Projekt 2 – układy równań liniowych

Adam Pacek 193318

Zadanie A – Wprowadzenie

Poniższe sprawozdanie dotyczy projektu 2 z przedmiotu Metody Numeryczne. Celem projektu jest porównanie metod rozwiązywania układów równań liniowych: metody Jacobiego, metody Gaussa-Seidla oraz metody bezpośredniej (faktoryzacja LU). Podczas projektu operujemy na następujących danych:

1. Rozmiar macierzy A wynosi N = 918. Ponadto $a_1 = 8$ oraz $a_2 = a_3 = -1$.
2. Wektor b zostanie utworzony przez n kolejnych wyrazów ciągu sin(3*n).

Macierz tworzymy poprzez następujące rozmieszczenie danych wartości:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a3 & a2 & a1 \end{bmatrix}$$

Poniżej znajdują się przykładowa macierz A rozmiaru 9x9 oraz wektor b.

```
[[8, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[-1, 8, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0],
[-1, -1, 8, -1, -1, 0, 0, 0, 0],
[0, -1, -1, 8, -1, -1, 0, 0, 0],
[0, 0, -1, -1, 8, -1, -1, 0, 0],
[0, 0, 0, -1, -1, 8, -1, -1, 0],
[0, 0, 0, 0, -1, -1, 8, -1, -1],
[0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 8, -1],
[0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 8]]
```

```
[0.0,
-0.7568024953079282,
0.9893582466233818,
-0.5365729180004349,
-0.2879033166650653,
0.9129452507276277,
-0.9055783620066238,
0.27090578830786904,
0.5514266812416906]
```

Zadanie B

Zadanie polega na zaimplementowaniu dwóch metod iteracyjnych: metody Jacobiego oraz metody Gaussa-Seidla. Metody służą do rozwiązywania układów równań liniowych poprzez iteracyjne poprawianie przybliżenia rozwiązania.

Metoda Jacobiego działa poprzez aktualizację wartości wszystkich zmiennych niezależnych na podstawie ich poprzednich wartości w każdej iteracji. Poniżej wzór na kolejną iterację tej metody.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Metoda Gaussa-Seidla działa podobnie, ale wykorzystuje już obliczone wartości zmiennych niezależnych w tej samej iteracji. Oto wzór na kolejną iterację tej metody.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

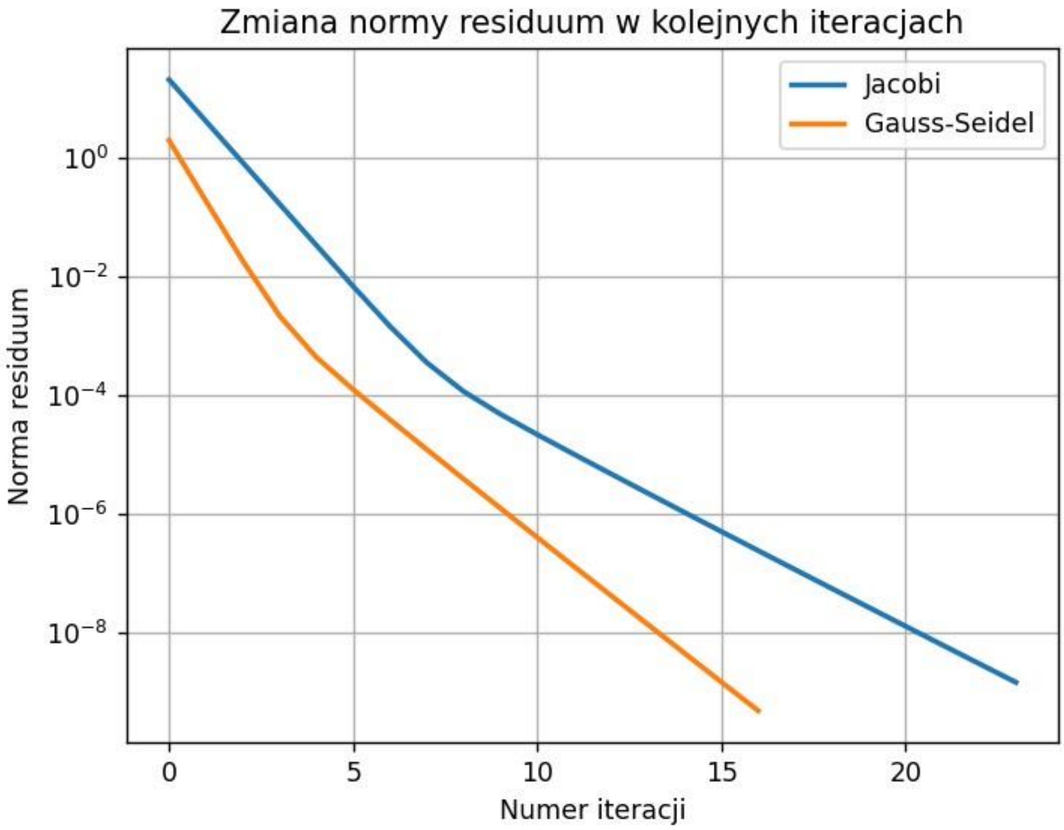
Poniżej znajdują się statystyki dotyczące porównania obydwu metod dla danych pochodzących z zadania A.

```
Iteracje metodą Jacobiego:  23
Iteracje metodą Gaussa-Seidla:  16
```

```
Czas trwania metody Jacobiego:  8.004271745681763
Czas trwania metody Gaussa-Seidla:  5.606698751449585
```

