¿Qué representan los subconjuntos difusos?

Gradualidad, incertidumbre, vaguedad y bipolaridad

Julio Waissman Vilanova

Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

26 de mayo de 2016

Plan de la presentación

¿Que representa un conjunto?

Georg Cantor (Wikipedia)

"...entiendo en general por variedad o conjunto toda multiplicidad que puede ser pensada como unidad, esto es, toda colección de elementos determinados que pueden ser unidos en una totalidad mediante una ley."

Conjuntos Ónticos: Representan un objeto o concepto que se compone de la conjunción de sus elementos.

Conjuntos Epistémicos: Conjunto de valores, de los cuales uno es correcto, representa un constructo.

Subconjuntos difusos

- Sea Ω un conjunto universo
- A la función $A : \Omega \to [0, 1]$ se le conoce como conjunto difuso.
- $A(x)$ es la *pertenencia* de $x \in U$ al subconjunto difuso A.
- Definir A puede ser subjetivo, pero en su definición no hay incertidumbre.
- Los subconjuntos difusos clásicos son *subconjuntos difusos ónticos*.

Los subconjuntos difusos representan la noción de *gradualidad* en el conocimiento, debido al uso de lenguaje natural

Ejemplo: ¿La imagen es “bosque”?

Ejemplo: ¿La imagen es “bosque”?

Ejemplo: ¿La imagen es “bosque”?

Ejemplo: ¿La imagen es “bosque”?

Ejemplo: ¿La imagen es "bosque"?

Ejemplo: ¿La imagen es “bosque”?

Operaciones básicas

Si $A, B : \Omega \to [0,1]$, en términos *muy* reducionistas:

- $A \cap B(x) = \min(A(x), B(x))$
- $A \cup B(x) = \max(A(x), B(x))$
- $A^c(x) = 1 - A(x)$

Por lo tanto,

$$A \cap A^c(x) = \min(A(x), 1 - A(x)) \leq 0.5$$

¿Existen subconjuntos difusos epistémicos?

Distribución de posibilidad

Sea Ω un conjunto finito, una distribución de posibilidad es una función $\Pi : 2^{\Omega} \to [0, 1]$ tal que:

- $\Pi(\emptyset) = 0$,
- $\Pi(\Omega) = 1$,
- $\Pi(U \cup V) = \max(\Pi(U), \Pi(V))$ para $U, V \subseteq \Omega$, conjuntos disjuntos.

y por lo tanto

$$\Pi(U) = \max_{x \in U} \Pi(\{x\}),$$

donde $\Pi(\{x\})$ puede ser la pertenencia de x a un conjunto difuso.

Ejemplo: En un conjunto de imágenes aéreas, ¿Cuál es la posibilidad de encontrar "bosque"?

Vaguedad: un ejemplo en lógica de predicados

Consideremos un conjunto de 5 predicados $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ tal que $t(p_i) \in \{F, V\}$.

- $A_* = \{p_5\}$ el conjunto de predicados que seguro $t(p_i) = T$,
- $A^* = \{p_2, p_3, p_4, p_5\}$ el conjunto de predicados que podrían ser que $t(p_i) = T$.
- Entonces, $t(p_1) = F$, $t(p_5) = T$, y $t(p_i) \in \{F, V\}$ para $i \in \{2, 3, 4\}$.
- $t(p_i) \in \{F, V\}$ no es otro valor de verdad.
- La lógica trivaluada de Kleen representaba vaguedad, mientras que la lógica trivaluada de Luckasiewicz representaba gradualidad.

Vaguedad en subconjuntos difusos ónticos

Dos maneras claras de representar la vaguedad:

Subconjunto difuso tipo 2 es una función $\tilde{A} : \Omega \to \mathcal{F}$, donde $\mathcal{F} = \{f | f : [0,1] \to [0,1]\}$.

Subconjunto difuso evaluado en intervalo, donde $\bar{A}(x) = [A_*(x), A^*(x)]$ es un intervalo cerrado de $[0,1]$, donde A_* y A^* son subconjuntos difusos de Ω tal que $A_*(x) \leq A^*(x)$ para toda $x \in \Omega$.

Utilizando aritmética de intervalos:

- $\bar{A} \cap \bar{B}(x) = [\text{mín}(A_*(x), B_*(x)), \text{mín}(A^*(x), B^*(x))]$,
- $\bar{A} \cup \bar{B}(x) = [\text{máx}(A_*(x), B_*(x)), \text{máx}(A^*(x), B^*(x))]$,
- $\bar{A}^C(x) = [1 - A^*(x), 1 - A_*(x)]$.

