Walsh変換、フーリエ変換を用いた正規分布擬似乱数の生成手法

有限会社ケプストラム

2025.3.26

https://www.cepstrum.co.jp/rd/gaussian_generator/gaussian_generator.html

Walsh transform (WT) and Fourier transform (FT) generating normal/Gaussian distribution sequences

■ Walsh変換を用いた正規分布擬似乱数生成

１．Ｎヶの一様分布擬似乱数を生成する（ブロック処理をおこなうため）
　　高速 Walsh 変換に合わせてデータ長Ｎは２の冪とする

２．平均が 0 となるようにオフセットを除去する

３．オフセット除去後の乱数列を Walsh 変換すると正規分布擬似乱数がＮヶ得られる

Walsh Transform
(WT)

Random Sequence　$p_k \Longrightarrow x_k$　Gaussian Distribution Sequence

average(p_k)=0

k=0, 1, 2,... N−1

N：Data Length/WT Length

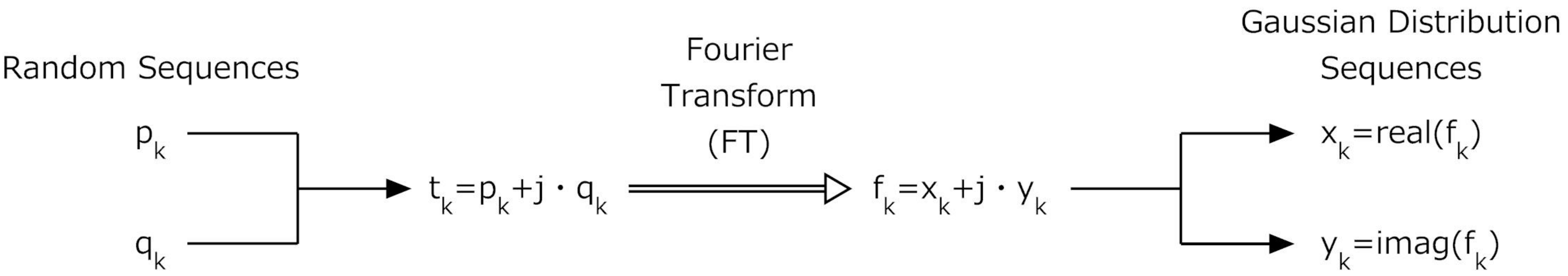
中心極限定理の原理に基づいた処理なので、平均が 0 であれば一様分布以外の擬似乱数列を用いても良いはず

■ フーリエ変換を用いた正規分布擬似乱数生成

１．Ｎヶの一様分布擬似乱数を２セット生成する（ブロック処理をおこなうため）
　　高速フーリエ変換に合わせてデータ長Ｎは２の冪とする

２．平均が 0 となるようにオフセットを除去する

３．オフセット除去後の乱数列をフーリエ変換して、実部と虚部をそれぞれ取り出すと
　　Ｎヶの正規分布擬似乱数が２セット得られる



$\mathrm{average}(p_k)=0$
$\mathrm{average}(q_k)=0$

$k=0, 1, 2, \ldots N-1$
N：Data Length/FT Length

t_k , f_k : complex sequences
$j=\mathrm{sqrt}(-1)$

中心極限定理の原理に基づいた処理なので、平均が 0 であれば一様分布以外の擬似乱数列を用いても良いはず

■ Walsh変換、フーリエ変換を用いた正規分布近似手法の特徴（1/2）

- 厳密な解析・特性評価等はまだおこなっていない
  （他の既存の手法との優劣もまだはっきりしない部分がある）
- 基本原理は中心極限定理に基づいた正規分布擬似乱数生成手法と同じ
  違いは単純な加算ではなく、重み付け係数付き加算をしていること

