

Dyskretne przekształcenie Fouriera, część 3

Dyskretne przekształcenie Fouriera DFT (Discrete Fourier Transform) jest, obok procedur filtracji cyfrowej, jednym z podstawowych, a zarazem najbardziej skutecznych narzędzi cyfrowego przetwarzania sygnałów. Poza istotnym znaczeniem teoretycznym DFT odgrywa ważną rolę w zagadnieniach związanych z układowymi realizacjami różnorodnych algorytmów przetwarzania sygnałów. Wynika to z istnienia bardzo wydajnego algorytmu obliczania dyskretnej transformaty Fouriera, zwanego szybką transformatą Fouriera FFT (Fast Fourier Transform).

Jeśli rozpatrywany sygnał – nazwijmy go $x_{C1}(t)$ – będzie odwrócony w fazie, to również wystąpi pełna korelacja, w tym sensie, że zmianom sygnału $x_{C1}(t)$ będą towarzyszyły dokładnie przeciwne zmiany sygnału harmonicznego $\cos(2\pi ft)$, względem którego wyznaczamy korelację, co zilustrowano na **rys. 12**.

Wyliczmy zatem odpowiednią całkę

$$\operatorname{Re}\left\{X_{C1}(f)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \cos(2\pi ft - 180^\circ) \cdot \cos(2\pi ft) dt = -1 \quad (2.12)$$

Wynik jest zgodny z oczekiwaniami – wartość całki jest taka sama, lecz ma przeciwny znak.

Przeprowadźmy teraz kolejny eksperyment. Rozważmy przypadek, gdy rozpatrywany sygnał – nazwijmy go $x_{C2}(t)$ – będzie przesunięty o 90° . Taka sytuacja jest przedstawiona na **rys. 13**.

Przyjrzyjmy się dokładnie dowolnemu pojedynczemu okresowi. W czasie jednej ćwiartki okresu obydwa sygnały zmieniają się jednakowo (jednocześnie rosną lub maleją), ale już w kolejnej zmieniają się przeciwnie (tzn. gdy jeden rośnie, to drugi maleje i *vice versa*). Odnotowujemy więc zupełny brak korelacji między obydwojema sygnałami. Dla pewności policzmy odpowiednią całkę

$$\operatorname{Re}\left\{X_{C2}(f)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \cos(2\pi ft - 90^\circ) \cdot \cos(2\pi ft) dt = 0 \quad (2.13)$$

Wynik obliczeń potwierdza nasze przewidywania, ale i tak jest zaskakujący. Przecież zawartość widmowa sygnału nie zmieniła się!

W tym miejscu ujawnia się potęga rachunku symbolicznego i geniusz Fouriera. Rozpatrzmy korelację sygnału $x_{C2}(t)$ (przesuniętego o 90°) z sygnałem harmonicznym $\sin(2\pi ft)$. Obydwa sygnały przedstawione są na **rys. 14**.

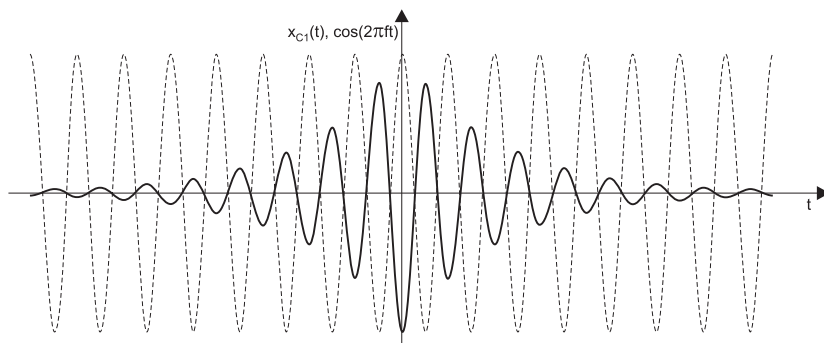
Widzimy pełną korelację obu sygnałów, którą potwierdza wynik obliczeń części urojonej transformaty Fouriera

$$\operatorname{Im}\left\{X_{C2}(f)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \cos(2\pi ft - 90^\circ) \cdot \sin(2\pi ft) dt = 1 \quad (2.14)$$

