# Ejercicio 2 del Tercer Parcial de Calculo Diferencial e Integral 1

Adan Diaz Martinez *****

27 de noviembre de 2022

*Profesor Jorge Calderon Espinosa de los Monteron
**Emmanuel Ismael González Celio
***Alan Hernández Martínez

**Ejercicio 2.** Resolver los siguientes ejercicios:

- Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, c $\epsilon$ I un punto y $f : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que si $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos en I, todos distintos de c, que converge a c y $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

  **PD** $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

  Prueba Como $\lim_{x\to c} f(x) = L$, sabemos que:

  $$\forall\epsilon \gneq 0 \ \exists\delta \gneq 0 : 0 \lneq |x - c| \lneq \delta \to |f(x) - L| \lneq \varepsilon \tag{1}$$

  Por otra parte tenemos que $x_n \subseteq Domf$ es una sucesion de imagenes que converge a c, es decir:

  $$\lim_{n\to\infty} x_n = c \to \forall n\epsilon\mathbb{N}, \exists N\epsilon\mathbb{N} : n \geq N \to |x_n - c| \lneq \varepsilon_\bigstar \tag{2}$$

  Ademas como $x_n \neq c \ \forall n\epsilon\mathbb{N} \to 0 \lneq |x_n - c| \lneq \varepsilon_\bigstar$, eso quiere decir que cumple con la definicion de limite de función, renombrando $\varepsilon_\bigstar$ como $\delta$ se tiene que:

  $$\forall n\epsilon\mathbb{N} \ \exists N\epsilon\mathbb{N} : \ si\ n \geq N\ entonces\ 0 \lneq |x_n - c| \lneq \delta \to |f(x_n) - L| \lneq \epsilon \tag{3}$$

  $$\therefore \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

  ■

- Con base en lo anterior demostrar que $\nexists \lim_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x})$

  **PD** $\nexists \lim_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x})$

  Prueba Por la demostracion anterion anterior:

  $$\lim_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x}) = L\ si \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \ \ x_n \neq 0\, \forall n\epsilon\mathbb{N} \to \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L \tag{4}$$

  La prueba es por casos:

  - Caso 1: Sea $(x_{n\diamondsuit})_{n\epsilon\mathbb{N}} = (\frac{1}{2n\pi}) \to \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2n\pi}) = 0$ eso quiere decir:

    $$\lim_{n\to\infty} f(x_{n\diamondsuit}) = \lim_{n\to\infty} \cos(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi) = 1 \tag{5}$$

  - Caso 2: Sea $(x_{n\clubsuit})_{n\epsilon\mathbb{N}} = (\frac{1}{(2n-1)\pi}) \to \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{(2n-1)\pi}) = 0$ eso quiere decir:

    $$\lim_{n\to\infty} f(x_{n\clubsuit}) = \lim_{n\to\infty} \cos(\frac{1}{\frac{1}{(2n-1)\pi}}) = \lim_{n\to\infty} \cos((2n-1)\pi) = -1 \tag{6}$$

  Como los limites de la sucesion de imagenes son distintos:

  $$\to \nexists \lim_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x}) \tag{7}$$

  ■