Moreau–Yosida Regularization of Maximal Monotone Operators of Type (D)

Конечно, вот перевод документа на русский язык с сохранением важных терминов и математических обозначений:

Регуляризация Моро-Йосиды максимальных монотонных операторов типа (D)

Майкон Маркес Алвес · Бенар Фукс Свайтер

Получено: 9 ноября 2009 / Принято: 2 марта 2010 / Опубликовано онлайн: 31 марта 2010

Аннотация

Мы предлагаем регуляризацию Моро-Йосиды для максимальных монотонных операторов типа (D) в нерефлексивных банаховых пространствах. Она обобщает классическую регуляризацию Моро-Йосиды, а также расширение этой регуляризации Брези-Крандалл-Пази на строго выпуклые (рефлексивные) банаховы пространства с строго выпуклыми сопряженными. Наши основные результаты получены с использованием недавних результатов авторов о выпуклых представлениях максимальных монотонных операторов в нерефлексивных банаховых пространствах.

Ключевые слова: Максимальный монотонный оператор · Операторы типа (D) · Регуляризация Моро-Йосиды · Нерефлексивные банаховы пространства

Математические классификации (2000): 47H05 · 49J52 · 47N10

---

1 Введение

Пусть X — вещественное банахово пространство, X^* — его топологическое сопряжённое, а X^{**} — его топологическое бисопряжённое.
Нормы на X, X^* и X^{**} будут обозначаться как $\|\cdot\|$.
Обозначение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает двойственное скалярное произведение в $X \times X^*$ и $X^* \times X^{**}$.

$$\langle x, x^* \rangle = x^*(x), \quad \langle x^*, x^{**} \rangle = x^{**}(x^*), \quad x \in X, x^* \in X^*, x^{**} \in X^{**}.$$

Оператор $T : X \rightrightarrows X^*$ — это отношение на X в X^*:

$$T \subset X \times X^*,$$

и $x^* \in T(x)$ означает $(x, x^*) \in T$. Область определения T определяется как:

$$\mathrm{Dom}(T) = \{x \in X \mid T(x) \neq \emptyset\}.$$

Оператор $T : X \rightrightarrows X^*$ называется **монотонным**, если:

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall (x, x^*), (y, y^*) \in T.$$

Оператор T называется **максимальным монотонным**, если он монотонный и максимальный в семействе монотонных операторов из X в X^* (с точки зрения порядка включения).
В вещественном гильбертовом пространстве H регуляризация Моро-Йосиды и резольвентный оператор максимального монотонного оператора $T : H \rightrightarrows H$ с параметром $\lambda > 0$ определяются соответственно как:
как:

$$T_\lambda = \frac{I - R_\lambda}{\lambda}, \quad R_\lambda = (\lambda T + I)^{-1}.$$

```
(1)
```

Оператор T_λ определён на всём H, он точечный и липшицев.
Для свойств и применений регуляризации Моро-Йосиды максимальных монотонных операторов в гильбертовых пространствах см. [10](#Zeidler, E).

Субдифференциал функции $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ — это точечно-множественный оператор
$\partial f : X \rightrightarrows X^*$:

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* \mid f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x^* \rangle, \forall y \in X\}.$$

Регуляризация Моро-Йосиды была расширена для максимальных монотонных операторов в строго выпуклых рефлексивных банаховых пространствах с строго выпуклыми сопряженными Брези, Крандаллом и Пази в [1]. В этом контексте тождественный оператор, используемый в уравнении (1), заменяется на отображение двойственности:

$$J = \partial \frac{1}{2} \| \cdot \|^2,$$

которое является точечным. Регуляризация Брези-Крандалл-Пази обладает некоторыми свойствами классической регуляризации Моро-Йосиды [1, Lemma 1.3] и в гильбертовых пространствах совпадает с классической регуляризацией Моро-Йосиды.

Наша цель — расширить версию регуляризации Брези-Крандалл-Пази для максимальных монотонных операторов типа (D) в общем банаховом пространстве без перенормировки. В рефлексивном банаховом пространстве любой максимальный монотонный оператор является оператором типа (D). Таким образом, в частности, мы обобщим версию регуляризации Брези-Крандалл-Пази для максимальных монотонных операторов в рефлексивных пространствах без перенормировки пространства в строго выпуклую и гладкую норму.

