Интерполяция волатильности и аппроксимация Йошиды

*Статья показывает, как **математическая теория** аппроксимации (приближённого описания сложных объектов) может помочь **в моделировании волатильности** (изменчивости) цен на финансовом рынке — например, при расчётах по **опционам** (финансовым контрактам).*

В частности, он показывает, что метод, используемый для моделирования "волатильности с прыжками" в работе Andreasen и Huge (2011), связан с аппроксимацией Йосиды — важным инструментом в теории марковских процессов.*

Плотность функции перехода, как правило, означает, что вероятность нахождения системы в некотором состоянии в определённый момент времени можно выразить через интеграл. Например, в задачах, связанных с процессами, переход от одного состояния к другому может описываться с помощью функции переходов. Когда эта функция имеет плотность, это означает, что переходы между состояниями можно измерить с помощью распределения вероятностей.

Интерполяция волатильности и аппроксимация Йосиды

Аннотация

Цель данной заметки — указать на связь между аппроксимацией Йосиды для линейных операторов и методом интерполяции волатильности, разработанным в работе Andreasen и Huge (2011).

---

1. Марковский процесс

Процесс, в котором **будущее зависит только от текущего состояния**, а не от прошлого. Примеры: игра в кости, блуждание по клеткам, курс акций при определённых условиях.

2. Генератор процесса (оператор A)

Это математический объект, описывающий, **как изменяется функция от состояния системы во времени**. Например, для физического процесса это может быть оператор, похожий на дифференцирование по времени.

3. Аппроксимация Йосиды

Это способ заменить **сложный (неограниченный)** оператор A на **семейство более простых операторов** A_λ, которые можно легко использовать для расчётов. Такие приближённые операторы удобно применять, когда хотим численно моделировать поведение сложного процесса.

---

0 Прелиминарии

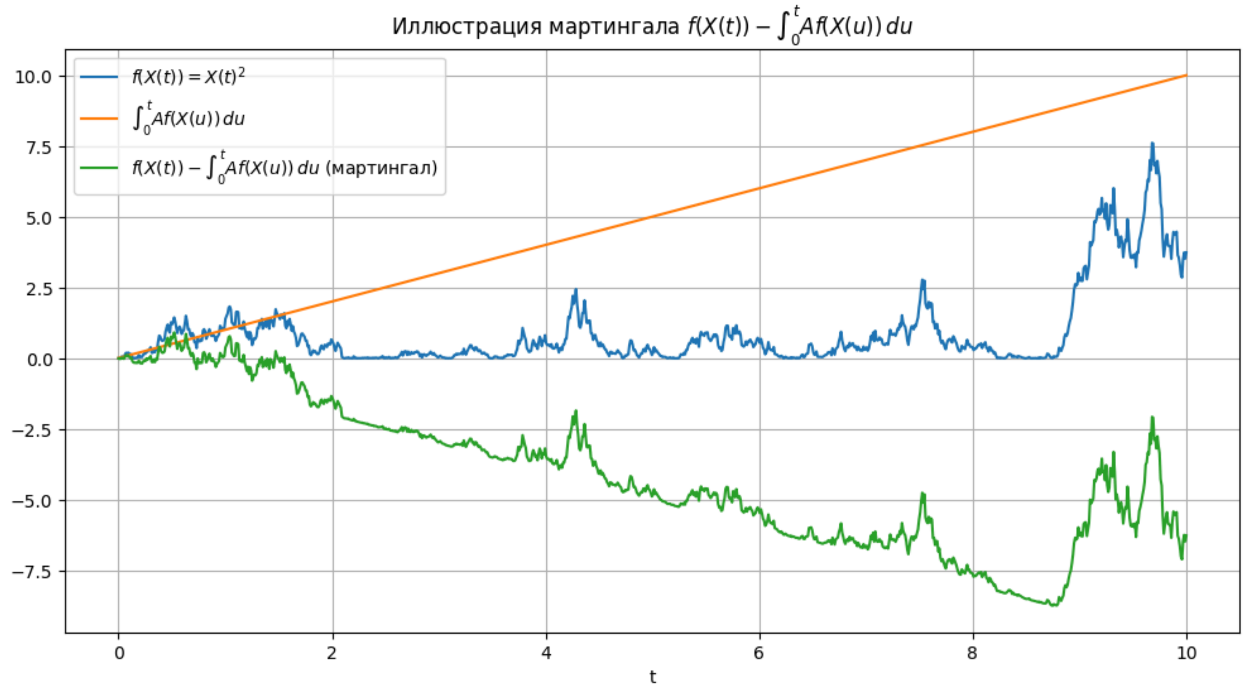
В этом разделе собраны некоторые хорошо известные факты из теории марковских процессов. Полное изложение можно найти в работе Ethier и Kurtz (1986).

