

Dyskretne przekształcenie Fouriera, część 1

Dyskretne przekształcenie Fouriera DFT (Discrete Fourier Transform) jest, obok procedur filtracji cyfrowej, jednym z podstawowych, a zarazem najbardziej skutecznych narzędzi cyfrowego przetwarzania sygnałów. Poza istotnym znaczeniem teoretycznym DFT odgrywa ważną rolę w zagadnieniach związanych z układowymi realizacjami różnorodnych algorytmów przetwarzania sygnałów. Wynika to z istnienia bardzo wydajnego algorytmu obliczania dyskretnej transformaty Fouriera, zwanego szybką transformatą Fouriera FFT (Fast Fourier Transform).

Ponieważ algorytm FFT jest powszechnie stosowany w programach do analizy układów elektronicznych [2] oraz we współczesnych oscyloskopach cyfrowych, niezbędna dla każdego elektronika staje się podstawowa wiedza, pozwalająca na zrozumienie znaczenia poszczególnych parametrów modyfikujących działanie algorytmu szybkiej transformaty Fouriera.

W cyklu trzech artykułów przedstawione zostaną problemy pojawiające się podczas stosowania DFT, jej pochodzenie i podstawy teoretyczne. Na zakończenie omówione będą przykłady realizacji praktycznej dyskretnej transformaty Fouriera z zastosowaniem ogólnie dostępnego oprogramowania.

Metody analizy widma

Klasyczne analizatory widma działają w oparciu o metodę wobulacyjną, polegającą na przestrajaniu lokalnego generatora wzorcowego (najczęściej jest to syntezer częstotliwości) i analizę widma w oparciu o proces przemiany częstotliwości. Schemat blokowy takiego analizatora, przedstawiony na **rys. 1**, przypomina odbiornik superheterodynowy.

W efekcie przemiany częstotliwości, w takt zmian częstotliwości generatora przestrajanego, sygnał wejściowy jest przesuwany względem stałej częstotliwości środkowej filtra pasmowo przepustowego o bardzo wąskiej charakterystyce przeniesienia. Upraszczając mocno sprawę, można stwierdzić, że jeśli w sygnale wejściowym znajdują się składowe częstotliwościowe mieszczące się w paśmie przeniesienia filtra, detek-

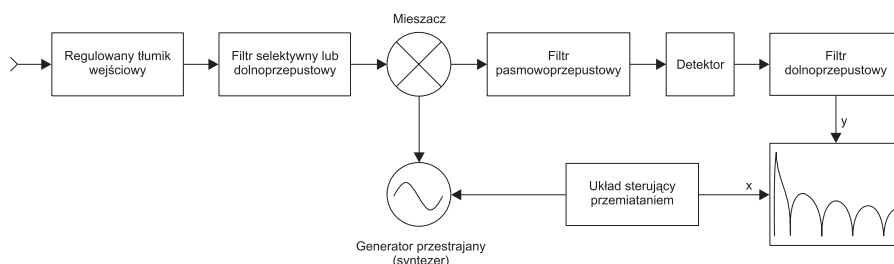
tor je wykrywa i na ekranie pojawia się odpowiedni prążek.

Klasyczne analizatory widma dokonują więc rzeczywistego pomiaru widma analizowanego sygnału stosując metodę pośrednią. Istnieją też rozwiązania oparte o metodę bezpośrednią wykorzystujące odpowiednie banki filtrów. Drugą grupę analizatorów stanowią urządzenia badające widmo w oparciu o operacje matematyczne wykonywane na próbkach zmierzonego sygnału wejściowego. Te operacje to ciąg obliczeń realizowany wg algorytmu FFT, czyli wydajniejszej obliczeniowo implementacji DFT [1]. Olbrzymi przyrost mocy obliczeniowej, który dokonał się w ostatnich latach, pozwolił na zastosowanie techniki FFT jako opcji praktycznie we wszystkich współczesnych oscyloskopach cyfrowych. Jest to zjawisko o tyle naturalne, że w układzie takiego oscyloskopu musi nastąpić cyfryzacja sygnału wejściowego przed jego wizualizacją. Skoro więc w pamięci pojawia się sygnał wejściowy w postaci cyfrowej, nic nie stoi na przeszkodzie, żeby poddać go różnorodnym procedurom CPS obliczającym m.in. jego wartość średnią, skuteczną, międzyszczytową i oczywiście reprezentację widmową.