単純加算

$$g = \sum_{k=0}^{N-1} u[k] = u[0]+u[1]+u[2]+\ldots+u[N-1]$$

重み付け係数付き加算

$$g[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_{nk}\, u[k] = c_{n0}u[0]+c_{n1}u[1]+c_{n2}u[2]+\ldots+c_{n(N-1)}u[N-1]$$

$$\left(n = 0, 1, 2, \ldots N-1 \right)$$

u：一様分布乱数列、g：変換後の数列（正規分布）、c：重み付け係数

- 重み付け加算で得られたサンプル g[n] 間の相関特性等は未確認

■ Walsh変換、フーリエ変換を用いた正規分布近似手法の特徴（2/2）

・重み付け係数ｃはおそらく以下の条件を満たせば良いはず（後者の条件は例外）

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_{pk} = 0 \qquad \text{or} \qquad c_{q0} = c_{q1} = c_{q2} = \ldots = c_{q(N-1)} \qquad (p \neq q)$$

ただし高速演算アルゴリズムが存在する直交変換の係数以外を用いる実用上のメリットは無いと考えられる

・フーリエ変換以外に、sin/cosではなく三角波で合成・分解する変換手法などもあるが、正規分布の近似特性はどれが良いか？（Walsh変換と比較すると？）

・ブロック処理で一度に大量の正規分布乱数を生成するのに適している
Box-Muller法のように１サンプル単位で新しい値を求めるような処理は出来ない

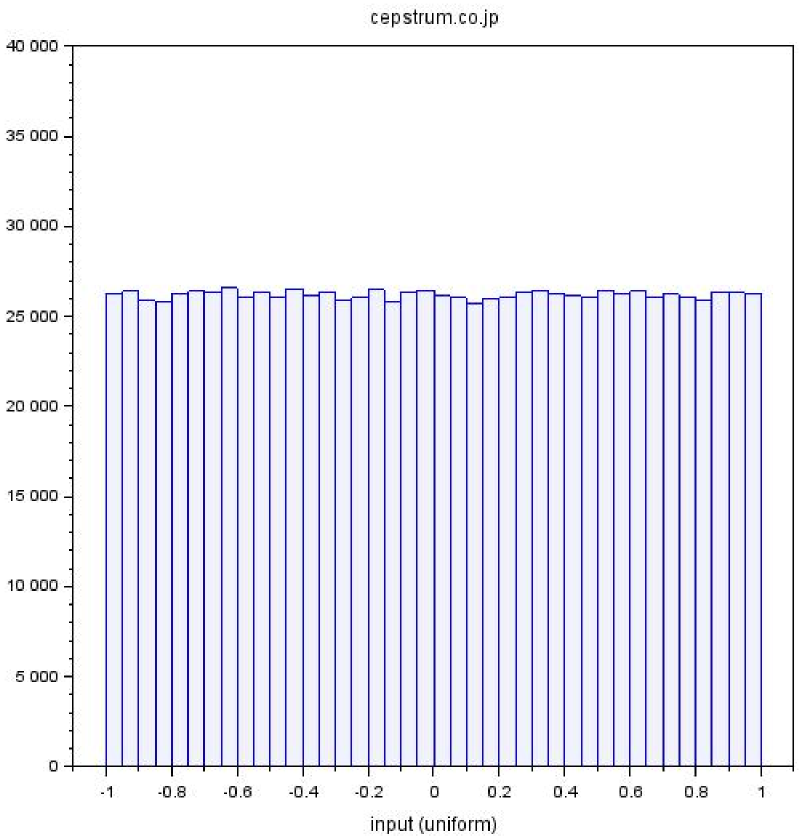