Пусть E — сепарабельное метрическое пространство, а $\bar{C}(E)$ — пространство всех ограниченных непрерывных функций на E. Пусть A — линейный оператор, определённый на подпространстве $D(A) \subset \bar{C}(E)$. Предположим, что процесс X, определённый на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$, является решением мартингальной задачи для A, то есть

$$f(X(t)) - \int_0^t Af(X(u))\,du$$

является $\{\mathcal{F}_t\}$-мартингалом для любой $f \in D(A)$
(*т.е. величина, у которой **ожидаемое значение не меняется во времени**. Это ключевое свойство марковского процесса.*)

- *E — пространство состояний (например, возможные значения курса акций).*
- *A — оператор, связанный с эволюцией марковского процесса $X(t)$.



- Берём f(x)=x2f(x) = x^2f(x)=x2, тогда Af=1A f = 1Af=1 — константа.
- Интеграл от AfA fAf по времени — просто линейная функция.
- Мартингал $f(X(t)) - \int_0^t Af(X(u))du$ должен колебаться вокруг постоянного значения — это визуально подтверждает свойство мартингала.

- $X(t)$ — броуновское движение,
- $f(x) = x^2$,
- Тогда по правилам стохастического исчисления:

$$Af(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dx^2} x^2 = 1.$$

- То есть: $\int_0^t Af(X(u))\,du = \int_0^t 1\,du = t.$

Значит:

$$M(t) = f(X(t)) - \int_0^t 1\,du = X(t)^2 - t.$$

То есть мартингал — это:

$$M(t) = X(t)^2 - t.$$

А это **всегда ниже** $X(t)^2$ ровно на величину t, потому что мы вычитаем линейную функцию t.

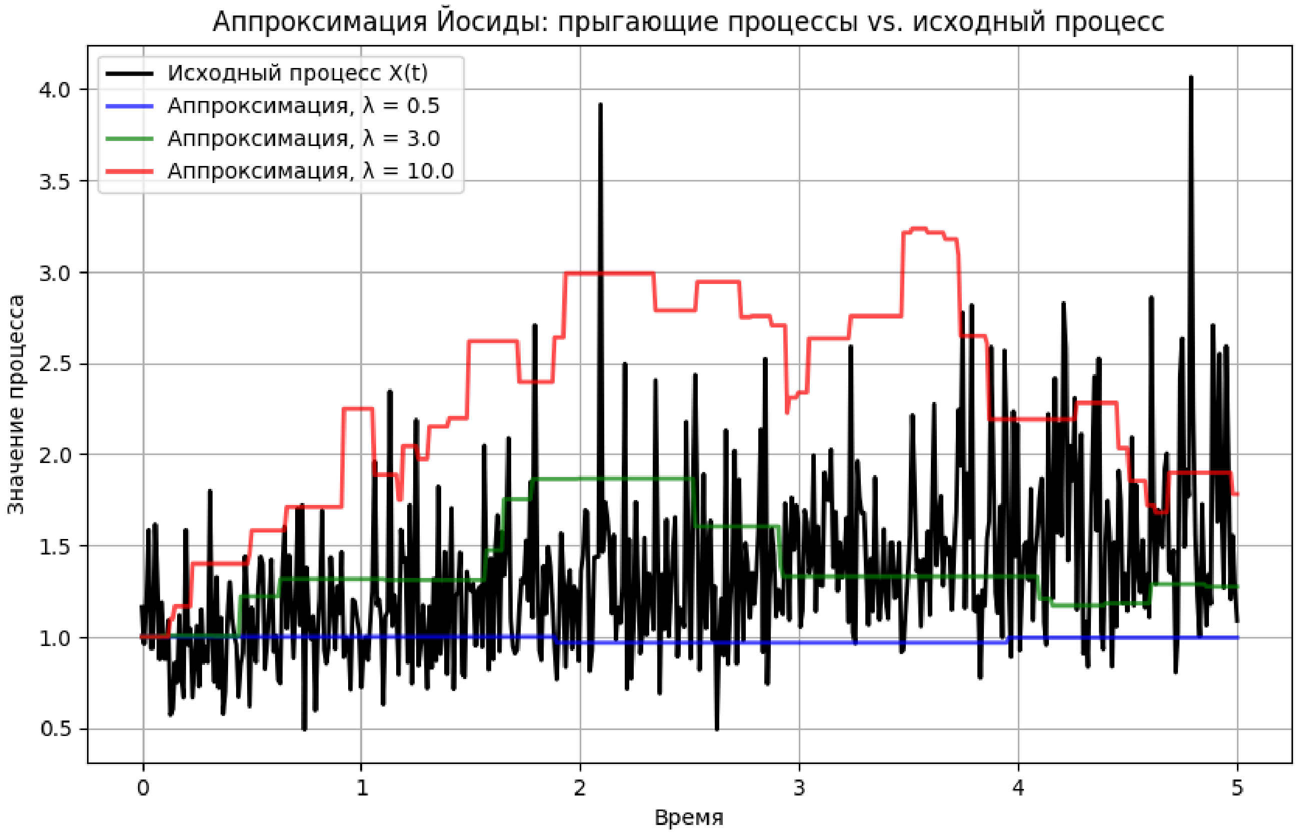
- ***И для мартингала график всегда будет ниже на -t***