---

2 Основные результаты и обозначения

Мы используем обозначение $\overline{\mathbb{R}}$ для расширенных вещественных чисел:

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется **выпуклой**, если $f > -\infty$ и существует точка $\hat{x} \in X$, для которой $f(\hat{x}) < \infty$.

Сопряжённая функция Фенхеля–Лежандра для $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — это $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$, определённая как:

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} \langle x, x^* \rangle - f(x).$$

```
(2)
```

Заметим, что f^* всегда выпуклая и полунепрерывная снизу.
Если функция f является собственной, выпуклой и полунепрерывной снизу, то её сопряжённая функция f^* также будет собственной, а её бисопряжённая функция $f^{**} := (f^*)^*$ корректно определена и

$$f^{**}(x) = f(x), \quad \text{для всех } x \in X.$$

Мы будем отождествлять $x \in X$ с его каноническим включением в X^{**}.
Более того, из определения f^* напрямую следует **неравенство Фенхеля–Янга**:
для всех $x \in X$, $x^* \in X^*$:

$$\langle x^*, x \rangle \le f(x) + f^*(x^*)$$

$$f(x) + f^*(x^*) \ge \langle x, x^* \rangle \quad \text{и} \quad f(x) + f^*(x^*) = \langle x, x^* \rangle \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad x^* \in$$

```
(3)
```

В частном случае $f(x) = \|x\|^2/(2\lambda)$, где $\lambda > 0$,
мы получаем характеризацию отображения двойственности $J : X \rightrightarrows X^*$.

$$\frac{1}{2\lambda}\|x\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|x^*\|^2 \ge \langle x, x^* \rangle,$$

$$\frac{1}{2\lambda}\|x\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|x^*\|^2 = \langle x, x^* \rangle \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad x^* \in \lambda^{-1}J(x).$$

```
(4)
```

Важным инструментом, который будет использоваться в следующих разделах, является классическая формула двойственности Фенхеля, которую мы приводим ниже.

Теорема 2.1.
Пусть $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственные выпуклые и полунепрерывные снизу функции.
Если существует $\hat{x} \in X$ такое, что f (или g) непрерывна в $\hat{x}$,
и $f(\hat{x}) < \infty$, $g(\hat{x}) < \infty$, то:

$$\inf_{x \in X} f(x) + g(x) = \max_{x^* \in X^*} -f^*(-x^*) - g^*(x^*).$$

Фицпатрик доказал [3], что каждому максимальному монотонному оператору $T : X \rightrightarrows X^*$ соответствует семейство $\mathcal{F}_T$
выпуклых, собственных, полунепрерывных снизу функций,
которые мажорируют двойственное скалярное произведение
и совпадают с ним на T:

$$\mathcal{F}_T = \left\{ h : X \times X^* \to \overline{\mathbb{R}} \middle| \begin{array}{l} h \text{ — выпуклая и полунепрерывная снизу} \\ h(x, x^*) \geq \langle x, x^* \rangle, \quad \forall (x, x^*) \in X \times X^* \\ (x, x^*) \in T \Rightarrow h(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle \end{array} \right\}.$$

```
(5)
```

Фицпатрик также дал явную формулу для наименьшего элемента $\mathcal{F}_T$ и доказал, что для любой $h \in \mathcal{F}_T$:

$$(x, x^*) \in T \iff h(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle.$$

В связи с вышеуказанным уравнением, отныне мы будем называть любую $(h \in \mathcal{F}_T)$ **выпуклым представлением** T.

Следующая теорема принадлежит Маркесу Алвесу и Свайтеру [5]. Она была доказана для рефлексивных банаховых пространств Бурачиком и Свайтером в [2].

Теорема 2.2. ([5, Corollary 4.4, Theorem 4.2])
Пусть X — вещественное банахово пространство. Если $h : X \times X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая функция и:

$$h(x, x^*) \geq \langle x, x^* \rangle, \quad \forall (x, x^*) \in X \times X^*,$$

$$h^*(x^*, x^{**}) \geq \langle x^*, x^{**} \rangle, \quad \forall (x^*, x^{**}) \in X^* \times X^{**},$$

то оператор $T : X \rightrightarrows X^*$, определённый как:

$$T = \{(x, x^*) \in X \times X^* \mid h^*(x^*, x) = \langle x, x^* \rangle\},$$

является **максимальным монотонным**, и функция $g(x, x^*) := h^*(x^*, x)$ — **выпуклое представление** T.