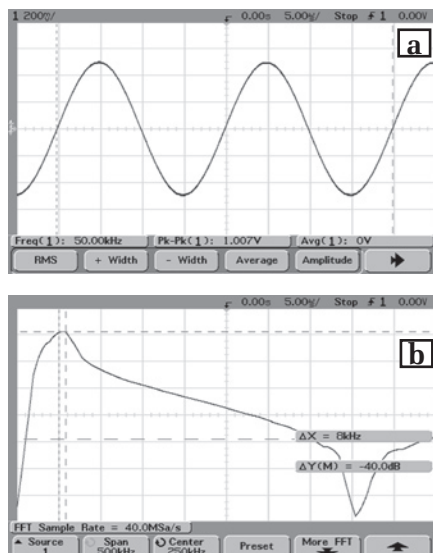
Termin cyfrowe przetwarzanie sygnałów – CPS (DSP – *Digital Signal Processing*) [3, 4] pojawia się coraz częściej w wielu, często zaskakujących kontekstach, warto więc w tym miejscu uściślić, co kryje się pod tą nazwą. Pod pojęciem sygnału rozumiemy pewną wielkość, która na ogół ulega zmianom w czasie. Sygnałem może być więc temperatura, prędkość, natężenie oświetlenia itp. Klasycznie sygnał przedstawiany jest w postaci graficznej jako pewna funkcja czasu. Wymienione sygnały opisują procesy fizyczne o naturze ciągłej, co powoduje, że ich charakter musi być analogiczny, czyli ciągły w czasie i wartości. Z tego powodu sygnały takie nazywane są analogowymi – są bezpośrednią analogią opisywanej przez nie wielkości fizycznej.

Przetwarzanie takich sygnałów jest utrudnione, gdyż układy analogowe używane do tego celu są wrażliwe na zmiany temperatury, starzenie się elementów i wiele innych czynników zakłócających, takich jak np. szumy czy tętnienia sieci zasilającej. Stosując układy analogowe, nie jesteśmy w stanie zapewnić absolutnej powtarzalności przetwarzania.

Sygnały cyfrowe, to sygnały, których amplituda jest zdefiniowana wyłącznie w określonych chwilach (są to więc sygnały dyskretne w czasie) i przedstawiana w postaci liczb o skończonej precyzji. Sygnały cyfrowe są więc dyskretne również w amplitudzie¹. Określenie cyfrowe pochodzi właśnie od zapisu kolejnych dyskretnych wartości chwilowych w postaci cyfr. Cyfrowe przetwarzanie sygnałów można więc zdefiniować jako analizę lub prze-



Rys. 1. Schemat blokowy klasycznego analizatora widma

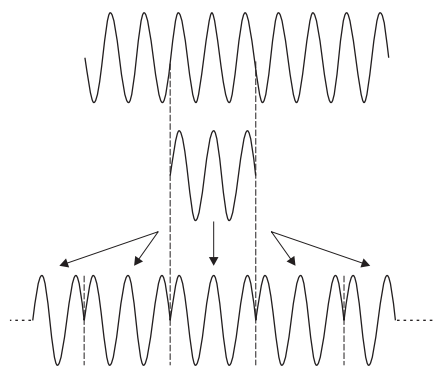


Rys. 2. Przebieg czasowy sygnału harmonicznego o częstotliwości 50 kHz (a) i otrzymane widmo (b)

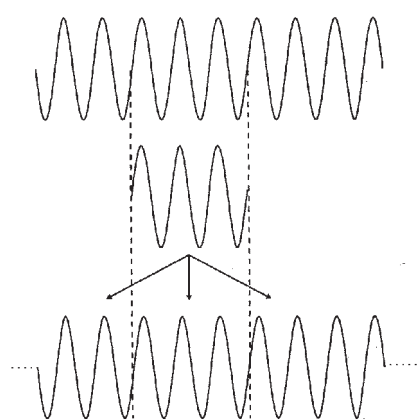
kształcenie informacji przedstawionej w postaci ciągu liczbowego. Przetwarzanie cyfrowe, poza wieloma innymi zaletami wynikającym z możliwości bezpośredniego zastosowania komputera, zapewnia pełną powtarzalność przeprowadzonej analizy.

