



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Тхань, С. Д. Двоенко, Устранение шума на изображениях на основе метода полной вариации,  
*Компьютерная оптика*, 2015, том 39, выпуск 4, 564–571

<https://www.mathnet.ru/co18>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 79.139.131.87

15 апреля 2025 г., 20:02:35



## УСТРАНЕНИЕ ШУМА НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПОЛНОЙ ВАРИАЦИИ

Д.Н.Х. Тхань, С.Д. Двоенко

Тульский государственный университет, Тула, Россия

## Аннотация

Рассматривается подход к устранению комбинации гауссовского и пуассоновского шумов на растровых изображениях. Считается, что такое сочетание шумов характерно для биомедицинских изображений. Предлагается применить метод полной вариации функции яркости изображения с использованием комбинации двух широко известных моделей устранения шумов. Качество обработки изображений зависит от настраиваемых параметров модели. Построена процедура с автоматической оценкой этих параметров. Приводятся результаты экспериментов на реальном рентгенографическом изображении с искусственно внесённым шумом. Показано, что найденные параметры близки к заданным, обеспечивая оптимальное качество устранения комбинированного шума.

**Ключевые слова:** полная вариация, ROF-модель, гауссовский шум, пуассоновский шум, обработка изображений, биомедицинские изображения, уравнение Эйлера–Лагранжа.

**Цитирование:** Тхань, Д.Н.Х. Устранение шума на изображениях на основе метода полной вариации / Д.Н.Х. Тхань, С.Д. Двоенко // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 4. – С. 564–571, – DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-4-564-571.

## Введение

В современных исследованиях цифровые изображения являются важным типом информации. Растровые изображения создаются с помощью различного цифрового оборудования, такого как: цифровые камеры, рентгеновские сканеры и т. д. Применение цифрового оборудования в различных условиях может приводить к появлению различных эффектов на растровом изображении, в том числе шумов.

Проблема устранения шума на цифровых изображениях является актуальной и в настоящее время. Для эффективного устранения шума обычно требуется знать его тип. Существуют **разные типы шумов**, например, **гауссовский шум** (большинство цифровых изображений, полученных цифровыми камерами), **пуассоновский шум** (рентгеновские снимки), **спектральный шум** (ультрасонограммы) и т.д.

В настоящее время разработано много методов устранения шумов для случаев, когда тип шума известен. Например, метод полной вариации [1 – 13] является известным и эффективным подходом.

Впервые концепция полной вариации была применена для устранения шума в работе [12] Рудина и его соавторов Ошена и Фатемиды (ROF-модель). Ими предложено использовать полную вариацию в задачах обработки изображений. ROF-модель предназначена для устранения гауссовского шума [12, 13].

Конечно, она может быть использована для устранения и других типов шумов, но в таком случае она не очень эффективна. Другим популярным шумом является пуассоновский шум. Например, этот шум появляется в рентгеновских снимках. ROF-модель не сможет эффективно устранить такой шум. Поэтому в работе Ли [14] была построена другая модель, известная как модифицированная ROF-модель.

Оба типа шумов (гауссовский и пуассоновский) популярны, но их комбинация также важна [15]. Она часто появляется в биомедицинских изображениях, например, в изображениях электронной микроскопии [16, 17].

Для того, чтобы устранить оба типа шумов, можно скомбинировать разные модели. Поэтому в данной статье предлагается совместно применить ROF-модель и модифицированную ROF-модель.

Предполагается, что такая модель должна эффективно устранить комбинированный шум с учётом пропорции двух типов шумов.

В экспериментах было использовано реальное изображение после добавления к нему шума. Качество обработки сравнивалось с другими методами устранения шума, например: ROF-модель, модифицированная ROF-модель, фильтрация медианой [18], фильтрация Винера [19], метод регуляризации Бельтрами (Beltrami) [20]. Чтобы сравнить качество изображений после восстановления, были использованы известные критерии *PSNR* (Peak Signal-to-Noise Ratio – пиковое отношение сигнала к шуму), *MSE* (Mean Square Error – среднеквадратичная ошибка) и *SSIM* (Structure SIMilarity – структурное сходство) [21, 22]. Наиболее важными из них являются однозначно связанные друг с другом критерии *PSNR* и *MSE*, т.к. они используются для оценки качества восстановления сигнала и качества изображений.

## 1. Модель устранения смеси гауссовского и пуассоновского шумов

Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^2$  задана ограниченная область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Назовём функции  $u(x,y) \in \mathbb{R}^2$  и  $v(x,y) \in \mathbb{R}^2$  соответственно идеальным (без шума) и реальным (зашумлённым) изображениями, где  $(x,y) \in \Omega$ .

Если функция  $u$  гладкая, её полная вариация имеет вид:

$$V_T[u] = \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy,$$

где  $\nabla u = (u_x, u_y)$  – градиент,  $u_x = du/dx$ ,  $u_y = du/dy$ ,

$|\nabla u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ . В этой работе мы считаем, что полная вариация функции  $u$  ограничена  $V_T[u] < \infty$ .

Согласно работам [1, 2, 12, 13, 23], гладкость изображений можно характеризовать их полной вариацией. Полная вариация зашумлённых изображений всегда больше полной вариации соответствующих гладких изображений.