Кроме того, если h полунепрерывна снизу, то:

$$T = \{(x, x^*) \in X \times X^* \mid h(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle\},$$

и h также является выпуклым представлением T.

Следствие 2.3.
Для h и T, как в Теореме 2.2, замыкание снизу $\mathrm{cl}\, h$ также является выпуклым представлением T.

> *Чтобы это доказать, достаточно вспомнить, что двойственное скалярное произведение непрерывно,*
> *а операция сопряжения инвариантна относительно операции замыкания снизу.*

---

3 Операторы типа (D) Госсеза

Госсез определил класс операторов типа (D), чтобы расширить некоторые свойства максимальных монотонных операторов в рефлексивных банаховых пространствах на нерефлексивные пространства.

Монотонное замыкание Госсеза [4] оператора (T: X \rightrightarrows X^ *) — это оператор (\widetilde{T}: X^{**} \rightrightarrows X^*):

$$\widetilde{T} = \{(x^{**}, x^*) \in X^{**} \times X^* \mid \langle x^{**} - y, x^* - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall (y, y^*) \in T\}.$$

```
(6)
```

Пусть T — оператор, который называется **оператором типа (D)**, если любой элемент из $\tilde{T}$ является пределом в слабой $- * \times$ сильной топологии $X^* \times X^{**}$ ограниченной сети (x_i, x_i^*) на T. Отметим, что в рефлексивном банаховом пространстве любой максимальный монотонный оператор является оператором типа (D). Следующие две теоремы принадлежат Госсезу [4].

Теорема 3.1. Если T — максимальный монотонный оператор типа (D), то $\tilde{T}$ — единственное максимальное монотонное расширение T на $X^{**} \times X^*$.

Теорема 3.2. Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственная, выпуклая и полунепрерывная снизу функция. Тогда её субдифференциал ∂f — это оператор типа (D), и:

$$\widetilde{\partial f} = (\partial f^*)^{-1}.$$

Выпуклые представления Фицпатрика максимальных монотонных операторов могут быть использованы для характеризации максимальных монотонных операторов типа (D).

Теорема 3.3. ([7, 8, Теорема 4.4], [6, Теорема 1.4]) Пусть $T : X \rightrightarrows X^*$ — максимальный монотонный оператор. Тогда следующие свойства эквивалентны:

1. T — оператор типа (D),
2. для любой $h \in \mathcal{F}_T$:

$$h^*(x^*, x^{**}) \geq \langle x^{**}, x^* \rangle, \quad \forall (x^*, x^{**}) \in X^* \times X^{**},$$

3. существует $h \in \mathcal{F}_T$ такое, что:

$$h^*(x^*, x^{**}) \geq \langle x^{**}, x^* \rangle, \quad \forall (x^*, x^{**}) \in X^* \times X^{**}.$$

Кроме того, если выполнено любое из этих условий и $h \in \mathcal{F}_T$, то:

$$h^* \in \mathcal{F}_{\widetilde{T}^{-1}}.$$

---

4 Регуляризация Моро-Йосиды в общих банаховых пространствах

Если X — строго выпуклое, гладкое и рефлексивное банахово пространство, то отображение двойственности:

$$J = \partial \frac{1}{2} \| \cdot \|^2$$

является биекцией между X и X^*. В этом контексте для $T : X \rightrightarrows X^*$, максимального монотонного оператора, обобщение Брези-Крандалл-Пази резольвента и регуляризации Моро-Йосиды оператора T с параметром $\lambda > 0$ определяются соответственно как:

$$R_\lambda : X \to X, \quad T_\lambda : X \to X^*,$$

где для каждого $x \in X$, $\lambda > 0$, $(z, x^*) \in X \times X^*$ — единственное решение:

$$\lambda x^* + J(z - x) = 0, \quad x^* \in T(z),$$

(7)

и таким образом:

$$R_\lambda(x) := z, \quad T_\lambda(x) := x^*.$$

(8)

Первая попытка обобщить версию регуляризации Брези-Крандалл-Пази (уравнение 8) заключалась бы в замене первого из этих уравнений на:

$$\lambda x^* + J(z - x) \ni 0, \quad x^* \in T(z).$$

В нерефлексивном банаховом пространстве J не является сюръективным. Следовательно, если $T \equiv x^*$ и $x^* \notin J(X)$, то вышеуказанное включение не имело бы решения для любого x, и мы получили бы пустой T_λ. Чтобы обойти эту проблему, мы будем работать с монотонными замыканиями Госсеза T и J , то есть $\tilde{T}$ и $\tilde{J}$. Отметим, что поскольку J является субдифференциалом, в виду Теоремы 3.2, J — оператор типа (D), и:

$$\widetilde{J} = (J_{X^*})^{-1},$$

(9)

где J_{X^*} обозначает отображение двойственности X^*.