・データ長が大きくなるほど近似精度は向上するはず

・データ長が大きくなるほど効率的に処理できる
（高速Walsh変換、高速フーリエ変換の効果が顕著になる）

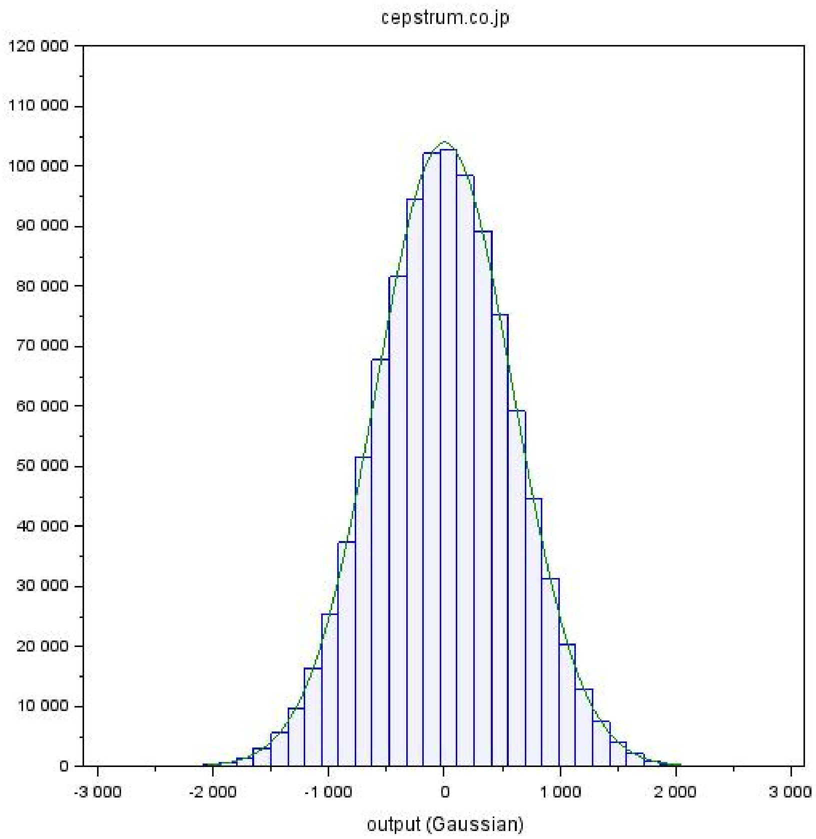
・これほど単純な方法に、今まで誰も気が付かなかったのは不思議（ラッキーな発見）

■ Walsh変換を用いた正規分布擬似乱数生成結果（1/2）

・データ長　N=1048576=2^{20}

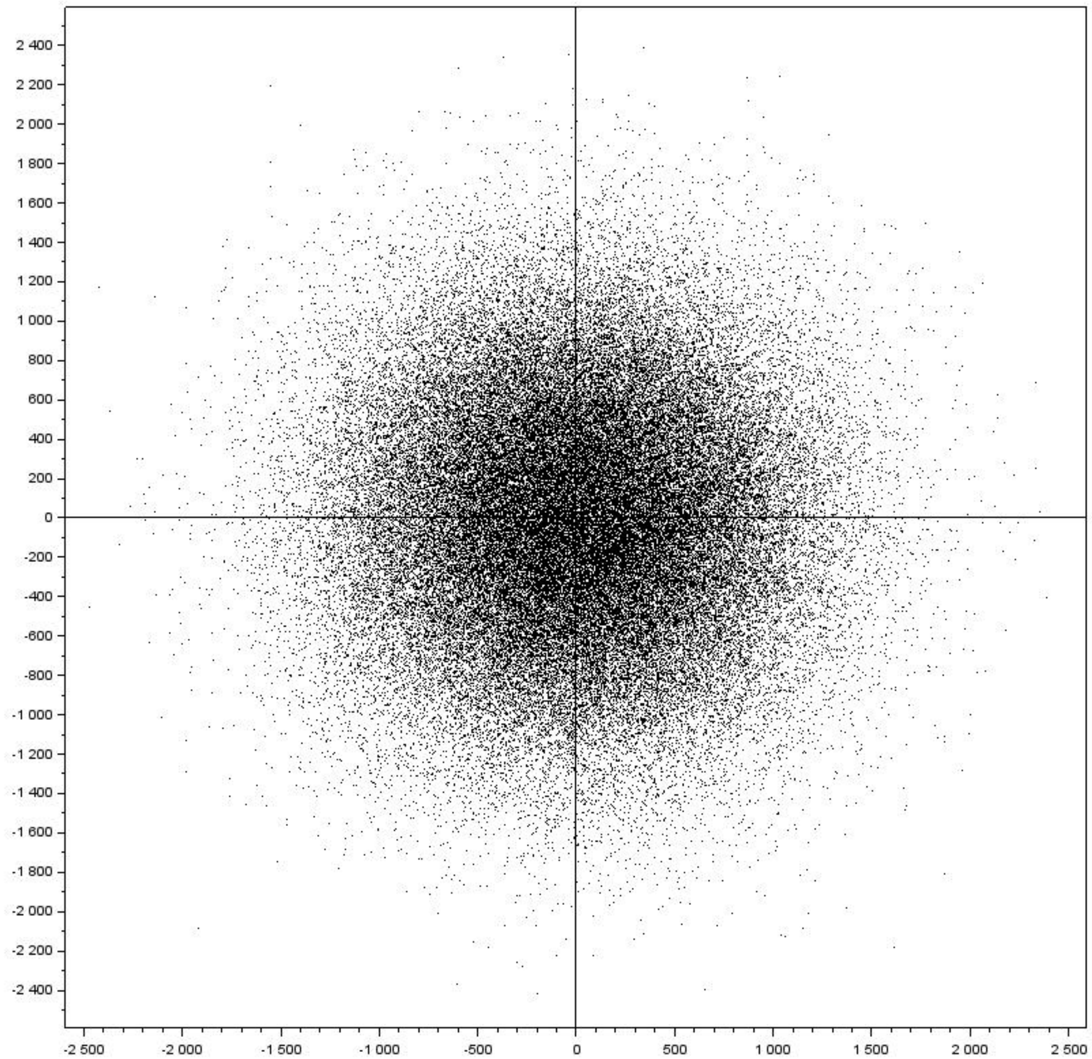


変換前（一様分布）
平均値は 0



変換後（正規分布／ガウス分布）

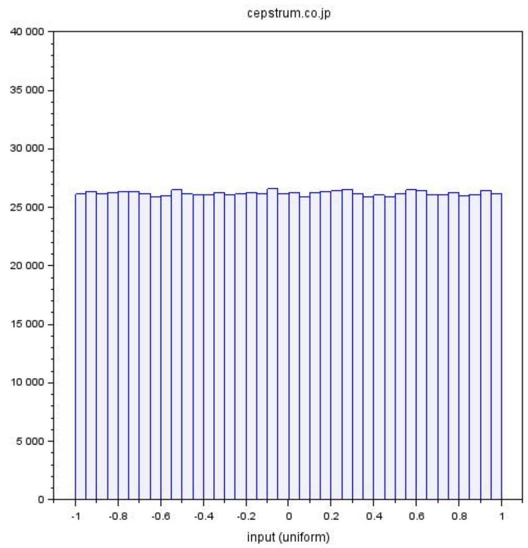
■ Walsh変換を用いた正規分布擬似乱数生成結果 (2/2)

