Dyskretne przekształcenie Fouriera, część 2

Dyskretne przekształcenie Fouriera DFT (Discrete Fourier Transform) jest, obok procedur filtracji cyfrowej, jednym z podstawowych, a zarazem najbardziej skutecznych narzędzi cyfrowego przetwarzania sygnałów. Poza istotnym znaczeniem teoretycznym DFT odgrywa ważną rolę w zagadnieniach związanych z układowymi realizacjami różnorodnych algorytmów przetwarzania sygnałów. Wynika to z istnienia bardzo wydajnego algorytmu obliczania dyskretnej transformaty Fouriera, zwanego szybką transformatą Fouriera FFT (Fast Fourier Transform).

W pierwszej części cyklu poznaliśmy problemy pojawiające się podczas prób estymacji widma za pomocą oscyloskopu cyfrowego wyposażonego w funkcję FFT [1]. Odrobina matematyki zastosowana w części bieżącej jest niezbędna dla łatwego „przyswojenia" idei transformacji Fouriera i „gładko" wprowadza w zastosowania z użyciem procedury FFT, które będą zilustrowane w artykule zamykającym ten krótki cykl. W ramach części drugiej przybliżona zostanie problematyka przekształcenia Fouriera sygnału ciągłego i dyskretnego.

Przekształcenie Fouriera sygnału ciągłego

Ze względu na złożoność sygnałów występujących we współczesnej telekomunikacji analiza ich wartości chwilowych staje się kłopotliwa, a czasami wręcz niemożliwa. Z tego powodu właściwa reprezentacja analityczna sygnałów nabiera wręcz podstawowego znaczenia. Ogólnie wyróżnia się ciągłe i dyskretne reprezentacje sygnałów. Reprezentacje ciągłe przyporządkowują sygnałowi pewną funkcję rzeczywistą lub zespoloną. Przykładem może być przekształcenie Fouriera. Reprezentacje dyskretne przyporządkowują rozważanemu sygnałowi skończony lub przeliczalny ciąg liczb rzeczywistych lub zespolonych. Jako analogiczny przykład można wskazać reprezentację sygnału okresowego za pomocą szeregu Fouriera.

Z praktyki bardzo dobrze znane jest inżynierom elektronikom *przekształcenie Laplace'a* o postaci:

$$X_C(\mathrm{s}) = \int_0^{\infty} x_C(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \qquad (2.1)$$

w której $X_C(\mathrm{s})$ oznacza *transformatę Laplace'a* ciągłego sygnału $x_C(t)$, określonego w dziedzinie czasu. Dziedziną transformaty Laplace'a jest zbiór liczb zespolonych, a zmienna s, zwana często pulsacją zespoloną, ma postać

$$\mathrm{s}=\sigma+\mathrm{j}\omega \qquad (2.2)$$

Przekształcenie Laplace'a, będące podstawą tzw. *metody operatorowej*, odgrywa nieocenioną rolę w analizie i syntezie obwodów elektrycznych, natomiast w teorii sygnałów duże znaczenie ma, wywodzące się z niego, przekształcenie Fouriera. Jeśli w zależności (2.1) podstawimy $\sigma=0$, to transformata Laplace'a nabiera sensu widma sygnału. Takie przekształcenie sygnału – którego jądrem jest zespolona eksponenta częstotliwości – po raz pierwszy zaprezentował Fourier w formie tzw. przekształcenia dwustronnego o postaci

$$X_C(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_C(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\,\mathrm{d}t \qquad (2.3)$$

Zależność (2.3) nosi nazwę *prostego przekształcenia Fouriera*. Rzadziej stosowane w praktyce przekształcenie odwrotne i dyskretne przekształcenie odwrotne (*IDFT – Inverse Discrete Fourier Transform*), transformujące widmo sygnału w jego postać czasową, nie będzie przedmiotem naszych rozważań.

Równanie (2.3) definiujące przekształcenie Fouriera ma dość enigmatyczny charakter i często w trakcie typowego wykładu akademickiego jest gubiony jego głęboki, choć w istocie oczywisty sens fizyczny. Aby odczytać z zapisu (2.3) jego interpretację fizyczną, posłużymy się wzorem Eulera – wiążącym eksponentę zmiennej urojonej z funkcjami harmonicznymi – o postaci:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}=\cos\varphi-\mathrm{j}\sin\varphi \qquad (2.4)$$

Po zastosowaniu wzoru Eulera przekształcenie Fouriera przyjmuje postać

$$X_C(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_C(t)\cos(2\pi ft)\,\mathrm{d}t - \mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty} x_C(t)\sin(2\pi ft)\,\mathrm{d}t \qquad (2.5)$$

Rozdzieliliśmy zespoloną eksponentę na składową rzeczywistą i urojoną. Możemy stwierdzić, że całka Fouriera daje w efekcie składową rzeczywistą – wskazującą na stopień korelacji analizowanego sygnału z funkcją $\cos(2\pi ft)$ i składową urojoną – skorelowaną z funkcją $\sin(2\pi ft)$. W tym momencie pojawia się pytanie – jak należy rozumieć wzmiankowaną wyżej korelację?

Rozważmy, dla przejrzystości, tylko składową rzeczywistą transformaty Fouriera

$$\mathrm{Re}\left\{X_C(f)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_C(t)\cos(2\pi ft)\,\mathrm{d}t \qquad (2.6)$$

Widzimy, że dla danej częstotliwości f część rzeczywista transformaty Fouriera jest całką po czasie, w zakresie $\pm\infty$, z iloczynu rozpatrywanego sygnału ciągłego $x_C(t)$ i sygnału kosinusoidalnego o częstotliwości f.