Porównując współczesne analizatory widna, można ogólnie stwierdzić, że rozwiązania bazujące na FFT zapewniają lepszą dokładność pomiaru amplitudy, lepszą rozdzielczość częstotliwościową i większą szybkość pomiaru. Słabą stroną analizatorów „matematycznych” jest gorsza niż w analizatorach „przemiatających” dokładność pomiaru częstotliwości. Niebagatelną cechą analizatorów klasycznych jest ich olbrzymia cena – kupując oscyloskop z wbudowanym modułem FFT, analizator widna mamy niejako za darmo.

Użytkownik nowiutkiego oscyloskopu cyfrowego z modułem FFT zachęcony reklamami i, rzecz ja-



Rys. 3. Zniekształcenie sygnału wejściowego na skutek wycięcia za pomocą okna prostokątnego

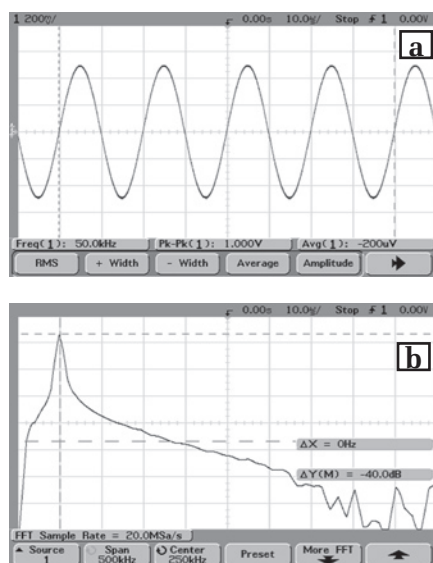


Rys. 4. Przypadek całkowitej liczby okresów w prostokątnym okniek wycinającym sygnał

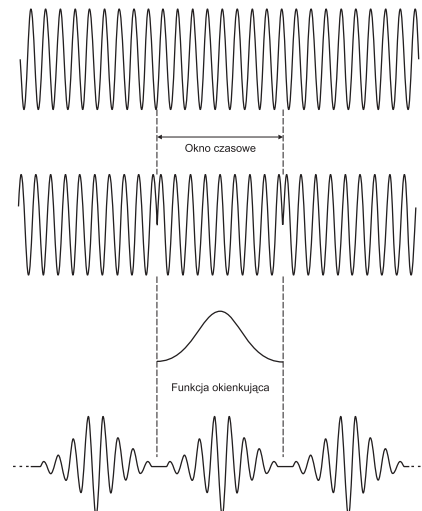
śna, faktycznymi potrzebami włącza oscyloskop i przystępuje do pomiaru tzw. widna [5]. Pójdźmy tym tropem i zmierzmy widmo czystego sygnału harmonicznego o częstotliwości np. 50 kHz. Spodziewamy się oczywiście pojedynczego prążka na częstotliwości 50 kHz.

Po podaniu na wejście oscyloskopu odpowiedniego sygnału otrzymujemy oscylogram przedstawiony na rys. 2a. Wybieramy z grupy funkcji matematycznych FFT i otrzymujemy widmo pokazane na rys. 2b.