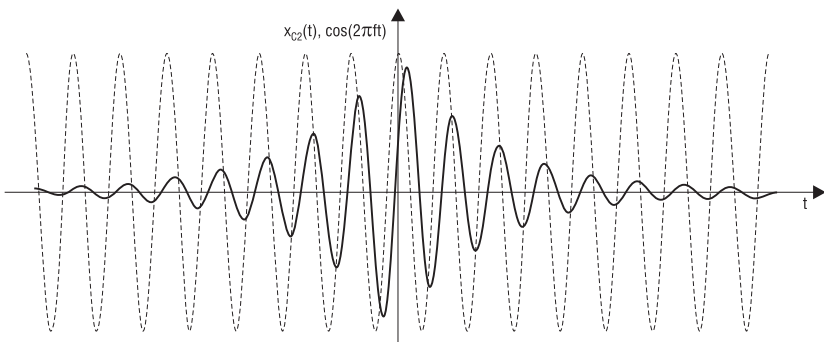
Jak widać, nie ma korelacji z sygnałem $\cos(2\pi ft)$, ale jest pełna korelacja z sygnałem $\sin(2\pi ft)$.

Na zakończenie tej części rozważań rozpatrzmy przypadek, gdy analizowany sygnał jest przesunięty o 45° . Policzmy pełną transformatę Fouriera

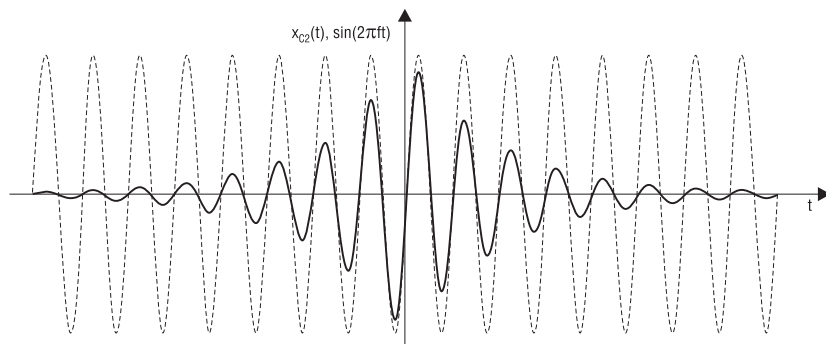
$$\begin{aligned} X_{C3}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \cos(2\pi ft - 45^\circ) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \cos(2\pi ft - 45^\circ) \sin(2\pi ft) dt = \\ &= 0,707 - j0,707 = 1e^{-j45^\circ} \end{aligned} \quad (2.15)$$



Rys. 12. Odwrócony w fazie sygnał analizowany (linia ciągła) i sygnał $\cos(2\pi ft)$ (linia przerywana) – pełna ujemna korelacja



Rys. 13. Przesunięty o 90° sygnał analizowany (linia ciągła) i sygnał $\cos(2\pi ft)$ (linia przerywana) – brak korelacji



Rys. 14. Przesunięty o 90° sygnał analizowany (linia ciągła) i sygnał $\sin(2\pi ft)$ (linia przerywana) – pełna korelacja

Wynik obliczeń wskazuje, że moduł transformaty jest równy jedności, a różny od zera wykładnik informuje o przesunięciu fazowym sygnału poddanego transformacji względem sygnału odniesienia $\cos(2\pi ft)$.

Na podstawie pokazanych przypadków, wykorzystując odrobinę dedukcji, dochodzimy do wniosku, że jeśli kształt sygnału nie zmienia się, to niezależnie od jego przesunięcia fazowego, moduł transformaty Fouriera jest zawsze jednakowy, a zmienia się jedynie jej faza, określająca położenie sygnału względem składowej kosinusoidalnej.

Jeśli analizowany sygnał będzie sumą kilku składowych harmonicznych, to moduł transformaty Fouriera będzie osiągał lokalnie maksymalne wartości dla częstotliwości równych częstotliwościom tych składowych. Wynika to z faktu, że tylko dla tych składowych istnieje korelacja między analizowanym sygnałem i odpowiednim harmonicznym sygnałem odniesienia.

Przekształcenie Fouriera sygnału dyskretnego

Jak mogliśmy się przekonać, transformata Fouriera sygnału ciągłego ma bardzo klarowną i intuicyjną interpretację fizyczną. Obecnie rozpatrzmy proces transformacji Fourierowskiej sygnału o czasie dyskretnym. Na początku usystematyzujemy pojęcia związane z sygnałami ciągłymi, dyskretnymi i cyfrowymi oraz rzucimy nieco światła na sam proces próbkowania.