Аппроксимация Йосиды для A определяется для каждого $\lambda > 0$ следующим образом:

$$A_\lambda := \lambda A(\lambda - A)^{-1}, \quad D(A_\lambda) := R(\lambda - A).$$

*Позволяет приближённо заменить A оператором A_λ, который проще. Эти операторы используются для построения **прыгающих марковских цепей**, которые можно считать приближением исходного процесса $X(t)$.*

```
np.random.randn(len(t))
```



по аналогии с ядром в opencv чем больше ядро тем больше размытие и тут чем больше лямбда тем больше размытие

- Исходный процесс $X(t)$ моделируется как непрерывный (например, броуновское движение).
- Аппроксимация Йосиды заменяет его дискретным прыгающим процессом $Y(V(t))$, где:
  - $V(t)$ — Пуассоновский счётчик (число прыжков до момента времени t)
    это типо случайное время,
  - $Y(n)$— Марковская цепь с дискретными шагами.
- Параметр λ управляет **частотой прыжков**. При больших λ приближение к исходному процессу становится **более точным**.

Это семейство ограниченных линейных операторов, аппроксимирующих (обычно неограниченный) оператор A, и поэтому играет ключевую роль в общей теории марковских процессов. Например, аппроксимация Йосиды тесно связана с аппроксимацией X (в смысле слабой сходимости) марковским процессом (jump) $\dot{X}(t) := Y(V(t))$, где $Y(n)$ — марковская цепь с функцией переходов $\mu_\lambda(x, \Gamma)$, а $V(t)$ — независимый пуассоновский процесс с параметром λ. Функция переходов определяет сжатие

$P_\lambda f(\cdot) := \int f(y)\mu_\lambda(\cdot, dy)$, $f \in \dot{C}(E)$, продолжающее $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ из $D(A_\lambda)$ на $\dot{C}(E)$:

$$P_\lambda f = \lambda(\lambda - A)^{-1} f, \quad f \in D(A_\lambda).$$

В результате $Y(n)$ решает следующую дискретную мартингальную задачу: для любой $f \in R(\lambda - A)$

$$f(Y(n)) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda} A_\lambda f(Y(i))$$

является $\{\mathcal{F}_n^Y\}$-мартингалом (здесь $\mathcal{F}_n^Y$ — σ-алгебра, порождённая $Y(0), Y(1), \ldots, Y(n)$).
*это **мартингал**, то есть её среднее значение не меняется во времени, если мы знаем прошлое. Это свойство помогает анализировать поведение случайных процессов.*

Связь с марковскими цепям

Предлагается построить процесс $Y(n)$ — дискретную цепь, которая приближает поведение $X(t)$. Это можно сделать так:

- Берём оператор A_λ и используем его для построения **функции переходов** $\mu_\lambda(x, \Gamma)$ — вероятность попасть из состояния x в множество Γ .
- Эта цепь описывает "большие скачки" (jump process) — это полезно в финансовом моделировании, особенно для волатильности.