Определение 4.1. Пусть X — вещественное банахово пространство, а $T : X \rightrightarrows X^*$ — максимальный монотонный оператор типа (D). Регуляризация Моро-Йосиды и резольвента T с параметром регуляризации $\lambda > 0$ определяются соответственно как $T_\lambda : X \rightrightarrows X^*$ и $R_\lambda : X \rightrightarrows X^{**}$:

$$T_\lambda = \left\{ (x, x^*) \in X \times X^* \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists z^{**} \in X^{**} \text{ такое, что} \\ \lambda x^* + \widetilde{J}(z^{**} - x) \ni 0, \quad x^* \in \widetilde{T}(z^{**}) \end{array} \right\},$$

(10)

$$R_\lambda = \left\{ (x, z^{**}) \in X \times X^{**} \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists x^* \in X^* \text{ такое, что} \\ \lambda x^* + \widetilde{J}(z^{**} - x) \ni 0, \quad x^* \in \widetilde{T}(z^{**}) \end{array} \right\}.$$

(11)

В строго выпуклом, гладком и рефлексивном банаховом пространстве вышеуказанное определение тривиально приводит к версии регуляризации Брези-Крандалл-Пази. Основными инструментами для доказательства максимальной монотонности T_λ будут выпуклые представления Фицпатрика T, Теоремы 2.2 и 3.3.

Для $h : X \times X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ и $\lambda > 0$ определим:

$$h_\lambda(x, x^*) = \inf_{z \in X} \left\{ h(z, x^*) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2 \right\} + \frac{\lambda}{2} \|x^*\|^2.$$

```
(12)
```

Лемма 4.2. Пусть $h : X \times X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ — выпуклая, собственная и полунепрерывная снизу функция. Тогда:

$$h_\lambda^*(x^*, x^{**}) = \min_{z^{**} \in X^{**}} \left\{ h^*(x^*, z^{**}) + \frac{1}{2\lambda} \|z^{**} - x^{**}\|^2 \right\} + \frac{\lambda}{2} \|x^*\|^2,$$

```
(13)
```

и h_λ^*, h_λ — выпуклые и собственные функции, причем h_λ^* полунепрерывна снизу. Кроме того, если X рефлексивно, то h_λ также полунепрерывна снизу, и инфимум в уравнении (12) является минимумом.

Доказательство. Прямой расчет дает:

$$h_\lambda^*(x^*, x^{**}) = \sup_{(y, y^*, z)} \langle y, x^* \rangle + \langle y^*, x^{**} \rangle - h(z, y^*) - \frac{1}{2\lambda} \|z - y\|^2 - \frac{\lambda}{2} \|y^*\|^2.$$

Определим $g(z, y^*) = \frac{\lambda}{2} \|y^*\|^2$. Тогда супремум в последнем члене вышеуказанного уравнения:

$$(h + g)^*(x^*, x^{**}).$$

Поскольку g выпукла и непрерывна, а h выпукла, собственна и полунепрерывна снизу, вышеуказанное сопряженное является (точной) инфи-конволюцией сопряженных h и g. Следовательно:

$$h_\lambda^*(x^*, x^{**}) = \frac{\lambda}{2} \|x^*\|^2 + \inf_{(u^*, u^{**})} h^*(x^* - u^*, x^{**} - u^{**}) + g^*(u^*, u^{**}),$$

где $g^*(u^*, u^{**}) = \frac{1}{2\lambda}\|u^{**}\|^2 + \delta_0(u^*)$. Используя подстановку $z^{**} = x^{**} - u^{**}$, получаем уравнение (13), что доказывает первую часть леммы.