Для решения задачи  $V_T[u] \rightarrow \min$  необходимо ввести ограничение на вариацию гауссовского шума:

$$\int_{\Omega} (v-u)^2 dx dy = const.$$

В этих условиях модель ROF для устранения гауссовского шума на изображении имеет вид [12]:

$$u^* = \arg \min_u \left( \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (v-u)^2 dx dy \right)$$

как решение задачи безусловной оптимизации, где  $\lambda > 0$  – множитель Лагранжа.

Для устранения пуассоновского шума на основе ROF-модели была предложена другая модель [14]. Такая модель получается при решении задачи  $V_T[u] \rightarrow \min$  с ограничением:

$$\int_{\Omega} \ln(p(v|u)) dx dy = \int_{\Omega} (u - v \ln(u)) dx dy = const,$$

как решение задачи безусловной оптимизации:

$$u^* = \arg \min_u \left( \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \beta \int_{\Omega} (u - v \ln(u)) dx dy \right),$$

где  $\beta > 0$  – коэффициент регуляризации. Такая модель известна как модифицированная ROF-модель для устранения пуассоновского шума.

Чтобы построить модель устранения смешанного шума, будем также решать задачу устранения шума, основанную на свойстве гладкости полной вариации:  $V_T[u] \rightarrow \min$ . Предполагается, что при заданном изображении вариация шума постоянна (пуассоновский шум не изменяется, а гауссовский шум зависит только от дисперсии шума):

$$\int_{\Omega} \ln(p(v|u)) dx dy = const, \quad (1)$$

где  $p(v|u)$  – условная вероятность наблюдения реального изображения  $v$  при заданном идеальном изображении  $u$ .

Рассмотрим гауссовский шум. Его плотность распределения с дисперсией  $\sigma^2$  определяется как:

$$p_1(v|u) = \exp\left(-\frac{(v-u)^2}{2\sigma^2}\right) / (\sigma\sqrt{2\pi}).$$

Плотность пуассоновского шума определяется как:

$$p_2(v|u) = \exp(-u) u^v / v!.$$

Обратим внимание, что значения функций яркости изображения  $u$  и  $v$  – это целые числа (например, для восьмибитового изображения интервал яркости определяется значениями от 0 до 255).

Для устранения комбинации гауссовского и пуассоновского шумов рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\ln(p(v|u)) = \lambda_1 \ln(p_1(v|u)) + \lambda_2 \ln(p_2(v|u)),$$

где  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ .

Согласно (1), получим задачу устранения шума с ограничениями:

$$\begin{cases} u^* = \arg \min_u \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy, \\ \int_{\Omega} \left( \frac{\lambda_1}{2\sigma^2} (v-u)^2 + \lambda_2 (u - v \ln(u)) \right) dx dy = \kappa, \end{cases}$$

где  $\kappa$  – постоянное значение.

Сведём эту задачу к задаче безусловной оптимизации с использованием функционала Лагранжа:

$$L(u, \tau) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \tau \left( \frac{\lambda_1}{2\sigma^2} \int_{\Omega} (v-u)^2 dx dy + \lambda_2 \int_{\Omega} (u - v \ln(u)) dx dy - \kappa \right),$$

чтобы найти решение:

$$(u^*, \tau^*) = \arg \min_{u, \tau} L(u, \tau), \quad (2)$$

где  $\tau > 0$  – множитель Лагранжа.

В данной модели, если  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = 1$ , то при  $\beta = \tau \lambda_2 = \tau$  будет получена модифицированная ROF-модель для устранения пуассоновского шума. Если  $\lambda_2 = 0$  и  $\lambda_1 = 1$ , то при  $\lambda = \tau \lambda_1 / (2\sigma^2) = \tau / (2\sigma^2)$  будет получена ROF-модель для устранения гауссовского шума. Если  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , то будет получена модель для устранения смеси гауссовского и пуассоновского шумов.

## 2. Дискретная модель смеси шумов

Для решения задачи (2) можно применить метод множителей Лагранжа [24, 25, 26]. В этой работе будет использовано уравнение Эйлера–Лагранжа [24].

Пусть функция  $f(x, y)$  определена в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  и непрерывно дифференцируема до второго порядка по  $x$  и  $y$  при  $(x, y) \in \Omega$ .

Пусть  $F(x, y, f, f_x, f_y)$  – выпуклый функционал, где  $f_x = \partial f / \partial x$ ,  $f_y = \partial f / \partial y$ . Решение задачи оптимизации  $\int_{\Omega} F(x, y, f, f_x, f_y) dx dy \rightarrow \min$  удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа:

$$F_f(x, y, f, f_x, f_y) - \frac{\partial}{\partial x} F_{f_x}(x, y, f, f_x, f_y) - \frac{\partial}{\partial y} F_{f_y}(x, y, f, f_x, f_y) = 0,$$

где  $F_f = \partial F / \partial f$ ,  $F_{f_x} = \partial F / \partial f_x$ ,  $F_{f_y} = \partial F / \partial f_y$ .

Тогда решение задачи (2) удовлетворяет следующему уравнению Эйлера–Лагранжа:

$$-\frac{\lambda_1}{\sigma^2}(v-u) + \lambda_2(1-\frac{v}{u}) - \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \right) = 0, \quad (3)$$

где  $\mu = 1/\tau$ .

Представим уравнение (3) в следующем виде:

$$\frac{\lambda_1}{\sigma^2}(v-u) - \lambda_2(1-\frac{v}{u}) + \mu \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_xu_yu_{xy} + u_x^2u_{yy}}{(u_x^2 + u_y^2)^{3/2}} = 0, \quad (4)$$

где  $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ,  $u_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = u_{yx}$ .