W wyniku próbkowania sygnałów ciągłych otrzymujemy sygnały o czasie dyskretnym nazywane w literaturze polskiej *sygnałami dyskretnymi*. Z kolei sygnał dyskretny poddany kwantyzacji wartości chwilowej i zapisowi w postaci ciągu liczb

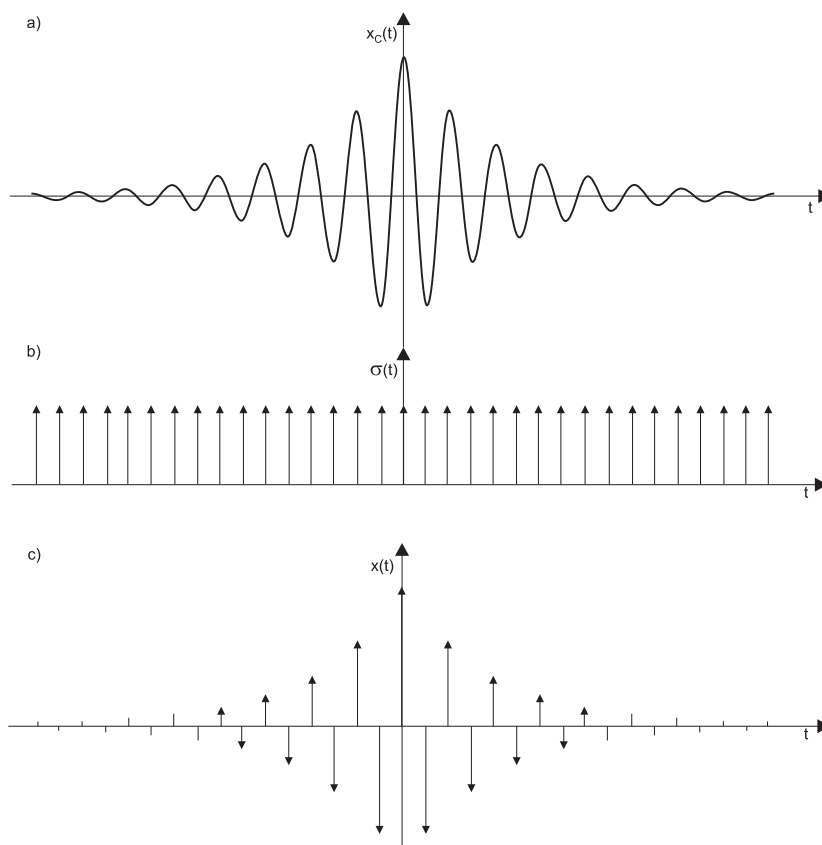
nosi nazwę *sygnału cyfrowego*. Sygnał cyfrowy jest więc sygnałem dyskretnym zarówno w czasie, jak i – ze względu na skończoną ilość poziomów kwantowania – w wartości. Sygnał cyfrowy, będący z programowego punktu widzenia wektorem¹, może być bezpośrednio poddawany procedurom cyfrowego przetwarzania sygnałów.

Proces próbkowania polega na pomiarze wartości sygnału w ściśle określonych momentach czasowych. W najprostszym przypadku mamy do czynienia z próbkowaniem równomiernym [3, 4], którego zasady są

określone przez *twierdzenie Kotelnikowa – Shannona*. Proces próbkowania ma z reguły miejsce w większości współczesnych przyrządów pomiarowych oraz w programach do analizy układów elektronicznych.

W pierwszym przypadku próbkowanie jest realizowane w celu późniejszego zastosowania wybranych algorytmów CPS oraz archiwizacji danych pomiarowych. W drugim – „próbkowanie” odbywa się „przypadkiem” w wyniku realizacji procedur całkowania numerycznego. Słowo próbkowanie zostało wzięte w cudzysłów, gdyż nie mamy tu do czynienia z pomiarem, lecz predykcją wartości przebiegu w wybranych momentach czasowych.

W przeciwieństwie do przyrządów pomiarowych, programy realizujące analizę czasową układów elektronicznych z reguły nie „próbkują” sygnału równomiernie, ale praktycznie, za pomocą procedur interpolacji wielomianowej (najczęściej liniowej), dają w efekcie końcowym sygnał spróbkowany równomiernie [2]. Z tego powodu dalsze rozważania ograniczymy do przypadku sygnału dyskretnego z jedna-



Rys. 15. Proces próbkowania. a) oryginalny sygnał ciągły, b) funkcja próbkująca, c) sygnał dyskretny (na najmniejszych impulsach – ze względu na czytelność rysunku – nie zaznaczono grotów strzałek)

kowym odstępem czasowym między sąsiednimi próbkami.

