \tilde{\mathcal{L}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{v}) = \partial g(\hat{y}) - \gamma \hat{z} + \gamma(\hat{y} - L\hat{x}) \\ 0 = \nabla \tilde{\mathcal{L}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{v}) = L\hat{x} - \hat{y}. \end{cases}$$

Si  $\hat{y} = L\hat{x}$ , alors le système précédent est équivalent à

$$\begin{cases} 0 \in \partial_x \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{y}, \gamma \hat{z}) \\ 0 \in \partial_y \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{y}, \gamma \hat{z}) \\ 0 = \nabla \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{y}, \gamma \hat{z}). \end{cases}$$

Par le Théorème 4.15, nous concluons que  $(\hat{x}, \gamma \hat{z})$  est un point de Kuhn-Tucker.

- Supposons que  $(\hat{x}, \gamma \hat{z})$  est un point de Kuhn-Tucker et que  $\hat{y} = L\hat{x}$ . Alors, en vertu du Théorème 4.15,  $(\hat{x}, \hat{y}, \gamma \hat{z})$  est un point selle de  $\mathcal{L}$ . De plus, comme

$$(\forall (x, y, z) \in \mathcal{H} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}) \quad \tilde{\mathcal{L}}(x, y, z) = \mathcal{L}(x, y, \gamma z) + \frac{\gamma}{2} \|Lx - y\|^2,$$

et que  $\hat{y} = L\hat{x}$ , nous en déduisons que

$$\tilde{\mathcal{L}}(\hat{x}, \hat{y}, z) = \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{y}, \gamma z) \leq \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{y}, \gamma \hat{z}) = \tilde{\mathcal{L}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \leq \mathcal{L}(x, y, \gamma \hat{z}) \leq \tilde{\mathcal{L}}(x, y, \hat{z}).$$

□

Nous pouvons à présent reprendre le schéma d'itération (4.9) pour le Lagrangien augmenté dans le quel la dernière étape est réalisée par une montée de gradient

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} x_{n+1} = \arg \min_{x \in \mathcal{H}} \tilde{\mathcal{L}}(x, y_n, z_n) = \arg \min_{x \in \mathcal{H}} f(x) + \gamma \langle z_n | Lx - y_n \rangle + \frac{\gamma}{2} \|Lx - y_n\|^2 \\ y_{n+1} = \arg \min_{y \in \mathcal{G}} \tilde{\mathcal{L}}(x_{n+1}, y, z_n) = \arg \min_{y \in \mathcal{G}} g(y) + \gamma \langle z_n | Lx_{n+1} - y \rangle + \frac{\gamma}{2} \|Lx_{n+1} - y\|^2 \\ z_{n+1} = z_n + \gamma^{-1} \nabla_z \tilde{\mathcal{L}}(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n). \end{cases}$$

Nous pouvons réécrire ce schéma de manière équivalente

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} x_{n+1} = \arg \min_{x \in \mathcal{H}} \gamma^{-1} f(x) + \frac{1}{2} \|Lx - y_n + z_n\|^2 \\ y_{n+1} = \text{prox}_{\gamma^{-1}g}(z_n + Lx_{n+1}) \\ z_{n+1} = z_n + Lx_{n+1} - y_{n+1}. \end{cases}$$

#### Théorème 4.17

Soient  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  et  $g : \mathcal{G} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ . deux fonctions de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$ , et  $L$  une application linéaire de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{G}$  telle que  $L^*L$  soit bijective.

Supposons que  $\text{int}(\text{dom } g) \cap L(\text{dom } f) \neq \emptyset$  ou  $\text{dom } g \cap \text{int}(L(\text{dom } f)) \neq \emptyset$ , et que  $\arg \min(f + g \circ L) \neq \emptyset$ . Pour tout point  $(y_0, z_0)$  de  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ , nous définissons les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} x_{n+1} = \arg \min_{x \in \mathcal{H}} \gamma^{-1} f(x) + \frac{1}{2} \|Lx - y_n + z_n\|^2 \\ s_{n+1} = Lx_{n+1} \\ y_{n+1} = \text{prox}_{\gamma^{-1}g}(z_n + s_{n+1}) \\ z_{n+1} = z_n + s_{n+1} - y_{n+1}. \end{cases}$$

Alors, nous avons que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers un point de  $\arg \min(f + g \circ L)$  et  $(\gamma z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers un point de  $\arg \min(f^* \circ (-L^*) + g^*)$ .