Для получения дискретной модели (4) добавим искусственный параметр времени  $u = u(x, y, t)$ . Уравнение (4) соответствует уравнению диффузии:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda_1}{\sigma^2}(v-u) - \lambda_2(1-\frac{v}{u}) + \mu \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_xu_yu_{xy} + u_x^2u_{yy}}{(u_x^2 + u_y^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

Рассмотрим изображение размером  $N_1 \times N_2$ . Тогда дискретная форма уравнения (5) имеет вид:

$$u_{ij}^{k+1} = u_{ij}^k + \xi \left( \frac{\lambda_1}{\sigma^2}(v_{ij} - u_{ij}^k) - \lambda_2(1 - \frac{v_{ij}}{u_{ij}^k}) + \mu \Phi_{ij}^k \right), \quad (6)$$

$$\Phi_{ij}^k = \frac{\nabla_{xx}(u_{ij}^k)(\nabla_y(u_{ij}^k))^2}{((\nabla_x(u_{ij}^k))^2 + (\nabla_y(u_{ij}^k))^2)^{3/2}} + \frac{-2\nabla_x(u_{ij}^k)\nabla_y(u_{ij}^k)\nabla_{xy}(u_{ij}^k) + (\nabla_x(u_{ij}^k))^2\nabla_{yy}(u_{ij}^k)}{((\nabla_x(u_{ij}^k))^2 + (\nabla_y(u_{ij}^k))^2)^{3/2}},$$

$$\nabla_x(u_{ij}^k) = \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2\Delta x},$$

$$\nabla_y(u_{ij}^k) = \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{2\Delta y}, \quad \nabla_{xx}(u_{ij}^k) = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1,j}^k}{(\Delta x)^2},$$

$$\nabla_{yy}(u_{ij}^k) = \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{i,j-1}^k}{(\Delta y)^2},$$

$$\nabla_{xy}(u_{ij}^k) = \frac{u_{i+1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k - u_{i-1,j+1}^k + u_{i-1,j-1}^k}{4\Delta x\Delta y},$$

$$u_{0j}^k = u_{1j}^k; u_{N_1+1,j}^k = u_{N_1,j}^k; u_{i0}^k = u_{i1}^k; u_{i,N_2+1}^k = u_{i,N_2}^k;$$

$$i = 1, \dots, N_1; j = 1, \dots, N_2;$$

$$k = 0, 1, \dots, K; \Delta x = \Delta y = 1; 0 < \xi < 1,$$

где  $K$  – достаточно большое число,  $K = 500$ .

### 3. Параметры модели смеси шумов

Процедура (6) может быть использована для устранения шума на изображениях, если значения параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \mu, \sigma$  заданы. Часто на практике эти параметры неизвестны, и их нужно оценить. Тогда параметры  $\lambda_1, \lambda_2, \mu$  в процессе (6) нужно представить

как  $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \mu^k$  на каждой итерации  $k$ . В новой процедуре такие параметры будут вычисляться на каждом шаге итерации.

#### 3.1. Оптимальные параметры $\lambda_1$ и $\lambda_2$

Пусть  $(u, \tau)$  является решением задачи (2). Тогда мы получим условие  $\partial L(u, \tau) / \partial u = 0$ .

Данное условие позволяет вычислить оптимальные параметры линейной комбинации шумов  $\lambda_1, \lambda_2$ :

$$\lambda_1 = \frac{\int_{\Omega} (1 - \frac{v}{u}) dx dy}{\frac{1}{\sigma^2} \int_{\Omega} (v - u) dx dy + \int_{\Omega} (1 - \frac{v}{u}) dx dy}, \quad \lambda_2 = 1 - \lambda_1.$$

Дискретная форма для вычисления параметров имеет вид:

$$\lambda_1^k = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (1 - \frac{v_{ij}}{u_{ij}^k})}{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (\frac{v_{ij} - u_{ij}^k}{\sigma^2} + 1 - \frac{v_{ij}}{u_{ij}^k})}, \quad \lambda_2^k = 1 - \lambda_1^k,$$

где  $k = 0, 1, \dots, K$ .

#### 3.2. Оптимальный параметр $\mu$

Для поиска оптимального параметра  $\mu$  умножим (3) на  $(v - u)$  и проинтегрируем по частям по всей области  $\Omega$ . В итоге получим формулу для поиска оптимального параметра  $\mu$ :

$$\mu = \frac{\int_{\Omega} (-\frac{\lambda_1}{\sigma^2}(v-u)^2 - \lambda_2 \frac{(v-u)^2}{u}) dx dy}{\int_{\Omega} (\sqrt{u_x^2 + u_y^2} - \frac{u_x v_x + u_y v_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}) dx dy}.$$

Его дискретная форма имеет вид:

$$\mu^k = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (-\frac{\lambda_1^k}{\sigma^2} (v_{ij} - u_{ij}^k)^2 - \lambda_2^k \frac{(v_{ij} - u_{ij}^k)^2}{u_{ij}^k})}{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \eta_{ij}^k},$$