Легко проверить, что h_λ выпукла. Поскольку h конечна в некоторой точке, h_λ собственна. Функция h_λ^* выпукла и полунепрерывна снизу, так как она сопряженная к h_λ. Используя то, что h_λ собственна, заключаем, что $h_\lambda^* > -\infty$. Кроме того, из уравнения (13) следует, что $h_\lambda^* < \infty$ в некоторой точке. Следовательно, h_λ^* собственна. Теперь предположим, что X рефлексивно. Для доказательства того, что h_λ полунепрерывна снизу и что инфимум в её определении является минимумом, применим первую часть леммы к функции $\tilde{h}(x, x^*) = h^*(x^*, x)$, чтобы получить $(\tilde{h}_\lambda)^* = h_\lambda$.

Теорема 4.3. Пусть $T : X \rightrightarrows X^*$ — максимальный монотонный оператор типа (D). Для любого $\lambda > 0$ оператор T_λ является максимальным монотонным оператором типа (D). Кроме того, если h — выпуклое представление T, и h_λ определено как в уравнении (12):

$$h_\lambda(x, x^*) = \inf_{z \in X} \left\{ h(z, x^*) + \frac{1}{2\lambda}\|z - x\|^2 \right\} + \frac{\lambda}{2}\|x^*\|^2,$$

то:

$$T_\lambda = \{(x, x^*) \in X \times X^* \mid h_\lambda^*(x^*, x) = \langle x, x^* \rangle\},$$

и функции clh_λ и $g(x, x^*) := h_\lambda^*(x^*, x)$ являются выпуклыми представлениями T_λ. Если X рефлексивно, то h_λ также является выпуклым представлением T_λ.

Доказательство. Пусть h — выпуклое представление T. Поскольку h мажорирует двойственное скалярное произведение, для любых $x, z \in X$, $x^* \in X^*$:

$$h(z, x^*) + \frac{1}{2\lambda}\|z - x\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|x^*\|^2 \geq \langle z, x^* \rangle + \langle x - z, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle.$$

```
(14)
```

Следовательно, h_λ мажорирует двойственное скалярное произведение в $X \times X^*$. Используя Теорему 3.3, пункт 2, имеем, что h^* мажорирует двойственное скалярное произведение в $X^* \times X^{**}$. Следовательно, для любых $x^* \in X^*$, $x^{**}, z^{**} \in X^{**}$:

$$h^*(x^*, z^{**}) + \frac{1}{2\lambda}\|z^{**} - x^{**}\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|x^*\|^2 \geq \langle z^{**}, x^* \rangle + \langle z^{**} - x^{**}, x^* \rangle = \langle x^{**}, x^* \rangle.$$

```
(15)
```

Соединяя вышеуказанное уравнение с Леммой 4.2, уравнением (13), заключаем, что (h_λ^*) также мажорирует двойственное скалярное произведение.

Согласно Лемме 4.2, h_λ и h_λ^* выпуклы, а h_λ^* полунепрерывна снизу. Поскольку h_λ и h_λ^* мажорируют двойственное скалярное произведение в своих соответствующих областях, определим:

$$S = \{(x, x^*) \in X \times X^* \mid h_\lambda^*(x^*, x) = \langle x, x^* \rangle\},$$

и, используя Теорему 2.2 и Следствие 2.3, заключаем, что S максимально монотонен типа (D), и $g(x, x^*) = h_\lambda^*(x^*, x)$, $\mathrm{cl} h_\lambda$ — выпуклые представления S.

Чтобы доказать, что $T_\lambda = S$, используем уравнение (13), чтобы заключить, что $(x, x^*) \in S$ тогда и только тогда, когда существует $z^{**} \in X^{**}$ такое, что:

$$h^*(x^*, z^{**}) + \frac{1}{2\lambda}\|z^{**} - x\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|x^*\|^2 = \langle x, x^* \rangle.$$

```
(16)
```

Используя Теорему 2.2, имеем:

$$(z^{**}, x^*) \in \widetilde{T} \iff h^*(x^*, z^{**}) = \langle z^{**}, x^* \rangle.$$

Соединяя два вышеуказанных уравнения с уравнением (15), фактом, что h^* мажорирует двойственное скалярное произведение, уравнениями (9) и (4), заключаем, что уравнение (16) эквивалентно:

$$x^* \in \widetilde{T}(z^{**}), \quad -\lambda x^* \in \widetilde{J}(z^{**} - x),$$

Следовательно, $T_\lambda = S$ максимально монотонно, и g, $\mathrm{cl} h_\lambda$ — выпуклые представления S. Поскольку $(\mathrm{cl} h_\lambda)^* = h_\lambda^*$ и h_λ^* мажорирует двойственное скалярное произведение, используя снова Теорему 2.2, заключаем, что T_λ типа (D). Наконец, если X рефлексивно, используем Лемму 4.2, чтобы заключить, что h_λ полунепрерывна снизу, и следовательно, $h_\lambda = \mathrm{cl} h_\lambda$.