---

1 Дискретное прямое уравнение

Фиксируем $g \in D(A)$, и пусть $f := (I - A)g$.
Принимая $\lambda = 1$ в (1), получаем для фиксированного n:

$$E[f(Y(n+1)) - f(Y(n)) - A_1 f(Y(n))] = 0.$$

Поскольку $A_1 f \equiv Ag$, то из (2) следует:
предположим, что функция f выражена как $f = (I - A)g$. Тогда, подставляя это в уравнение, получаем:
$E[(I - A)g(Y(n+1)) - (I - A)g(Y(n)) - Ag(Y(n))] = 0$

Теперь упрощаем выражение, замечая, что $(I-A)g(Y(n))$и $Ag(Y(n))$ скомпенсируют друг друга. Это упрощает уравнение до следующего:

$$E[(I-A)g(Y(n+1))] = E[g(Y(n))].$$

что и есть искомое выражение. Это показывает, как оператор $(I-A))$ действует на g в шагах марковской цепи, и приводит к равенству математических ожиданий для двух состояний процесса $Y(n)$и $Y(n+1)$. Предположим, что Y_n имеет плотность [1] p_n. Тогда:

$$\int p_{n+1}(y)g(y)\,dy - \int p_{n+1}(y)Ag(y)\,dy = \int p_n(y)g(y)\,dy.$$

Предположим, что A^* — сопряжённый оператор для A. Тогда $\int p_{n+1}(y)Ag(y)\,dy = \int g(y)A^*p_{n+1}(y)\,dy$, что даёт:

$$\int [p_{n+1}(y) - A^*p_{n+1}(y)]g(y)\,dy = \int p_n(y)g(y)\,dy.$$

Это слабая форма [2]

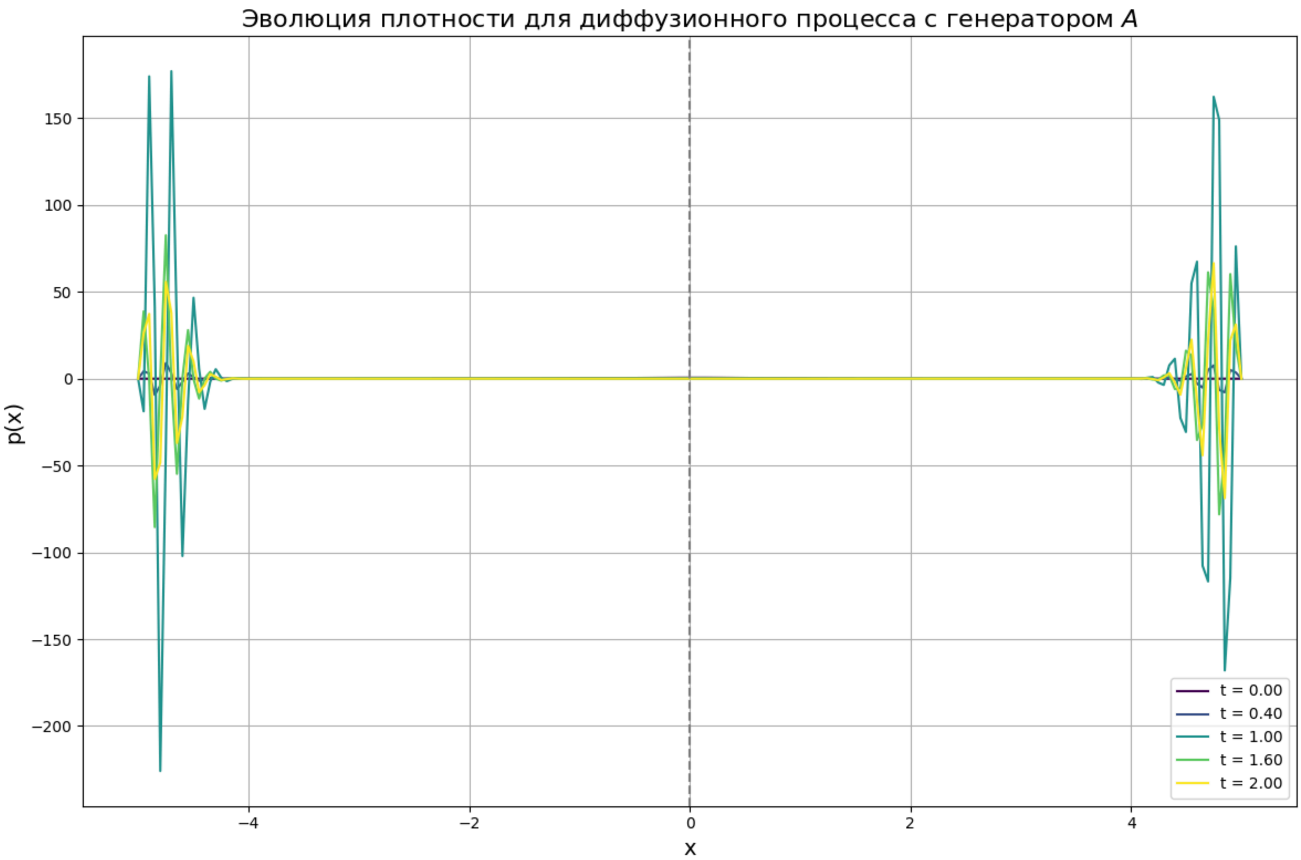
$$p_{n+1} - A^*p_{n+1} = p_n.$$

Для особого случая одномерной диффузии $A = \frac{1}{2}x^2\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ уравнение (3) даёт ключевое уравнение, использованное в работе Andreasen и Huge (2011) для разработки схемы интерполяции волатильности и модели локальной волатильности с "большими прыжками". Оно также разработано, при других условиях, в работе Carr и Cousot (2012).