Wyobraźmy sobie, że sygnał $x_C(t)$ jest identyczny z sygnałem harmonicznym $\cos(2\pi ft)$, czyli

$$x_C(t)=\cos(2\pi ft) \qquad (2.7)$$

Wówczas, jako że obie funkcje są całkowicie skorelowane (tzn., gdy jedna rośnie, to druga również – w sposób identyczny – rośnie oraz, gdy jedna maleje, to – podobnie jak poprzednio – druga również maleje), wynik całki jest maksymalny, ale niestety, co łatwo wykazać, równy

$$\mathrm{Re}\left\{X_C(f)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi ft)\cdot\cos(2\pi ft)\,\mathrm{d}t = \infty \qquad (2.8)$$

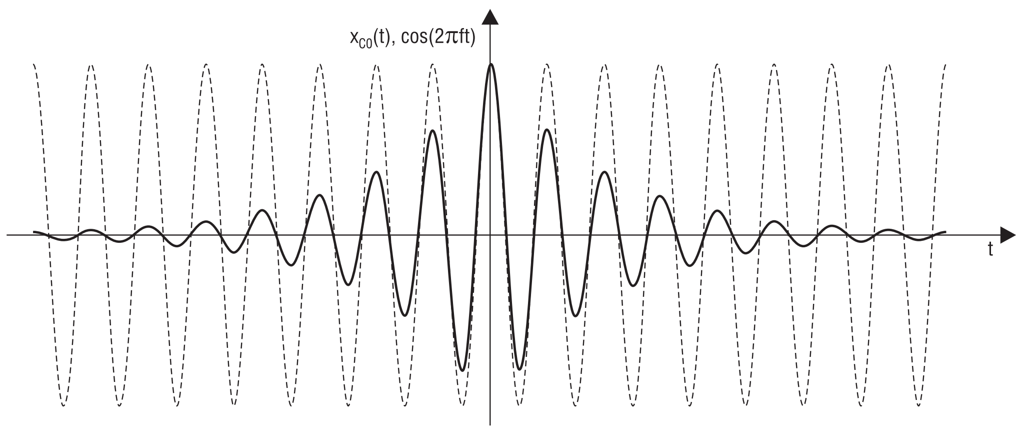
Wynika z tego, że przekształcenia Fouriera w sensie zwykłym – o jakim cały czas mowa – nie można zastosować do wszystkich sygnałów.

Można wykazać, że warunkiem dostatecznym istnienia dla każdej częstotliwości f prostej transformaty Fouriera jest bezwzględna całkowalność sygnału [5], czyli transformowany sygnał musi spełniać warunek:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_C(t)| \mathrm{d}t < \infty \qquad (2.9)$$

Jest to poważna wada tego przekształcenia, gdyż nie obejmuje ono tak ważnych sygnałów teoretycznych jak $\cos\omega_0 t$, (co pokazano powyżej), $\sin\omega_0 t$, $\mathbf{1}(t)$, $\exp(j\omega_0 t)$ itp. Warto w tym miejscu uzmysłowić sobie fakt, że harmoniczny sygnał rzeczywisty, który obserwujemy np. na oscyloskopie – ściśle rzecz ujmując – nie może być opisany funkcją sinus, bądź kosinus, gdyż sygnał ten formalnie musiałby trwać od $-\infty$ do ∞. Z problemem tym poradzono sobie, definiując przekształcenie Fouriera w *sensie granicznym* [5], które koncepcyjnie przypomina definicję dystrybucji obowiązującą w ramach elementarnej teorii dystrybucji.

Z uwagi na fakt, że rzeczywiste przebiegi są zawsze sygnałami o ograniczonej energii, spełniającymi warunek (2.9), w praktyce transformata (2.5) zawsze osiąga wartość skończoną. Załóżmy przykładowo, że analizowanym sygnałem jest narastający i malejący do zera sygnał harmoniczny o częstotliwości f, przedstawiony na **rys. 11**, dany wzorem



Rys. 11. Analizowany sygnał (linia ciągła) i sygnał cos(2πft) (linia przerywana) – łatwo zauważyć pełną korelację

$$x_{C0}(t) = \mathrm{e}^{-|t|}\cos(2\pi f t) \qquad (2.10)$$

Sygnał ten osiąga maksimum dla $t=0$ i jest oczywiste, że jego widmo zawiera składową o częstotliwości f. Obliczmy zatem część rzeczywistą transformaty Fouriera

$$\mathrm{Re}\left\{X_{C0}(f)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\cos(2\pi f t)\cdot$$

$$\cdot\cos(2\pi f t)\mathrm{d}t = 1 \qquad (2.11)$$

Jednostkowy wynik nie jest regułą i nie może być utożsamiany ze współczynnikiem korelacji, będącym ścisłą miarą korelacji obu sygnałów. Gdyby współczynnik tłumienia sygnału harmonicznego był różny od jedności, rozpatrywana całka również miałaby inną wartość. Dla nas sygnał $x_{C0}(t)$ jest przykładowym sygnałem, który posłuży nam do badania zależności fazowych.

Tematykę tę będziemy kontynuować w następnym odcinku.

Andrzej Dobrowolski
adobrowolski@wat.edu.pl
http://adobrowolski.wel.wat.edu.pl