где

$$\eta_{ij}^k = \sqrt{(\nabla_x(u_{ij}^k))^2 + (\nabla_y(u_{ij}^k))^2} - \frac{\nabla_x(u_{ij}^k)\nabla_x(v_{ij}) + \nabla_y(u_{ij}^k)\nabla_y(v_{ij})}{\sqrt{(\nabla_x(u_{ij}^k))^2 + (\nabla_y(u_{ij}^k))^2}},$$

$$\nabla_x(u_{ij}^k) = \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2\Delta x}, \quad \nabla_y(u_{ij}^k) = \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{2\Delta y},$$

$$\nabla_x(v_{ij}^k) = \frac{v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j}^k}{2\Delta x}, \quad \nabla_y(v_{ij}^k) = \frac{v_{i,j+1}^k - v_{i,j-1}^k}{2\Delta y},$$

$$u_{0j}^k = u_{1j}^k; u_{N_1+1,j}^k = u_{N_1,j}^k; u_{i0}^k = u_{i1}^k; u_{i,N_2+1}^k = u_{i,N_2}^k;$$

$$v_{0j}^k = v_{1j}^k; v_{N_1+1,j}^k = v_{N_1,j}^k; v_{i0}^k = v_{i1}^k; v_{i,N_2+1}^k = v_{i,N_2}^k;$$

$$i = 1, \dots, N_1; j = 1, \dots, N_2; k = 0, 1, \dots, K; \Delta x = \Delta y = 1.$$

### 3.3. Оптимальный параметр $\sigma$

Для вычисления параметра  $\sigma$  здесь использован метод Иммеркера [27]:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\pi/2}}{6(N_1 - 2)(N_2 - 2)} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} |u_{ij} * \Lambda|, \quad (7)$$

где  $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  – маска изображения.

Оператор  $*$  – это оператор свёртки, где:

$$u_{ij} * \Lambda = u_{i-1,j-1} \Lambda_{33} + u_{i,j-1} \Lambda_{32} + u_{i+1,j-1} \Lambda_{31} + u_{i-1,j} \Lambda_{23} + \\ + u_{ij} \Lambda_{22} + u_{i+1,j} \Lambda_{21} + u_{i-1,j+1} \Lambda_{13} + u_{i,j+1} \Lambda_{12} + u_{i+1,j+1} \Lambda_{11},$$

где  $i = 1, \dots, N_1; j = 1, \dots, N_2; u_{ij} = 0$ , если  $i = 0$ , или  $j = 0$ , или  $i = N_1 + 1$ , или  $j = N_2 + 1$ .

Параметр  $\sigma$  вычисляется на первой же итерации.

### 4. Оценка качества изображений

Для оценки качества изображений после устранения шума использованы критерии  $PSNR$ ,  $MSE$  и  $SSIM$  [21, 22]:

$$Q_{PSNR} = 10 \lg \left( N_1 N_2 L^2 / \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (v_{ij} - u_{ij})^2 \right),$$

$$Q_{MSE} = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (v_{ij} - u_{ij})^2,$$

$$Q_{SSIM} = \frac{(2\bar{u}\bar{v} + C_1)(2\sigma_{uv} + C_2)}{(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + C_1)(\sigma_u^2 + \sigma_v^2 + C_2)},$$

где

$$\bar{u} = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} u_{ij}, \quad \bar{v} = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} v_{ij}.$$

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N_1 N_2 - 1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (u_{ij} - \bar{u})^2,$$

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{N_1 N_2 - 1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (v_{ij} - \bar{v})^2,$$

$$\sigma_{uv} = \frac{1}{N_1 N_2 - 1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (u_{ij} - \bar{u})(v_{ij} - \bar{v}),$$

$$C_1 = (K_1 L)^2, \quad C_2 = (K_2 L)^2; \quad K_1 \ll 1; \quad K_2 \ll 1.$$

Например,  $K_1 = K_2 = 10^{-6}$ ,  $L = 2^8 - 1 = 255$  – яркость 8-битового серого изображения.

Чем больше  $Q_{PSNR}$ , тем лучше качество изображения. Если значение  $Q_{PSNR}$  лежит в интервале между 20 и 25, то качество изображения приемлемо, например, для беспроводной передачи [28].

Значение  $Q_{MSE}$  использовано для оценки различия между двумя изображениями, где  $Q_{MSE}$  – среднеквадратичная ошибка. Чем меньше значение  $Q_{MSE}$ , тем лучше результат восстановления. Значение  $Q_{MSE}$  прямо связано со значением  $Q_{PSNR}$ .

Значение  $Q_{SSIM}$  использовано для оценки качества изображения с помощью сравнения сходства двух изображений. Его значение лежит в интервале между -1 и 1. Чем больше значение  $Q_{SSIM}$ , тем лучше качество изображения.

### 5. Начальное решение

Очевидно, что в локальной итерационной процедуре (6) результат в общем случае зависит от начальных значений параметров  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \mu^0$ .

Если сначала задать параметры  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \mu^0$ , то неудачные значения определяют не очень хорошие оценки  $u_{ij}$ , а через них – оценки параметров распределений.

Случайный выбор параметров  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \mu^0$  также неприемлем, т.к. фактически вносит дополнительный шум в изображение.

Очевидно, что начальные значения параметров  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \mu^0$  должны быть, по-возможности, достаточно близки к тем значениям, которые будут найдены. Поэтому оценим параметры  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \mu^0$  как средние по соседним пикселям изображения, используя, например, метод Иммеркера (7).