**Remarque:-**

Si  $L$  est l'opérateur identité, alors la mise à jour de  $x_n$  se lit

$$x_{n+1} = \text{prox}_{\gamma^{-1}f}(y_n - z_n).$$

**Exemple 4.5**

Nous avons vu précédemment le problème lasso où nous cherchions à résoudre le problème suivant

$$\text{Trouver } \mathbf{w}^* \in \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{D+1}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{w}\|^2 + \lambda \|\mathbf{w}\|_1.$$

En posant  $f : \mathbf{w} \mapsto \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{w}\|^2$ ,  $g : \mathbf{w} \mapsto \lambda \|\mathbf{w}\|_1$  et  $L = \mathbf{I}$ , nous obtenons par un calcul immédiat le schéma d'itération suivant pour ADMM:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} x_{n+1} = (\mathbf{X}^* \mathbf{X} + \gamma \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{X}^* \mathbf{b} + \gamma(y_n - z_n)) \\ y_{n+1} = S_{\lambda\gamma^{-1}}(z_n + x_{n+1}) \\ z_{n+1} = z_n + x_{n+1} - y_{n+1}, \end{cases}$$

où  $S_\lambda$  est l'opérateur de seuillage doux que nous avons déjà calculé dans l'Exemple 4.1. Notons que comme  $\gamma$  est un réel strictement positif,  $\mathbf{X}^* \mathbf{X} + \gamma \mathbf{I}$  est toujours inversible et donc la mise à jour de  $x_n$  est bien définie.

### 4.3.4 Algorithme du gradient proximal primal-dual

L'algorithme du gradient proximal primal-dual est un algorithme d'optimisation également très utilisé et qui a trouvé de nombreuses applications. Nous esquissons ici l'intuition derrière cet algorithme.

En utilisant la définition de la fonction conjuguée, nous pouvons reformuler le problème (4.5) ainsi

$$\inf_{x \in \mathcal{H}} \sup_{v \in \mathcal{G}} f(x) + \langle v | Lx \rangle - g^*(v) \quad (4.10)$$

Pour résoudre (4.10), nous allons alternativement une descente de sous-gradient relativement à  $x$  et une montée de sous-gradient relativement à  $v$ :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} \text{Choisir } t_n \in \partial f(x_n) \\ x_{n+1} = x_n - \tau_n(t_n + L^* v_n) \\ \text{Choisir } s_n \in \partial g^*(v_n) \\ v_{n+1} = v_n - \sigma_n(s_n - Lx_{n+1}). \end{cases}$$

Nous allons ensuite remplacer les mises à jour explicites par leurs versions implicites:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} \text{Choisir } t_n \in \partial f(x_{n+1}) \\ x_{n+1} = x_n - \tau_n(t_n + L^* v_n) \\ \text{Choisir } s_n \in \partial g^*(v_{n+1}) \\ v_{n+1} = v_n - \sigma_n(s_n - Lx_{n+1}), \end{cases}$$

ce que nous pouvons réécrire comme

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} x_n - \tau_n L^* v_n - x_{n+1} \in \tau_n \partial f(x_{n+1}) \\ v_n + \sigma_n Lx_{n+1} - v_{n+1} \in \sigma_n \partial g^*(v_{n+1}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = \text{prox}_{\tau_n f}(x_n - \tau_n L^* v_n) \\ v_{n+1} = \text{prox}_{\sigma_n g^*}(v_n + \sigma_n Lx_{n+1}). \end{cases}$$

**Théoreme 4.18**

Soient  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  et  $g : \mathcal{G} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ , deux fonctions de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$ , et  $L$  une application linéaire de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{G}$ .

