La integral de Choquet como operador de agregación

Julio Waissman Vilanova

Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Plan de la presentación

1. Operadores de agregación
2. Operadores de consenso
   - Media aritmética ponderada
   - Promedio ponderado ordenado
   - Integral de Choquet
3. Ejemplo ilustrativo
   - Modelado con WAM
   - Modelado con OWA
   - Modelado con la integral de Choquet

Introducción

- Los operadores de agregación tienen que ver con *agregar* o *fusionar* valores provenientes de diferentes fuentes, para obtener un solo valor que los represente. El ejemplo prototipo es la media aritmética.

- Herramienta muy importante en la solución de problemas de toma de decisión multicriterio (MCDM, por *multi-criteria decision making*) en los que, quien toma la decisión (DM, por *decision maker*) va a elegir una alternativa entre varias, considerando diferentes puntos de vista o criterios.

Notación

Partiendo de un *conjunto de alternativas potenciales*

$$X = X_1 \times \ldots \times X_n,$$

cada *alternativa*

$$x := (x_1, \ldots, x_n)$$

puede ser descrita como un vector de n componentes, llamadas *criterios*.

Operación de agregación n–aria

Definición

Una *operación de agregación n–aria* es una función

$$F^{(n)} : I^n \to I$$

que satisface lo siguiente:

- Monotonía. Esto es, si consideramos dos n–tuplas $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(y_1, \ldots, y_n)$ tal que $x_i \leq y_i$ para todo i, $1 \leq i \leq n$, se cumple $F^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \leq F^{(n)}(y_1, \ldots, y_n)$.
- Condiciones de frontera de la forma:

$$\inf_{x \in I^n} F^{(n)}(x) = \inf I \qquad \text{y} \qquad \sup_{x \in I^n} F^{(n)}(x) = \sup I$$

Operador de agregación

Definición

Un *operador de agregación* es una función

$$F : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I^n \to I$$

tal que:

- para todo $n > 1$, $F^{(n)} = F_{|I^{(n)}}$ es una operación de agregación n–aria.
- $F^{(1)}$ es la identidad en I.

Operadores de consenso

Las operaciones de consenso son aquellos tales que

$$\min(x_1, \ldots, x_n) \leq F(x_1, \ldots, x_n) \leq \max(x_1, \ldots, x_n).$$

Particularmente interesantes en la toma de decisión difusa, al querer simular la agregación de información proveniente de diferentes fuentes.

Media aritmética ponderada

Definición

La *media aritmética con peso* (WAM, por *weighted arithmetic mean*) se define: $M_{\mathbf{w}}$, donde $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, $w_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ y

$$M_{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i.$$

Promedio ponderado ordenado

Definición

Un *promedio ponderado ordenado* (OWA, por *ordered weighted average*) de dimensión n está dada por

$$M'_{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^{n} w_i x_{(i)},$$

donde $(\cdot)$ indica una permutación de $\{1, \ldots, n\}$, tal que $x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$, $w_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Sobre las WAM y los OWA

- El OWA puede ser visto como la simetrización de la media aritmética ponderada.
- Tanto las WAM como los OWA figuran entre las operación de agregación más utilizadas, en la solución de problemas MCDM.
- La desventaja, muy conocida, es que no siempre es posible representar mediante ellas las preferencias del DM.

La integral de Choquet. Motivación

- La desventaja que presentan la WAM y el OWA se convierten en la principal motivación para el estudio de la integral de Choquet.
- A diferencia de la WAM y el OWA, con la integral de Choquet es posible representar las preferencias del DM, cuando existe relación entre criterios.

Medida borrosa

Definición

Una *medida borrosa* o *capacidad* sobre un conjunto de índices $N = \{1, \ldots, n\}$ es una función monótona $\mu : 2^N \to [0, 1]$, con $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(N) = 1$.

- Se denota como $\mathcal{F}_N$ al conjunto de todas las medidas borrosas sobre N.
- Que sea monótona significa que $\mu(S) \leq \mu(T)$ si $S \subseteq T$.
- $\mu(S)$ puede ser vista como el *peso* que le corresponde al subconjunto S de criterios.