Rezultat eksperymentu w żaden sposób nie przypomina pojedynczego prążka, aczkolwiek zauważamy maksimum energii na właściwej częstotliwości. Okazuje się, że otrzymany wynik jest prawidłowy (!), tzn. nie jest rezultatem wadliwego działania sprzętu. Przed rozpoczęciem pomiarów i próbą interpretacji wyni-



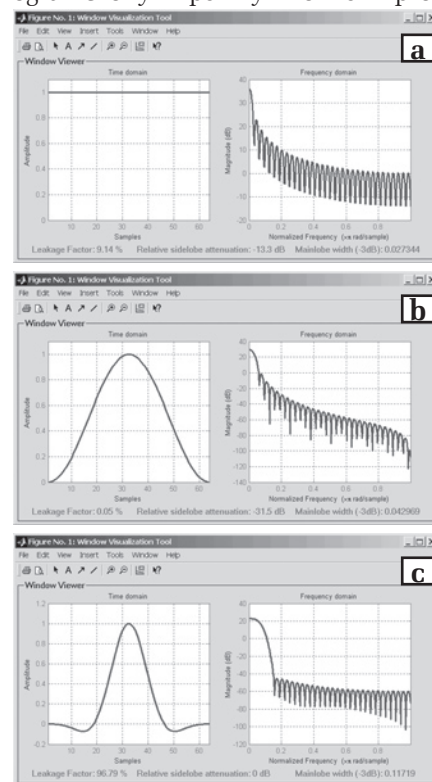
Rys. 5. Przebieg czasowy sygnału harmonicznego po korekcie podstawy czasu (a) i otrzymane widmo (b)



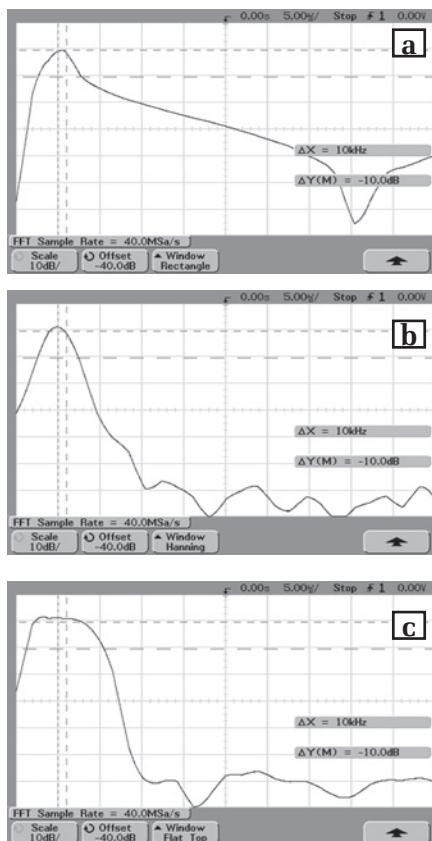
Rys. 6. Proces „okienkowania” sygnału wejściowego

ków musimy uświadomić sobie, co właściwie mierzymy?

Oryginalne zależności Fouriera operują na nieskończonych sygnałach czasowych i wówczas dla sygnału harmonicznego otrzymujemy – tak jak w rzeczywistości – pojedynczy prążek. W przypadku uruchomienia algorytmu DFT dysponujemy zaledwie fragmentem sygnału ograniczonym pewnym oknem pro-



Rys. 7. Charakterystyki czasowe i częstotliwościowe najczęściej stosowanych funkcji okien: a). okno prostokątne, b). okno Hanninga (inaczej podniesionego cosinusa, zwane często oknem Hanna), c). okno Flat Top

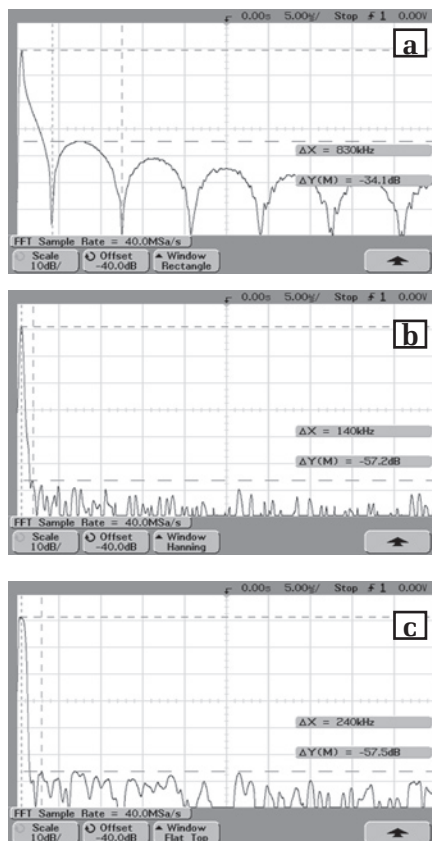


Rys. 8. Efekty zastosowania różnych funkcji okien: a). okno prostokątne, b). okno Hanninga, c). okno Flat Top