Sin embargo

- $\bar{A} \cap \bar{A}^C(x) = [\text{mín}(A_*(x), 1 - A^*(x)), \text{mín}(A^*(x), 1 - A_*(x))]$.
- Si $A_*(x) < 0.5 < A^*(x)$, entonces $\text{mín}(A^*(x), 1 - A_*(x)) > 0.5$.
- ¡Pero sabemos que $A \cap A^C(x) \leq 0.5$!

El método de intervalos no es consistente con la representación de vaguedad, por lo que las operaciones deben hacerse por propagación de restricciones.

$$\bar{A} \cap \bar{A}^C(x) = [\min_{a \in \bar{A}(x)} \text{mín}(a, 1 - a), \max_{a \in \bar{A}(x)} \text{mín}(1 - a, a)]$$

Vaguedad en subconjuntos difusos epistémicos

- Sea $\Pi : 2^{\Omega} \to [0,1]$ una distribución de posibilidad.
- $N(U) = 1 - \Pi(U^C)$, $U \subseteq \Omega$ es la medida de *necesidad*.
- Si $N(U) = 1$, entonces para que $\Pi(\{x\}) > 0$, $x \in U$.
- Para todo $U \subseteq \Omega$, $N(U) \leq \Pi(U)$

La tupla $(N(U), \Pi(U))$ es una representación de vaguedad en conjuntos difusos epistémicos.

- Si $N(U) = a > 0$, entonces $\Pi(U) = 1$.
- Si $N(U) = 0$, entonces $\Pi(U) = b \leq 1$.

Escalas bipolares

- La mente humana suele razonar y tomar desiciones basada en afectos positivos y negativos.
- Tres marcas: Absolutamente positivo, absolutamente negativo e indiferente.
- Una escala bipolar es un conjunto ordenado $(L, <)$ con un elemento $\mathbf{0} \in L$ tal que $\lambda > \mathbf{0}$ sea una evaluación positiva.
- Existe una operación binaria $\star$ tal que $\lambda \star \mathbf{0} = \lambda$.

Formas de bipolaridad

Tipo 1: Simétrica univariada. Se basa en el uso de una escala bipolar y un solo valor. Se asume que los grados positivos son simétricos respecto los negativos.

Tipo 2: Simétrica bivariada. Se basa en el uso de una escala unipolar L, donde ínf L es el elemento neutro. Un objeto es evaluado con dos valores: α^+ en favor, y α^- en contra.

Tipo 3: Asimétrica. En este tipo de bipolaridad la evaluación negativa no es de la misma naturaleza que la evaluación positiva, a diferencia de la tipo 2, donde solo las polaridades son opuestas.

Ejemplo de bipolaridad tipo 2

Conjuntos difusos intuisionistas

Sean A^+ y A^- subconjuntos difusos de Ω, si $A^+(x) + A^-(x) \leq 1$ para todo $x \in \Omega$, a la tupla $A = (A^-, A^+)$ se le conoce como conjunto difuso de Atanassov (o intuisionista).

- $A^+(x)$ es el grado de pertenencia.
- $A^-(x)$ es el grado de no pertenencia.
- $\pi(x) = 1 - A^+(x) - A^-(x)$ es el grado de indeterminación.
- $A^C(x) = (A^+(x), A^-(x))$.
- $A \cup B(x) = (\text{mín}(A^-(x), B^-(x)), \text{máx}(A^+(x), B^+(x)))$
- $A \cap B(x) = (\text{máx}(A^-(x), B^-(x)), \text{mín}(A^+(x), B^+(x)))$

$$\bar{A}(x) = [\text{mín}(A^+(x), 1 - A^-(x)), \text{máx}(A^+(x), 1 - A^-(x))]$$

Ejemplo bipolaridad tipo 3

- La escala de una distribución de posibilidad Π es unipolar negativa ($\Pi(U) = 1$ es una evaluación neutra, $\Pi(U) = 0$ es una evaluación negativa.
- Los intervalos $[N(U), \Pi(U)]$ son demasiado vagos.
- Π se define a partir del conocimiento experto, utilizando razonamiento basado en reglas.

Una representación bipolar en teoría de la posibilidad ha sido propuesta, agregando una segunda distribución de posibilidad Δ, tal que:

- $\Delta(U) \leq \Pi(U)$ para todo $U \subseteq \Omega$.
- Δ esta basada en *datos*.
- $\Delta(U) = 0$ solo indica la falta de evidencia.
- Δ se infiera a partir de razonamiento basado en casos.