график:
Генератор $A(x)$: $A(x) = \frac{1}{2}\sigma^2x^2$
Начальная плотность p(x)p(x)p(x): Начальная плотность — это нормальное распределение (Гауссова функция), которое является стандартным выбором для подобных задач. Мы нормируем её, чтобы интеграл по всей области был равен 1.
Численное решение: применяем метод Эйлера, чтобы аппроксимировать изменение плотности $p(x)$ во времени. Изменения происходят по формуле:

$pnew(xi) = p(x_i) + \Delta t \cdot \frac{A(x_i)(p(x_{i+1}) - p(x_{i-1}))}{2\Delta x}$

где $A(x_i)$ — это генератор для точки x_i, а $p(x_{i+1})$ и $p(x_{i-1})$ — значения плотности в соседних точках.



На графике видно, как плотность $p(x) изменяется со временем. На первых шагах плотность сильно варьируется, затем постепенно стабилизируется в определенной форме, что отражает динамику диффузионного процесса.

Из вышеизложенного мы видим, что уравнение (3) естественным образом возникает как дискретное прямое уравнение для плотности аппроксимирующей марковской цепи для процесса с генератором A. Таким образом, (3) всегда имеет решение, которое является плотностью вероятности, пока непрерывный марковский процесс имеет плотность и допускает аппроксимацию марковским процессом с прыжками (условия для последнего обычно достаточно мягкие — см. раздел 4.3 работы Ethier и Kurtz (1986)).

Литература

Andreasen, J. и Huge, B. (2011), 'Волатильность интерполяции', RISK.
Carr, P. и Cousot, L. (2012), 'Явное построение мартингалов, калиброванных по заданным улыбкам имплицитной волатильности', SIAM J. Finan. Math. 3. Электронная копия доступна по адресу: http://ssrn.com/abstract=1699002.

Ethier, S. N. и Kurtz, T. G. (1986), *Марковские процессы: Характеристика и сходимость*, Wiley.

Gihman, I. I. и Skorohod, A. V. (1972), *Стохастические дифференциальные уравнения*, Springer.

A Условия существования плотности

Предположим, что функция переходов $P(t; x, y)$ исходного решения мартингальной задачи для A допускает плотность $p(t; x, y)$. Тогда функция переходов $\mu_\lambda(\cdot, \Gamma)$ также имеет плотность, и
$\mu_\lambda(\cdot, dy) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t; \cdot, y)\, dt\, dy$.
- $\mu_\lambda(\cdot, \Gamma)$ — это некая функция, характеризующая вероятность перехода через интеграл.
- λ — это параметр, который контролирует скорость переходов.
- Интеграл по времени и состоянию y описывает, как часто система находится в различных состояниях y с учётом времени.

В случае знакомого оператора второго порядка

$$L = b(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Этот оператор описывает изменение функции в зависимости от положения x. Он включает в себя два компонента:

- $b(x)$ — первый член, который отвечает за "первичное" изменение функции в зависимости от x. Это своего рода "скорость изменения".
- $\frac{1}{2}a(x)$ — второй член, который описывает "вторичное" изменение функции, т.е. насколько сильно изменяется скорость изменения. Оператор L используется для описания эволюции системы, и в контексте мартингала он может описывать, как процесс изменяется со временем.

набор достаточных условий для существования плотности p приведён в теореме I.13.2 работы Gihman и Skorohod (1972).

Функции переходов в задачах мартингалов описывают, как система меняется со временем, и плотность этих функций позволяет нам понять, как часто система оказывается в различных состояниях. Мы можем использовать такие операторы, как L, чтобы формализовать эти изменения, и интегралы, чтобы вычислять вероятности переходов между состояниями.

Основной вывод: наличие плотности в задаче мартингала означает, что мы можем использовать математические инструменты, такие как интегралы и операторы второго порядка, чтобы точно описать поведение системы, переходящей между состояниями.