Łatwo można zauważyć, że metoda Gaussa-Seidla szybciej osiąga zadaną dokładność zarówno w kontekście liczby iteracji jak i czasu wykonania. Wynika to z tego, że metoda Gaussa-Seidla, korzystając z wartości już obliczonych zmiennych w trakcie tej samej iteracji, szybciej dostosowuje się do zmieniającej się sytuacji w rozwiązywanym układzie równań.

Na poniższym wykresie przedstawione są dane obrazujące odchylenie rozwiązania osiągniętego w danej liczbie iteracji od poprawnego rozwiązania.

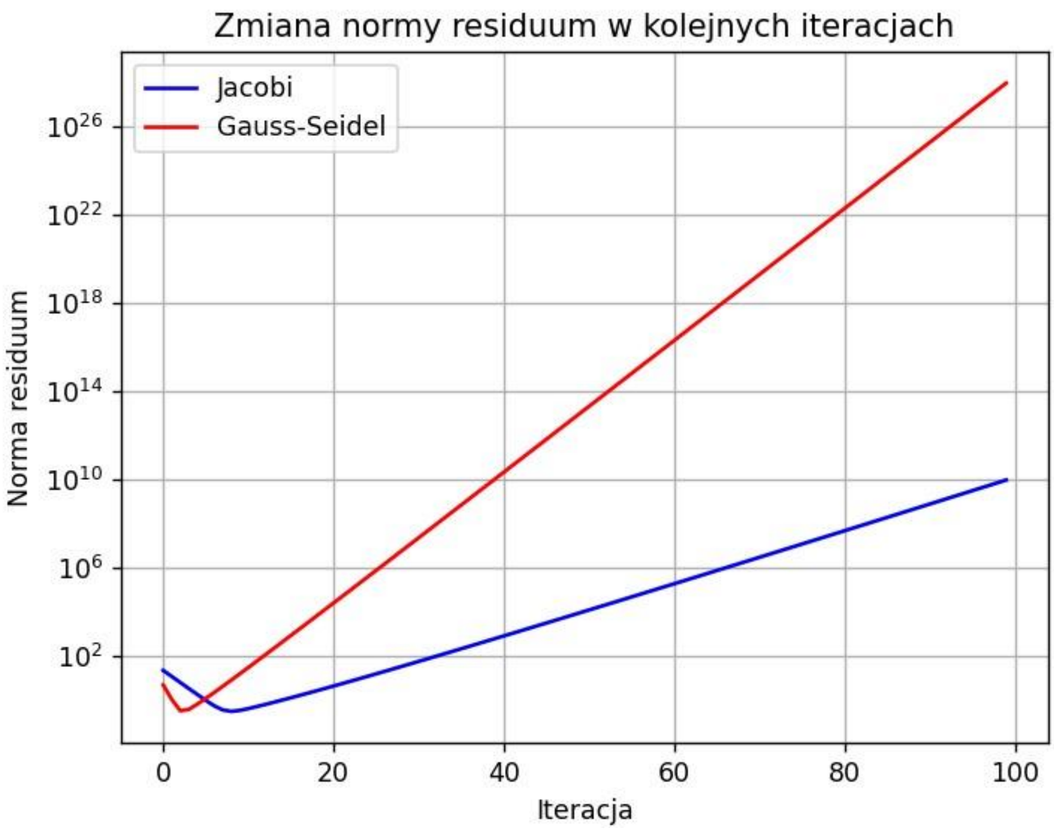


Wnioski: obie metody działają szybko i zbiegają do poprawnego rozwiązania. Metoda Gaussa-Seidla jest szybsza.

Zadanie C

Kolejnym zadaniem jest rozwiązanie układu dla innych danych: $a_1 = 3$, $a_2 = a_3 = -1$.

Wykres przedstawiający błędy został przedstawiony poniżej:



Wynika z niego, że błąd od pewnego momentu rośnie z każdą iteracją algorytmu.

Wnioski: Metody iteracyjne nie zawsze zbiegają do poprawnego rozwiązania. Dlatego w celu uniknięcia nieskończonej pętli warto ustalić maksymalną liczbę iteracji.