### 6. Эксперименты

Предложенная модель была протестирована на реальных изображениях. Например, было использовано изображение черепа человека [29] размером  $300 \times 300$  пикселей (рис. 1а). На остальных изображениях (рис. 1б–1з) показан увеличенный фрагмент этого изображения.

Для получения зашумлённого изображения сначала был добавлен гауссовский шум (рис. 1в), потом – пуассоновский шум (рис. 1д). На рис. 1ж показано зашумлённое изображение для смеси двух шумов с параметрами  $\lambda_1=0,8, \lambda_2=0,2$ .

Параметры линейной комбинации  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  были определены следующим образом. Сначала был рассмотрен пуассоновский шум с плотностью распределения  $p_2(v|u)$  и вариацией  $\sigma_2 = \sqrt{u_{ij}}$  относительно среднего  $u_{ij}$  в каждом пикселе с координатами  $(i,j)$ ,  $i=1, \dots, N_1; j=1, \dots, N_2$ .

Функция яркости такого изображения обозначена как  $v^{(2)}$ . Её значения должны находиться в интервале от 0 до 255. Если значение выходит за этот диапазон, то оно не изменяется  $v^{(2)}_{ij} = u_{ij}$ . На данном изображении оказалось всего пять таких значений (0,0056 %).

Общая дисперсия пуассоновского шума определена как среднее  $\bar{\sigma}_2 = 10,0603$ .

Далее нами было принято, что дисперсия гауссовского шума  $\sigma_1=40,2412$  в четыре раза больше. Функция яркости такого изображения обозначена как  $v^{(1)}$ . Как и раньше, значения функции яркости  $v^{(1)}$  также должны быть в интервале от 0 до 255.

В этом случае оказалось, что 5780 (6,42 %) пикселей со значением яркости  $v^{(1)}_{ij}$  находятся за пределами этого диапазона. Результирующее изображение (рис. 1ж) образовано двумя зашумленными изображениями в пропорции 0,5 для  $v^{(1)}$  и 0,5 для  $v^{(2)}$ . Это означает, что  $v=0,5v^{(1)}+0,5v^{(2)}$ . Следовательно:

$$\lambda_1 / \lambda_2 = \frac{40,2412 \cdot 0,5}{10,0603 \cdot 0,5} = 4 / 1.$$

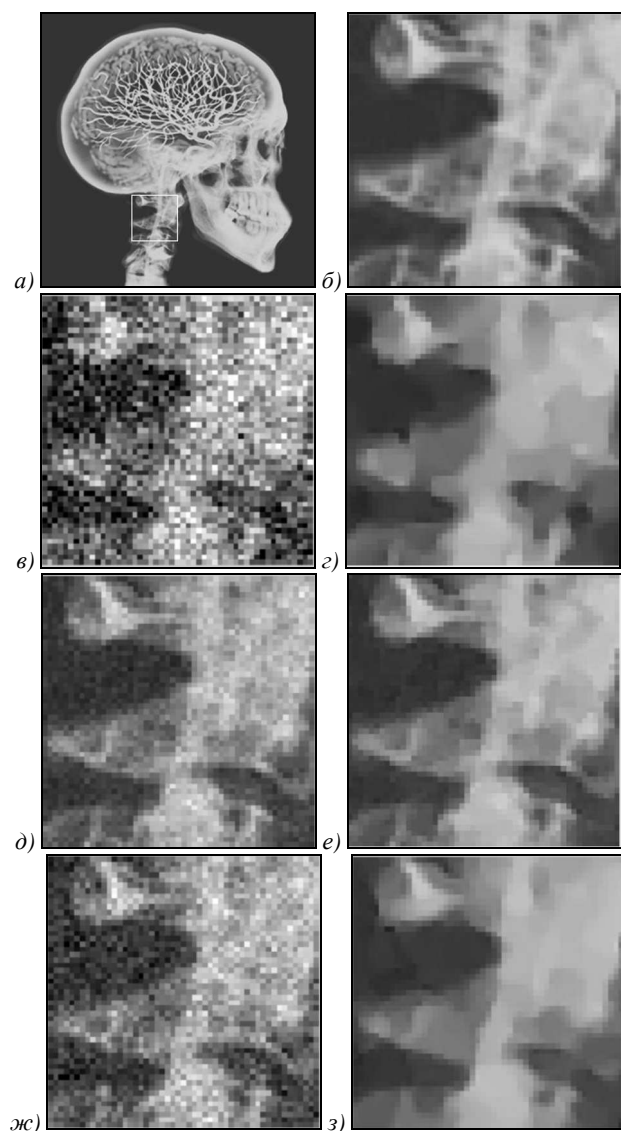


Рис. 1. Устранение шума на реальном изображении: а) исходное изображение, б) увеличенный фрагмент, в) с гауссовским шумом, г) после устранения гауссовского шума, д) с пуассоновским шумом, е) после устранения пуассоновского шума, ж) смешанный шум, з) после устранения смешанного шума

В итоге получим, что коэффициенты линейной комбинации имеют значения соответственно  $\lambda_1 = 4/5 = 0,8$  и  $\lambda_2 = 1/5 = 0,2$ .

Для зашумлённого изображения критерии качества имеют значения соответственно  $Q_{PSNR} = 21,4168$ ,  $Q_{MSE} = 427,9526$  и  $Q_{SSIM} = 0,4246$ .

В табл. 1–3 показаны результаты устранения шума на данном изображении для случаев заранее заданных и автоматически определённых параметров.

