Интерполяция волатильности и аппроксимация Йосиды

Владимир Лучич
Исследования квантитативных методов в области деривативов на акции
Лондон, Великобритания

3 февраля 2012 г.

Аннотация

Цель данной заметки — указать на связь между аппроксимацией Йосиды для линейных операторов и методом интерполяции волатильности, разработанным в работе Andreasen и Huge (2011).

---

0 Прелиминарии

В этом разделе собраны некоторые хорошо известные факты из теории марковских процессов. Полное изложение можно найти в работе Ethier и Kurtz (1986).

Пусть E — сепарабельное метрическое пространство, а $\bar{C}(E)$ — пространство всех ограниченных непрерывных функций на E. Пусть A — линейный оператор, определённый на подпространстве $D(A) \subset \bar{C}(E)$. Предположим, что процесс X, определённый на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$, является решением мартингальной задачи для A, то есть

$$f(X(t)) - \int_0^t Af(X(u))\, du$$

является $\{\mathcal{F}_t\}$-мартингалом для любой $f \in D(A)$.

Аппроксимация Йосиды для A определяется для каждого $\lambda > 0$ следующим образом:

$$A_\lambda := \lambda A(\lambda - A)^{-1}, \quad D\left(A_\lambda\right) := R(\lambda - A).$$

Это семейство ограниченных линейных операторов, аппроксимирующих (обычно неограниченный) оператор A, и поэтому играет ключевую роль в общей теории марковских процессов. Например, аппроксимация Йосиды тесно связана с аппроксимацией X (в смысле слабой сходимости) марковским процессом с прыжками $\dot{X}(t) := Y(V(t))$, где $Y(n)$ — марковская цепь с функцией переходов $\mu_\lambda(x, \Gamma)$, а $V(t)$ — независимый пуассоновский процесс с параметром λ. Функция переходов определяет сжатие $P_\lambda f(\cdot) := \int f(y)\mu_\lambda(\cdot, dy)$, $f \in \dot{C}(E)$, продолжающее $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ из $D\left(A_\lambda\right)$ на $\dot{C}(E)$:

$$P_\lambda f = \lambda(\lambda - A)^{-1} f, \quad f \in D\left(A_\lambda\right).$$

В результате $Y(n)$ решает следующую дискретную мартингальную задачу: для любой $f \in R(\lambda - A)$

$$f(Y(n)) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda} A_\lambda f(Y(i))$$

является $\left\{\mathcal{F}_n^Y\right\}$-мартингалом (здесь $\mathcal{F}_n^Y$ — σ-алгебра, порождённая $Y(0), Y(1), \ldots, Y(n)$).

---

1 Дискретное прямое уравнение

Фиксируем $g \in D(A)$, и пусть $f := (I - A)g$. Принимая $\lambda = 1$ в (1), получаем для фиксированного n:

$$E[f(Y(n+1)) - f(Y(n)) - A_1 f(Y(n))] = 0.$$

Поскольку $A_1 f \equiv Ag$, то из (2) следует:

$$E[(I - A)g(Y(n+1))] = E[g(Y(n))].$$

Предположим, что Y_n имеет плотность $^1 p_n$. Тогда:

$$\int p_{n+1}(y) g(y)\, dy - \int p_{n+1}(y) Ag(y)\, dy = \int p_n(y) g(y)\, dy.$$

Предположим, что A^* — сопряжённый оператор для A. Тогда $\int p_{n+1}(y) Ag(y)\, dy = \int g(y) A^* p_{n+1}(y)\, dy$, что даёт:

$$\int \left[p_{n+1}(y) - A^* p_{n+1}(y)\right] g(y)\, dy = \int p_n(y) g(y)\, dy.$$

Это слабая форма [2]

$$p_{n+1} - A^* p_{n+1} = p_n.$$

Для особого случая одномерной диффузии $A = \frac{1}{2} x^2 \sigma^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ уравнение (3) даёт ключевое уравнение, использованное в работе Andreasen и Huge (2011) для разработки схемы интерполяции волатильности и модели локальной волатильности с "большими прыжками". Оно также разработано, при других условиях, в работе Carr и Cousot (2012).

Из вышеизложенного мы видим, что уравнение (3) естественным образом возникает как дискретное прямое уравнение для плотности аппроксимирующей марковской цепи для процесса с генератором A. Таким образом, (3) всегда имеет решение, которое является плотностью вероятности, пока непрерывный марковский процесс имеет плотность и допускает аппроксимацию марковским процессом с прыжками (условия для последнего обычно достаточно мягкие — см. раздел 4.3 работы Ethier и Kurtz (1986)).

Литература

Andreasen, J. и Huge, B. (2011), 'Волатильность интерполяции', RISK.
Carr, P. и Cousot, L. (2012), 'Явное построение мартингалов, калиброванных по заданным улыбкам имплицитной волатильности', SIAM J. Finan. Math. 3. Электронная копия доступна по адресу: http://ssrn.com/abstract=1699002.

Ethier, S. N. и Kurtz, T. G. (1986), *Марковские процессы: Характеристика и сходимость*, Wiley.

Gihman, I. I. и Skorohod, A. V. (1972), *Стохастические дифференциальные уравнения*, Springer.

A Условия существования плотности

Предположим, что функция переходов $P(t; x, y)$ исходного решения мартингальной задачи для A допускает плотность $p(t; x, y)$. Тогда функция переходов $\mu_\lambda(\cdot, \Gamma)$ также имеет плотность, и $\mu_\lambda(\cdot, dy) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t; \cdot, y)\, dt\, dy$. В случае знакомого оператора второго порядка

$$L = b(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

набор достаточных условий для существования плотности p приведён в теореме I.13.2 работы Gihman и Skorohod (1972).