Na samym początku rozważań w świecie sygnałów dyskretnych pojawia się pytanie – Jak taki sygnał zapisać analitycznie? Z pomocą przychodzi nam teoria dystrybucji z tzw. *deltą Diraca* $\delta(t)$. Nie wglębiając się w zawiłości matematyczne, przyjmijmy do wiadomości, że delta Diraca ma nieskończenie dużą wartość w momencie $t = 0$, a w pozostałym czasie jest równa zeru. Ponadto całka po czasie z impulsu Diraca w granicach $\pm\infty$ jest równa jedności. Z tego powodu delta Diraca nie jest funkcją w klasycznym sensie, lecz tzw. *dystrybucją*.

Formalnie dystrybucję Diraca opisuje się następująco

$$\left\{ \begin{aligned} \delta(t) &= \begin{cases} \infty & \text{dla } t = 0 \\ 0 & \text{dla } t \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1 \end{aligned} \right. \quad (2.16)$$

Dystrybucję $\delta(t)$ przedstawia się graficznie jako wąski prążek zakończony strzałką o wysokości równej polu pod wykresem dystrybucji, a więc równej jedności, umieszczony w punkcie $t = 0$.

Na bazie dystrybucji $\delta(t)$ można utworzyć tzw. funkcję próbkującą o postaci

$$\sigma(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (2.17)$$

Funkcja ta reprezentuje ciąg impulsów Diraca o jednostkowej wysokości, ułożonych na osi czasu w jednakowych odstępach, równych okresowi próbkowania T_s (*sampling*).

Spróbkowana wersja $x(t)$ sygnału ciągłego $x_c(t)$ może być przedstawiona jako iloczyn sygnału $x_c(t)$ i funkcji próbkującej

$$\begin{aligned} x(t) &= x_c(t)\sigma(t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(t)\delta(t - nT_s) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Cały proces próbkowania, przeprowadzony zgodnie z twierdzeniem Kotelnikowa – Shannona, jest zilustrowany na **rys. 15**.

Ponieważ funkcja próbkująca, a tym samym sygnał $x(t)$, są określone w dyskretnych momentach czasu

$$t = nT_s, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

często stosuje się zapis wyraźnie wskazujący, że mamy do czynienia z wektorem

$$\begin{aligned} x(t) &= x(nT_s) = x(n) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s)\delta(t - nT_s) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Stosując klasyczną transformację Fouriera do sygnału dyskretnego $x(n)$, możemy napisać

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s)\delta(t - nT_s) \cdot \\ &\cdot e^{-j2\pi f nT_s} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) \cdot \\ &\cdot e^{-j2\pi f nT_s} \delta(t - nT_s) dt \end{aligned} \quad (2.20)$$

Zmieniając kolejność całkowania i sumowania, otrzymujemy

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) e^{-j2\pi f nT_s} \cdot \\ &\cdot \delta(t - nT_s) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) \cdot \\ &\cdot e^{-j2\pi f nT_s} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) dt \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ponieważ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) dt = 1 \quad (2.22)$$

ostatecznie otrzymujemy

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) e^{-j2\pi f nT_s} \quad (2.23)$$

W punktach $t = nT_s$ zachodzi równość

$$x_c(nT_s) = x(nT_s) \quad (2.24)$$

więc

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j2\pi f nT_s} \quad (2.25)$$

Ponieważ w wykładniku w miejscu t pojawił się iloczyn nT_s , możemy stwierdzić, że widmo sygnału spróbkowanego jest okresowe, a okres jest równy T_s . Maksymalna częstotliwość, dla której sensowne jest badanie widma², jest więc równa częstotliwości próbkowania (*sampling frequency*) określonej wzorem

$$f_s = \frac{1}{T_s} \quad (2.26)$$

Skoro dotarliśmy aż tutaj, śmiało możemy przystąpić do lektury ostatniej części cyklu omawiającej dyskretne przekształcenia Fouriera (*DFT*) i przykład jego realizacji praktycznej.

Andrzej Dobrowolski

<http://adobrowolski.wel.wat.edu.pl>

Literatura

1. Cooley J., Tuckey J., „An algorithm for the machine computation of complex Fourier series”, Math. Comput., vol. 19 (90), 1965
2. Dobrowolski A., „Pod maską SPICE’a. Metody i algorytmy analizy układów elektronicznych”, BTC, Warszawa, 2004
3. Lyons R. G., „Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów”, WKŁ, Warszawa, 1999
4. Oppenheim A. V., Schaffer R. W., „Cyfrowe przetwarzanie sygnałów”, WKŁ, Warszawa, 1979
5. Szabatin J., „Podstawy teorii sygnałów”, WKŁ, Warszawa, 2000

¹ Czyli uporządkowanym ciągiem liczb o wspólnej nazwie.

² W przypadku sygnału okresowego jego widmo powtarza się powyżej częstotliwości będącej od-