Заметим, что в этом случае значение QPSNR после устранения шума для заранее заданных (идеальных) параметров лучше, чем для автоматически полученных оценок, хотя для значения QSSIM также наблюдается и обратное.

Для создания начального изображения был использован оператор конволюции (7).

Табл. 1. Сравнение качества методов устранения шума на реальном изображении для смеси шумов

Обработка	$Q_{PSNR}$	$Q_{SSIM}$	$Q_{MSE}$
Без обработки	21,4168	0,4246	427,9526
ROF	26,5106	0,8465	145,2183
Модиф. ROF	26,3153	0,6885	151,8976
Медиана фильтр	25,6477	0,7871	177,1364
Винера фильтр	24,2657	0,6596	243,5077
Бельтрами метод	26,8549	0,6678	134,1484
Комбинация с заданными параметрами $\lambda_1 = 0,8$ , $\lambda_2 = 0,2$ , $\mu = 0,0857$ , $\sigma = 40,2412$	<b>27,4315</b>	0,8198	<b>117,4713</b>
Комбинация с оценками параметров $\lambda_1 = 0,8095$ , $\lambda_2 = 0,1905$ , $\mu = 0,0970$ , $\sigma = 38,2310$	27,2567	<b>0,8383</b>	122,2941

Табл. 2. Сравнение качества методов устранения шума на реальном изображении с гауссовским шумом

Обработка	$Q_{PSNR}$	$Q_{SSIM}$	$Q_{MSE}$
Без обработки	16,5386	0,2516	1442,900
ROF	25,0181	0,7194	204,770
Модиф. ROF	21,2356	0,4536	489,2402
Медиана фильтр	23,1412	0,6314	315,4741
Винера фильтр	22,5138	0,5059	364,5051
Бельтрами метод	20,4575	0,3745	585,2284
Комбинация с заданными параметрами $\lambda_1 = 1$ , $\lambda_2 = 0$ , $\mu = 0,0978$ , $\sigma = 40,2412$	<b>25,0200</b>	<b>0,7735</b>	<b>204,6811</b>
Комбинация с оценками параметров $\lambda_1 = 0,9738$ , $\lambda_2 = 0,0262$ , $\mu = 0,0954$ , $\sigma = 38,9036$	24,9681	0,7389	207,1441

В табл. 2 показана зависимость восстановленного результата от начального решения, где:

(а) начальные параметры  $\lambda_1^0 = 0$ ,  $\lambda_2^0 = 1$ ,  $\mu = 1$ ;

(б) начальные параметры  $\lambda_1^0 = \lambda_2^0 = 0,5$ ,  $\mu = 1$ ;

(в) начальное решение  $u^0$  получено как случайная матрица заданного размера;

(г) начальное решение  $u^0$  найдено как усреднение соседних пикселей  $u^0 = v * A$  оператором свёртки, где

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Табл. 3. Сравнение качества методов устранения шума на реальном изображении с пуассоновским шумом

Обработка	$Q_{PSNR}$	$Q_{SSIM}$	$Q_{MSE}$
Без обработки	27,7349	0,6902	109,5442
ROF	32,0548	0,9355	40,5131
Модиф. ROF	<b>33,6101</b>	<b>0,9501</b>	<b>35,5310</b>
Медиана фильтр	27,7349	0,6902	109,5442
Винера фильтр	25,0410	0,8113	203,6962
Бельтрами метод	31,6356	0,9425	44,6195
Комбинация с заданными параметрами $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \mu = 0,0853, \sigma = 0,0001$	33,5213	0,9452	36,2235
Комбинация с оценками параметров $\lambda_1 = 0,0045, \lambda_2 = 0,9955, \mu = 0,0797, \sigma = 2,7797$	32,6244	0,9362	45,3455

В табл. 4 показано, что наилучший результат устранения комбинированного шума соответствует случаю (г) выбора начального решения по критериям  $PSNR$  и  $MSE$ .

Табл. 4. Зависимость результата устранения комбинированного шума от начального решения

	(а)	(б)	(в)	(г)
$\lambda_1$	0,8095	0,8114	0,9256	0,8069
$\lambda_2$	0,1905	0,1886	0,0744	0,1931
$\mu$	0,0970	0,0985	0,1026	0,0965
$\sigma$	38,2310			
$Q_{PSNR}$	27,2567	27,1327	26,4279	<b>27,2571</b>
$Q_{MSE}$	122,2941	125,8371	148,0081	<b>121,632</b>
$Q_{SSIM}$	0,8383	0,8381	<b>0,8497</b>	0,8384

### Заключение

В данной работе предложен метод устранения смеси гауссовского и пуассоновского шумов на основе известного вариационного подхода.

Качество результата устранения шума зависит от значений коэффициентов линейной комбинации  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Их значения должны быть заранее заданы, или они должны быть автоматически определены, что важно в случае обработки реальных изображений.

Для реальных изображений данный метод с автоматически определёнными параметрами даёт результат, близкий по качеству к идеальному, когда правильные значения параметров заданы заранее. Метод может быть использован для устранения отдельно как гауссовского, так и пуассоновского шумов.

Качество обработки практически не уступает качеству методов, специально предназначенных для устранения шума только одного вида.

### Литература

1. Chan, T.F. Image processing and analysis: Variational, PDE, Wavelet, and stochastic methods / T.F. Chan, J. Shen. – SIAM, 2005. – 400 p.