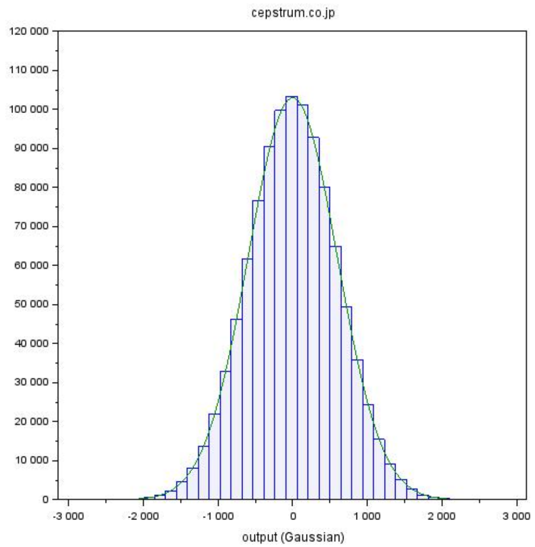


80000点のXYプロット

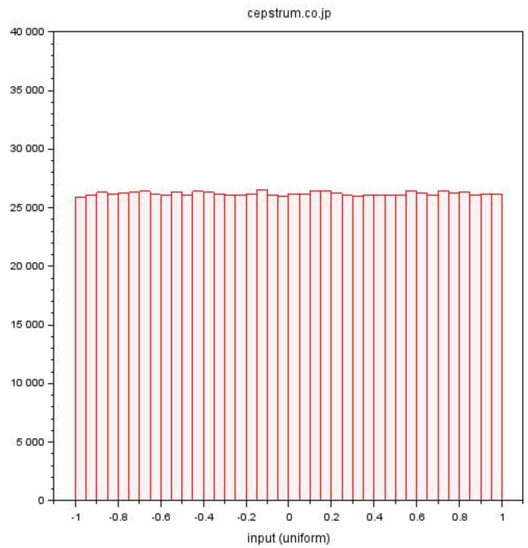
■ フーリエ変換を用いた正規分布擬似乱数生成結果（1/2）

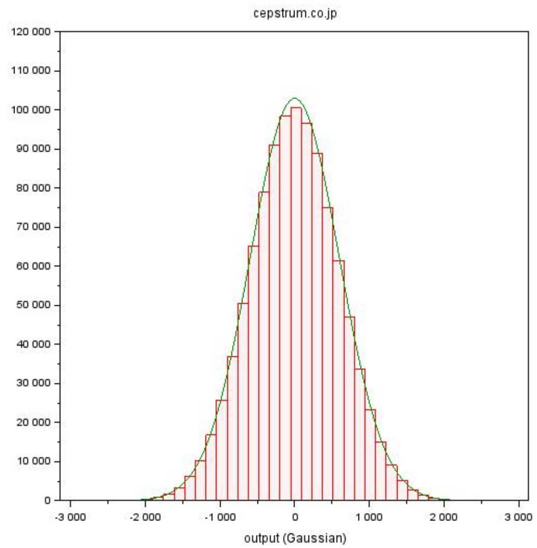
・データ長　N=1048576=2^{20}





real part

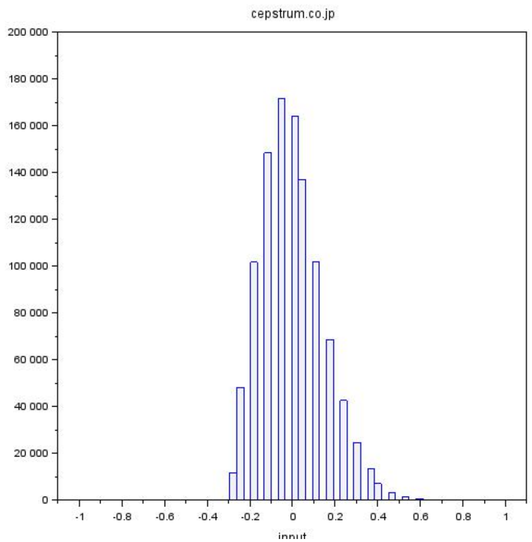


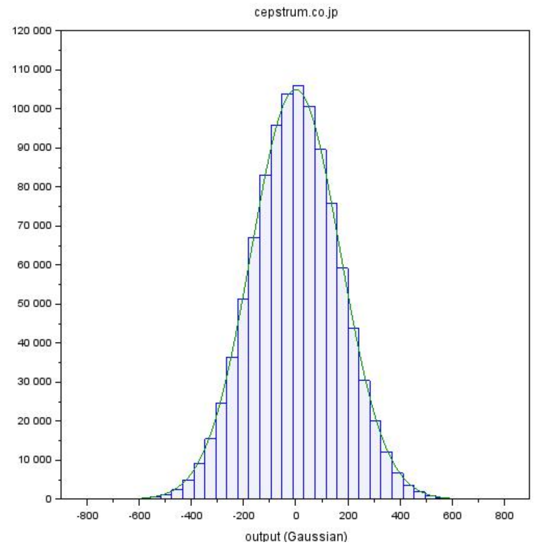


imaginary part

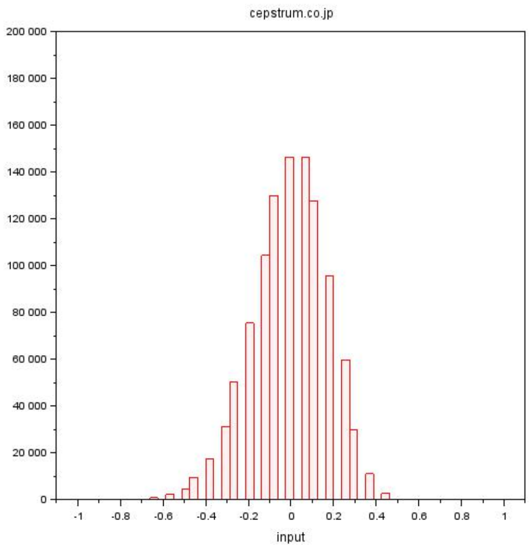
■ フーリエ変換を用いた正規分布擬似乱数生成結果（2/2）

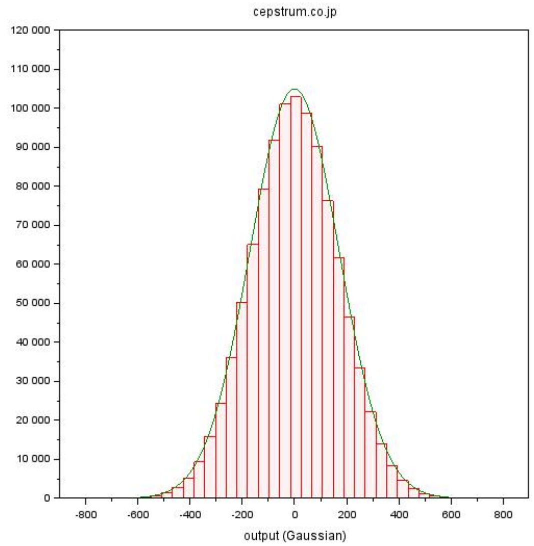
・一様乱数以外の擬似乱数を用いた例、データ長 $N=1048576=2^{20}$





real part





imaginary part

Walsh変換を用いた正規分布擬似乱数の生成手法の先行文献

有限会社ケプストラム

2025.5.9

https://www.cepstrum.co.jp/rd/gaussian_generator/gaussian_generator.html

■ Walsh変換を用いた正規分布擬似乱数の生成手法の先行文献

Walsh変換を用いた正規分布擬似乱数の生成手法に関して下記の先行文献の存在が判明した

アダマール変換を利用する多数の無相関な正規分布の不規則信号発生法、
泉 照之, 計測自動制御学会論文集 27 (3), 365-367, 1991

上記文献中に
『一様乱数をアダマール変換して正規乱数を発生させる方法がある[5)].』
『参考文献 5) 吉澤 正：Yatesの算法を応用した擬似正規乱数について、
日本オペレーションズ・リサーチ学会研究会アブストラクト集、83/84 (1969)』
との記述がある

1969年の吉澤の日本オペレーションズ・リサーチ学会研究会の発表資料はあまりに古くて、まだ入手できていない