Supposons que  $\text{int}(\text{dom } g) \cap L(\text{dom } f) \neq \emptyset$  ou  $\text{dom } g \cap \text{int}(L(\text{dom } f)) \neq \emptyset$ , que  $\arg \min(f + g \circ L) \neq \emptyset$  et que  $\tau$  et  $\sigma$  soient deux réels strictement positifs vérifiant  $1 \geq \tau\sigma\|L\|_*$  avec  $\|L\|_*$  la norme spectrale de  $L$ . Pour tout point  $(x_0, v_0)$  de  $\mathcal{H} \times \mathcal{G}$  et toute suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $]0, 1]$ , nous définissons les suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} p_n = \text{prox}_{\tau f}(x_n - \tau L^* v_n) \\ q_n = \text{prox}_{\sigma g^*}(v_n + \sigma L p_n) \\ x_{n+1} = x_n + \lambda_n(p_n - x_n) \\ v_{n+1} = v_n + \lambda_n(q_n - v_n), \end{cases}$$

Alors, nous avons que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers un point de  $\arg \min(f + g \circ L)$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers un point de  $\arg \min(f^* \circ (-L^*) + g^*)$ .

**4.4 Exercices d'application directe du cours**

Ces exercices d'application directe du cours sont à faire à la maison.

**Exercice: Calcul d'opérateurs proximaux**

a. Calculer les opérateurs proximaux des fonction suivantes:

- $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \mathbf{b}$ , où  $\mathbf{Q} \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$ .
- $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \|x\|_2$  est la norme euclidienne de  $x$ .
- $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = -\log(x)$ .

b. Soient  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{G}$  deux espaces de Hilbert,  $L$  une application linéaire de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{G}$ ,  $\gamma$  un réel de  $\mathbb{R}_+^*$  et  $z$  un vecteur de  $\mathcal{G}$ .

Montrer que l'opérateur proximal de la fonction  $f : x \mapsto \frac{\gamma}{2} \|Lx - z\|^2$  vaut

$$\text{prox}_f : x \mapsto (\mathbf{I} + \gamma L^* L)^{-1}(x + \gamma L^* z).$$

c. Prouver les différentes assertions de la Proposition 4.3.

**Exercice: Forte convexité et contraction**

Nous rappelons qu'une fonction  $f$  est dite fortement convexe de module  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) si

$$(\forall t \in [0, 1]) \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{\alpha}{2} t(1-t) \|x - y\|^2.$$

Soit  $f : \mathcal{H} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonction de  $\Gamma_0(\mathcal{H})$ .

1. Montrer que  $f$  est différentiable et est à gradient Lipschitz de constante  $\alpha^{-1}$  si et seulement si  $f^*$  est fortement convexe de module  $\alpha$ .
2. Prouver que si  $f$  est fortement convexe, alors  $\text{prox}_f$  est un opérateur contractant.

**Exercice: Monotonie et pseudo-contraction**

Soit  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur de  $\mathcal{H}$ . Nous définissons alors l'opérateur  $U$  tel que  $U = \mathbf{I} - T$ . Montrer que  $U$  est monotone si et seulement si  $T$  est une pseudo-contraction, i.e.

$$(\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2) \quad \|T(x) - T(y)\|^2 \leq \|(x - T(x)) - (y - T(y))\|^2 + \|x - y\|^2.$$

## Bibliographie

---

- [1] Heinz H. Bauschke and Patrick L. Combettes. Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. In *CMS Books in Mathematics*, pages 207–222. Springer New York, 2011.
- [2] Dimitri P. Bertsekas. *Nonlinear programming*. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, third edition, 2016.
- [3] Jonathan M. Borwein and Adrian S. Lewis. *Convex analysis and nonlinear optimization: Theory and examples*. Springer, 2 edition, 2010.
- [4] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [5] Yurii Nesterov. *Introductory lectures on convex optimization*. Springer US, 2004.
- [6] Jorge Nocedal and Stephen Wright. *Numerical optimization*. Springer New York, 2006.
- [7] Boris T. Polyak. *Introduction to optimization*. Translations Series in mathematics and engineering. Optimization Software, New York, 1987.