2. Burger, M. Level set and PDE based reconstruction methods in imaging / M. Burger. – Springer, 2008. – 319 p.
3. Chambolle, A. An introduction to total variation for image analysis / A. Chambolle // Theoretical foundations and numerical methods for sparse recovery. – 2009 – Vol. 9. – P. 263-340.
4. Xu, J. A coupled variational model for image denoising using a duality strategy and split Bregman / J. Xu, X. Feng, Y. Hao // Multidimensional Systems and Signal Processing. – 2014. – Vol. 25. – P. 83-94.
5. Rankovic, N. Improved adaptive median filter for denoising ultrasound images / N. Rankovic, M. Tuba // Advances in Computer Science WSEAS ECC'12. – 2012. – P. 169-174.
6. Lysaker, M. Iterative image restoration combining total variation minimization and a second-order functional / M. Lysaker, X. Tai // International journal of computer vision. – 2006. – Vol. 66. – P. 5-18.
7. Li, F. A new diffusion-based variational model for image denoising and segmentation / F. Li, C. Shen, L. Pi // Journal Mathematical Imaging and Vision. – 2006. – Vol. 26, Is. 1-2. – P. 115-125.
8. Zhu, Y. Noise reduction with low dose CT data based on a modified ROF model / Y. Zhu // Optics Express. – Vol. 20, Issue 16. – P. 17987-18004.
9. Tran, M.P. Denoising 3D medical images using a second order variational model and wavelet shrinkage / M.P. Tran, R. Peteri, M. Bergounioux // Image Analysis and Recognition. – 2012. – Vol. 7325. – P. 138-145.
10. Rudin-Osher-Fatemi total variation denoising using split Bregman. IPOL 2012. [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.ipol.im/pub/art/2012/g-tvd/> (Дата обращения: 23.07.2014).
11. Caselles, V. Handbook of mathematical methods in imaging / V. Caselles, A. Chambolle, M. Novaga. – Springer, 2011. – 1607 p.
12. Rudin, L.I. Nonlinear total variation based noise removal algorithms / L.I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi // Physica D. – 1992. – Vol. 60. – P. 259-268.
13. Chen, K. Introduction to variational image processing models and application / K. Chen // International Journal of Computer Mathematics. – 2013. – Vol. 90, No. 1. – P. 1-8.
14. Le, T. A variational approach to reconstructing images corrupted by Poisson noise / T. Le, R. Chartrand, T.J. Asaki // Journal of mathematical imaging and vision. – 2007. – Vol. 27, Issue 3. – P. 257-263.
15. Unser, M. Image denoising in mixed Poisson-Gaussian noise / F. Luisier, T. Blu // IEEE transaction on Image processing. – 2011. – Vol. 20, Issue 3. – P. 696-708.
16. Jezierska, A. An EM approach for Poisson-Gaussian noise modeling / A. Jezierska // EUSIPCO 19<sup>th</sup>. – 2011. – Vol. 62, Issue 1. – P. 13-30.
17. Jezierska, A. Poisson-Gaussian noise parameter estimation in fluorescence microscopy imaging / A. Jezierska // IEEE International Symposium on Biomedical Imaging 9<sup>th</sup>. – 2012. – P. 1663-1666.
18. Wang, C. An improved adaptive median filter for Image denoising / C. Wang, T. Li // ICCEE. – 2012. – Vol. 53, Issue 2.64. – P. 393-398.
19. Abe, C. Iterative Edge-Preserving adaptive Wiener filter for image denoising / C. Abe, T. Shimamura // ICCEE. – 2012. – Vol. 4, Issue 4. – P. 503-506.
20. A Primal-Dual Projected Gradient Algorithm for Efficient Beltrami Regularization. Computer Vision and Image Understanding, 2014. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.math.ucla.edu/~zosso/> (Дата обращения: 23.01.2015).
21. Wang, Z. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity / Z. Wang // IEEE Transaction on Image Processing. – 2004. – Vol. 13, No. 4. – P. 600-612.