stokątnym² o długości N , a otrzymane widmo jest widmem sygnału złożonego z periodycznie powtarzającego się wycinka, co pokazano na **rys. 3**. Ponieważ wycinek sygnału zaczyna się i kończy bardzo gwałtownie jego widmo ulega istotnej modyfikacji. Szczegółowy i bardzo przystępny opis tego zjawiska jest przedstawiony w [3].

Analizując sytuację przedstawioną na **rys. 3**, możemy dojść do wniosku, że gdyby „wycinany” fragment sygnału zawierał całkowitą liczbę okresów – efekt zniekształcenia nie powinien wystąpić. Przypadek taki zilustrowany jest na **rys. 4**.

Jeśli więc sygnał wyświetlany na ekranie oscyloskopu – który definiuje nasze okienko czasowe – będzie zawierał całkowitą liczbę okresów, to cykliczne powtarzanie takiego wycinka da w efekcie sygnał taki sam jak oryginalny sygnał wejściowy. W każdym innym przypadku pojawią się zniekształcenia przypominające modulację, a właściwie manipulację, fazę. Regulując podstawę czasu oscyloskopu, otrzymujemy oscylogram i widmo przedstawione na **rys. 5**.



Rys. 9. Efekty zastosowania różnych funkcji okien obserwowane w szerszym spektrum: a). okno prostokątne, b). okno Hanninga, c). okno Flat Top

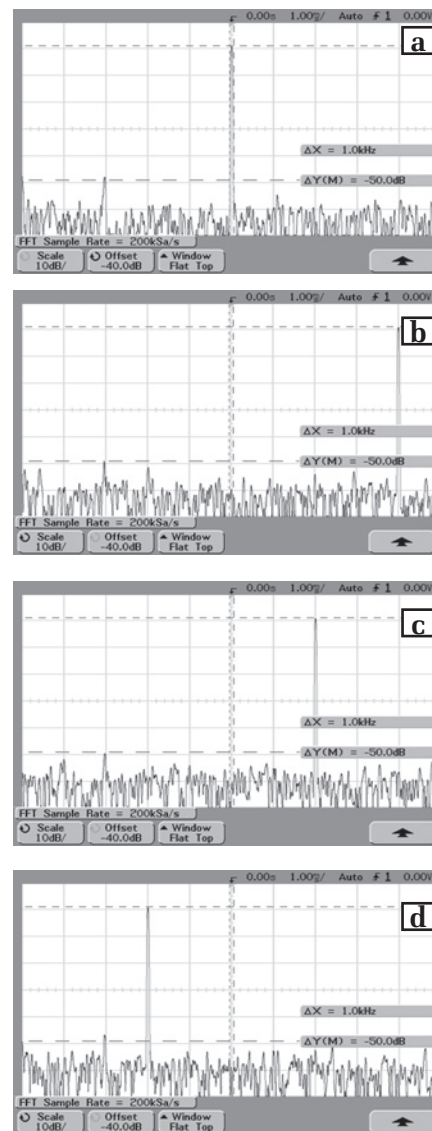
Zwróćmy uwagę, że jednocześnie zmieniała się częstotliwość próbkowania, która jest skorelowana z podstawą czasu. Wynika to z faktu, że w prostych oscyloskopach cyfrowych przyjęto stałą liczbę próbek rozkładaną równomiernie na cały ekran (standardowo 10 działek). Stosowany praktycznie algorytm FFT operuje na liczbie próbek będącej całkowitą potęgą liczby 2. Przyjmując, podobnie jak np. w oscyloskopie Agilent 54621A, liczbę próbek równą $2^{11} = 2048$, okres i częstotliwość próbkowania możemy wyrazić jako

$$T_s = \frac{10 \cdot \alpha}{2048} \Rightarrow f_s = \frac{2048}{10 \cdot \alpha} \quad (1.1)$$

gdzie α [s/dz.] oznacza podstawę czasu oscyloskopu.