Integral de Choquet

Definición

Dada $\mu \in \mathcal{F}_N$, la *integral de Choquet* de $x \in I^n$ respecto a μ se define como

$$\mathcal{C}_\mu(x) := \sum_{i=1}^{n} x_{(i)}[\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})],$$

donde $A_{(i)} = \{(i), \ldots, (n)\}$ y $A_{n+1} = 0$.

Casos especiales

- *Propiedad de aditividad*. Una capacidad es aditiva si para conjuntos disjuntos $S, T \subseteq N$, se tiene $\mu(S \cup T) = \mu(S) + \mu(T)$.

  Si μ es aditiva, la integral de Choquet se reduce a una WAM.

- *Propiedad de simetría*. Una capacidad es simétrica si para cualesquiera subconjuntos de índices S y T, $|S| = |T|$ implica $\mu(S) = \mu(T)$.

  Si μ es simétrica, la integral de Choquet se reduce a un OWA.

Caracterización de la integral de Choquet

Una propiedad fundamental de la integral de Choquet, que resulta de la definición, es:

$$\mathcal{C}_\mu(1_S, 0_{-S}) = \mu(S), \quad \forall S \subseteq N.$$

donde, $(1_S, 0_{-S})$ denota una alternativa para la que cada característica x_i tomará el valor 1 si $i \in S$ y 0 en otro caso.

Se caracteriza completamente la integral de Choquet al definir su valor en los casos extremos.

Ejemplo ilustrativo

Sean a, b y c tres alternativas evaluadas sobre tres criterios x_1, x_2 y x_3, esquematizados de la siguiente forma:

	x_1	x_2	x_3
a	0.6	0.6	1
b	0.9	0	1
c	0	0.9	1

Se tratará de modelar la preferencia del DM:

$$a \prec b \prec c$$

Modelado con la media aritmética ponderada

Obtener los pesos adecuados acorde a las preferencias, por separado:

$$
\begin{aligned}
b \prec c: \quad & 0.9w_1 + 0w_2 + 1w_3 < 0w_1 + 0.9w_2 + 1w_3 \\
& w_1 < w_2 \\
a \prec b: \quad & 0.6w_1 + 0.6w_2 + 1w_3 < 0.9w_1 + 0w_2 + 1w_3 \\
& w_2 < 0.5w_1
\end{aligned}
$$

Al tomar en cuenta la preferencia global del DM ($a \prec b \prec c$) tendremos:

$$w_1 < w_2 < 0.5w_1 \quad \text{No es posible}$$

La media aritmética ponderada no modela la preferencia del DM.

Obtener los pesos adecuados:

$$\begin{aligned} b \prec c: \quad 0w_1 + 0.9w_2 + 1w_3 &< 0w_1 + 0.9w_2 + 1w_3 \\ 0.9w_2 + w_3 &< 0.9w_2 + w_3 \end{aligned}$$

Al usar el OWA las alternativas *b* y *c* siempre tendrán el mismo valor.

Modelado con la integral de Choquet

Tomando en cuenta que la integral de Choquet se define por los vértices del *n*-cubo, lo que se requiere es obtener las capacidades (o *pesos*) correspondientes.

0	0	0	$\mu(\emptyset) = 0$, por definición
1	0	0	$\mu(\{1\})$
0	1	0	$\mu(\{2\})$
0	0	1	$\mu(\{3\})$
1	1	0	$\mu(\{1,2\})$
1	0	1	$\mu(\{1,3\})$
0	1	1	$\mu(\{2,3\})$
1	1	1	$\mu(\{1,2,3\}) = 1$, por definición
			$\mu(\{4,3\}) = 0$, por definición

Evaluación de las alternativas

Al evaluar las alternativas tenemos:

- Alternativa *a*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(0.6, 0.6, 1) &= 0.6(\mu(\{1,2,3\}) - \mu(\{2,3\})) + \\ &\quad 0.6(\mu(\{2,3\}) - \mu(\{3\})) + 1(\mu(\{3\}) - \mu(\{4,3\})) \\ &= 0.6 + 0.4\mu(\{3\})\end{aligned}$$

- Alternativa *b*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(0.9, 0, 1) &= 0(\mu(\{1,2,3\}) - \mu(\{1,3\})) + \\ &\quad 0.9(\mu(\{1,3\}) - \mu(\{3\})) + 1(\mu(\{3\}) - \mu(\{4,3\})) \\ &= 0.9\mu(\{1,3\}) + 0.1\mu(\{3\})\end{aligned}$$

- Alternativa *c*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(0, 0.9, 1) &= 0(\mu(\{1,2,3\}) - \mu(\{2,3\})) + \\ &\quad 0.9(\mu(\{2,3\}) - \mu(\{3\})) + 1(\mu(\{3\}) - \mu(\{4,3\})) \\ &= 0.9\mu(\{2,3\}) + 0.1\mu(\{3\})\end{aligned}$$

Evaluación

Al evaluar las preferencias parciales se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
b \prec c: \quad & 0.9\mu(\{1,3\}) + 0.1\mu(\{3\}) < 0.9\mu(\{2,3\}) + 0.1\mu(\{3\}) \\
& \mu(\{1,3\}) < \mu(\{2,3\}) \\
a \prec b: \quad & 0.6 + 0.4\mu(\{3\}) < 0.9\mu(\{1,3\}) + 0.1\mu(\{3\}) \\
& \tfrac{\mu(\{3\})+2}{3} < \mu(\{1,3\})
\end{aligned}
$$

Tomando en cuenta la preferencia del DM ($a \prec b \prec c$) tenemos:

$$\frac{\mu(\{3\})+2}{3} < \mu(\{1,3\}) < \mu(\{2,3\})$$

Asignar valor a las capacidades

Asignando un valor a $\mu(\{3\})$, digamos

$$\mu(\{3\}) = 0.4,$$

estamos en condiciones de asignar valores a $\mu(\{1,3\})$ y $\mu(\{2,3\})$.

Atendiendo a la expresión anterior y al valor asignado a $\mu(\{3\})$, vemos que $\mu(\{1,3\})$ debe ser mayor a 0.8, pongamos:

$$\mu(\{1,3\}) = 0.9$$

y, dado que $\mu(\{2,3\})$ debe ser mayor a $\mu(\{1,3\})$, podemos asignar:

$$\mu(\{2,3\}) = 0.95$$

De esta manera, se satisface la preferencia del DM:

$$a \prec b \prec c$$

Analisis de los resultados

Mediante este modesto ejemplo, es posible resaltar algunos aspectos:

- El que se requiera un valor para la capacidad $\mu(\{1,3\})$ significa que existe relación entre los criterios 1 y 3. Similarmente, por $\mu(\{2,3\})$ se advierte la relación entre los criterios 2 y 3.
- La integral de Choquet resultó adecuada, debido a que puede representar relaciones entre criterios.
- Para satisfacer los requerimientos del DM mediante la integral de Choquet, no fueron necesarios los valores de las $2^N = 2^3 = 8$ capacidades o *pesos*.
- Respetando los valores obtenidos para las capacidades requeridas no es posible asignar valores a las capacidades faltantes, de forma que se dé aditividad o simetría.

Conclusiones

- La integral de Choquet es adecuada en la solución de problemas multicriterio, cuando existe relación entre criterios.
- El problema fundamental radica en la obtención de 2^N capacidades donde N es el número de características.
- Un porcentaje de valores de las capacidades se debe modelar de acuerdo a los requerimientos del DM, mientras que otros deben de ser asignados de forma que el operador de consenso cumpla con propiedades *deseables*.

Más información

M. Grabisch y C. Labreuche,
A decade of application of the Choquet and Sugeno integrals in multi-criteria decision aid,
Ann. Oper. Res., vol. 175, no 1, pp. 247-286, 2010.

Muchas gracias.