Мы доказали, что если T максимально монотонно типа (D), то T_λ также (максимально монотонно) типа (D). Следовательно, естественно искать выражения для $\widetilde{T_\lambda}$.

Следствие 4.4. Если $(T : X \rightrightarrows X^*)$ — максимальный монотонный оператор типа (D), то:

$$\widetilde{T_\lambda} = \left(\widetilde{T}^{-1} + \lambda^{-1}\widetilde{J}^{-1}\right)^{-1}, \quad T_\lambda = \left(\widetilde{T}^{-1} + \lambda^{-1}\widetilde{J}^{-1}\right)^{-1} \cap X \times X^*.$$

Если X рефлексивно, то:

$$T_\lambda = \left(T^{-1} + \lambda^{-1}J^{-1}\right)^{-1},$$

и если X — гильбертово пространство, то $T_\lambda = \left(T^{-1} + \lambda^{-1}I\right)^{-1}$.

Для $h : X \times X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ и $(z, z^*) \in X \times X^*$ определим [5, 9]:

$$h_{(z,z^*)}(x, x^*) = h(x + z, x^* + z^*) - [\langle x, z^*\rangle + \langle z, x^*\rangle + \langle z, z^*\rangle].$$

```
(17)
```

Лемма 4.5. Пусть $T : X \rightrightarrows X^*$ — максимальный монотонный оператор типа (D). Тогда для любого $\lambda > 0$, $\mathrm{Dom}(T_\lambda) = X$.

Доказательство. Возьмем $x_0 \in X$. Выберем $h \in \mathcal{F}_T$ и пусть:

$$\beta := \inf_{x^* \in X^*} h_\lambda(x_0, x^*) - \langle x_0, x^*\rangle,$$

где h_λ определено как в уравнении (12). Определим также $f : X \times X^* \to \overline{\mathbb{R}}$:

$$f(y, y^*) = h(y + x_0, y^*) - \langle x_0, y^*\rangle.$$

Отметим, что f выпукла, полунепрерывна снизу и:

$$f^*(y^*, y^{**}) = h^*(y^*, y^{**} + x_0) - \langle x_0, y^*\rangle.$$

Поскольку h и h^* мажорируют двойственное скалярное произведение, f и f^* мажорируют двойственное скалярное произведение в своих соответствующих областях, и $\beta \geq 0$

Прямое использование уравнения (12) дает:

$$\beta = \inf_{z \in X, x^* \in X^*} f(z - x_0, x^*) + \frac{1}{2\lambda}\|z - x_0\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|x^*\|^2 = \inf_{x \in X, x^* \in X^*} f(x, x^*) + \frac{1}{2\lambda}\|x\|^2 + \frac{\lambda}{2}$$

Используя Теорему 2.1, заключаем, что существуют $w^* \in X^*$, $w^{**} \in X^{**}$ такие, что:

$$\beta = -\left[f^*(w^*, w^{**}) + \frac{\lambda}{2}\|w^*\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|w^{**}\|^2 \right] \leq 0,$$

где последнее неравенство следует из того, что f^* мажорирует двойственное скалярное произведение. Поскольку $\beta \geq 0$, заключаем, что вышеуказанное неравенство выполняется как равенство. Следовательно, используя также уравнения (9) и (4), имеем:

$$h^*(w^*, w^{**} + x_0) - \langle x_0, w^* \rangle = \langle w^*, w^{**} \rangle, \quad -\lambda w^* \in \widetilde{J}(w^{**}).$$

Определив $z^{**} = w^{**} + x_0$, заключаем, что $h^*(w^*, z^{**}) = \langle z^{**}, w^* \rangle$. Поскольку h^* — выпуклое представление $\widetilde{T}^{-1}$, заключаем, что $w^* \in \widetilde{T}(w^*)$, и:

$$0 \in \lambda w^* + \widetilde{J}(z^{**} - x_0),$$

что означает $w^* \in T_\lambda(x_0)$.