Zatem w rozważanym przypadku częstotliwość próbkowania wynosi w przybliżeniu 20 MHz. W związku z tym – co będzie wyjaśnione szczegółowo w kolejnych częściach cyklu – maksymalna częstotliwość możliwa do obserwacji jest określona zależnością

$$f_{\max} = \frac{f_s}{2} = \frac{102.4}{\alpha} \quad (1.2)$$



Rys. 10. Ilustracja zjawiska aliasingu (skala zobrazowania liniowa, zakres: 0...100 kHz). a). fwe = 50 kHz lub fwe = 150 kHz, b). fwe = 90 kHz, c). fwe = 130 kHz, d). fwe = 170 kHz

a rozdzielczość częstotliwościowa wynosi

$$\Delta f = \frac{f_s}{2048} = \frac{1}{10} \alpha \quad (1.3)$$

Wynik otrzymany na **rys. 5** jest jak najbardziej zadowalający, ale spryt, którym się wykazaliśmy nie na wiele nam się przyda. Nie możemy zawsze ustawić całkowitej wielokrotności okresu na ekranie, jeśli sygnał jest złożony, a jego zwartość widmowa nie jest znana – przecież dopiero chcemy ją określić. Efekt, który obserwujemy, nosi nazwę przecieku i chociaż pokazemy pewne środki zaradcze minimalizujące go, przecieku nie można wyeliminować całkowicie.

Okienkowanie sygnału

Skoro nieciągła zmiana sygnału na krańcach przedziału próbkowania jest powodem przecieku, to lekarstwem będzie wycinanie sygnału za pomocą okna o łagodnych zboczach. Mnożąc ciąg wejściowy przez funkcję tego typu, powodujemy, że wartości sygnału wynikowego stają się takie same na początku i końcu przedziału próbkowania. Jednocześnie okienkowanie redukuje moc sygnału i w konsekwencji zmniejsza też amplitudy wszystkich prążków widma, przy czym, ze względu na łagodne „wygaszenie” sygnału na końcach, minimalizuje najbardziej jego składowe wysokoczęstotliwościowe powodujące przeciek. Istotę okienkowania ilustruje **rys. 6**.

W praktyce wykorzystuje się kilka typowych funkcji, do których należą m.in.: okno prostokątne, okno Hanninga i tzw. okno Flat Top (maksymalnie płaskie³). Przebiegi czasowe i widma wymienionych funkcji przedstawione są na **rys. 7**. Każde z okien ma charakterystyczne właściwości, które najlepiej poznamy, eksperymentując z wykorzystaniem algorytmu szybkiej transformaty Fouriera.

Ogólnie można stwierdzić, że wybór okna stanowi pewien kompromis między szerokością listka głównego, poziomem pierwszego listka bocznego i szybkością malenia poziomu listków bocznych ze wzrostem częstotliwości. Innymi słowy, chodzi o kompromis między dokładnością w określaniu amplitudy i częstotliwości – jak wcześniej wspomniano okienkowanie fałszuje amplitudę sygnału. W porównaniu z oknem prostokątnym, które z reguły traktowane jest jako odniesienie, okno Hanninga zapewnia lepszą rozdzielczość częstotliwościową kosztem pewnego pogorszenia dokładności pomiaru amplitu-

dy. Z kolei okno Flat Top, dzięki płaskiemu fragmentowi podstawowej linii widmowej, poprawia dokładność określania amplitudy kosztem pogorszenia dokładności pomiaru częstotliwości.

Wróćmy do sytuacji początkowej i wypróbujmy na naszym sygnale różne funkcje okienkujące. Wyniki takiego eksperymentu pokazane są na **rys. 8**.