Zadanie D

Kolejne zadanie polega na zaimplementowaniu metody bezpośredniej rozwiązywania układów równań – metody LU. Polega ona na znalezieniu dwóch macierzy trójkątnych: górnej U oraz dolnej L, takich by wynik ich mnożenia był równy macierzy A. Potem należy postępować następująco:

- Tworzymy wektor pomocniczy: $\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{x}$
- Rozwiązujemy układ równań: $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ za pomocą podstawiania wprzód
- Rozwiązujemy układ równań: $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ za pomocą podstawiania wstecz

Poniżej zaprezentowane są błędy dotyczące wykorzystania trzech metod na danych z zadania C.

```
Błąd Jacobi: 9387403157.594057
Błąd Gauss-Seidel: 9.746237511932483e+27
Błąd LU: 3.1828329338114517e-13
```

Wynika z nich, że metoda bezpośrednia znalazła rozwiązanie z bardzo małym błędem.

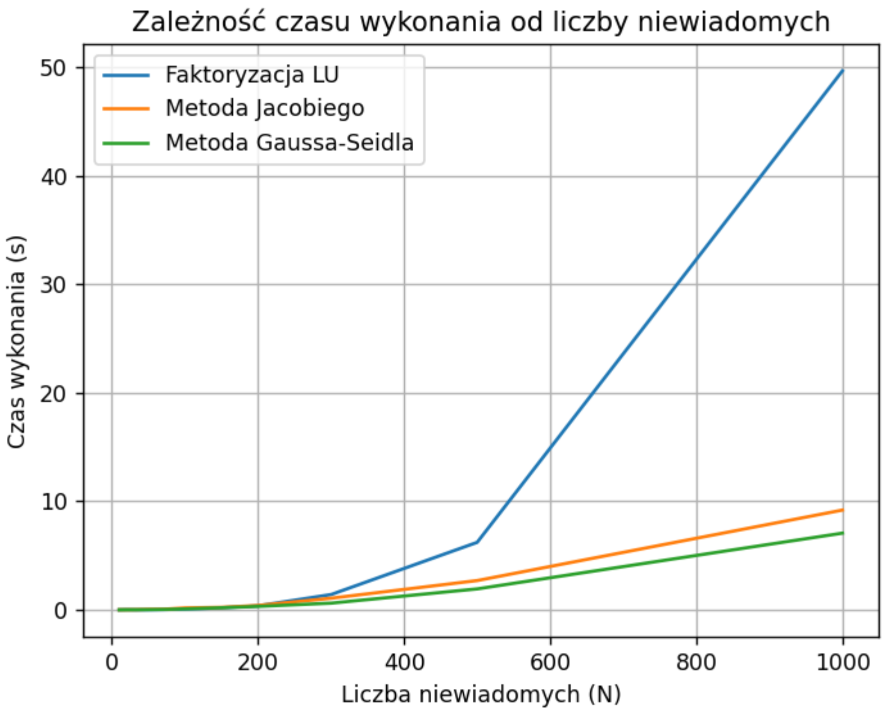
Wnioski: Są sytuacje, w których metody iteracyjne nie są w stanie przybliżyć nam wyniku, a metoda bezpośrednia LU już tak.

Zadanie E

Zadanie E polega na porównaniu czasów działania trzech metod analizowanych powyżej w zależności od rozmiaru macierzy wejściowej A. W tym celu przeprowadziłem badania dla następujących rozmiarów macierzy:

N_values = [10, 20,33, 50,70, 100, 150, 200, 300, 500, 1000]

Wykres przedstawiający czasy działania poszczególnych metod prezentuje się następująco:



Możemy na nim zaobserwować, że czas metody LU rośnie dużo szybciej niż metod iteracyjnych.

Wnioski: Czas działania metody LU dla dużej liczby niewiadomych jest znacząco dłuższy niż czas działania metod Jacobiego i Gaussa-Seidla.

Zadanie F – podsumowanie

Pierwsza część projektu dotyczyła porównania metod iteracyjnych. Zaobserwowaliśmy, iż metoda Gaussa-Seidla jest trochę szybsza niż metoda Jacobiego. W kolejnym etapie zaprezentowaliśmy, że istnieją takie dane wejściowe, dla których metody iteracyjne nie zbiegną się do poprawnego rozwiązania. Wtedy z pomocą przychodzi nam metoda bezpośrednia rozwiązywania układów równań liniowych. Ta, choć bardzo skuteczna i precyzyjna, okazuje się jednak bardzo długa, szczególnie dla dużych rozmiarów macierzy A. Ciekawym rozwiązaniem mogłoby być stosowanie najpierw szybkich metod iteracyjnych, a w przypadku niepowodzenia zastosowanie dłuższej, acz pewnej metody bezpośredniej.

Adam Pacek 193318