22. Wang, Z. Modern image quality assessment / Z. Wang, A.C. Bovik. – Morgan & Claypool Publisher, 2006. – 146 p.
23. Scherzer, O. Variational methods in Imaging / O. Scherzer. – Springer, 2009. – 320 p.
24. Zeidler, E. Nonlinear functional analysis and its applications: Variational methods and optimization / E. Zeidler. – Springer, 1985. – 662 p.
25. Rubinov, A. Applied Optimization: Lagrange-type functions in constrained non-convex optimization / A. Rubinov, X. Yan. – Springer, 2003. – 286 p.
26. Gill, P.E. Numerical methods for constrained optimization / P.E. Gill, W. Murray. – Academic Press Inc., 1974. – 283 p.
27. Immerker, J. Fast noise variance estimation / J. Immerker // Computer vision and image understanding. – 1996. – Vol. 64, Issue 2. – P. 300-302.
28. Thomos, N. Optimized Transmission of JPEG2000 streams over Wireless channels / N. Thomos, N.V. Boulgouris, M.G. Strintzis // IEEE transactions on image processing. – 2006. – Vol. 15, Issue 1. – P. 54-67.
29. Getty images. [Электронный ресурс]. URL: <http://well.blogs.nytimes.com/2009/09/16/what-sort-of-exercise-can-make-you-smarter/> (Дата обращения: 10.04.2015).
- [10] Getreuer P. Rudin-Osher-Fatemi total variation denoising using split Bregman. IPOL 2012. Source: <http://www.ipol.im/pub/art/2012/g-tvd/>.
- [11] Caselles V, Chambolle A, Novaga M. Handbook of mathematical methods in imaging, Springer, 2011. 1607 p.
- [12] Rudin LI, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. Physica D. 1992; 60: 259-68.
- [13] Chen K. Introduction to variational image processing models and application. International journal of computer mathematics 2013; 90(1): 1-8.
- [14] Le T, Chartrand R, Asaki TJ. A variational approach to reconstructing images corrupted by Poisson noise. Journal of mathematical imaging and vision 2007; 27(3): 257-63.
- [15] Luisier F, Blu T, Unser M. Image denoising in mixed Poisson-Gaussian noise. IEEE transaction on Image processing 2011; 20(3): 696-708.
- [16] Jezierska A. An EM approach for Poisson-Gaussian noise modelling. EUSIPCO 19<sup>th</sup> 2011; 62(1): 13-30.
- [17] Jezierska A. Poisson-Gaussian noise parameter estimation in fluorescence microscopy imaging. IEEE International Symposium on Biomedical Imaging 9<sup>th</sup> 2012; 1663-6.
- [18] Wang C, Li T. An improved adaptive median filter for Image denoising. ICCEE 2012; 53(2.64): 393-8.
- [19] Abe C, Shimamura T. Iterative Edge-Preserving adaptive Wiener filter for image denoising. ICCEE 2012; 4(4): 503-6.
- [20] Zosso D, Bustin A. A Primal-Dual Projected Gradient Algorithm for Efficient Beltrami Regularization. Computer Vision and Image Understanding, 2014; Source: <http://www.math.ucla.edu/~zosso/>.
- [21] Wang Z. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity. IEEE transaction on Image processing 2004; 13(4): 600-12.
- [22] Wang Z, Bovik AC. Modern image quality assessment. Morgan & Claypool Publisher 2006: 146 p.
- [23] Scherzer O. Variational methods in Imaging. Springer 2009; 320.
- [24] Zeidler E. Nonlinear functional analysis and its applications: Variational methods and optimization. Springer 1985; 662.
- [25] Rubinov A, Yang X. Applied Optimization: Lagrange-type functions in constrained non-convex optimization. Springer 2003; 286.
- [26] Gill PE, Murray W. Numerical methods for constrained optimization, Academic Press Inc 1974; 283.
- [27] Immerker J. Fast noise variance estimation. Computer vision and image understanding 1996; 64(2): 300-2.
- [28] Thomos N, Boulgouris NV, Strintzis MG. Optimized Transmission of JPEG2000 streams over Wireless channels. IEEE transactions on image processing 2006; 15(1): 54-67.
- [29] Nick V. Getty images. Source: <http://well.blogs.nytimes.com/2009/09/16/what-sort-of-exercise-can-make-you-smarter/>.

### References

## IMAGE NOISE REMOVAL BASED ON TOTAL VARIATION

*D.N.H. Thanh, S.D. Dvoenko  
Tula State University*

### Abstract

Today, raster images are created by different modern devices, such as digital cameras, X-Ray scanners, and so on. Image noise deteriorates the image quality, thus adversely affecting the result of processing. Biomedical images are an example of digital images. The noise in such raster images is assumed to be a mixture of Gaussian noise and Poisson noise. In this paper, we propose a method to remove these noises based on the total variation of the image brightness function. The proposed model is a combination of two famous denoising models, namely, the ROF model and a modified ROF model.



**Keywords:** total variation, ROF model, Gaussian noise, Poisson noise, image processing, biomedical image, Euler-Lagrange equation.

**Citation:** Thanh DNH, Dvoenko SD. Image noise removal based on total variation. Computer Optics 2015; 39(4): 564-71. DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-4-564-571.

#### **Сведения об авторах**

**Тхань Данг Нгок Хоанг**, 1986 года рождения, в 2009 году окончил Белорусский государственный университет по специальности «Прикладная математика», работал преподавателем в Хюэском промышленном колледже (Вьетнам), аспирант Тульского государственного университета. Область научных интересов: обработка изображений, веб-программирование.

E-mail: [dnhthanh@hueic.edu.vn](mailto:dnhthanh@hueic.edu.vn).

**Dang Ngoc Hoang Thanh** (b. 1986) graduated from the Belarus State University in 2009, majoring in Applied Mathematics. He worked as lecturer at the Hue Industrial College, Vietnam. Currently he is a post-graduate student at Tula State University, Russia. His research interests are image processing, web programming.

**Двоенко Сергей Данилович**, 1957 года рождения, в 2002 году получил степень д.ф.-м.н. в ВЦ РАН, работает профессором Тульского государственного университета. Область научных интересов: обработка изображений, распознавание образов, кластерный анализ.

E-mail: [dsd@tsu.tula.ru](mailto:dsd@tsu.tula.ru).

**Sergey Danilovich Dvoenko** (b. 1957) received his Doctor of Science degree in 2002 at the Computer Center of the Russian Academy of Sciences. Currently he is a professor at Tula State University. His research interests are image processing, machine learning, cluster analysis.

---

*Поступила в редакцию 14 июля 2015 г.  
Окончательный вариант – 28 июля 2015 г.*