Efekty zastosowania różnych okien czasowych jeszcze wyraźniej zobaczymy, rozszerzając zakres częstotliwości, w którym obserwujemy widmo. Ustawiając zakres na 5 MHz i częstotliwość środkową na 2,5 MHz otrzymujemy zobrazowania pokazane na **rys. 9**. Porównując rysunki 7 i 9, możemy się naocznie przekonać, że w istocie DFT badanego sygnału nie jest faktycznie transformatą tegoż sygnału, a jedynie aproksymacją spłotu jego rzeczywistej transformaty z transformatą funkcji okienkującej sygnał.

Aliasing, czyli nakładanie się widma

Przeprowadzając analizę widma za pomocą procedur FFT, musimy pamiętać o konsekwencjach twierdzenia o próbkowaniu. Rozważymy to szczegółowo w drugiej części cyklu, w tej chwili przyjmując jedynie do wiadomości, że maksymalna częstotliwość zawarta w widmie sygnału poddawanego analizie nie może być większa od połowy częstotliwości próbkowania. W przeciwnym przypadku nastąpi efekt „zawinięcia” widma i poważnego zafałszowania wyniku pomiaru. Jedynym sposobem na eliminację tego zjawiska jest zastosowanie odpowiedniego filtra antyaliasingowego, ograniczającego widmo sygnału poddawanego próbkowaniu.

Przetestujmy niebezpieczeństwo związane z aliasingiem, obniżając częstotliwość próbkowania do 200 kHz⁴. Zgod-

nie ze wzorem (1.1) częstotliwość próbkowania regulujemy, zmieniając podstawę czasu oscyloskopu. Ustawiamy zakres obserwowanych częstotliwości na 100 kHz i przestrajamy generator sygnałowy w granicach 50...200 kHz. Przy zwiększaniu częstotliwości sygnału wejściowego, dopóki nie przekracza ona $f_s/2 = 100$ kHz, prążek prawidłowo przesuwają się w prawo. Następnie, po przekroczeniu 100 kHz, zaczyna przesuwac się z powrotem w lewo i przy 150 kHz pokrywa się z prążkiem wynikającym z podania na wejście sygnału o częstotliwości 50 kHz. Kilka przykładowych zrzutów z ekranu oscyloskopu przedstawiono na **rys. 10**.

Andrzej Dobrowolski

elka.wel.wat.edu.pl/~adobrowolski/

Literatura

1. Cooley J., Tuckey J., „An algorithm for the machine computation of complex Fourier series”, *Math. Comput.*, vol. 19 (90), 1965
2. Dobrowolski A., „Pod maską SPICEa. Metody i algorytmy analizy układów elektronicznych”, BTC, Warszawa, 2004
3. Lyons R. G., „Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów”, WKŁ, Warszawa, 1999
3. Oppenheim A. V., Schaffer R. W., „Cyfrowe przetwarzanie sygnałów”, WKŁ, Warszawa, 1979
- Szabatin J., „Podstawy teorii sygnałów”, WKŁ, Warszawa, 2000

¹ Wątek ten rozwinie w drugiej części cyklu.

² Okno prostokątne jest wektorem złożonym z N jedynek. Reszta wyrazów jest zerowa.

³ W dziedzinie częstotliwości.

⁴ W literaturze angielskojęzycznej często operuje się jednostką Sa/s, którą należy interpretować dosłownie – jako liczba próbek (*Sample*) pobranych w ciągu sekundy. W rozważanym przypadku 200 kHz oznacza więc 200 kSa/s.



MONTAŻ SMT

- na paście
- na kleju

PROGRAMOWANIE KONSTRUOWANIE

- sterowników na bazie mikrokontrolerów 8-bitowych, 16-bitowych, 32-bitowych

PROJEKTOWANIE

- układów elektronicznych
- obwodów drukowanych



PONADTO OFERUJEMY:

- montaż mieszany: przewlekany, SMT
- lutowanie na fali lutowniczej SOLTEC MIDI z podwójną falą typu SMART WAVE

MCD Electronics Sp. z o.o.
34-300 Żywiec, ul. Leleweła 26
tel/fax: 33 / 861 60 35
e-mail: smt@mcd.com.pl
<http://www.mcd.com.pl>