Теорема 4.6. Пусть $T : X \rightrightarrows X^*$ — максимальный монотонный оператор типа (D). Тогда для всех $\lambda > 0$ выполняются следующие утверждения:

1. T_λ — максимальный монотонный оператор типа (D),
2. $\mathrm{Dom}(T_\lambda) = X$,
3. T_λ отображает ограниченные множества в ограниченные множества.

Доказательство. Пункт 1 доказан в Теореме 4.3. Соединяя Теорему 4.3 и Лемму 4.5, получаем пункт 2. Для завершения доказательства остается доказать пункт 3. Зафиксируем $(y, y^*) \in T$. Возьмем $(x, x^*) \in T_\lambda$. По определению T_λ существует $z^{**} \in X^{**}$ такое, что:

$$x^* \in \widetilde{T}(z^{**}) \quad \text{и} \quad -\lambda x^* \in \widetilde{J}(z^{**} - x).$$

```
(18)
```

Пусть $(y, y^*) \in T$. Используя оба включения в уравнении (18) и тот факт, что $T \subset \widetilde{T}$, получаем:

$$0 = \frac{\lambda}{2}\|x^*\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|z^{**} - x\|^2 + \langle x^*, z^{**} - x \rangle$$

$$= \frac{\lambda}{2}\|x^*\|^2 + \frac{1}{2\lambda}\|z^{**} - x\|^2 + \langle x^* - y^*, z^{**} - y\rangle + \langle x^* - y^*, y - x\rangle + \langle y^*, z^{**} - x\rangle$$

\geq \frac{\lambda}{2} |x^|^2 + \frac{1}{2\lambda} |z^{**} - x|^2 + \langle x^ - y^, y - x \rangle + \langle y^, z^{**} - x \rangle \ $$

$$\geq \frac{\lambda}{2}\|x^*\|^2 - \frac{\lambda}{2}\|y^*\|^2 + \langle x^* - y^*, y - x\rangle$$

$$\geq \frac{\lambda}{2}\|x^*\|^2 - \|x^*\|\|y - x\| - \frac{\lambda}{2}\|y^*\|^2 - \|y^*\|\|y - x\|.$$

Следовательно:

$$0 \geq \|x^*\|^2 - \frac{2}{\lambda}\|y - x\|\|x^*\| - \left(\|y^*\|^2 + \frac{2}{\lambda}\|y^*\|\|y - x\|\right),$$

и, следовательно:

$$\|x^*\| \leq \frac{2}{\lambda}\|y - x\| + \|y^*\| \leq \frac{2}{\lambda}\|x\| + \left(\frac{2}{\lambda}\|y\| + \|y^*\|\right).$$

Литература

1. Brezis, H., Crandall, M.G., Pazy, A.: Perturbations of nonlinear maximal monotone sets in Banach space. Commun. Pure Appl. Math. 23, 123-144 (1970)
2. Burachik, R.S., Svaiter, B.F.: Maximal monotonicity, conjugation and the duality product. Proc. Am. Math. Soc. 131(8), 2379-2383 (2003, electronic)
3. Fitzpatrick, S.: Representing monotone operators by convex functions. In: Workshop/ Miniconference on Functional Analysis and Optimization (Canberra, 1988). Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., vol. 20, pp. 59-65. Austral. Nat. Univ., Canberra (1988)
4. Gossez, J.-P.: Opérateurs monotones non linéaires dans les espaces de Banach non réflexifs. J. Math. Anal. Appl. 34, 371-395 (1971)
5. Marques Alves, M., Svaiter, B.F.: Brøndsted-Rockafellar property and maximality of monotone operators representable by convex functions in non-reflexive Banach spaces. J. Convex Anal. 15(4), 693-706 (2008)
6. Marques Alves, M., Svaiter, B.F.: Maximal monotone operators with a unique extension to the bidual. J. Convex Anal. 16(2), 409-421 (2009)

7. Marques Alves, M., Svaiter, B.F.: On Gossez type (D) maximal monotone operators (2009). arXiv:0903.5332v2 [math.FA]
8. Marques Alves, M., Svaiter, B.F.: On Gossez type (D) maximal monotone operators. J. Convex Anal. 17(3&4) (2010)
9. Martínez-Legaz, J.-E., Svaiter, B.F.: Monotone operators representable by l.s.c. convex functions. Set-Valued Anal. 13(1), 21-46 (2005)
10. Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/B. Springer, New York (1990) (Nonlinear monotone operators. Translated from the German by the author and Leo F. Boron)